



Analysis of Instability on the Boundary of the Inhomogeneous Fluids with Varying Densities in the Presence of Incident Shock

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Mehramiz A.^{*1} PhD,
Alijabbari M.² MSc,
Ashouri R.¹ MSc

How to cite this article

Mehramiz A, Alijabbari M, Ashouri R. Analysis of Instability on the Boundary of the Inhomogeneous Fluids with Varying Densities in the Presence of Incident Shock. Modares Mechanical Engineering. 2019;19(3): 577-585.

ABSTRACT

In the present study, the instability in the interface of two semi-infinite fluid layers with applying a shock is studied. To this end, the effect of various parameters such as fluid densities, velocities of fluids, and magnetic field on the instability is explored. By using the magneto-hydrodynamic equations, a general equation is developed for the evolution of perturbation amplitude near the interface. Analytical and graphical results indicate that the time dependent part of perturbation amplitude is the same for both the constant and varying density cases and the instability depends on the growth rate. Remarkably, the growth rate depends on the characteristics of the fluids and magnetic field and can be real or imaginary; hence, the stability condition is determined with respect to this parameter. Furthermore, it is shown that the spatial part of the perturbation amplitude in the constant density case, even with different densities, is symmetric and independent from the layer densities and damps exponentially in the two sides of the interface. On the other hand, it is shown that in the varying density case, the function of the spatial part of the perturbation amplitude depends on the parameters of the environment and the fluid; so the spatial part of the perturbation amplitude in the two fluid damps asymmetrically. Moreover, the results attained in the constant density case match the findings of the previous studies.

Keywords Instability; Perturbation; Magneto-hydrodynamic; Fluid; Varying density

¹Physics Department, Science Faculty, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran

²Electrical Engineering Department, Engineering and Technology Faculty, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran

*Correspondence

Address: Physics Department, Science Faculty, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran.
Postal Code: 3414916818
Phone: +98 (28) 33901255
Fax: +98 (28) 33780040
mehramiz@sci.ikiu.ac.ir

Article History

Received: April 29, 2018
Accepted: November 1, 2018
ePublished: March 01, 2019

CITATION LINKS

[1] The richtmyer-meshkov instability [2] Experimental study of incompressible Richtmyer-Meshkov instability [3] Experimental study of the Richtmyer-Meshkov instability of incompressible fluids [4] Experiments on the three-dimensional incompressible Richtmyer-Meshkov instability [5] Numerical simulation of deflagration-to-detonation transition: The role of shock-flame interactions in turbulent flames [6] A model for the radio brightness of the supernova remnant 1987a [7] Applications of shock-induced mixing to supersonic combustion [8] Progress Toward Ignition And Burn Propagation In Inertial Confinement Fusion [9] Driver gas contamination in a high-enthalpy reflected shock tunnel [10] Experiments on the Richtmyer-Meshkov instability: Wall effects and wave phenomena [11] Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities in multilayer fluids with surface tension [12] Effect of viscosity on Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities [13] Quantum effects on Rayleigh-Taylor instability in magnetized plasma [14] Effects of shear flow and transverse magnetic field on Richtmyer-Meshkov instability [15] Stability criteria of Rayleigh-Taylor modes in magnetized plasmas [16] Pressure change accompanying Alfvén waves in a liquid metal

تحلیل ناپایداری در مرز سیال‌های ناهمگن با چگالی متغیر در حضور شوک فرودی

احمد مهرآمیز* PhD

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه بین المللی امام خمینی^(۹)، قزوین، ایران

مهسا علی‌جباری MSc

گروه مهندسی برق، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بین المللی امام

خمینی^(۹)، قزوین، ایران

رقیه آشوری MSc

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه بین المللی امام خمینی^(۹)، قزوین، ایران

چکیده

در این پژوهش ناپایداری فصل مشترک دو سیال نیمه‌متناهی پس از اعمال شوک زمانی مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور، تاثیر عواملی چون چگالی، سرعت سیال‌ها و میدان مغناطیسی بر ناپایداری مورد توجه قرار می‌گیرد. با استفاده از معادلات مگنتوهیدرودینامیک، رابطه‌ای برای محاسبه دامنه اختلال در نزدیکی فصل مشترک به دست می‌آید. نتایج تحلیلی و نموداری نشان می‌دهند که دامنه اختلال برای هر دو حالت چگالی ثابت و متغیر تابعیت زمانی یکسانی داشته و ناپایداری سیستم به پارامتر نرخ رشد وابسته است. این کمیت تابع مشخصات سیال‌ها بوده و با توجه به چگالی، سرعت و میدان مغناطیسی می‌تواند حقیقی یا موهومی باشد و شرط پایداری با توجه به آن تعیین می‌شود. همچنین نشان داده می‌شود که بخش مکانی دامنه اختلال، در حالت چگالی ثابت مستقل از چگالی دو سیال بوده و در هر دو ناحیه کاملاً متقارن است و به صورت نمایی آفت می‌کند. از سوی دیگر مشخص می‌شود که در حالت چگالی متغیر تابع معرف بخش مکانی دامنه اختلال به پارامترهای محیط و سیال‌ها بستگی دارد، بنابراین بخش مکانی دامنه اختلال در دو سیال به صورت نامتقارن آفت می‌کند. علاوه بر این بررسی نتایج به دست آمده در حالت خاص و حدی (چگالی ثابت) نتایج پژوهش‌های پیشین را تایید می‌کند.

کلیدواژه‌ها: ناپایداری، اختلال، مگنتوهیدرودینامیک، سیال، چگالی متغیر

تاریخ دریافت: ۹۷/۰۲/۰۹

تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۸/۱۰

* نویسنده مسئول: mehramiz@sci.ikiu.ac.ir

۱- مقدمه

موضوع ناپایداری در محیط‌های سیالی از اهمیت زیادی برخوردار است. ناپایداری‌ها انواع مختلف و منابع گوناگونی دارند. یکی از این ناپایداری‌ها در اثر برخورد موج شوکی به فصل مشترک دو سیال ایجاد می‌شود و زمینه مطالعات بسیاری را فراهم کرده است. پژوهش‌ها نشان می‌دهند که در اثر برخورد موج شوکی به فصل مشترک دو سیال، دامنه اختلال موجود در فصل مشترک افزایش می‌یابد و ناپایداری رخ می‌دهد. نخستین بار این ناپایداری به صورت تئوری توسط ریتمایر پیش‌بینی و به صورت تجربی توسط مشکاو تایید شد. به همین دلیل در برخی منابع، آن را ناپایداری ریتمایر-مشکاو نامیده‌اند^[1]. سازوکار پایه برای انتشار اختلال در فصل مشترک، وجود شوک زمانی و گرادیان چگالی موضعی در ناحیه مرزی است. با آمیختگی دو سیال در هم، ناحیه‌ای دارای آشفتگی حاصل می‌شود. اهمیت این موضوع را می‌توان در تحقیقات گسترده انجام شده در محیط‌های آزمایشگاهی و پژوهش‌های اخترفیزیک مشاهده کرد^[2-4]. به بیان دقیق‌تر، پدیده ذکر شده بیشتر در سیستم‌های احتراق، همجوشی و محیط‌های اخترفیزیکی مشاهده می‌شود^[4-6]. به عنوان مثال، برهم‌کنش موج شوکی با یک شعله در بسیاری از سیستم‌های احتراق موثر است و ناپایداری حاصل نقش مهمی در گذار از مرحله احتراق به انفجار دارد^[5]. دیگر کاربرد موثر این ناپایداری در ترکیب‌کردن سوخت و اکسیدکننده در انواع مختلفی از موتورها است^[7]. این ناپایداری در

همجوشی با محبوس‌سازی اینرسی (Inertial Confinement Fusion) باعث مخلوط‌شدن مواد کپسول و سوخت موجود در داخل آن می‌شود که در نهایت تولید انرژی را تحت تاثیر قرار می‌دهد^[8]. در محیط‌های اخترفیزیکی این ناپایداری هنگام عبور موج منتشرشونده ناشی از هسته در حال فروپاشی یک ستاره در حال مرگ، از فصل مشترک هلیوم-هیدروژن رخ می‌دهد^[6]. ناپایداری ذکر شده به عنوان مکانیزم ممکن برای توضیح آلودگی گاز خروجی در تونل‌های شوک بازتابی نیز مطرح می‌شود^[9, 10]. براساس مطالعات پیشین، عواملی از قبیل تنش سطح، چسبندگی و میدان مغناطیسی می‌توانند مانع رشد دامنه ناپایداری شوند^[11].

هدف اصلی در این پژوهش اعمال شوک ورودی بر فصل مشترک دو سیال تراکم‌ناپذیر به منظور درهم‌آمیختن آنها و برآورد تاثیر پارامترهای فیزیکی مثل شار برشی، میدان مغناطیسی و توزیع چگالی دو سیال بر وضعیت پایداری نهایی سیستم بعد از درهم‌آمیختگی است. بررسی پژوهش‌های قبلی مرتبط با این ناپایداری نشان می‌دهد که برای ساده‌سازی تحلیل و معادلات، چگالی محیط‌ها معمولاً ثابت و یکنواخت فرض شده‌اند و حالت کلی‌تر با چگالی‌های متغیر کمتر مورد بررسی قرار گرفته است^[14]. این در حالی که محیط‌های فیزیکی واقعی اکثراً محیط‌هایی با چگالی غیریکنواخت هستند و بررسی دقیق‌تر آنها دارای اهمیت بیشتری است^[13, 15]. در کار حاضر، نخست در حالتی کلی‌تر نسبت به مطالعات پیشین، چگالی محیط متغیر فرض می‌شود و سپس یکی از حالت‌های چگالی متغیر (با تابعیت نمایی) مورد کنکاش قرار می‌گیرد. سیستم مورد مطالعه شامل دو سیال نیمه‌متناهی در نظر گرفته می‌شود که در فصل مشترک آنها یک اختلال اولیه و سینوسی با دامنه و طول موج مشخص وجود دارد. در ادامه، تابعیت زمانی و مکانی دامنه اختلال در نزدیکی فصل مشترک به صورت تحلیلی محاسبه و وابستگی آنها به پارامترهای مختلف فیزیکی بررسی می‌شود. علاوه بر این، در هر بخش برآورد نموداری نیز ارائه و با نتایج کارهای پیشین مقایسه می‌شود.

۲- فرضیات و معادلات پایه

فرض می‌شود سیستم مورد بحث شامل دو سیال نیمه‌متناهی با چگالی جرم‌های $\rho_+(z)$ و $\rho_-(z)$ ، سرعت‌های تعادلی افقی U_- و U_+ و میدان‌های مغناطیسی B_+ و B_- است که توسط یک مرز افقی در $z=0$ از هم جدا می‌شوند و به صورت شماتیک در شکل ۱ نشان داده شده است. سیال‌ها تراکم‌ناپذیر فرض می‌شوند و آثار اتلافی از قبیل تشدید، چسبندگی و تنش سطح نادیده گرفته می‌شوند. همچنین مدل شوک فرودی بر مرز دو سیال را به صورت ضربه‌ای و در راستای عمود بر فصل مشترک در نظر می‌گیریم، یعنی $g = -\Delta u \delta(t) e_z$ که در آن $\delta(t)$ تابع ضربه و Δu تغییرات سرعت سطح است. مقادیر تعادلی کمیت‌های فیزیکی به شکل روابط ۱ تا ۴ در نظر گرفته می‌شوند.

$$u_0 = u_0(z) e_y \quad (۱)$$

$$u_0(z) = U_- + (U_+ - U_-) H(z) \quad (۲)$$

$$\rho_0(z) = \rho_-(z) + (\rho_+(z) - \rho_-(z)) H(z) \quad (۳)$$

$$B_0 = B_0(z) e_y \quad (۴)$$

$$B_0(z) = B_- + (B_+ - B_-) H(z) \quad (۵)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iku_0\right)\rho_1 + u_{1z}\frac{d\rho_0}{dz} = 0 \quad (12)$$

همین کار برای رابطه تحول تکانه نیز انجام می‌شود:

$$\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t} + iku_0\right)u_1 + \rho_0u_{1z}\frac{du_0}{dz} + \nabla\left(p_1 + \frac{B_0 \cdot B_1}{\mu_0}\right) = \frac{1}{\mu_0}[(B_0 \cdot \nabla)B_1 + (B_1 \cdot \nabla)B_0] + \rho_1g$$

در ادامه از ترکیب شکل خطی شده معادلات ۱۲ و ۱۳، معادلات ۱۴ و ۱۵ به دست می‌آیند.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iku_0\right)B_{1y} = ikB_0u_{1y} - u_{1z}\frac{dB_0}{dz} + B_1\frac{du_0}{dz} \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iku_0\right)B_{1z} = ikB_0u_{1z} \quad (15)$$

با کرل گرفتن از دو طرف رابطه ۱۳ و سپس محاسبه مولفه x آن، گرادیان فشار گرمایی و فشار مغناطیسی حذف می‌شوند، در نتیجه رابطه ۱۳ برای ادامه محاسبات به صورت رابطه ۱۶ ساده‌نویسی می‌شود.

$$ik\rho_1\Delta u\delta(t) + ik\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t} + iku_0\right)u_{1z} - \frac{\partial}{\partial z}\left[\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t} + iku_0\right)u_{1y} + \rho_0u_{1z}\frac{du_0}{dz}\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[k^2B_0B_{1z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(ikB_0B_{1y} + B_{1z}\frac{dB_0}{dz}\right)\right] = 0$$

طبق فرضیات مساله، اختلال فصل مشترک به صورت $\xi(y, z, t) = \xi(z, t)e^{iky}$ معرفی می‌شود، لذا مولفه عمودی سرعت شکل رابطه ۱۷ را به خود می‌گیرد.

$$u_{1z} = \frac{d\xi}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + iku_0\right)\xi \quad (17)$$

اینک با استفاده از روابط ۱۴، ۱۵ و ۱۷ چگالی اختلالی جرم و میدان مغناطیسی اختلالی را به دست می‌آوریم و در رابطه ۱۶ جای‌گذاری می‌کنیم که نتیجه، معادله ۱۸ خواهد شد.

$$k^2\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t} + iku_0\right)^2\xi - \frac{\partial}{\partial z}\left[\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t} + iku_0\right)^2\frac{\partial\xi}{\partial z}\right] = -k^2\frac{k^2B_0^2}{\mu_0}\xi + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k^2B_0^2}{\mu_0}\frac{\partial\xi}{\partial z}\right) + k^2\Delta u\frac{d\rho_0}{dz}\xi\delta(t)$$

از حل معادله ۱۸ اختلال دامنه فصل مشترک به دست می‌آید. از طرفی می‌توان تابعیت زمانی و مکانی دامنه اختلال را به شکل جداگانه در نظر گرفت و به صورت رابطه ۱۹ نوشت.

$$\xi(z, t) = \eta(t)f(z)e^{iky} \quad (19)$$

بدین ترتیب برای حل معادله ۱۸ می‌توان از روش جداسازی متغیرها استفاده نمود.

با توجه به گفته‌های پیشین، در راستای y تنها مولفه انتشاری (e^{iky}) را داریم، بنابراین جمله مربوط به آن در نتایج بی‌تاثیر است و در محاسبات لحاظ نمی‌شود.

که در آنها $H(z)$ معرف تابع پله‌ای هویساید (Heaviside step function) است.

محاسبات براساس معادلات مدل مگنتوهیدرودینامیک انجام می‌شود [13]. اولین معادله در این مدل، معادله پیوستگی است که به صورت رابطه ۶ نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (6)$$

معادله تحول تکانه دومین معادله در مدل مگنتوهیدرودینامیک به صورت رابطه ۷ است.

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u \cdot \nabla)u = -\nabla p + J \times B + \rho g \quad (7)$$

سایر معادلات لازم عبارت از قانون‌های آمپر، فاراده و اهم هستند که به صورت روابط ۸ تا ۱۰ نوشته می‌شوند و برای به‌دست‌آوردن دامنه اختلال مورد استفاده قرار می‌گیرند.

$$J = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times B \quad (8)$$

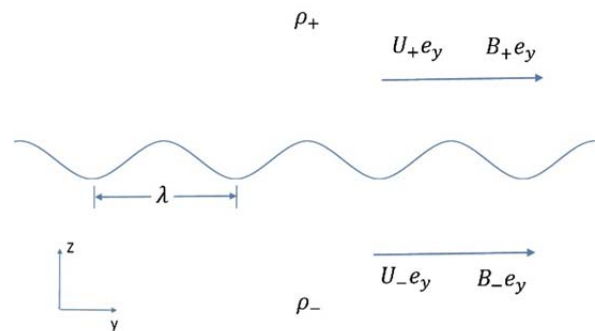
$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E \quad (9)$$

$$E + u \times B = 0 \quad (10)$$

در روابط ۸-۱۰، J و E به ترتیب چگالی جریان الکتریکی و میدان الکتریکی هستند. فرض تراکم‌ناپذیری سیال‌ها نیز با معادله ۱۱ بیان می‌شود.

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (11)$$

با استفاده از فرضیات و معادلات ۱۱-۱۰ می‌توان تحول فصل مشترک دو سیال را بررسی نمود که توسط ضربه در لحظه $t=0$ شتاب‌دار شده است. در ادامه فرض می‌شود همه کمیت‌ها به شکل $\varphi = \varphi_1 + \varphi_0$ باشند که در آن φ_0 نشان‌دهنده بخش تعادلی و φ_1 معرف مقادیر اختلالی کمیت‌ها (و بسیار کوچک‌تر از کمیت‌های تعادلی، $\varphi_0 \gg \varphi_1$) هستند. فرض می‌شود که اختلال اولیه در فصل مشترک سینوسی و دارای دامنه و طول موجی مشخص باشد. بنابراین با توجه به فرضیات مساله، اختلال‌ها در راستای y به شکل $\varphi_1(y, z, t) = \psi(z, t)e^{iky}$ هستند.

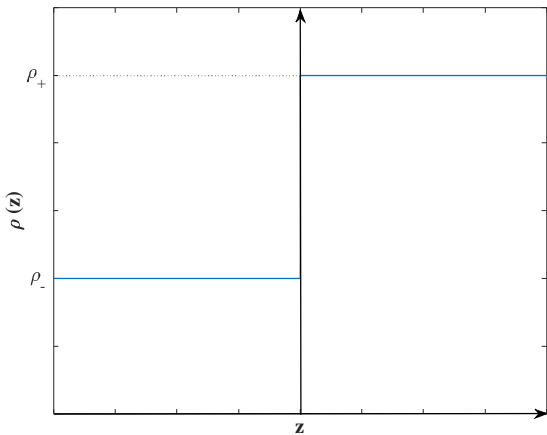


شکل ۱) تصویری شماتیک از شرایط اولیه سیستم دو سیال نیمه‌متناهی با چگالی جرم‌های $\rho_+(z)$ و $\rho_-(z)$ ، سرعت‌های تعادلی افقی U_+ و U_- و میدان‌های مغناطیسی B_+ و B_- در راستای y و فصل مشترک در $z=0$ قرار دارد.

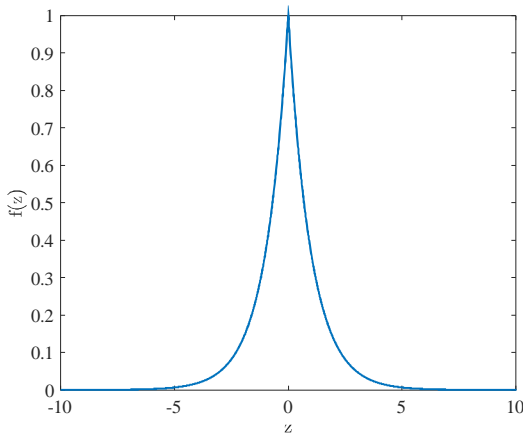
۳- محاسبات تحلیلی

پس از جای‌گذاری مقادیر تعادلی و اختلالی کمیت‌ها در معادله پیوستگی و خطی‌سازی، رابطه ۱۲ حاصل می‌شود.

همان طور که ملاحظه می‌شود، با وجود اختلاف چگالی در دو سیال، تابع معرف بخش مکانی کاملاً متقارن بوده و مستقل از چگالی‌ها است. نمودار ۱، تابع معرف بخش مکانی دامنه اختلال را نشان می‌دهد.



شکل ۲) تابعیت چگالی دو سیال در اطراف مرز



نمودار ۱) تابعیت مکانی دامنه اختلال در اطراف مرز در حالت چگالی ثابت

از سوی دیگر برای به‌دست‌آوردن پاسخ بخش زمانی دامنه اختلال از رابطه ۲۱ در اطراف مرز انتگرال گرفته می‌شود که در نهایت به رابطه ۲۷ می‌رسیم.

(۲۷)

$$\frac{d^2\eta(t)}{dt^2} + 2ik(\alpha_+U_+ + \alpha_-U_-)\frac{d\eta(t)}{dt} = k^2(\alpha_+U_+^2 + \alpha_-U_-^2 - v_a^2)\eta(t) + k\Delta u A_T \eta(t)\delta(t)$$

در به‌دست‌آوردن این معادله از رابطه ۲۶ نیز استفاده شده است که در آن A_T عدد آتوود، v_a سرعت آلفون و α_{\pm} با روابط ۲۸ تا ۳۰ معرفی شده‌اند.

$$A_T = \alpha_+ - \alpha_- \quad (28)$$

$$v_a = \sqrt{(B_+^2 + B_-^2)/[\mu_0(\rho_+ + \rho_-)]} \quad (29)$$

$$\alpha_{\pm} = \rho_{\pm}/(\rho_- + \rho_+) \quad (30)$$

با حل معادله ۲۷ و اعمال شرط اولیه، بخش زمانی دامنه اختلال به‌صورت رابطه ۳۱ به دست می‌آید.

از آنجایی که کمیت‌های تعادلی u_0 و B_0 در طرفین مرز ثابت هستند (و تنها در فصل مشترک $z=0$ تغییرات دارند)، لذا مشتق این کمیت‌ها در رابطه ۱۸ صفر خواهد شد ($\frac{du_0}{dz} = 0$ و $\frac{dB_0}{dz} = 0$). بنابراین با در نظر گرفتن این موضوع و جای‌گذاری رابطه ۱۹ در رابطه ۱۸ در نهایت به معادله ۲۰ می‌رسیم.

(۲۰)

$$\frac{1}{\eta(t)}\left(\frac{d}{dt} + iku_0\right)^2 \eta(t) \left[\rho_0 k^2 + \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d}{dz} - \rho_0 \frac{d^2}{dz^2} \right] f(z) = \frac{k^2 B_0^2}{\mu_0} \left(-k^2 + \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\mu_0}{B_0^2} \frac{d\rho_0}{dz} \Delta u \delta(t) \right) f(z)$$

جمله شامل $\delta(t)$ تنها در شرط اولیه تاثیر می‌گذارد و باعث جهش قسمت زمانی در لحظه صفر می‌شود. بنابراین برای حل قسمت مکانی معادله ۲۰ می‌توان جمله شامل $\delta(t)$ را حذف و معادله را به‌صورت معادله ۲۱ جداسازی نمود.

$$\frac{1}{a\eta(t)}\left(\frac{d}{dt} + iku_0\right)^2 \eta(t) = \frac{(-k^2 + \frac{d^2}{dz^2})f(z)}{\left(\rho_0 k^2 - \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d}{dz} - \rho_0 \frac{d^2}{dz^2}\right)f(z)} \quad (21)$$

که در آن کمیت a با رابطه ۲۲ معرفی شده است.

$$a = \frac{k^2 B_0^2}{\mu_0} \quad (22)$$

حال برای حل معادله دیفرانسیل ۲۱ باید ابتدا نحوه توزیع چگالی را بر حسب مکان مشخص کنیم. ما در این پژوهش مساله را برای دو حالت چگالی ثابت (که در پژوهش‌های پیشین مورد بحث قرار گرفته است) و در ادامه برای حالت چگالی غیریکنواخت مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۳-۱- حالت چگالی ثابت

برای بررسی این حالت فرض می‌شود که دو محیط دارای چگالی‌های متفاوت، اما هر یک ثابت، مطابق با شکل ۲ و به‌صورت رابطه ۲۳ هستند:

$$\rho_0(z) = \begin{cases} \rho_+ & z > 0 \\ \rho_- & z < 0 \end{cases} \quad (23)$$

رابطه چگالی ۲۳ را در معادله ۲۱ جای‌گذاری و به‌صورت معادله ۲۴ ساده‌نویسی می‌کنیم.

$$\frac{\rho_{\pm}}{a\eta(t)}\left(\frac{d}{dt} + iku_0\right)^2 \eta(t) = \frac{-k^2 B_0^2 \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) f(z)}{\mu_0 \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) f(z)} \quad (24)$$

از رابطه ۲۴ معلوم می‌شود که قسمت مکانی دامنه اختلال از حل معادله دیفرانسیل ۲۵ به دست می‌آید.

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) f(z) = 0 \quad (25)$$

با حل این معادله و اعمال شرایط مرزی، بخش وابسته به مکان دامنه اختلال، شکل رابطه ۲۶ را به خود می‌گیرد.

$$f(z) = \begin{cases} e^{-kz} & z > 0 \\ e^{+kz} & z < 0 \end{cases} \quad (26)$$

$$C = \frac{1}{a\eta(t)} \left(\frac{d}{dt} + iku_0 \right)^2 \eta(t) \Big|_{t=0} = \quad (38)$$

$$\frac{\gamma^2 - (\omega - ku_0)^2 - 2ikA_T \Delta u (\omega - ku_0)}{\gamma}$$

رابطه ۳۸ را می‌توان به صورت رابطه ۳۹ بازنویسی کرد.

$$C_{\pm} = \frac{1}{a\eta(t)} \left(\frac{d}{dt} + iku_{\pm} \right)^2 \eta(t) \Big|_{t=0} = \quad (39)$$

$$\frac{\gamma^2 - (\omega - ku_{\pm})^2 - 2ikA_T \Delta u (\omega - ku_{\pm})}{\gamma}$$

از سوی دیگر، طبق رابطه ۳۷ می‌توان نوشت:

$$(C\rho_0(z) + 1) \frac{d^2 f(z)}{dz^2} + C \frac{d\rho_0(z)}{dz} \frac{df(z)}{dz} \quad (40)$$

$$-k^2 (C\rho_0(z) + 1) f(z) = 0$$

رابطه ۴۰ دارای شکل کلی است و در آن چگالی می‌تواند هر تابع پیوسته‌ای از مکان باشد. در ادامه، حالت خاصی از چگالی متغیر (با تابعیت نمایی) در نظر گرفته می‌شود و پاسخ آن به شیوه تحلیلی به دست می‌آید. تغییرات چگالی مورد بحث به صورت شکل ۳ است و با رابطه ۴۱ نشان داده می‌شود.

$$\rho_0(z) = \begin{cases} \rho_+ e^{-\beta_+ z} & z > 0 \\ \rho_- e^{+\beta_- z} & z < 0 \end{cases} \quad (41)$$

که در آن β کمیتی ثابت و مثبت است. با جای‌گذاری عبارت مربوط به چگالی (رابطه ۴۱) در معادله دیفرانسیل ۴۰، رابطه ۴۲ حاصل می‌شود.

$$(C_{\pm} \rho_{\pm} e^{\mp \beta_{\pm} z} + 1) \frac{d^2 f(z)}{dz^2} \mp C_{\pm} \rho_{\pm} \beta_{\pm} \frac{df(z)}{dz}$$

$$-k^2 (C_{\pm} \rho_{\pm} e^{\mp \beta_{\pm} z} + 1) f(z) = 0$$

جواب این معادله به شکل رابطه ۴۳ به دست می‌آید.

$$f(z) = \begin{cases} C_1 \text{ hypergeom} \left(\left[\frac{1-s_+ - \sqrt{1+s_+^2}}{2}, \frac{1-s_+ + \sqrt{1+s_+^2}}{2} \right], [1-s_+], -C_+ \rho_+ e^{-\beta_+ z} \right) e^{-kz} & z > 0 \\ C_2 \text{ hypergeom} \left(\left[\frac{1+s_- - \sqrt{1+s_-^2}}{2}, \frac{1+s_- + \sqrt{1+s_-^2}}{2} \right], [1+s_-], -C_- \rho_- e^{+\beta_- z} \right) e^{+kz} & z < 0 \end{cases}$$

که در آن s_{\pm} به صورت رابطه ۴۴ تعریف شده است.

$$s_{\pm} = \frac{2k}{\beta_{\pm}} \quad (44)$$

$$\eta(t) = e^{-i\omega t} \left\{ \left[\cosh(\gamma t) + \frac{i\omega + kA_T \Delta u}{\gamma} \sinh(\gamma t) \right] \eta(0) + \frac{\dot{\eta}(0)}{\gamma} \sinh(\gamma t) \right\}$$

در این رابطه ω و γ (نرخ رشد ناپایداری)، شکل رابطه ۳۲ و ۳۳ را دارند.

$$\omega = k(\alpha_+ U_+ + \alpha_- U_-) \quad (32)$$

$$\gamma = k \left[\frac{1}{4} (1 - A_T^2) \delta_u^2 - v_a^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (33)$$

در معادله ۳۱، $\eta(0)$ نشانگر دامنه اختلال اولیه و $\dot{\eta}(0)$ مشتق دامنه اختلال در لحظه صفر یعنی $\eta(t)|_{t=0} = \eta(0)$ و $\left. \frac{d\eta(t)}{dt} \right|_{t=0} = \dot{\eta}(0)$ است.

در رابطه نرخ رشد کمیت δ_u نیز شار برشی نسبی دو لایه است که به صورت رابطه ۳۴ تعریف می‌شود.

$$\delta_u = |U_+ - U_-| \quad (34)$$

براساس شرایط فیزیکی مساله، $\eta(t)$ باید از نوع حاصلضرب $e^{-i\omega t}$ در یک تابع حقیقی از زمان با نرخ رشد γ باشد، لذا بخشی از $\eta(t)$ که شامل نرخ رشد است باید حقیقی باشد. با اعمال این شرط می‌توان به رابطه ۳۵ رسید.

$$\dot{\eta}(0) = -i\omega \eta(0) \quad (35)$$

از جای‌گذاری رابطه ۳۵ در معادله ۳۱، دامنه اختلال به صورت رابطه ۳۶ ساده می‌شود.

$$\eta(t) = e^{-i\omega t} \left[\cosh(\gamma t) + \frac{kA_T \Delta u}{\gamma} \sinh(\gamma t) \right] \eta(0) \quad (36)$$

معادله ۳۶ بخش زمانی دامنه اختلال در حالت چگالی ثابت را نشان می‌دهد.

۳-۲- حالت چگالی متغیر

در حالتی که چگالی، متغیر و اطراف مرز تغییر ناگهانی در چگالی وجود نداشته باشد (پیوسته باشد)، می‌توان نشان داد که تابعیت زمانی دامنه اختلال همانند حالت قبل به دست می‌آید. در حالت جدید چگالی به صورت تابعی از z در نظر گرفته می‌شود که در حالت حدی ($z \rightarrow 0$) مقادیر ثابت ρ_+ و ρ_- را به خود خواهد گرفت. از آنجایی که طرف اول و دوم رابطه ۲۱ مستقل از هم هستند، لذا می‌توان دو طرف رابطه را ثابت در نظر گرفت. بنابراین برای ادامه محاسبات در این قسمت، معادله ۲۱ را به صورت رابطه ۳۷ بازنویسی می‌کنیم.

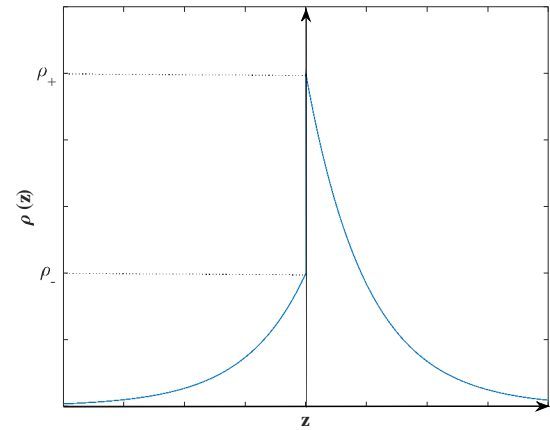
$$\frac{(-k^2 + \frac{d^2}{dz^2}) f(z)}{\left(\rho_0 k^2 - \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d}{dz} - \rho_0 \frac{d^2}{dz^2} \right) f(z)} = \quad (37)$$

$$\frac{1}{a\eta(t)} \left(\frac{d}{dt} + iku_0 \right)^2 \eta(t) = C$$

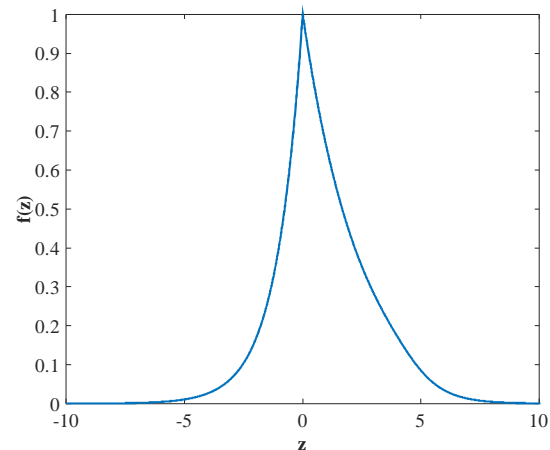
با توجه به ثابت بودن مقدار C می‌توان با جای‌گذاری زمان دلخواه در تابع زمانی (به عنوان مثال $t \rightarrow 0^+$)، مقدار ثابت C را به صورت معادله ۳۸ به دست آورد.

رابطه ۴۳ نشان می‌دهد که بخش وابسته به مکان دامنه اختلال به صورت حاصلضرب دو تابع فوق هندسی (Hypergeometric function) و نمایی است. در این حالت با رسم بخش مکانی نرمالیزه شده، نمودار ۲ حاصل می‌شود.

معادله ۴۳ و نمودار ۲ نشان می‌دهند که در حالت چگالی‌های متغیر بخش مکانی در دو محیط، متفاوت و تابعی از پارامترهای محیط و سیال‌ها است.



شکل ۳) تابع چگالی دو سیال در اطراف مرز



نمودار ۲) تابعیت مکانی دامنه اختلال در اطراف مرز در حالت چگالی نمایی

$$\gamma^* = k \left[v_a^2 - \frac{1}{4}(1 - A_T^2)\delta_u^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (47)$$

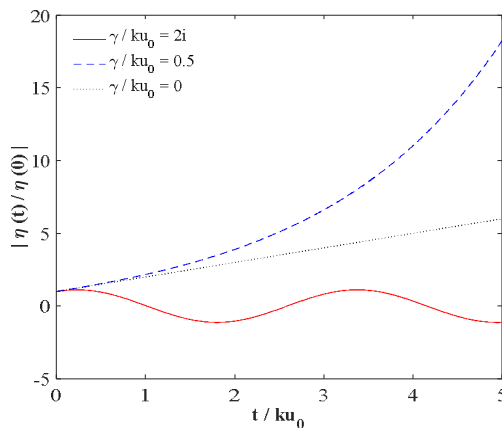
تحت شرایطی که نرخ رشد حقیقی باشد، اختلال به صورت نمایی و با نرخ γ رشد می‌کند. رابطه ۳۶ نشان می‌دهد که اختلال فصل مشترک با γ بزرگ‌تر، سریع‌تر رشد می‌کند. در غیر این صورت با موهومی شدن نرخ رشد، دامنه اختلال در فصل مشترک به صورت نوسانی در زمان تغییر خواهد کرد، سیستم به حالت پایدار می‌رسد و بخش زمانی، شکل رابطه ۴۸ را به خود می‌گیرد.

$$\eta(t) = e^{-i\omega t} \left[\cos(\gamma^* t) + \frac{kA_T \Delta u}{\gamma^*} \sin(\gamma^* t) \right] \eta(0) \quad (48)$$

برای حالتی که نرخ رشد به سمت صفر میل می‌کند، می‌توان نشان داد که رابطه ۳۶ شکل تقریبی رابطه ۴۹ را خواهد داشت.

$$\eta(t) = e^{-i\omega t} [1 + kA_T \Delta u t] \eta(0) \quad (49)$$

این نتایج به وضوح در نمودار ۳ نشان داده شده است.



نمودار ۳) تغییرات بخش زمانی دامنه اختلال بر حسب زمان به ازای مقادیر مختلف نرخ رشد

همان طور که از روابط ۲۶ و ۴۳ پیداست، بخش مکانی دامنه اختلال با فاصله گرفتن از مرز در هر دو حالت چگالی ثابت و نمایی، کاهشی است. اما تابعیت زمانی اختلال، بسته به پارامترهای فیزیکی مساله از جمله شار برشی و میدان مغناطیسی، طبق معادلات ۳۶ و ۴۸ می‌تواند حالت افزایشی یا نوسانی داشته باشد. در حالتی که نرخ رشد موهومی است، دامنه اختلال در فصل مشترک با زمان به صورت نوسانی تغییر می‌کند. بنابراین سیستم کاملاً پایدار خواهد بود و تغییر پارامترهای مساله تنها فرکانس نوسانات زمانی را تحت تاثیر قرار می‌دهد. در حالتی که نرخ رشد حقیقی است، تابعیت زمانی دامنه اختلال در فصل مشترک به صورت نمایی افزایش می‌یابد. در این حالت تغییر پارامترهای مساله، پایداری سیستم را تحت تاثیر قرار می‌دهد و باید سعی بر این باشد که نرخ رشد کاهش یابد تا سیستم به پایداری برسد. بدین منظور، وابستگی نرخ رشد به کمیت‌های میدان مغناطیسی و شار برشی در ادامه بررسی خواهد شد. با توجه به شرط تعریف شده در رابطه ۴۵، در حالتی که میدان در دو سیال برابر باشد، میدان مغناطیسی در آستانه پایداری به صورت رابطه ۵۰ به دست می‌آید.

$$B_0^{th} = \sqrt{\frac{\mu_0(\rho_+ + \rho_-)(1 - A_T^2)}{8}} \delta_u \quad (50)$$

۴- بحث و بررسی

در این بخش جواب‌هایی که برای دامنه اختلال به صورت تحلیلی به دست آمدند، بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرند و وابستگی دامنه اختلال به پارامترهای مهمی چون شار برشی، چگالی سیال‌ها و میدان مغناطیسی بررسی و برآورد می‌شوند.

۴-۱- تحلیل بخش زمانی دامنه اختلال

همان طور که از رابطه ۳۳ مشاهده می‌شود، پایداری زمانی در صورتی وجود دارد که وابستگی دامنه اختلال با زمان به صورت نوسانی باشد، به عبارت دیگر شرط رابطه ۴۵ برقرار باشد.

$$\frac{1}{4}(1 - A_T^2)\delta_u^2 - v_a^2 < 0 \quad (45)$$

در این صورت نرخ رشد موهومی می‌شود و رابطه ۴۶ و ۴۷ را به صورت زیر داریم:

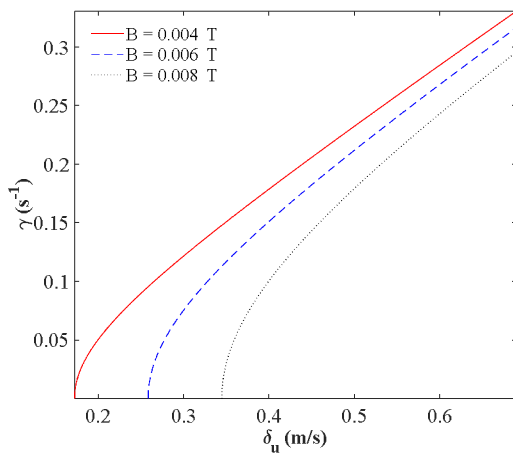
$$\gamma = i\gamma^* \quad (46)$$

حال تغییرات نرخ رشد بر حسب کمیت شار برشی بررسی می‌شود. شار برشی برای آستانه پایداری از رابطه ۴۵ به صورت رابطه ۵۱ به دست می‌آید.

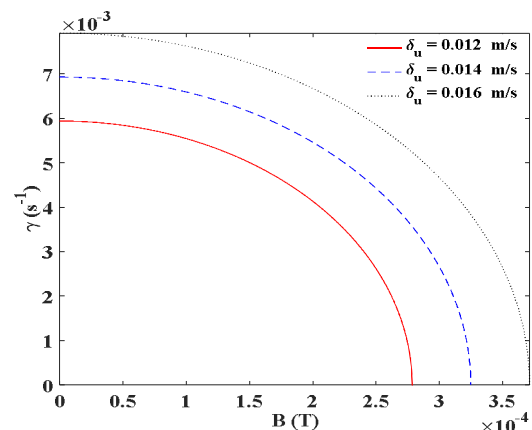
$$\delta_u^{th} = \frac{2v_a}{\sqrt{1 - A_T^2}} \quad (51)$$

به‌ازای مقادیری از شار برشی که $\delta_u \geq \delta_u^{th}$ است، نرخ رشد، حقیقی و ناپایداری ایجاد می‌شود. در غیر این صورت شرط پایداری برقرار می‌شود. با استفاده از روابط ۳۳ و ۴۷، نمودار تغییرات γ و γ^* با تغییر شار برشی به‌ازای مقادیر مختلف میدان مغناطیسی در نمودارهای ۶ و ۷ نشان داده شده است. با توجه به نمودار ۶ مشاهده می‌شود که در حالت ناپایدار با افزایش شار برشی، نرخ رشد افزایش می‌یابد و ناپایداری سیستم تشدید خواهد شد. دلیل این رفتار این بوده که شار برشی معیاری از تحرک دو سیال نسبت به یکدیگر بوده و بدیهی است که هر چه تحرک دو سیال نسبت به هم کمتر شود، سیستم به حالت پایدارتر نزدیک می‌شود. بنابراین وجود شار برشی برعکس میدان مغناطیسی مانعی برای پایداری سیستم خواهد بود. در حالت پایدار، همان طور که از نمودار ۷ مشخص است، با افزایش شار برشی، γ^* کاهش می‌یابد و در نتیجه آن تنها فرکانس تغییرات در زمان کمی کاهش می‌یابد، ولی همچنان سیستم در حالت پایدار قرار دارد.

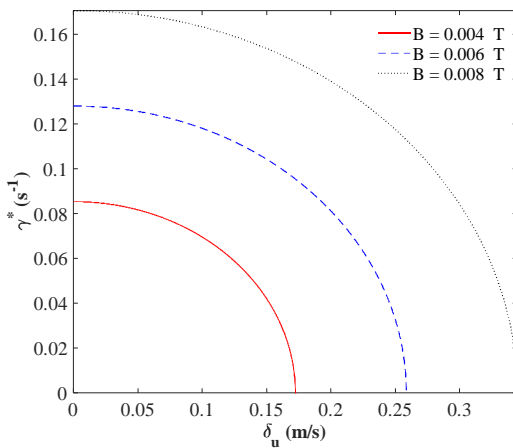
بنابراین اگر $B_0 \geq B_0^{th}$ باشد، نرخ رشد، موهومی و شرط پایداری برقرار می‌شود، ولی به‌ازای $B_0 \leq B_0^{th}$ نرخ رشد، حقیقی و سیستم ناپایدار می‌شود. در نمودارهای ۴ و ۵، با استفاده از روابط ۳۳ و ۴۷، نمودار تغییرات γ و γ^* با تغییر میدان مغناطیسی رسم شده است. همان طور که از نمودار ۴ پیداست، در حالت ناپایدار با افزایش میدان مغناطیسی، نرخ رشد کاهش می‌یابد و بنابراین سیستم به پایداری نزدیک‌تر می‌شود. دلیل کاهش نرخ رشد این است که در اثر وجود میدان مغناطیسی یک نیروی لورنتس بازگرداننده ایجاد می‌شود و در نتیجه، موج آلفن به وجود می‌آید. موج آلفن یکی از انواع امواج هیدرودینامیک است که در اثر نوسان ذرات ناشی از نیروی بازگرداننده که منشا آن تنش مغناطیسی است، ایجاد می‌شود^[16]. سرعت موج آلفن ایجاد شده برابر با v_a بوده که قبلاً آن را در رابطه ۲۹ معرفی کردیم. از رابطه ۲۹ پیداست که این کمیت با میدان مغناطیسی رابطه مستقیمی دارد. با افزایش میدان مغناطیسی، سرعت موج آلفن به وجود آمده در سیستم زیادتر می‌شود و در اثر نیروی بازگرداننده ایجاد شده، سیستم به تعادل می‌رسد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که وجود میدان مغناطیسی می‌تواند عاملی برای مهار ناپایداری سیستم باشد. در حالت پایدار، تغییر میدان مغناطیسی و شار برشی تنها فرکانس نوسانات در زمان را تغییر می‌دهد و اختلالی در پایداری سیستم ایجاد نمی‌کند. با توجه به نمودار ۵، با افزایش میدان مغناطیسی γ^* افزایش می‌یابد و در نتیجه آن تنها فرکانس زمانی تغییرات افزایش می‌یابد، ولی همچنان سیستم در حالت پایدار قرار دارد.



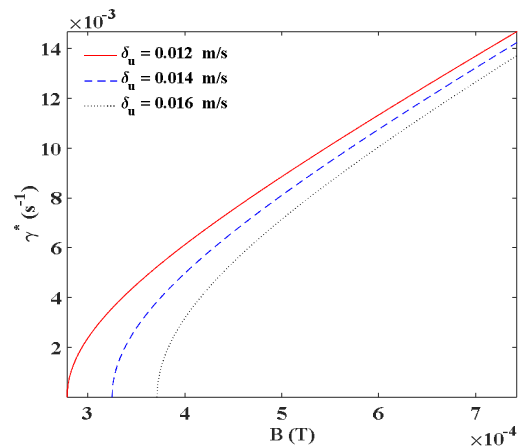
نمودار ۶) نمودار تغییرات γ بر حسب شار برشی به‌ازای مقادیر مختلف میدان مغناطیسی



نمودار ۸) نمودار تغییرات γ بر حسب میدان مغناطیسی به‌ازای مقادیر مختلف شار برشی



نمودار ۷) نمودار تغییرات γ^* بر حسب شار برشی به‌ازای مقادیر مختلف میدان مغناطیسی



نمودار ۵) نمودار تغییرات γ^* بر حسب میدان مغناطیسی به‌ازای مقادیر مختلف شار برشی

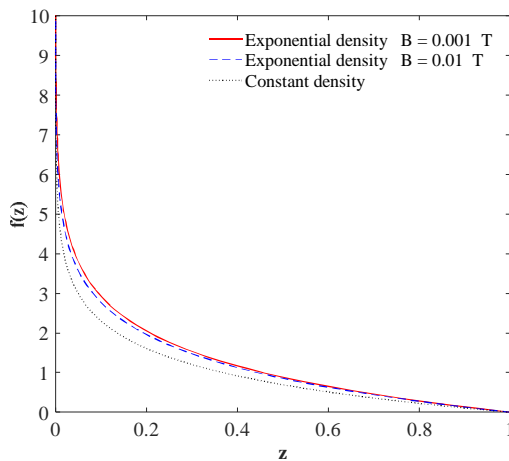
۴-۲- تحلیل بخش مکانی دامنه اختلال

در این قسمت با استفاده از روابط ۲۶ و ۴۳، تغییرات بخش مکانی دامنه اختلال نسبت به کمیت‌های مهم شار برشی، چگالی سیال‌ها و میدان مغناطیسی رسم و مقایسه می‌شود.

نمودار ۸ نشان می‌دهد که با کاهش ضریب β ، دامنه اختلال کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر اگر β به سمت صفر میل کند، نتایج به یافته‌های پژوهش‌های پیشین نزدیک می‌شود که چگالی در آنها ثابت فرض شده بود [14].

از سوی دیگر براساس نمودار ۹، با افزایش شار برشی، دامنه اختلال افزایش می‌یابد و از نتایج حالت چگالی ثابت دورتر می‌شود. مشابه این تاثیر در بخش زمانی دامنه اختلال نیز مشاهده شد. همان طور که قبلاً نیز گفتیم، این کمیت در حالتی که چگالی ثابت بود، هیچگونه تاثیری در بخش مکانی دامنه اختلال نداشت.

طبق نمودار ۱۰، با افزایش میدان مغناطیسی B ، دامنه اختلال کاهش می‌یابد و در نتیجه به حالت تعادل نزدیک می‌شود که مشابه این تاثیر در بخش زمانی دامنه اختلال نیز مشاهده شد. همچنین ذکر این نکته مهم است که در هر حالت، دامنه اختلال از حالت چگالی ثابت که میدان مغناطیسی تاثیری در قسمت مکانی دامنه اختلال نداشت، بیشتر است.

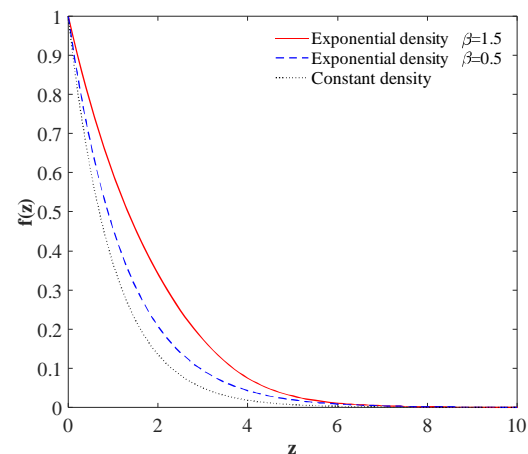


نمودار ۱۰) تابعیت مکانی دامنه اختلال در اطراف مرز در حالت چگالی نمایی با تغییر میدان مغناطیسی اعمالی

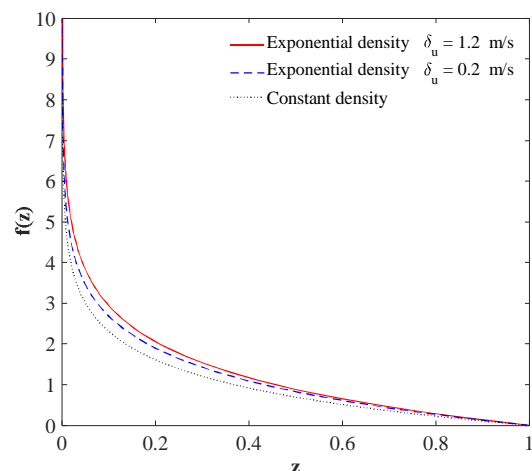
۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، ناپایداری در فصل مشترک دو سیال ناشی از شوک زمانی مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور، محیط شامل دو سیال نیمه‌متناهی با چگالی‌های متغیر در نظر گرفته شد. با استفاده از معادلات هیدرودینامیک، دامنه اختلال برای حالت چگالی نمایی به صورت تحلیلی به دست آمد. نشان داده شد که بخش زمانی دامنه اختلال برای هر دو حالت چگالی ثابت و متغیر یکسان است و وابستگی آن به نرخ رشد مورد بحث قرار گرفت. طبق محاسبات، پایداری دامنه اختلال در زمان به مقدار نرخ رشد، حقیقی و موهومی بودن آن بستگی داشت. در ادامه، وابستگی نرخ رشد به پارامترهای مهمی چون میدان مغناطیسی و شار برشی بحث شد. ملاحظه شد که برای برقراری شرط پایداری باید میدان مغناطیسی از یک مقدار آستانه (B_0^{th}) بیشتر باشد که این مقدار تابع پارامترهای مربوط به سیال‌ها از جمله چگالی و شار برشی است. همچنین در میدان مغناطیسی ثابت، شار برشی باید از یک مقدار آستانه (δ_u^{th}) که تابع میدان مغناطیسی و چگالی است، کمتر باشد. در واقع وجود میدان مغناطیسی عاملی برای پایدار کردن سیستم است و وجود شار برشی، ناپایداری سیستم را تشدید می‌کند. لذا شاهد رقابتی بین شار برشی و میدان مغناطیسی هستیم. اگر میدان مغناطیسی به اندازه کافی بزرگ باشد، می‌تواند بر تاثیر ناشی از شار برشی غلبه و ناپایداری را متوقف کند.

در ادامه بخش مکانی دامنه اختلال در اطراف فصل مشترک محاسبه و مشاهده شد که این تابع برخلاف حالت چگالی ثابت به پارامترهای مربوط به سیال‌ها و محیط وابسته بوده و شکل تابعی آن در دو محیط متفاوت است. در ادامه وابستگی آن به چند پارامتر مهم از جمله چگالی، میدان مغناطیسی و شار برشی مورد بحث قرار گرفت. مشاهده شد که با افزایش میدان مغناطیسی قسمت مکانی، دامنه اختلال کاهش و با افزایش شار برشی، دامنه اختلال نیز مشاهده شد. اما این تغییرات براساس تحلیل نموداری چندان محسوس نیست. در نهایت با رسم نمودار دامنه اختلال بر حسب مکان مشاهده شد که با کاهش ضریب β ، بخش مکانی دامنه اختلال نیز به نتایج پژوهش‌های مرتبط با حالت چگالی ثابت نزدیک می‌شود. این نتیجه محاسبات انجام شده و تعمیم در نظر گرفته شده در مقاله را تایید می‌کند.



نمودار ۸) تابعیت مکانی دامنه اختلال در اطراف مرز در حالت چگالی نمایی با تغییر بخش نمایی چگالی



نمودار ۹) تابعیت مکانی دامنه اختلال در اطراف مرز در حالت چگالی نمایی با تغییر شار برشی

- induced mixing to supersonic combustion. AIAA Journal. 1993;31(5):854-862.
- 8- Lindl JD, McCrory RL, Campbell EM. Progress toward ignition and burn propagation in inertial confinement fusion. Physics Today. 1992;45(9):32-40.
- 9- Stalker RJ, Crane KCA. Driver gas contamination in a high-enthalpy reflected shock tunnel. AIAA Journal. 1978;16(3):277-279.
- 10- Brouillette M, Bonazza R. Experiments on the Richtmyer-Meshkov instability: Wall effects and wave phenomena. Physics of Fluids. 1999;11(5):1127-1142.
- 11- Mikaelian KO. Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities in multilayer fluids with surface tension. Physical Review A. 1990;42(12):7211-7225.
- 12- Mikaelian KO. Effect of viscosity on Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities. Physical Review E. 1993;47(1):375-383.
- 13- Cao J, Ren H, Wu Z, Chu PK. Quantum effects on Rayleigh-Taylor instability in magnetized plasma. Physics of Plasmas. 2008;15(1):012110.
- 14- Cao J, Wu Z, Ren H, Li D. Effects of shear flow and transverse magnetic field on Richtmyer-Meshkov instability. Physics of Plasmas. 2008;15(4):042102.
- 15- Al-Khateeb AM, Laham NM. Stability criteria of Rayleigh-Taylor modes in magnetized plasmas. Contributions to Plasma Physics. 2003;43(1):25-32.
- 16- Iwai K, Shinya K, Takashi K, Moreau R. Pressure change accompanying Alfvén waves in a liquid metal. Magnetohydrodynamics. 2003;39(3):245-250.

تشکر و قدردانی: از همکاران حوزه معاونت پژوهشی دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره) سپاسگزاری می‌شود.

تأییدیه اخلاقی: موردی از سوی نویسندگان بیان نشده است.

تعارض منافع: موردی از سوی نویسندگان بیان نشده است.

سهم نویسندگان: موردی از سوی نویسندگان بیان نشده است.

منابع مالی: موردی از سوی نویسندگان بیان نشده است.

منابع

- 1- Brouillette M. The richtmyer-meshkov instability. Annual Review of Fluid Mechanics. 2002;34(1):445-468.
- 2- Jacobs JW, Sheeley JM. Experimental study of incompressible Richtmyer-Meshkov instability. Physics of Fluids. 1996;8(2):405-415.
- 3- Niederhaus CE, Jacobs JW. Experimental study of the Richtmyer-Meshkov instability of incompressible fluids. Journal of Fluid Mechanics. 2003;485(12):243-277.
- 4- Chapman PR, Jacobs JW. Experiments on the three-dimensional incompressible Richtmyer-Meshkov instability. Physics of Fluids. 2006;18(7):074101.
- 5- Khokhlov AM, Oran ES, Thomas GO. Numerical simulation of deflagration-to-detonation transition: The role of shock-flame interactions in turbulent flames. Combustion and Flame. 1999;117(1-2):323-339.
- 6- Chevalier RA. A model for the radio brightness of the supernova remnant 1987a. Nature. 1992;355(6361):617-618.
- 7- Yang J, Kubota T, Zukoski EE. Applications of shock-

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iku_0\right)\rho_1 + u_{1z}\frac{d\rho_0}{dz} = 0 \quad (12)$$

همین کار برای رابطه تحول تکانه نیز انجام می‌شود:

$$\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t} + iku_0\right)u_1 + \rho_0u_{1z}\frac{du_0}{dz} + \nabla\left(p_1 + \frac{B_0 \cdot B_1}{\mu_0}\right) = \frac{1}{\mu_0}[(B_0 \cdot \nabla)B_1 + (B_1 \cdot \nabla)B_0] + \rho_1g \quad (13)$$

در ادامه از ترکیب شکل خطی شده معادلات ۱۲ و ۱۳، معادلات ۱۴ و ۱۵ به دست می‌آیند.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iku_0\right)B_{1y} = ikB_0u_{1y} - u_{1z}\frac{dB_0}{dz} + B_1\frac{du_0}{dz} \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iku_0\right)B_{1z} = ikB_0u_{1z} \quad (15)$$

با کرل گرفتن از دو طرف رابطه ۱۳ و سپس محاسبه مولفه x آن، گرادیان فشار گرمایی و فشار مغناطیسی حذف می‌شوند، در نتیجه رابطه ۱۳ برای ادامه محاسبات به صورت رابطه ۱۶ ساده‌نویسی می‌شود.

$$ik\rho_1\Delta u\delta(t) + ik\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t} + iku_0\right)u_{1z} - \frac{\partial}{\partial z}\left[\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t} + iku_0\right)u_{1y} + \rho_0u_{1z}\frac{du_0}{dz}\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[k^2B_0B_{1z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(ikB_0B_{1y} + B_{1z}\frac{dB_0}{dz}\right)\right] = 0 \quad (16)$$

طبق فرضیات مساله، اختلال فصل مشترک به صورت $\xi(y, z, t) = \xi(z, t)e^{iky}$ معرفی می‌شود، لذا مولفه عمودی سرعت شکل رابطه ۱۷ را به خود می‌گیرد.

$$u_{1z} = \frac{d\xi}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + iku_0\right)\xi \quad (17)$$

اینک با استفاده از روابط ۱۴، ۱۵ و ۱۷ چگالی اختلالی جرم و میدان مغناطیسی اختلالی را به دست می‌آوریم و در رابطه ۱۶ جای‌گذاری می‌کنیم که نتیجه، معادله ۱۸ خواهد شد.

$$k^2\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t} + iku_0\right)^2\xi - \frac{\partial}{\partial z}\left[\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t} + iku_0\right)^2\frac{\partial\xi}{\partial z}\right] = -k^2\frac{k^2B_0^2}{\mu_0}\xi + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k^2B_0^2}{\mu_0}\frac{\partial\xi}{\partial z}\right) + k^2\Delta u\frac{d\rho_0}{dz}\xi\delta(t) \quad (18)$$

از حل معادله ۱۸ اختلال دامنه فصل مشترک به دست می‌آید. از طرفی می‌توان تابعیت زمانی و مکانی دامنه اختلال را به شکل جداگانه در نظر گرفت و به صورت رابطه ۱۹ نوشت.

$$\xi(z, t) = \eta(t)f(z)e^{iky} \quad (19)$$

بدین ترتیب برای حل معادله ۱۸ می‌توان از روش جداسازی متغیرها استفاده نمود.

با توجه به گفته‌های پیشین، در راستای y تنها مولفه انتشاری (e^{iky}) را داریم، بنابراین جمله مربوط به آن در نتایج بی‌تاثیر است و در محاسبات لحاظ نمی‌شود.

که در آنها $H(z)$ معرف تابع پله‌ای هویساید (Heaviside step function) است.

محاسبات براساس معادلات مدل مگنتوهیدرودینامیک انجام می‌شود [13]. اولین معادله در این مدل، معادله پیوستگی است که به صورت رابطه ۶ نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (6)$$

معادله تحول تکانه دومین معادله در مدل مگنتوهیدرودینامیک به صورت رابطه ۷ است.

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u \cdot \nabla)u = -\nabla p + J \times B + \rho g \quad (7)$$

سایر معادلات لازم عبارت از قانون‌های آمپر، فاراده و اهم هستند که به صورت روابط ۸ تا ۱۰ نوشته می‌شوند و برای به‌دست‌آوردن دامنه اختلال مورد استفاده قرار می‌گیرند.

$$J = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times B \quad (8)$$

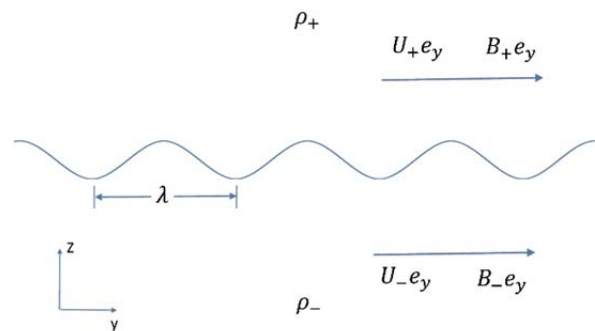
$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E \quad (9)$$

$$E + u \times B = 0 \quad (10)$$

در روابط ۸-۱۰، J و E به ترتیب چگالی جریان الکتریکی و میدان الکتریکی هستند. فرض تراکم‌ناپذیری سیال‌ها نیز با معادله ۱۱ بیان می‌شود.

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (11)$$

با استفاده از فرضیات و معادلات ۱۱-۱۰ می‌توان تحول فصل مشترک دو سیال را بررسی نمود که توسط ضربه در لحظه $t=0$ شتاب‌دار شده است. در ادامه فرض می‌شود همه کمیت‌ها به شکل $\varphi = \varphi_1 + \varphi_0$ باشند که در آن φ_0 نشان‌دهنده بخش تعادلی و φ_1 معرف مقادیر اختلالی کمیت‌ها (و بسیار کوچک‌تر از کمیت‌های تعادلی، $\varphi_0 \gg \varphi_1$) هستند. فرض می‌شود که اختلال اولیه در فصل مشترک سینوسی و دارای دامنه و طول موجی مشخص باشد. بنابراین با توجه به فرضیات مساله، اختلال‌ها در راستای y به شکل $\varphi_1(y, z, t) = \psi(z, t)e^{iky}$ هستند.

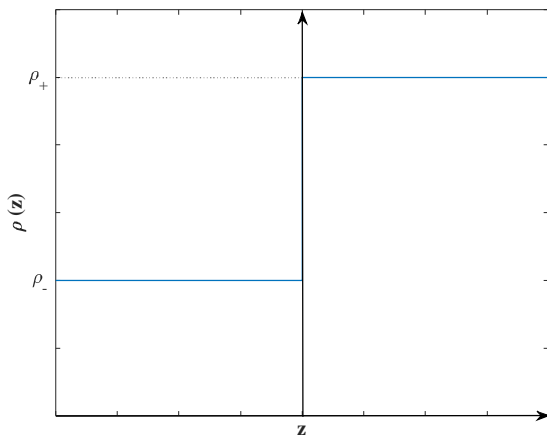


شکل ۱) تصویری شماتیک از شرایط اولیه سیستم دو سیال نیمه‌متناهی با چگالی جرم‌های $\rho_+(z)$ و $\rho_-(z)$ ، سرعت‌های تعادلی افقی U_+ و U_- و میدان‌های مغناطیسی B_+ و B_- در راستای y و فصل مشترک در $z=0$ قرار دارد.

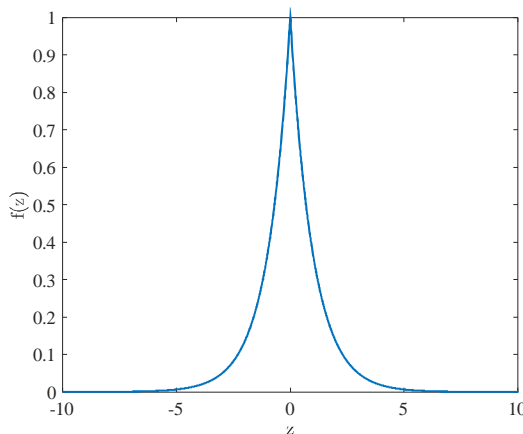
۳- محاسبات تحلیلی

پس از جای‌گذاری مقادیر تعادلی و اختلالی کمیت‌ها در معادله پیوستگی و خطی‌سازی، رابطه ۱۲ حاصل می‌شود.

همان طور که ملاحظه می‌شود، با وجود اختلاف چگالی در دو سیال، تابع معرف بخش مکانی کاملاً متقارن بوده و مستقل از چگالی‌ها است. نمودار ۱، تابع معرف بخش مکانی دامنه اختلال را نشان می‌دهد.



شکل ۲) تابعیت چگالی دو سیال در اطراف مرز



نمودار ۱) تابعیت مکانی دامنه اختلال در اطراف مرز در حالت چگالی ثابت

از سوی دیگر برای به‌دست‌آوردن پاسخ بخش زمانی دامنه اختلال از رابطه ۲۱ در اطراف مرز انتگرال گرفته می‌شود که در نهایت به رابطه ۲۷ می‌رسیم.

(۲۷)

$$\frac{d^2\eta(t)}{dt^2} + 2ik(\alpha_+U_+ + \alpha_-U_-)\frac{d\eta(t)}{dt} = k^2(\alpha_+U_+^2 + \alpha_-U_-^2 - v_a^2)\eta(t) + k\Delta u A_T \eta(t)\delta(t)$$

در به‌دست‌آوردن این معادله از رابطه ۲۶ نیز استفاده شده است که در آن عدد آتوود، v_a سرعت آلفون و α_{\pm} با روابط ۲۸ تا ۳۰ معرفی شده‌اند.

$$A_T = \alpha_+ - \alpha_- \quad (28)$$

$$v_a = \sqrt{(B_+^2 + B_-^2)/[\mu_0(\rho_+ + \rho_-)]} \quad (29)$$

$$\alpha_{\pm} = \rho_{\pm}/(\rho_- + \rho_+) \quad (30)$$

با حل معادله ۲۷ و اعمال شرط اولیه، بخش زمانی دامنه اختلال به‌صورت رابطه ۳۱ به دست می‌آید.

از آنجایی که کمیت‌های تعادلی u_0 و B_0 در طرفین مرز ثابت هستند (و تنها در فصل مشترک $z=0$ تغییرات دارند)، لذا مشتق این کمیت‌ها در رابطه ۱۸ صفر خواهد شد ($\frac{du_0}{dz} = 0$ و $\frac{dB_0}{dz} = 0$). بنابراین با در نظر گرفتن این موضوع و جای‌گذاری رابطه ۱۹ در رابطه ۱۸ در نهایت به معادله ۲۰ می‌رسیم.

(۲۰)

$$\frac{1}{\eta(t)}\left(\frac{d}{dt} + iku_0\right)^2 \eta(t) \left[\rho_0 k^2 + \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d}{dz} - \rho_0 \frac{d^2}{dz^2} \right] f(z) = \frac{k^2 B_0^2}{\mu_0} \left(-k^2 + \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\mu_0}{B_0^2} \frac{d\rho_0}{dz} \Delta u \delta(t) \right) f(z)$$

جمله شامل $\delta(t)$ تنها در شرط اولیه تاثیر می‌گذارد و باعث جهش قسمت زمانی در لحظه صفر می‌شود. بنابراین برای حل قسمت مکانی معادله ۲۰ می‌توان جمله شامل $\delta(t)$ را حذف و معادله را به‌صورت معادله ۲۱ جداسازی نمود.

$$\frac{1}{a\eta(t)}\left(\frac{d}{dt} + iku_0\right)^2 \eta(t) = \frac{(-k^2 + \frac{d^2}{dz^2})f(z)}{\left(\rho_0 k^2 - \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d}{dz} - \rho_0 \frac{d^2}{dz^2}\right)f(z)} \quad (21)$$

که در آن کمیت a با رابطه ۲۲ معرفی شده است.

$$a = \frac{k^2 B_0^2}{\mu_0} \quad (22)$$

حال برای حل معادله دیفرانسیل ۲۱ باید ابتدا نحوه توزیع چگالی را بر حسب مکان مشخص کنیم. ما در این پژوهش مساله را برای دو حالت چگالی ثابت (که در پژوهش‌های پیشین مورد بحث قرار گرفته است) و در ادامه برای حالت چگالی غیریکنواخت مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۳-۱- حالت چگالی ثابت

برای بررسی این حالت فرض می‌شود که دو محیط دارای چگالی‌های متفاوت، اما هر یک ثابت، مطابق با شکل ۲ و به‌صورت رابطه ۲۳ هستند:

$$\rho_0(z) = \begin{cases} \rho_+ & z > 0 \\ \rho_- & z < 0 \end{cases} \quad (23)$$

رابطه چگالی ۲۳ را در معادله ۲۱ جای‌گذاری و به‌صورت معادله ۲۴ ساده‌نویسی می‌کنیم.

$$\frac{\rho_{\pm}}{a\eta(t)}\left(\frac{d}{dt} + iku_0\right)^2 \eta(t) = \frac{-k^2 B_0^2 \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) f(z)}{\mu_0 \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) f(z)} \quad (24)$$

از رابطه ۲۴ معلوم می‌شود که قسمت مکانی دامنه اختلال از حل معادله دیفرانسیل ۲۵ به دست می‌آید.

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) f(z) = 0 \quad (25)$$

با حل این معادله و اعمال شرایط مرزی، بخش وابسته به مکان دامنه اختلال، شکل رابطه ۲۶ را به خود می‌گیرد.

$$f(z) = \begin{cases} e^{-kz} & z > 0 \\ e^{+kz} & z < 0 \end{cases} \quad (26)$$

$$C = \frac{1}{a\eta(t)} \left(\frac{d}{dt} + iku_0 \right)^2 \eta(t) \Big|_{t=0} = \quad (38)$$

$$\frac{\gamma^2 - (\omega - ku_0)^2 - 2ikA_T \Delta u (\omega - ku_0)}{\gamma}$$

رابطه ۳۸ را می‌توان به صورت رابطه ۳۹ بازنویسی کرد.

$$C_{\pm} = \frac{1}{a\eta(t)} \left(\frac{d}{dt} + iku_{\pm} \right)^2 \eta(t) \Big|_{t=0} = \quad (39)$$

$$\frac{\gamma^2 - (\omega - ku_{\pm})^2 - 2ikA_T \Delta u (\omega - ku_{\pm})}{\gamma}$$

از سوی دیگر، طبق رابطه ۳۷ می‌توان نوشت:

$$(C\rho_0(z) + 1) \frac{d^2 f(z)}{dz^2} + C \frac{d\rho_0(z)}{dz} \frac{df(z)}{dz} \quad (40)$$

$$-k^2 (C\rho_0(z) + 1) f(z) = 0$$

رابطه ۴۰ دارای شکل کلی است و در آن چگالی می‌تواند هر تابع پیوسته‌ای از مکان باشد. در ادامه، حالت خاصی از چگالی متغیر (با تابعیت نمایی) در نظر گرفته می‌شود و پاسخ آن به شیوه تحلیلی به دست می‌آید. تغییرات چگالی مورد بحث به صورت شکل ۳ است و با رابطه ۴۱ نشان داده می‌شود.

$$\rho_0(z) = \begin{cases} \rho_+ e^{-\beta_+ z} & z > 0 \\ \rho_- e^{+\beta_- z} & z < 0 \end{cases} \quad (41)$$

که در آن β کمیتی ثابت و مثبت است. با جای‌گذاری عبارت مربوط به چگالی (رابطه ۴۱) در معادله دیفرانسیل ۴۰، رابطه ۴۲ حاصل می‌شود.

$$(C_{\pm} \rho_{\pm} e^{\mp \beta_{\pm} z} + 1) \frac{d^2 f(z)}{dz^2} \mp C_{\pm} \rho_{\pm} \beta_{\pm} \frac{df(z)}{dz}$$

$$-k^2 (C_{\pm} \rho_{\pm} e^{\mp \beta_{\pm} z} + 1) f(z) = 0$$

جواب این معادله به شکل رابطه ۴۳ به دست می‌آید.

$$f(z) = \begin{cases} C_1 \text{ hypergeom} \left(\left[\frac{1-s_+ - \sqrt{1+s_+^2}}{2}, \frac{1-s_+ + \sqrt{1+s_+^2}}{2} \right], [1-s_+], -C_+ \rho_+ e^{-\beta_+ z} \right) e^{-kz} & z > 0 \\ C_2 \text{ hypergeom} \left(\left[\frac{1+s_- - \sqrt{1+s_-^2}}{2}, \frac{1+s_- + \sqrt{1+s_-^2}}{2} \right], [1+s_-], -C_- \rho_- e^{+\beta_- z} \right) e^{+kz} & z < 0 \end{cases}$$

که در آن s_{\pm} به صورت رابطه ۴۴ تعریف شده است.

$$s_{\pm} = \frac{2k}{\beta_{\pm}} \quad (44)$$

$$\eta(t) = e^{-i\omega t} \left\{ \left[\cosh(\gamma t) + \frac{i\omega + kA_T \Delta u}{\gamma} \sinh(\gamma t) \right] \eta(0) + \frac{\dot{\eta}(0)}{\gamma} \sinh(\gamma t) \right\}$$

در این رابطه ω و γ (نرخ رشد ناپایداری)، شکل رابطه ۳۲ و ۳۳ را دارند.

$$\omega = k(\alpha_+ U_+ + \alpha_- U_-) \quad (32)$$

$$\gamma = k \left[\frac{1}{4} (1 - A_T^2) \delta_u^2 - v_a^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (33)$$

در معادله ۳۱، $\eta(0)$ نشانگر دامنه اختلال اولیه و $\dot{\eta}(0)$ مشتق دامنه اختلال در لحظه صفر یعنی $\eta(t)|_{t=0} = \eta(0)$ و $\left. \frac{d\eta(t)}{dt} \right|_{t=0} = \dot{\eta}(0)$ است.

در رابطه نرخ رشد کمیت δ_u نیز شار برشی نسبی دو لایه است که به صورت رابطه ۳۴ تعریف می‌شود.

$$\delta_u = |U_+ - U_-| \quad (34)$$

براساس شرایط فیزیکی مساله، $\eta(t)$ باید از نوع حاصلضرب $e^{-i\omega t}$ در یک تابع حقیقی از زمان با نرخ رشد γ باشد، لذا بخشی از $\eta(t)$ که شامل نرخ رشد است باید حقیقی باشد. با اعمال این شرط می‌توان به رابطه ۳۵ رسید.

$$\dot{\eta}(0) = -i\omega \eta(0) \quad (35)$$

از جای‌گذاری رابطه ۳۵ در معادله ۳۱، دامنه اختلال به صورت رابطه ۳۶ ساده می‌شود.

$$\eta(t) = e^{-i\omega t} \left[\cosh(\gamma t) + \frac{kA_T \Delta u}{\gamma} \sinh(\gamma t) \right] \eta(0)$$

معادله ۳۶ بخش زمانی دامنه اختلال در حالت چگالی ثابت را نشان می‌دهد.

۳-۲- حالت چگالی متغیر

در حالتی که چگالی، متغیر و اطراف مرز تغییر ناگهانی در چگالی وجود نداشته باشد (پیوسته باشد)، می‌توان نشان داد که تابعیت زمانی دامنه اختلال همانند حالت قبل به دست می‌آید. در حالت جدید چگالی به صورت تابعی از z در نظر گرفته می‌شود که در حالت حدی ($z \rightarrow 0$) مقادیر ثابت ρ_+ و ρ_- را به خود خواهد گرفت. از آنجایی که طرف اول و دوم رابطه ۲۱ مستقل از هم هستند، لذا می‌توان دو طرف رابطه را ثابت در نظر گرفت. بنابراین برای ادامه محاسبات در این قسمت، معادله ۲۱ را به صورت رابطه ۳۷ بازنویسی می‌کنیم.

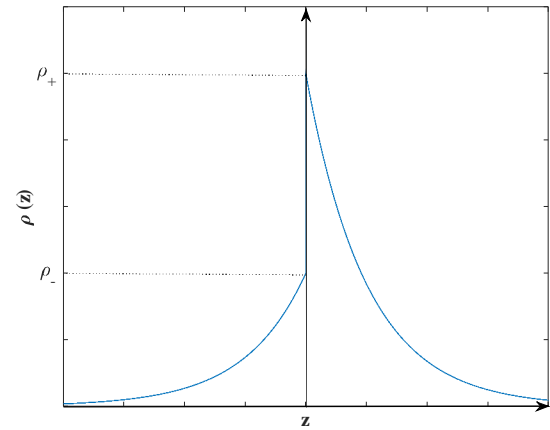
$$\frac{(-k^2 + \frac{d^2}{dz^2}) f(z)}{\left(\rho_0 k^2 - \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d}{dz} - \rho_0 \frac{d^2}{dz^2} \right) f(z)} = \quad (37)$$

$$\frac{1}{a\eta(t)} \left(\frac{d}{dt} + iku_0 \right)^2 \eta(t) = C$$

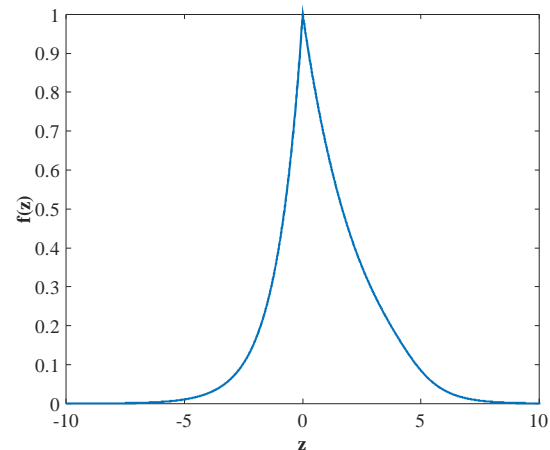
با توجه به ثابت بودن مقدار C می‌توان با جای‌گذاری زمان دلخواه در تابع زمانی (به عنوان مثال $t \rightarrow 0^+$)، مقدار ثابت C را به صورت معادله ۳۸ به دست آورد.

رابطه ۴۳ نشان می‌دهد که بخش وابسته به مکان دامنه اختلال به صورت حاصلضرب دو تابع فوق هندسی (Hypergeometric function) و نمایی است. در این حالت با رسم بخش مکانی نرمالیزه شده، نمودار ۲ حاصل می‌شود.

معادله ۴۳ و نمودار ۲ نشان می‌دهند که در حالت چگالی‌های متغیر بخش مکانی در دو محیط، متفاوت و تابعی از پارامترهای محیط و سیال‌ها است.



شکل ۳) تابع چگالی دو سیال در اطراف مرز



نمودار ۲) تابعیت مکانی دامنه اختلال در اطراف مرز در حالت چگالی نمایی

$$\gamma^* = k \left[v_a^2 - \frac{1}{4}(1 - A_T^2)\delta_u^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (47)$$

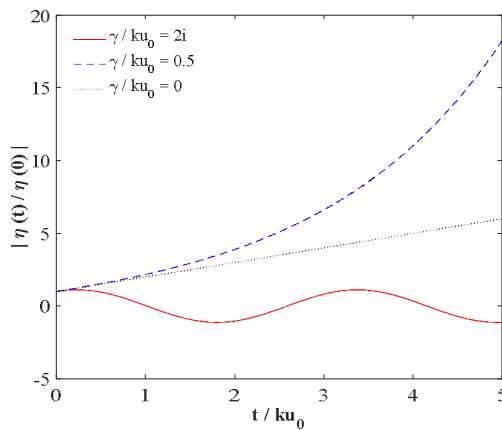
تحت شرایطی که نرخ رشد حقیقی باشد، اختلال به صورت نمایی و با نرخ γ رشد می‌کند. رابطه ۳۶ نشان می‌دهد که اختلال فصل مشترک با γ بزرگ‌تر، سریع‌تر رشد می‌کند. در غیر این صورت با موهومی شدن نرخ رشد، دامنه اختلال در فصل مشترک به صورت نوسانی در زمان تغییر خواهد کرد، سیستم به حالت پایدار می‌رسد و بخش زمانی، شکل رابطه ۴۸ را به خود می‌گیرد.

$$\eta(t) = e^{-i\omega t} \left[\cos(\gamma^* t) + \frac{kA_T \Delta u}{\gamma^*} \sin(\gamma^* t) \right] \eta(0) \quad (48)$$

برای حالتی که نرخ رشد به سمت صفر میل می‌کند، می‌توان نشان داد که رابطه ۳۶ شکل تقریبی رابطه ۴۹ را خواهد داشت.

$$\eta(t) = e^{-i\omega t} [1 + kA_T \Delta u t] \eta(0) \quad (49)$$

این نتایج به‌وضوح در نمودار ۳ نشان داده شده است.



نمودار ۳) تغییرات بخش زمانی دامنه اختلال بر حسب زمان به‌ازای مقادیر مختلف نرخ رشد

همان‌طور که از روابط ۲۶ و ۴۳ پیداست، بخش مکانی دامنه اختلال با فاصله‌گرفتن از مرز در هر دو حالت چگالی ثابت و نمایی، کاهشی است. اما تابعیت زمانی اختلال، بسته به پارامترهای فیزیکی مساله از جمله شار برشی و میدان مغناطیسی، طبق معادلات ۳۶ و ۴۸ می‌تواند حالت افزایشی یا نوسانی داشته باشد. در حالتی که نرخ رشد موهومی است، دامنه اختلال در فصل مشترک با زمان به صورت نوسانی تغییر می‌کند. بنابراین سیستم کاملاً پایدار خواهد بود و تغییر پارامترهای مساله تنها فرکانس نوسانات زمانی را تحت تاثیر قرار می‌دهد. در حالتی که نرخ رشد حقیقی است، تابعیت زمانی دامنه اختلال در فصل مشترک به صورت نمایی افزایش می‌یابد. در این حالت تغییر پارامترهای مساله، پایداری سیستم را تحت تاثیر قرار می‌دهد و باید سعی بر این باشد که نرخ رشد کاهش یابد تا سیستم به پایداری برسد. بدین منظور، وابستگی نرخ رشد به کمیت‌های میدان مغناطیسی و شار برشی در ادامه بررسی خواهد شد. با توجه به شرط تعریف شده در رابطه ۴۵، در حالتی که میدان در دو سیال برابر باشد، میدان مغناطیسی در آستانه پایداری به صورت رابطه ۵۰ به دست می‌آید.

$$B_0^{th} = \sqrt{\frac{\mu_0(\rho_+ + \rho_-)(1 - A_T^2)}{8}} \delta_u \quad (50)$$

۴- بحث و بررسی

در این بخش جواب‌هایی که برای دامنه اختلال به صورت تحلیلی به دست آمدند، بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرند و وابستگی دامنه اختلال به پارامترهای مهمی چون شار برشی، چگالی سیال‌ها و میدان مغناطیسی بررسی و برآورد می‌شوند.

۴-۱- تحلیل بخش زمانی دامنه اختلال

همان‌طور که از رابطه ۳۳ مشاهده می‌شود، پایداری زمانی در صورتی وجود دارد که وابستگی دامنه اختلال با زمان به صورت نوسانی باشد، به عبارت دیگر شرط رابطه ۴۵ برقرار باشد.

$$\frac{1}{4}(1 - A_T^2)\delta_u^2 - v_a^2 < 0 \quad (45)$$

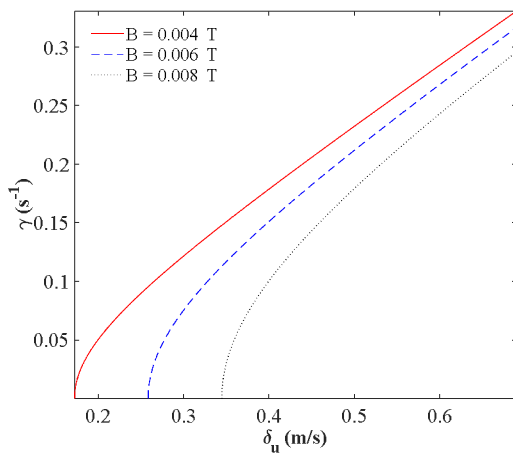
در این صورت نرخ رشد موهومی می‌شود و رابطه ۴۶ و ۴۷ را به صورت زیر داریم:

$$\gamma = i\gamma^* \quad (46)$$

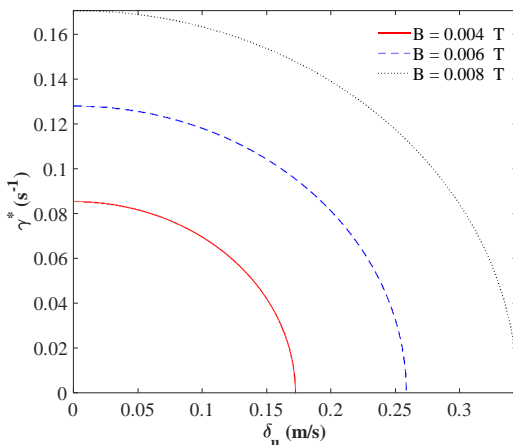
حال تغییرات نرخ رشد بر حسب کمیت شار برشی بررسی می‌شود. شار برشی برای آستانه پایداری از رابطه ۴۵ به صورت رابطه ۵۱ به دست می‌آید.

$$\delta_u^{th} = \frac{2v_a}{\sqrt{1 - A_T^2}} \quad (51)$$

به‌ازای مقادیری از شار برشی که $\delta_u \geq \delta_u^{th}$ است، نرخ رشد، حقیقی و ناپایداری ایجاد می‌شود. در غیر این صورت شرط پایداری برقرار می‌شود. با استفاده از روابط ۳۳ و ۴۷، نمودار تغییرات γ و γ^* با تغییر شار برشی به‌ازای مقادیر مختلف میدان مغناطیسی در نمودارهای ۶ و ۷ نشان داده شده است. با توجه به نمودار ۶ مشاهده می‌شود که در حالت ناپایدار با افزایش شار برشی، نرخ رشد افزایش می‌یابد و ناپایداری سیستم تشدید خواهد شد. دلیل این رفتار این بوده که شار برشی معیاری از تحرک دو سیال نسبت به یکدیگر بوده و بدیهی است که هر چه تحرک دو سیال نسبت به هم کمتر شود، سیستم به حالت پایدارتر نزدیک می‌شود. بنابراین وجود شار برشی برعکس میدان مغناطیسی مانعی برای پایداری سیستم خواهد بود. در حالت پایدار، همان طور که از نمودار ۷ مشخص است، با افزایش شار برشی، γ^* کاهش می‌یابد و در نتیجه آن تنها فرکانس تغییرات در زمان کمی کاهش می‌یابد، ولی همچنان سیستم در حالت پایدار قرار دارد.

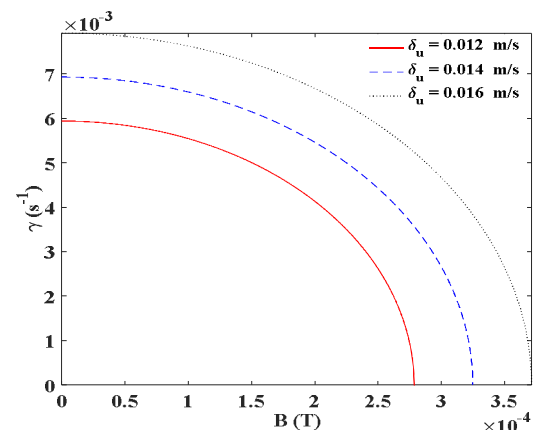


نمودار ۶) نمودار تغییرات γ بر حسب شار برشی به‌ازای مقادیر مختلف میدان مغناطیسی

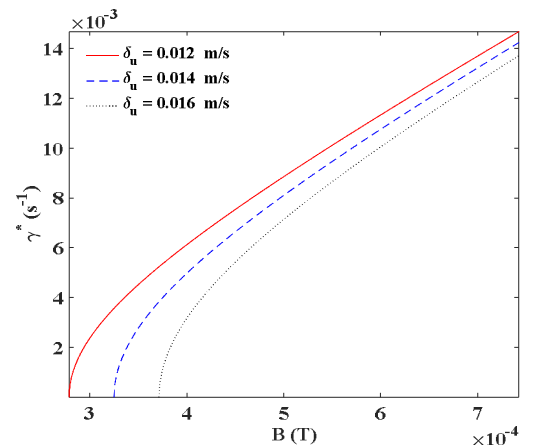


نمودار ۷) نمودار تغییرات γ^* بر حسب شار برشی به‌ازای مقادیر مختلف میدان مغناطیسی

بنابراین اگر $B_0 \geq B_0^{th}$ باشد، نرخ رشد، موهومی و شرط پایداری برقرار می‌شود، ولی به‌ازای $B_0 \leq B_0^{th}$ نرخ رشد، حقیقی و سیستم ناپایدار می‌شود. در نمودارهای ۴ و ۵، با استفاده از روابط ۳۳ و ۴۷، نمودار تغییرات γ و γ^* با تغییر میدان مغناطیسی رسم شده است. همان طور که از نمودار ۴ پیداست، در حالت ناپایدار با افزایش میدان مغناطیسی، نرخ رشد کاهش می‌یابد و بنابراین سیستم به پایداری نزدیک‌تر می‌شود. دلیل کاهش نرخ رشد این است که در اثر وجود میدان مغناطیسی یک نیروی لورنتس بازگرداننده ایجاد می‌شود و در نتیجه، موج آلفن به وجود می‌آید. موج آلفن یکی از انواع امواج هیدرودینامیک است که در اثر نوسان ذرات ناشی از نیروی بازگرداننده که منشا آن تنش مغناطیسی است، ایجاد می‌شود^[16]. سرعت موج آلفن ایجاد شده برابر با v_a بوده که قبلاً آن را در رابطه ۲۹ معرفی کردیم. از رابطه ۲۹ پیداست که این کمیت با میدان مغناطیسی رابطه مستقیمی دارد. با افزایش میدان مغناطیسی، سرعت موج آلفن به وجود آمده در سیستم زیادتر می‌شود و در اثر نیروی بازگرداننده ایجاد شده، سیستم به تعادل می‌رسد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که وجود میدان مغناطیسی می‌تواند عاملی برای مهار ناپایداری سیستم باشد. در حالت پایدار، تغییر میدان مغناطیسی و شار برشی تنها فرکانس نوسانات در زمان را تغییر می‌دهد و اختلالی در پایداری سیستم ایجاد نمی‌کند. با توجه به نمودار ۵، با افزایش میدان مغناطیسی γ^* افزایش می‌یابد و در نتیجه آن تنها فرکانس زمانی تغییرات افزایش می‌یابد، ولی همچنان سیستم در حالت پایدار قرار دارد.



نمودار ۸) نمودار تغییرات γ بر حسب میدان مغناطیسی به‌ازای مقادیر مختلف شار برشی



نمودار ۹) نمودار تغییرات γ^* بر حسب میدان مغناطیسی به‌ازای مقادیر مختلف شار برشی

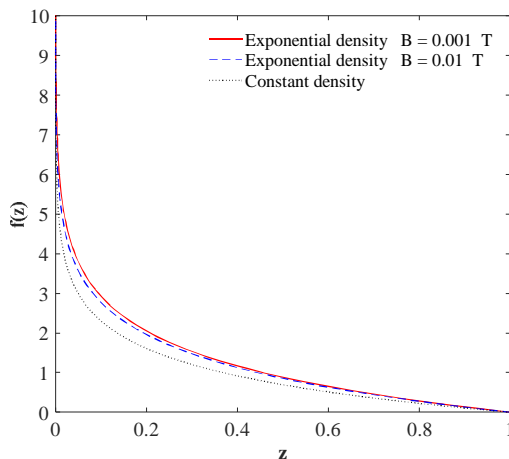
۴-۲- تحلیل بخش مکانی دامنه اختلال

در این قسمت با استفاده از روابط ۲۶ و ۴۳، تغییرات بخش مکانی دامنه اختلال نسبت به کمیت‌های مهم شار برشی، چگالی سیال‌ها و میدان مغناطیسی رسم و مقایسه می‌شود.

نمودار ۸ نشان می‌دهد که با کاهش ضریب β ، دامنه اختلال کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر اگر β به سمت صفر میل کند، نتایج به یافته‌های پژوهش‌های پیشین نزدیک می‌شود که چگالی در آنها ثابت فرض شده بود [14].

از سوی دیگر براساس نمودار ۹، با افزایش شار برشی، دامنه اختلال افزایش می‌یابد و از نتایج حالت چگالی ثابت دورتر می‌شود. مشابه این تاثیر در بخش زمانی دامنه اختلال نیز مشاهده شد. همان طور که قبلاً نیز گفتیم، این کمیت در حالتی که چگالی ثابت بود، هیچگونه تاثیری در بخش مکانی دامنه اختلال نداشت.

طبق نمودار ۱۰، با افزایش میدان مغناطیسی B ، دامنه اختلال کاهش می‌یابد و در نتیجه به حالت تعادل نزدیک می‌شود که مشابه این تاثیر در بخش زمانی دامنه اختلال نیز مشاهده شد. همچنین ذکر این نکته مهم است که در هر حالت، دامنه اختلال از حالت چگالی ثابت که میدان مغناطیسی تاثیری در قسمت مکانی دامنه اختلال نداشت، بیشتر است.

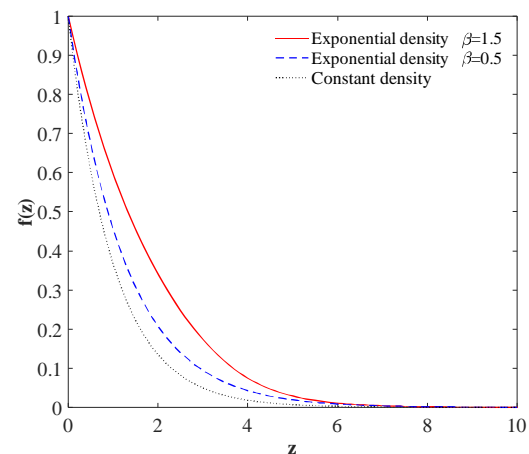


نمودار ۱۰) تابعیت مکانی دامنه اختلال در اطراف مرز در حالت چگالی نمایی با تغییر میدان مغناطیسی اعمالی

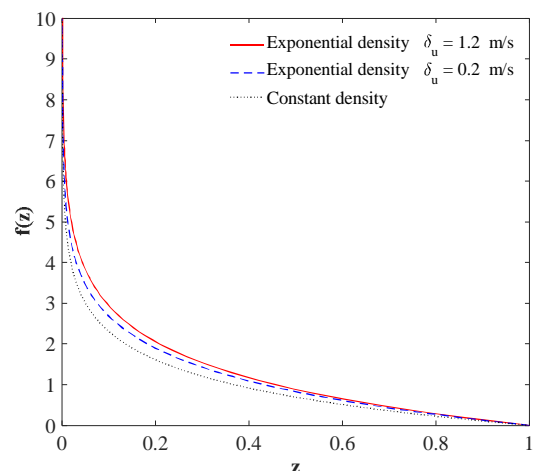
۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، ناپایداری در فصل مشترک دو سیال ناشی از شوک زمانی مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور، محیط شامل دو سیال نیمه‌متناهی با چگالی‌های متغیر در نظر گرفته شد. با استفاده از معادلات هیدرودینامیک، دامنه اختلال برای حالت چگالی نمایی به صورت تحلیلی به دست آمد. نشان داده شد که بخش زمانی دامنه اختلال برای هر دو حالت چگالی ثابت و متغیر یکسان است و وابستگی آن به نرخ رشد مورد بحث قرار گرفت. طبق محاسبات، پایداری دامنه اختلال در زمان به مقدار نرخ رشد، حقیقی و موهومی بودن آن بستگی داشت. در ادامه، وابستگی نرخ رشد به پارامترهای مهمی چون میدان مغناطیسی و شار برشی بحث شد. ملاحظه شد که برای برقراری شرط پایداری باید میدان مغناطیسی از یک مقدار آستانه (B_0^{th}) بیشتر باشد که این مقدار تابع پارامترهای مربوط به سیال‌ها از جمله چگالی و شار برشی است. همچنین در میدان مغناطیسی ثابت، شار برشی باید از یک مقدار آستانه (δ_u^{th}) که تابع میدان مغناطیسی و چگالی است، کمتر باشد. در واقع وجود میدان مغناطیسی عاملی برای پایدار کردن سیستم است و وجود شار برشی، ناپایداری سیستم را تشدید می‌کند. لذا شاهد رقابتی بین شار برشی و میدان مغناطیسی هستیم. اگر میدان مغناطیسی به اندازه کافی بزرگ باشد، می‌تواند بر تاثیر ناشی از شار برشی غلبه و ناپایداری را متوقف کند.

در ادامه بخش مکانی دامنه اختلال در اطراف فصل مشترک محاسبه و مشاهده شد که این تابع برخلاف حالت چگالی ثابت به پارامترهای مربوط به سیال‌ها و محیط وابسته بوده و شکل تابعی آن در دو محیط متفاوت است. در ادامه وابستگی آن به چند پارامتر مهم از جمله چگالی، میدان مغناطیسی و شار برشی مورد بحث قرار گرفت. مشاهده شد که با افزایش میدان مغناطیسی قسمت مکانی دامنه اختلال کاهش و با افزایش شار برشی، دامنه اختلال افزایش می‌یابد که مشابه این تاثیر در قسمت زمانی دامنه اختلال نیز مشاهده شد. اما این تغییرات براساس تحلیل نموداری چندان محسوس نیست. در نهایت با رسم نمودار دامنه اختلال بر حسب مکان مشاهده شد که با کاهش ضریب β ، بخش مکانی دامنه اختلال نیز به نتایج پژوهش‌های مرتبط با حالت چگالی ثابت نزدیک می‌شود. این نتیجه محاسبات انجام شده و تعمیم در نظر گرفته شده در مقاله را تایید می‌کند.



نمودار ۸) تابعیت مکانی دامنه اختلال در اطراف مرز در حالت چگالی نمایی با تغییر بخش نمایی چگالی



نمودار ۹) تابعیت مکانی دامنه اختلال در اطراف مرز در حالت چگالی نمایی با تغییر شار برشی

- induced mixing to supersonic combustion. AIAA Journal. 1993;31(5):854-862.
- 8- Lindl JD, McCrory RL, Campbell EM. Progress toward ignition and burn propagation in inertial confinement fusion. Physics Today. 1992;45(9):32-40.
- 9- Stalker RJ, Crane KCA. Driver gas contamination in a high-enthalpy reflected shock tunnel. AIAA Journal. 1978;16(3):277-279.
- 10- Brouillette M, Bonazza R. Experiments on the Richtmyer-Meshkov instability: Wall effects and wave phenomena. Physics of Fluids. 1999;11(5):1127-1142.
- 11- Mikaelian KO. Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities in multilayer fluids with surface tension. Physical Review A. 1990;42(12):7211-7225.
- 12- Mikaelian KO. Effect of viscosity on Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities. Physical Review E. 1993;47(1):375-383.
- 13- Cao J, Ren H, Wu Z, Chu PK. Quantum effects on Rayleigh-Taylor instability in magnetized plasma. Physics of Plasmas. 2008;15(1):012110.
- 14- Cao J, Wu Z, Ren H, Li D. Effects of shear flow and transverse magnetic field on Richtmyer-Meshkov instability. Physics of Plasmas. 2008;15(4):042102.
- 15- Al-Khateeb AM, Laham NM. Stability criteria of Rayleigh-Taylor modes in magnetized plasmas. Contributions to Plasma Physics. 2003;43(1):25-32.
- 16- Iwai K, Shinya K, Takashi K, Moreau R. Pressure change accompanying Alfvén waves in a liquid metal. Magnetohydrodynamics. 2003;39(3):245-250.

تشکر و قدردانی: از همکاران حوزه معاونت پژوهشی دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره) سپاسگزاری می‌شود.

تاییدیه اخلاقی: موردی از سوی نویسندگان بیان نشده است.

تعارض منافع: موردی از سوی نویسندگان بیان نشده است.

سهم نویسندگان: موردی از سوی نویسندگان بیان نشده است.

منابع مالی: موردی از سوی نویسندگان بیان نشده است.

منابع

- 1- Brouillette M. The richtmyer-meshkov instability. Annual Review of Fluid Mechanics. 2002;34(1):445-468.
- 2- Jacobs JW, Sheeley JM. Experimental study of incompressible Richtmyer-Meshkov instability. Physics of Fluids. 1996;8(2):405-415.
- 3- Niederhaus CE, Jacobs JW. Experimental study of the Richtmyer-Meshkov instability of incompressible fluids. Journal of Fluid Mechanics. 2003;485(12):243-277.
- 4- Chapman PR, Jacobs JW. Experiments on the three-dimensional incompressible Richtmyer-Meshkov instability. Physics of Fluids. 2006;18(7):074101.
- 5- Khokhlov AM, Oran ES, Thomas GO. Numerical simulation of deflagration-to-detonation transition: The role of shock-flame interactions in turbulent flames. Combustion and Flame. 1999;117(1-2):323-339.
- 6- Chevalier RA. A model for the radio brightness of the supernova remnant 1987a. Nature. 1992;355(6361):617-618.
- 7- Yang J, Kubota T, Zukoski EE. Applications of shock-