



ناپایداری کششی وابسته به اندازه برای نانوتیر ساخته شده از مواد تابعی مدرج تحت نیروهای بین مولکولی با روش دیفرانسیل تربیع

حسین عطایی¹، یعقوب طادی بنی^{2*}

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد
2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد
*شهرکرد، صندوق پستی 115، tadi@eng.sku.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 02 دی 1393
پذیرش: 02 بهمن 1393
ارائه در سایت: 02 اسفند 1393
کلید واژگان:
تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده
نیروهای بین مولکولی
مواد تابعی مدرج
اثر اندازه، روش دیفرانسیل تربیع

چکیده

در این مقاله، ناپایداری کششی نانوتحریک کننده تیر شکل یک سرگردار ساخته شده از مواد تابعی مدرج مدل شده است و با استفاده از تئوری مرتبه بالای گرادیان کرنش اصلاح شده مورد بررسی قرار گرفته است. نانوتیر تابعی مدرج، از ترکیب ژرمانیوم-سیلیکون ساخته شده است که کسر حجمی هر جزء و در نتیجه خصوصیات مکانیکی تیر بصورت پیوسته بر مبنای قانون ساده توانی در راستای ضخامت تغییر می کنند. با تغییر درصد کسر حجمی جزء ژرمانیوم در نانوتیر، پنج نوع مختلف نانوتیر مورد بررسی قرار گرفته و همچنین تأثیر تغییرات کسر حجمی، پارامتر اثر اندازه و نیروهای بین مولکولی بر روی ناپایداری کششی بررسی شده است. معادله غیرخطی حاکم و همچنین شرایط مرزی با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل بدست آمده و سپس با استفاده از روش دیفرانسیل تربیع حل شده است. برای اعتبارسنجی روش حل حاضر از داده های تجربی و روش های حل دیگر استفاده شده و پس از مقایسه بین نتایج می توان گفت، نتایج بدست آمده از روش حل حاضر دارای تطابق بسیار خوبی با نتایج تجربی و عددی می باشد. همچنین نتایج نشان می دهد که اثر اندازه و نیروهای بین مولکولی و کسر حجمی تأثیر بسیار زیادی بر روی ناپایداری کششی نانوتحریک کننده دارند.

Size-dependent pull-in instability analysis of FGM nano-beam under molecular force by differential quadrature method

Hosein Ataei, Yaghoub Tadi Beni*

Faculty of Engineering, Shahrood University, Shahrood, Iran
* P.O.B. 115, Shahrood, Iran, tadi@eng.sku.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 23 December 2014
Accepted 22 January 2015
Available Online 21 February 2015

Keywords:

Modified strain gradient Theory
intermolecular forces
functionally graded material
size effect
differential quadrature method

ABSTRACT

In this paper, pull-in instability of a cantilever beam type nanoactuator made of the functionally graded material (FGM) based on higher order modified strain gradient theory is investigated. It is assumed that the functionally graded beam, made of germanium and silicon, follows the volume fraction definition and law of mixtures, and its properties change as a power function through its thickness. By changing the germanium constituent volume fraction percent of the nano-beam, five different types of the nano-beams are investigated. The influences of the volume fraction index, length scale parameter and the intermolecular forces, on the pull-in instability are examined. Principle of minimum total potential energy is used to derive the nonlinear governing differential equation and consistent boundary conditions which is then solved using the differential quadrature method (DQM). The present analysis is validated through direct comparisons with other published research methods and experimental results and, after comparison, excellent agreement is achieved between the new solution method and other experimental and numerical solution results. Besides, the results demonstrate that size effect and amount of volume fraction have a substantial impact on the pull-in instability behavior of beam-type nanoactuator.

1- مقدمه

تیرها ضخامت (بصورت پیوسته تغییر می کند. مواد تابعی مدرج برای اولین بار در میانه دهه 1980 میلادی توسط دانشمندان ژاپنی، برای استفاده در راکتور گداخت هسته ای و کاربردهای فضایی به عنوان موادی با خصوصیات حرارتی خوب ارائه شد. تغییر کسر حجمی و در نتیجه خصوصیات مواد در راستای بعد مشخص، با استفاده از یک تابع پیوسته مشخص می شود که این تابع

مواد تابعی مدرج¹ در حقیقت، کامپوزیت های میکروسکوپی غیرهمگنی هستند که معمولاً از ترکیب دو نوع ماده مختلف با استفاده از فرآیند متالوژی پودر ساخته می شوند و کسر حجمی هر جزء در راستای بعد مشخص (برای

1- Functionally graded material

در این حالت میزان نیروی بین مولکولی با توان سوم فاصله دو صفحه رابطه معکوس پیدا نموده و به این نیرو، نیروی واندوالس گویند [8, 9].

دومین اثر نانومقیاس، رفتار وابسته به اندازه نانو ساختارها می باشد. رفتار وابسته به اندازه، یک مشخصه ذاتی مواد است و این اثر زمانی که یکی از ابعاد نانو ساختار مثل ضخامت، به مقیاس اندازه ماده نزدیک شود، مشاهده می شود [10]. پژوهش های تجربی وابستگی رفتار استاتیکی و ارتعاشی مواد به اثر اندازه و ناتوانی تئوری های کلاسیک در نشان دادن این اثر را در فولاد [11]، پلیمر [12] و پلی سیلیکون [13] ثابت کرده اند. بنابراین در سال های اخیر تئوری های غیر کلاسیک و مرتبه بالای محیط پیوسته مثل تنش کوپل⁸ و گرادیان کرنش⁹ توسط محققین برای بررسی اثر اندازه در ابعاد نانو و میکرو ارائه شده است. در دهه 1960 میلادی کیوتر، تئوری تنش کوپل را بعنوان یک تئوری غیر کلاسیک با توانایی مدلسازی اثر اندازه معرفی کرد [14]. یانگ و همکارانش [15] تئوری تنش کوپل اصلاح شده¹⁰ را برای کاهش سختی محاسبه پارامتر اثر اندازه¹¹ مواد در آزمایش های تجربی ارائه نمودند. در معادله ساختاری این تئوری تنها یک پارامتر اثر اندازه ظاهر می شود. میندلین [16] با در نظر گرفتن اثر مشتقات اول و دوم تانسور کرنش بر روی چگالی انرژی کرنشی، تئوری مرتبه بالای گرادیان را برای مواد الاستیک ارائه کرد. فلک [17, 18] با استفاده از تئوری میندلین [16] و در نظر گرفتن مشتق اول تانسور کرنش، تئوری گردیان کرنش را ارائه نمود. این تئوری پنج ثابت مرتبه بالای ماده را در خود جای داده است. در مقایسه با تئوری تنش کوپل، تئوری گردیان کرنش در بردارنده چند مؤلفه تنش مرتبه بالا در کنار تنش های کلاسیک و تنش کوپل است، در حقیقت تئوری تنش کوپل یک حالت خاص از تئوری گردیان کرنش می باشد. مطابق روش یانگ [15]، لام و همکارانش [12] تئوری گردیان کرنش اصلاح شده¹² را که داری سه مؤلفه پارامتر اثر اندازه در معادله ساختاری است، ارائه کردند. این تئوری جدید در حالت خاص به تئوری تنش کوپل اصلاح شده کاهش می یابد.

با توجه به این حقیقت که استفاده از مواد تابعی مدرج در ساخت سیستم های نانوتحریک کننده های تیر شکل بصورت گسترده رو به افزایش است، بررسی اثر استفاده برای مواد تابعی مدرج در این سیستم ها لازم می باشد. ویتورو و مهتا [19] استفاده از یک لایه غیر همگن مواد مدرج هوشمند برای رسیدن به خصوصیات خوب مکانیکی و الکتریکی را پیشنهاد کردند و استفاده از پلی کریستالین اس ای جی ای¹³ را بسیار مفید دانستند. ژیا و همکارانش [20] ناپایداری پولین را تحت تأثیر همزمان نیروی الکترو استاتیکی و نیروهای بین مولکولی با در نظر گرفتن تنش های پسماند و هندسه غیر خطی بررسی نمودند. آن ها برای حل معادلات غیر خطی حاکم از روش دیفرانسیل تربیع استفاده کردند. در این پژوهش مقدار ولتاژ و خیز پولین برای شرایط مرزی متفاوت تیر میکرو تحرک کننده بدست آورده شده است. نتایج این تحقیق نشان می دهد که در فواصل کم باید اثر نیروی بین مولکولی در نظر گرفته شود و همچنین هندسه غیر خطی تأثیر زیادی بر افزایش میزان ولتاژ پولین دارد. ژیا و همکارانش [21] در پژوهشی دیگر با استفاده از تئوری کلاسیک محیط پیوسته، ناپایداری پولین و ارتعاش آزاد میکرو تیر ساخته شده از جنس مواد تابعی مدرج را گزارش کردند. در این پژوهش الکتروود پایینی بصورت مقعر در نظر گرفته شده است. زمان زاده و

بصورت های گوناگون مثل خطی، مربعی، مکعبی، توانی و نمایی می تواند باشد [1].

مواد تابعی مدرج از لحاظ فنی یک کلاس جداگانه از مواد نیستند بلکه با استفاده از یک رویکر مهندسی، ساختار و آرایش شیمیایی مواد اصلاح شده است. این رویکرد زمانی بسیار مناسب است که دو نوع خصوصیات متضاد در قطعه مورد نیاز باشد. توزیع تنش که بر اثر نیروی مکانیکی یا حرارتی به وجود می آید را می توان با استفاده از تغییر توزیع کسر حجمی مواد به حالت بهینه رساند. این مواد معمولاً از ترکیب سرامیک و فولاد ساخته می شوند، سرامیک با توجه به داشتن ضریب انتقال حرارت پایین، مقاومت حرارتی بالایی به ماده می دهد و فولاد نرم باعث جلوگیری از شکست ماده در مقابل تنش بالای ایجاد شده در اثر نوسانات شدید دما در یک زمان کوتاه می شود. بنابراین این ماده دارای خواص بسیار خوب ترمومکانیکی است [2].

امروزه نانو سوئیچ ها¹ و نانو تحرک کننده ها² به خاطر مزایای زیاد مثل قیمت کم، اتلاف انرژی کم، توان کم مورد نیاز، ظرفیت تغییر شکل زیاد و ساخت نسبتاً آسان، یکی از مهم ترین اعضای تشکیل دهنده سیستم های نانو الکترومکانیک³ هستند. کارائی و عملکرد یک تحرک کننده بسیار وابسته به هندسه و نوع مواد به کار گرفته شده در طراحی قسمت محرک و یا تغییر شکل پذیر است. در این میان نانوتحرک کننده های تیر شکل به طور گسترده به خاطر سادگی نسبت به بقیه شکل های هندسی مورد استفاده قرار می گیرد. تیر استفاده شده در این سیستم ها معمولاً به دو صورت یک سرگیردار و دوسرگیردار در نظر گرفته می شود. سیلیکون، سیلیکون نیترید، کربن نانو تیوب، پلوتونیوم و طلا در بیشتر مواقع برای ساخت قسمت محرک مورد استفاده قرار می گیرند. در سالیان اخیر با توجه به پیشرفت های زیادی که در علم ساخت مواد گوناگون ایجاد شده است، استفاده از مواد تابعی مدرج در نانو و میکروتحرک کننده ها پیشنهاد شده است [3, 4].

نانوتحرک کننده های تیر شکل معمولاً از یک الکتروود متحرک رسانا که بالای یک الکتروود ثابت قرار دارد، ساخته شده اند. با اعمال اختلاف پتانسیل مستقیم، نیروی کولمب⁴ ایجاد شده بین دو الکتروود سبب تغییر شکل الکتروود متحرک بالایی به سمت الکتروود ثابت پایینی می شود. در یک مقدار ولتاژ مستقیم، تعادل نیروی الکترواستاتیک و خاصیت الاستیک الکتروود متحرک به هم خورده و در نتیجه الکتروود متحرک بالایی بر روی الکتروود ثابت پایینی خراب می شود. این پدیده ناپایداری کششی یا پولین⁵ نامیده می شود. ولتاژ بحرانی که باعث ایجاد این پدیده می شود ولتاژ پولین نامیده می شود [5-7]. زمانی که ابعاد سیستم از ماکرو به نانو کاهش پیدا می کند دو اثر مهم نانومقیاس باید مد نظر قرار گیرد. اولین اثر نانومقیاس، اثرات نیروهای بین مولکولی همانند کازیمیر⁶ و واندروالس⁷ می باشد. نیروی کازیمیر معمولاً در فاصله جدایی (فاصله اولیه بین دو الکتروود) در حد چند صد نانومتر ظاهر می شود. برای حالت ایده آل با فرض دو صفحه بی نهایت و موازی با رسانایی عالی، مقدار نیروی کازیمیر با توان چهارم فاصله جدایی رابطه معکوس دارد. اما اگر میزان فاصله دو صفحه بسیار کم شده و به زیر 20 نانومتر برسد، نیروی کازیمیر عموماً اثر کمتری از دیگر نیروی بین مولکولی خواهد داشت لذا

1- Nanoswitches
2- Nanoactuator
3- Nano Electro Mechanical System (NEMS)
4- Coulomb Attraction
5- Pull-in Instability
6- Casimir Force
7- Van Der Waals Force

8- Couple Stress Theory
9- Strain Gradient Theory (SGT)
10- Modified Couple Stress Theory (MCST)
11- Length Scale Parameter
12- Modified Strain Gradient Theory (MSGT)
13- Polycrystalline-SiGe

$$\frac{1}{15} [\delta_{ik} (\varepsilon_{mm,i} + 2\varepsilon_{mi,m}) + \delta_{ki} (\varepsilon_{mm,j} + 2\varepsilon_{mj,m})] \quad (5)$$

$$\theta_i = \frac{1}{2} (\text{curl}(u))_i \quad (6)$$

در معادلات (2) تا (6)، u_i بیانگر مولفه‌های بردار جابجایی، γ_i معرف مولفه‌های بردار گرادیان اتساع γ^2 و θ_i معرف مولفه‌های بردار چرخش کوچک θ هستند. همچنین، مولفه‌های تانسور کرنش ε ، تانسور گرادیان کشش انحرافی³ $\eta^{(1)}$ و تانسور گرادیان چرخش متقارن⁴ χ^s به ترتیب با ε_{ij} ، $\eta^{(1)}_{ijk}$ و χ^s_{ijk} نشان داده شده‌اند. پارامترهای که با مشتق‌گیری از دانسیته انرژی کرنش نسبت به تانسورهای سینماتیک، $\eta^{(1)}_{ijk}$ و χ^s_{ijk} بدست می‌آیند به ترتیب با σ ، $\tau^{(1)}_{ijk}$ و m^s_{ij} نشان داده می‌شوند. تانسورهای $\tau^{(1)}_{ijk}$ و m^s_{ij} را تنش‌های مرتبه بالا⁵ می‌گویند و تانسور σ بیانگر تنش کوشی می‌باشد. بر طبق معادله ساختاری برای مواد الاستیک خطی، رابطه بین مولفه‌های تنش‌ها و کرنش‌ها در تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده بصورت (7) تا (10) نوشته می‌شوند [15]:

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{tr}(\varepsilon) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (7)$$

$$p_i = 2\mu l_0^2 \gamma_i \quad (8)$$

$$\tau^{(1)}_{ijk} = 2\mu l_1^2 \eta^{(1)}_{ijk} \quad (9)$$

$$m^s_{ij} = 2\mu l_2^2 \chi^s_{ijk} \quad (10)$$

در رابطه (7)، ضرایب λ و μ ، ثوابت لامه می‌باشند که ثابت μ را برحسب مدول یانگ E و ضریب پواسون⁶ ν می‌توان بصورت $\mu = E/2(1+\nu)$ نوشت. در معادلات ساختاری تنش‌های مرتبه بالا علاوه بر ثوابت لامه، سه پارامتر اثر اندازه l_0 ، l_1 و l_2 ظاهر شده است. یکی از نکات مهم در خصوص تئوری‌های مرتبه بالاتر همانند گرادیان کرنش، تعیین مقدار پارامتر اثر اندازه می‌باشد. در اینجا به اختصار چند روش برای تعیین این پارامترها بیان می‌گردد. یک بیان فیزیکی و کاربردی از پارامتر اثر اندازه را می‌توان در عبارت سختی خمشی نانوتیر یکسر درگیر در آزمایش خمش بدست آورد. بر پایه تئوری تنش کوپل و بکار بردن مدل تیر اویلر-برنولی⁷، پارامتر اثر اندازه را می‌توان بطور مستقیم از اختلاف بین مدول الاستیک بدست آورد [27]. پارامتر اثر اندازه را همچنین می‌توان از طریق شبیه‌سازی دینامیک ملکولی و یا کارهای آزمایشگاهی بدست آورد. محققان قبلی شبیه‌سازی اتمیستیک⁸ و دینامیک ملکولی را برای یافتن پارامترهای اثر اندازه بکار گرفته‌اند [28-30]. مارانگانی و شارما روش اتمیستیک را برای اندازه‌گیری ثوابت تئوری گرادیان کرنش در سازه‌ها بکار گرفتند [28]. آن‌ها مقادیر پارامتر اثر اندازه را برای برخی نیمه رساناهای فلزی و پلیمری بدست آوردند. به هر حال، پارامترهای اثر اندازه را می‌توان از طریق آزمایش هم مشخص نمود [28]. لام و همکارانش با بکار بردن آزمایش خمش، پارامترهای اثر اندازه را برای پلیمر اپوکسی محاسبه نمودند [12]. آن‌ها فرض نمودند در تئوری گرادیان کرنش، تمام پارامترهای اثر اندازه با هم برابرند. با توجه به موارد اشاره شده در بالا، روشهای مختلفی همانند سختی خمشی نانوتیر الاستیک، روش اتمیستیک، دینامیک ملکولی و آزمایشگاهی را می‌توان برای محاسبه مقادیر پارامتر اثر اندازه در تئوری‌های مرتبه بالا بکار گرفت.

2-2- معادله حاکم و شرایط مرزی

شکل شماتیک نانوتحرک کننده الکترواستاتیک تیر شکل، که در این پژوهش

همکارانش [22] با استفاده از تئوری اصلاح شده تنش کوپل، ناپایداری پولین میکرو تیر ساخته شده از سرامیک و فلز را تحت تأثیر تغییرات دما مورد بررسی قرار دادند، نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که با افزایش مقدار کسر حجمی سرامیک در صفحه پایینی میکرو تیر بر مبنای تئوری کلاسیک، ولتاژ پولین کاهش می‌یابد در حالی که نتایج بدست آمده از تئوری تنش کوپل نتایج عکس را نشان می‌دهد. آن‌ها دلیل این امر را کوچک بودن مقدار پارامتر اثر اندازه سرامیک دانسته‌اند. عباس‌نژاد و همکارانش [23] ناپایداری پولین میکروتیر ساخته شده از جنس نیکل و طلا را مورد بررسی قرار دادند و فرض کردند که صفحه پایینی تیر از جنس طلای خالص و صفحه بالایی از جنس نیکل خالص ساخته شده است. طادی و آبادیان [24] با استفاده از تئوری گرادیان کرنش، ناپایداری پولین نانوائینه¹ تحت تأثیر نیروی بین مولکولی را مورد بررسی قرار دادند. نتایج این مقاله نشان می‌دهد که با نزدیک شدن ضخامت نانوتیر پیچشی به اندازه پارامتر اثر اندازه، میزان ولتاژ پولین افزایش پیدا می‌کند. همچنین طادی و همکارانش در دو مقاله مجزا ناپایداری پولین را در نانوتحرک کننده های تیر شکل از جنس مواد ایزوتروپیک مورد بررسی قرار داده‌اند [26,25].

با توجه به موارد اشاره شده در بالا، بررسی همزمان اثرات نیروهای بین ملکولی، اثر اندازه با استفاده از تئوری گرادیان کرنش و جنس مواد تابعی مدرج در ناپایداری پولین نانوتحرک کننده‌های تیر شکل بطور همزمان انجام نشده است. لذا در این پژوهش علاوه بر بررسی همزمان پدیده‌های بالا، معادله غیرخطی حاکم بر نانوتیر که در برگزیده اثرات غیرخطی نیروی الکترواستاتیکی و نیروهای بین مولکولی (نیوهای کازیمیر و واندروالس) می‌باشد با استفاده از روش عددی دیفرانسیل تربیع که روش بسیار کارآمدی می‌باشد حل شده است. از طرفی با توجه به کلی‌تر بودن تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده نسبت به تئوری تنش کوپل، در پژوهش حاضر ناپایداری پولین نانوتیر یک‌سرگرا دار ساخته شده از جنس مواد تابعی مدرج با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده مورد بررسی قرار گرفته و تأثیر اثرات اندازه با نتایج بدست آمده از تئوری کلاسیک و تنش کوپل اصلاح شده مقایسه گردیده است. در ضمن تأثیر تغییر کسر حجمی مواد و خصوصیات مکانیکی نانوتیر در راستای ضخامت با استفاده از توابع پیوسته توانی گزارش شده است.

2- مقدمات

1- مروری بر تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده

بر طبق تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده، میزان انرژی کرنشی (U) ذخیره شده برای ماده الاستیک خطی پیوسته با حجم Ω بصورت رابطه (1) نوشته می‌شود [12]:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau^{(1)}_{ijk} \eta^{(1)}_{ijk} + m^s_{ij} \chi^s_{ijk}) dV \quad (1)$$

با توجه به تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده، روابط بین کرنش‌ها و جابجایی‌ها بصورت رابطه (2) تا (6) بیان می‌گردد:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

$$\gamma_i = \varepsilon_{mm,i} \quad (3)$$

$$\chi^s_{ijk} = \frac{1}{2} (\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i}) \quad (4)$$

$$\eta^{(1)}_{ijk} = \frac{1}{3} (\varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j} + \varepsilon_{ji,k}) - \frac{1}{15} \delta_{ij} (\varepsilon_{mm,k} + 2\varepsilon_{mk,m})$$

1- Nanomirror

2- Dilatation gradient vector
3- Deviatoric stretch gradient
4- Symmetric Rotation Gradient Tensor
5- Higher-order stresses
6- Poisson's Ratio
7- Euler-Bernoulli
8- Atomistic

که در رابطه (13) پارمتر \bar{A} ضریب هماکر⁴ نام دارد و مقدار آن برابر است با $\bar{A} = (0/4-4) \times 10^{-19}$ پس می توان نتیجه گرفت که نیروی گسترده عمل کننده بر روی طول تیر از دو نیرو بصورت همزمان تشکیل شده است. اگر نیروی گسترده بر روی تیر با $q(x)$ نشان داده شود، آنگاه:

$$q(x) = f_{elec} + f_{disp},$$

$$f_{disp} = \begin{cases} f_{cas} \\ f_{vdw} \end{cases} \quad (14)$$

با توجه به اندازه فاصله بین دو الکترو ساکن و متحرک در رابطه بالا، فقط یکی از نیروهای کازمیر و یا واندروالس قالب بوده و عمل خواهد نمود. اگر طول تیر به اندازه کافی بلند باشد ($L > 20h$) تئوری تیر اوپلر-برنولی قابل اعمال است، در اینجا فرض شده است که طول تیر به اندازه کافی بلند است بنابراین تئوری تیر اوپلر-برنولی استفاده شده است. بر طبق این تئوری صفحات عمود بر تار خنثی تیر پس از تغییر شکل تیر نیز بصورت عمود نسبت به تار خنثی باقی می ماند [32]. با استفاده از این فرض و با توجه به شکل 1، میدان جابجایی تیر را می توان بصورت رابطه (15) نوشت:

$$u = -z \frac{\partial w(x)}{\partial x}, \quad v = 0, \quad w = w(x) \quad (15)$$

در معادله بالا u جابجایی در راستای محور x ، v جابجایی در راستای محور y و w جابجایی در راستای محور z را نشان می دهند. در ضمن z فاصله هر نقطه دلخواه در عرض تیر از محل تار خنثی می باشد. با استفاده از میدان جابجایی، تانسور کرنش تیر طبق معادله (2) صورت بدست می آید:

$$\epsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2},$$

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0 \quad (16)$$

با جایگذاری معادلات (15) و (16) در معادلات (3) تا (6) و با جایگذاری نتایج در معادلات (7) تا (10) و سپس جایگذاری تمام نتایج کل در معادله (1) انرژی کرنشی ذخیره شده در نانوتیر بصورت (17) بدست می آید:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 \quad (17)$$

$$D_1 = (EI)_{eq} + 2(\mu l_0^2 A)_{eq} + \frac{8}{15}(\mu l_1^2 A)_{eq} + (\mu l_2^2)_{eq}$$

$$D_2 = 2(\mu l_0^2 I)_{eq} + 2(\mu l_1^2 I)_{eq} \quad (18)$$

همانطور که قبلا نیز گفته شده، کسر حجمی و خصوصیات مکانیکی مواد تابعی مدرج در راستای ضخامت تغییر می کنند، در نتیجه خصوصیات معادل عبارتند از:

$$(EI)_{eq} = \int_A \left\{ \left(\frac{\int_A E(\hat{z}) \hat{z} dA}{\int_A E(\hat{z}) dA} \right) E(\hat{z}) \left[-2\hat{z} + \left(\frac{\int_A E(\hat{z}) \hat{z} dA}{\int_A E(\hat{z}) dA} \right) \right] + E(\hat{z}) \hat{z}^2 \right\} dA$$

$$(\mu l_i^2 A)_{eq} = \int_A \mu(\hat{z}) l_i^2(\hat{z}) dA \quad i = 0, 1, 2$$

$$(\mu l_i^2 I)_{eq} = \int_A \left\{ \left(\frac{\int_A E(\hat{z}) \hat{z} dA}{\int_A E(\hat{z}) dA} \right) \mu(\hat{z}) l_i^2(\hat{z}) \left[-2\hat{z} + \left(\frac{\int_A E(\hat{z}) \hat{z} dA}{\int_A E(\hat{z}) dA} \right) \right] + \mu(\hat{z}) l_i^2(\hat{z}) \hat{z}^2 \right\} dA \quad i = 0, 1, 2 \quad (19)$$

برای بدست آوردن معادلات بالا فرض شده است که مدول یانگ E ، مدول برشی μ و پارامترهای اثر اندازه l بصورت پیوسته در راستای ضخامت تغییر می کنند. برای محاسبه انتگرال در روابط (19) باید چگونگی تغییرات کسر حجمی و خصوصیات مکانیکی در راستای ضخامت مشخص باشد. یکی

مورد بررسی قرار می گیرد، در شکل 1 نشان داده شده است. همانطور که در شکل 1 دیده می شود، نانوتیریک کننده از دو الکترو تشکیل شده است، الکترو محرک یک تیر یک سرگردار است و از مواد تابعی مدرج ساخته شده است، این نانوتیر با فاصله جدایی ابتدایی g^1 بر بالای الکترو ثابت قرار گرفته است. پارامترهای h ، b و L به ترتیب بیانگر ارتفاع، ضخامت و طول نانوتیر هستند و برای نانوتیر با سطح مقطع مستطیل، $A=bh$ نشانگر سطح مقطع نانوتیر و $I=bh^3/12$ نشانگر ممان دوم سطح مقطع حول محور y نانوتیر می باشد. دستگاه مختصات کارترین $O(x,y,z)$ بر روی صفحه خنثی نانوتیر تعریف شده است، بطوری که محور x ($L \leq x \leq 0$) راستای طول نانوتیر را نشان می دهد و محور y ($-b/2 \leq y \leq b/2$) در راستای عرض نانوتیر قرار گرفته است و در نهایت محور z ($-h/2 \leq z \leq h/2$) در راستای ارتفاع نانوتیر قرار دارد. پارامتر z_c فاصله هر نقطه دلخواه از صفحه پایینی نانوتیر را نشان می دهد و پارامتر z_c میزان فاصله تار خنثی از صفحه پایینی را نشان می دهد.

برای ایجاد جریان ولتاژ مستقیم V در طول نانوتیر از یک منبع الکتریکی DC که بین دو الکترو قرار گرفته، استفاده شده است. برقراری جریان باعث ایجاد نیروی الکترواستاتیک غیرخطی تابع خیز نانوتیر، در راستای طول نانوتیر می شود که این نیرو به صورت گسترده در طول نانوتیر عمل می نماید. با در نظر گرفتن پارمتر w بعنوان خیز در راستای محور z ، مقدار نیرو الکترواستاتیک بصورت (11) محاسبه می شود [7]:

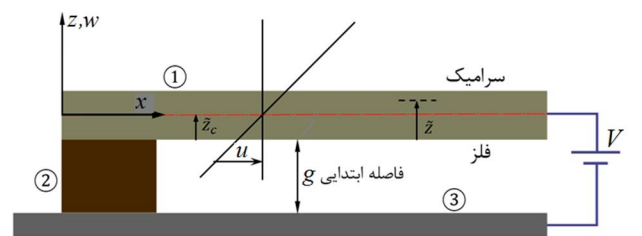
$$f_{elec}(w, V) = \frac{\epsilon_0 b V^2}{2(g-w)^2} + \frac{0.65 \epsilon_0 V^2}{2(g-w)} \quad (11)$$

در رابطه (11)، $\epsilon_0 = 8/854 \times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}$ ، ضریب عبور از خلا² نام دارد. به غیر از نیروی الکترواستاتیک، با توجه به اندازه فاصله ابتدایی دو الکترو نیروهای بین مولکولی نیز بر روی نانوتیر اعمال می شوند. نیروهای بین مولکولی بر واحد طول نانو تیر از دو نیروی کازمیر و واندروالس تشکیل می گردند. زمانی که میزان فاصله ابتدایی بالاتر از صد نانومتر باشد، نیروی کازمیر باید در نظر گرفته شود، که برای حالت ایده آل از رابطه (12) بدست می آید [9]:

$$f_{cas} = \frac{\pi^2 \hbar c b}{240(g-w)^4} \quad (12)$$

که در رابطه (12) $\hbar = 1/055 \times 10^{-34} Js$ ثابت پلانک کاهش یافته³ و $c = 2/988 \times 10^8 ms^{-1}$ سرعت نور را نشان می دهند. زمانی که میزان فاصله ابتدای به حد چند ده نانومتر و کمتر می رسد نیروی واندروالس پارامتر تأثیرگذاری است، در این حالت جاذبه دو صفحه در حالت ایده آل برابر رابطه (13) می باشد [31]:

$$f_{vdw}(w) = \frac{\bar{A} b}{6\pi(g-w)^3} \quad (13)$$



شکل 1 شماتیک نانو تیر تحریک کننده تیر شکل
 ① نانوتیر تابعی مدرج ② الکترو ثابت ③ فضای عایق

1- Initial Separation
 2- Permittivity of Vacuum
 3- Plank's constant

4- Hamaker

$$\left[\left(D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \left(D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \right]_{x=0,L} = 0 \quad \text{یا} \quad \left[\delta \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=0,L} = 0$$

$$\left[D_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right]_{x=0,L} = 0 \quad \text{یا} \quad \left[\delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{x=0,L} = 0 \quad (30)$$

برای سادگی حل عددی، معادله حاکم و هر دو شرایط مرزی کلاسیک و غیرکلاسیک باید بی بعد گردد. برای اینکار، ترم‌های جدید (31) تعریف می‌شوند:

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{g} \quad (31)$$

پارمتر \tilde{x} بیانگر محور مختصات بی بعد در راستای طول نانوتیر است و جایگزین x می‌شود و \tilde{w} جابجایی بی‌بعد نانوتیر را نشان می‌دهد. با استفاده از عبارت‌های بی‌بعد تعریف شده، معادلات (29) و (30) را بصورت (32) و (33) می‌توان نوشت:

$$D_1 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} - D_2 \frac{\partial^6 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^6} = q(\tilde{x}) \quad (32)$$

$$\left[\tilde{D}_1 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^3} - \tilde{D}_2 \frac{\partial^5 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^5} \right]_{\tilde{x}=0,1} = 0 \quad \text{یا} \quad [\delta \tilde{w}]_{\tilde{x}=0,1} = 0$$

$$\left[\tilde{D}_1 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} - \tilde{D}_2 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} \right]_{\tilde{x}=0,1} = 0 \quad \text{یا} \quad \left[\delta \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right]_{\tilde{x}=0,1} = 0$$

$$\left[\tilde{D}_1 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^3} \right]_{\tilde{x}=0,1} = 0 \quad \text{یا} \quad \left[\delta \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} \right]_{\tilde{x}=0,1} = 0 \quad (33)$$

که پارامترهای D_2 و D_1 عبارتند از:

$$D_1 = 1 + \frac{\{2(\mu_0^2 A)_{eq} + \frac{8}{15}(\mu_1^2 A)_{eq} + (\mu_2^2 A)_{eq}\}}{(EI)_{eq}}$$

$$D_2 = \frac{\{2(\mu_0^2 I)_{eq} + \frac{4}{5}(\mu_1^2 I)_{eq}\}}{L^2 (EI)_{eq}} \quad (34)$$

و نیروی گسترده بر روی نانوتیر عبارت است از:

$$q(\tilde{x}) = \frac{\beta}{(1-\tilde{w})^2} + \frac{\gamma\beta}{(1-\tilde{w})} + \frac{\alpha_n}{(1-\tilde{w})^n} \quad (35)$$

که پارامترهای استفاده در معادله بالا، بصورت (36) و (37) تعریف می‌گردد:

$$\beta = \frac{bV^2 \varepsilon_0 L^4}{2g^3 (EI)_{eq}}, \quad \gamma = 0.65 \frac{g}{b} \quad (36)$$

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{\tilde{A}bL^4}{6\pi g^4 (EI)_{eq}} & (n=3) \quad \text{نیروی واندروالس} \\ \frac{\hbar\pi^2 cbL^4}{240g^5 (EI)_{eq}} & (n=4) \quad \text{نیروی کازیمیر} \end{cases} \quad (37)$$

3- روش حل

معادله حاکم و شرایط مرزی مربوطه در رابطه (32) الی (34) تشکیل یک سیستم معادله دیفرانسیل غیرخطی را می‌دهند که حل تحلیلی این سیستم موجود نیست، به همین دلیل در این پژوهش روش حل عددی دیفرانسیل تربیع، برای حل این معادلات استفاده شده است. بر اساس این روش، جابجایی بی بعد و همچنین مشتقات جابجایی در هر نقطه دلخواه عبارتند از: [34, 35]

$$\tilde{w} = \sum_{j=1}^N l_j \tilde{w}(\tilde{x}_j) \quad (38)$$

$$\frac{d^k}{d\tilde{x}^k} \bigg|_{\tilde{x}_i} = \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(k)} w(\tilde{x})_j \quad (39)$$

از توابع معروف که برای تغییرات کسر حجمی استفاده می‌شود، قانون ساده توانی است. این تابع دقت بیشتری را نسبت به توابع دیگر می‌تواند فراهم کند به همین دلیل در مقالات متعدد برای تعریف چگونگی تغییر کسر حجمی مواد تابعی مدرج بصورت رابطه (20) بکار گرفته شده است [21, 33]:

$$V_m(\hat{z}) = 1 - \left(\frac{\hat{z}}{h}\right)^n, \quad V_c(\hat{z}) = \left(\frac{\hat{z}}{h}\right)^n \quad (20)$$

در معادله (20) بیانگر کسر حجمی و اندیس m نشانگر فولاد و اندیس c نشانگر سرامیک است. n بیانگر توان تابع است و دارای دو کرانه صفر و بی‌نهایت است که این کرانه‌ها به ترتیب به معنی ساخت تیر از ماده خالص سرامیک و فلز به تنهایی می‌باشند. پارامتر اثر اندازه یک خصوصیت ذاتی ماده بوده و در نتیجه در راستای ضخامت به صورت پیوسته تغییر می‌کند، اما در این پژوهش فرض می‌شود که این پارامتر در راستای ضخامت ثابت است [23]. بر اساس قانون کسر حجمی در معادله (20)، تغییرات هر خصوصیت مکانیکی ماده (P)، بصورت (21) تعریف می‌شود:

$$P(\hat{z}) = P_m V_m(\hat{z}) + P_c V_c(\hat{z}) \quad (21)$$

با جایگذاری معادله (20) در معادله (21) رابطه (22) را می‌توان نوشت:

$$P(\hat{z}) = P_m \left(1 - \left(\frac{\hat{z}}{h}\right)^n\right) + P_m \left(\left(\frac{\hat{z}}{h}\right)^n\right) \quad (22)$$

که پارامتر P می‌تواند هر یک از خصوصیات مکانیکی نانوتیر بصورت (23) باشد:

$$P = E, \mu l_0^2, \mu l_1^2, \mu l_2^2 \quad (23)$$

حال با جایگذاری معادله (22) در (19) هر خصوصیت مکانیکی بصورت (24) و (25) بدست می‌آید:

$$(PA)_{eq} = [P_c + nP_m] \frac{bh}{n+1} \quad (24)$$

$$(PI)_{eq} = \left(\frac{h^3}{n+3} - \frac{2h^2 \hat{z}_c}{n+2} + \frac{\hat{z}_c^2 h}{n+1} \right) b(P_c - P_m) + bP_m \left(\frac{h^3}{3} + \hat{z}_c^2 h - 2h^2 \hat{z}_c \right) \quad (25)$$

در معادله بالا پارامتر \hat{z}_c بیانگر محل قرارگیری تار خنثی نانوتیر نسبت به سطح پایین می‌باشد و بصورت (26) بیان می‌گردد:

$$\hat{z}_c = \frac{\int E(\hat{z}) \hat{z} dA}{\int E(\hat{z}) dA} = \frac{\frac{E_m}{2} + \frac{E_c - E_m}{n+2}}{E_m + \frac{E_c - E_m}{n+1}} \quad (26)$$

نیروهای گسترده اعمالی بر روی نانوتیر در (14) معرفی شده‌اند که کار انجام شده توسط این نیروها عبارتست از:

$$W = \int_0^L q(x) w dx \quad (27)$$

حال با بکار گرفتن روش وردش و استفاده از اصل مینیم انرژی پتانسیل می‌رابطه (28) توان نوشت:

$$\delta(U - V) = 0 \quad (28)$$

که δ بیانگر نماد وردش¹ می‌باشد. معادله حاکم و شرایط مرزی کلاسیک و غیرکلاسیک را می‌توان از معادله (28) استخراج کرد. با جایگذاری معادلات (17) و (27) در معادله (28) و اعمال یکسری عملیات ریاضی، معادله حاکم و شرایط مرزی بصورت (29) و (30) بدست می‌آیند:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(D_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) = q(x) \quad (29)$$

$$\left[\left(D_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) - \left(D_2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \right) \right]_{x=0,L} = 0 \quad \text{یا} \quad [\delta w]_{x=0,L} = 0$$

1- Variation Symbol

1- با استفاده از قسمت خطی سری تیلور، بردار نیرویی اولیه بصورت رابطه (50) بازنویسی می‌شود:

$$\tilde{q}_i = (2\beta + \gamma\beta + \alpha n)\tilde{w}_i + \alpha + \beta + \gamma\beta \quad (50)$$

حال با فرض مقدار ولتاژ اولیه V_0 و حل معادله (47) و شرایط مرزی (48) و (49) مقدار بردار جابجایی \tilde{w} بدست می‌آید.

2- با مساوی قرار دادن $\tilde{w}^* = \tilde{w}$ و جایگذاری \tilde{w}^* در معادله (47) یک بردار نیروی جدید بدست می‌آید. با استفاده از بردار نیروی جدید و باز نویسی معادلات حاکم به فرم ماتریسی خواهیم داشت:

$$K\tilde{w} = \tilde{q} \quad (51)$$

در معادله بالا، K بیانگر ماتریس سختی می باشد [35]. پس از حل معادله ماتریسی بالا، بردار جدید خیز \tilde{w}^1 بدست می‌آید.

3- با جایگذاری \tilde{w}^1 به جای \tilde{w}^* و تکرار مرحله دوم، بردار جابجایی \tilde{w}^2 بدست می‌آید.

4- تکرار مرحله 3 تا همگرا شدن تغییر شکل با استفاده از تکران خطایی زیر ادامه می یابد:

$$\text{خطا} = \sqrt{\frac{\sum (\Delta \tilde{w}^m)^2}{\sum (\tilde{w}^{m+1})^2}} \quad (52)$$

که در معادله بالا $\Delta \tilde{w}^m = \tilde{w}^{m+1} - \tilde{w}^m$ است. افزایش میزان ولتاژ اولیه تا زمانی که ماتریس سختی K تکین شود و یا معادله (52) ارضا نشود ادامه می یابد. آخرین ولتاژ که میزان تغییر شکل آن معادله (52) را ارضا می کند ولتاژ پولین V_{PI} می باشد.

4- نتایج

ماده تابعی مدرج پلی-اس ای جی ای¹ در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفته است. این ماده تابعی مدرج، خود از دو ماده ژرمانیوم و سیلیکون تشکیل شده است و استفاده از این ماده در ساختارهای میکرو و نانو به خاطر خواص عالی ترمومکانیکی توصیه شده است [19]. در این بخش، برای تمام حالت‌های مختلف فرض شده است که سطح پایینی نانوتیر از جنس ژرمانیوم و سطح بالایی از جنس پلی‌سیلیکون ساخته شده است. در جدول 1 خصوصیات مکانیکی ماده پلی-اس ای جی ای آورده شده است. مقدار کسر حجمی مواد چگونگی تغییر خصوصیات مکانیکی تیر در راستای ضخامت با استفاده از تابع ساده توانی مشخص شده است، توان صفر بیانگر این است که نانوتیر به طور خالص از جنس پلی‌سیلیکون ساخته شده است و هر زمانی به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، جنس نانوتیر به سمت ژرمانیوم میل می‌کند. در شکل 2 چگونگی تغییرات مدول یانگ نانوتیر در راستای ضخامت بر حسب توان‌های متفاوت نشان داده شده است.

برای نانوتیر، طول 5 میکرومتر، ارتفاع 200 نانومتر و عرض 300 نانومتر و فاصله ابتدایی برابر 100 نانومتر در نظر گرفته شده است. برای اطمینان از درستی تئوری اویلر-برنولی برای تیر، نسبت طول به ضخامت تیر $L/h=25$ در نظر گرفته شده است. اگر مقدار $L/h < 20$ باشد تئوری تیر تیموشینکو باید اعمال شود [36]. نسبت عرض به ضخامت تیر برابر $b/h=1/5$ در نظر گرفته شده است، که کوچکتر از 5 است، اگر مقدار $b/h > 5$ باشد باید اثر عرض تیر در نظر گرفته شود. در استفاده از تئوری گرایان کرنش اصلاح شده فرض شده است که هر سه پارامتر اثر اندازه با هم مساوی هستند ($h_1=h_2=h_3=l$)، این فرض ساده در پژوهش‌های قبلی نیز استفاده شده است [37].

که در معادلات بالا، C_{ij}^k توابع وزن بوده و N بیانگر تعداد نودهایی است که بصورت غیر منظم بر روی کل دامنه (طول تیر) پخش شده‌اند و محل قرار گیری هر نود نسبت به ابتدای تیر بصورت (40) قابل بیان است:

$$\tilde{x}_i = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \frac{\pi(i-1)}{N-1} \right\} \quad (40)$$

برای محاسبه توابع وزن در روش دیفرانسیل تربیع، روش‌های بسیار ارائه شده است اما یکی از دقیق ترین و ساده ترین روش‌ها برای تعیین مقادیر توابع وزن و تقریب زدن مقدار تابع و مشتقات آن توسط شو ارائه شده است که در پژوهش‌های پیشین نیز مورد استفاده قرار گرفته است. بر مبنای روش شاو تابع وزن برای مشتق اول C_{ij}^1 را می‌توان از فرمول (41) محاسبه کرد [34]:

$$c_{ij}^{(1)} = \frac{\tilde{L}(\tilde{x}_i)}{(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)\tilde{L}(\tilde{x}_j)}; \quad i, j = 1, 2, \dots, N; i \neq j \quad (41)$$

$$c_{ii}^{(1)} = \sum_{j=1, j \neq i}^N -c_{ij}^{(1)}; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (42)$$

$$\tilde{L}(\tilde{x}_i) = \prod_{j=1}^N (\tilde{x}_i - \tilde{x}_j); \quad i, j = 1, 2, \dots, N; i \neq j \quad (43)$$

برای محاسبه مقادیر توابع وزن در مشتقات درجه بالاتر نیز می‌توان به شکل (44) عمل نمود:

$$c_{ij}^{(m)} = m \left\{ c_{ij}^{(1)} c_{ii}^{(m-1)} \frac{c_{ij}^{(m-1)}}{(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)} \right\} \quad i, j = 1, 2, \dots, N; \quad (44)$$

$$c_{ii}^{(m)} = \sum_{j=1, j \neq i}^N -c_{ij}^{(m)} \quad i = 1, 2, \dots, N; m = 2, 3, \dots, N-1 \quad (45)$$

با اعمال روش دیفرانسیل تربیع، معادله حاکم (32) بصورت (46) بازنویسی می‌شود:

$$\tilde{D}_1 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} \tilde{w}_j - \tilde{D}_2 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(6)} \tilde{w}_j = \tilde{q}_i \quad (46)$$

که در رابطه بالا توزیع نیرو در راستای طول تیر بصورت (47) خواهد بود:

$$\tilde{q}_i = \frac{\beta}{(1 - \tilde{w}_i)^2} + \frac{\gamma\beta}{(1 - \tilde{w}_i)} + \frac{\alpha_n}{(1 - \tilde{w}_i)^n} \quad (47)$$

با اعمال روش دیفرانسیل تربیع بر روی شرایط مرزی (33) و با استفاده از روش ارائه شده توسط شو [35] می‌توان نوشت:

$$\tilde{w}_1 = 0, \quad \sum_{j=1}^N c_{2j}^{(1)} \tilde{w}_j = 0, \quad \sum_{j=1}^N c_{3j}^{(1)} \tilde{w}_j = 0 \quad (48)$$

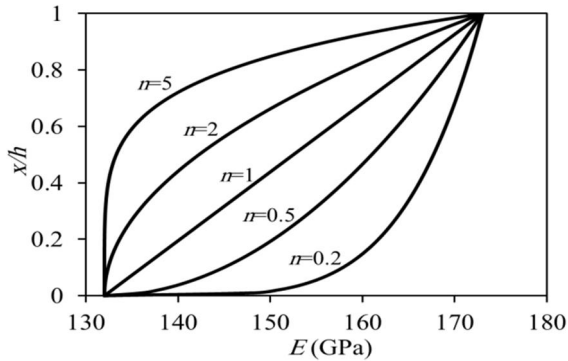
$$\tilde{D}_1 \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(3)} \tilde{w}_j - \tilde{D}_2 \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(5)} \tilde{w}_j = 0,$$

$$\tilde{D}_1 \sum_{j=1}^N c_{N-1j}^{(2)} \tilde{w}_j - \tilde{D}_2 \sum_{j=1}^N c_{N-1j}^{(4)} \tilde{w}_j = 0,$$

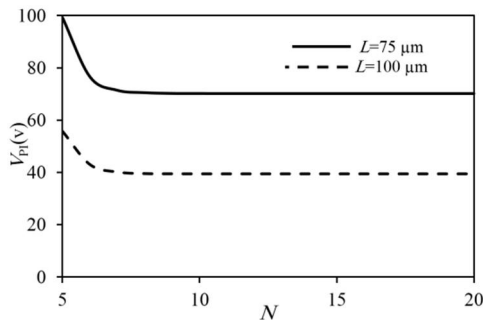
$$\tilde{D}_2 \sum_{j=1}^N c_{N-2j}^{(3)} \tilde{w}_j = 0 \quad (49)$$

معادله حاکم و شرایط مرزی کلاسیک و غیر کلاسیک در کنار هم تشکیل یک سیستم معادلات غیرخطی را می‌دهند، که این سیستم را می‌توان با استفاده از روش‌های حل نظیر نیوتن-رافسون حل کرد. اما در اینجا برای حل این دستگاه ابتدا با استفاده از سری تیلور بردار نیروی اعمالی خطی می‌شود و با استفاده از یک پروسه تکراری که در زیر می‌آید، ولتاژ پولین و جابجایی مربوط به آن بدست می‌آیند.

در جدول 3 خیز نوک تیر (W^{tip}) و ولتاژ پولین بی‌بعد (β) بدست آمده از روش حل حاضر، با نتایج حل تحلیلی و عددی پژوهش‌های پیشین برای مقادیر مختلف g/b (نسبت فاصله جدایی ابتدایی به پهنای تیر) مقایسه شده اند. همانطور که مشخص است نتایج حل حاضر تطابق بسیار خوبی با نتایج حل عددی در قیاس با نتایج حل تحلیلی دارد. این نتایج همچنین نشان می‌دهد تغییرات مقدار g/b تأثیر زیادی بر روی ولتاژ پولین دارد.



شکل 2 تغییرات مدول یانگ ماده در راستای ضخامت با قانون توانی



شکل 3 تغییرات ولتاژ پولین نسبت به تعداد نودهای در نظر گرفته شده در روش دیفرانسیل تربیع

جدول 2 مقایسه نتایج مدل ارائه شده و روش حل حاضر با نتایج آزمایشگاهی

طول میکروتیر (μm)	ولتاژ پولین بر مبنای تئوری کلاسیک (v)	ولتاژ پولین بر مبنای تئوری گرادیان کرنش (v)	ولتاژ پولین تجربی [38] (v)
	$h/l=17/29$	$h/l=10$	$h/l=8$
75	70/11	83/21	76/24
100	39/5	46/82	42/9
125	25/28	28/96	27/45
150	17/55	20/81	19/06
175	12/89	15/28	14/71
200	9/87	11/69	10/71
225	7/80	9/25	8/46
250	6/75	7/48	6/87

جدول 3 مقایسه بین نتایج روش حل حاضر و نتایج حل عددی و تحلیلی

روش حل	W^{tip}		β^{PI}	
	$g/b=1$	$g/b=0$	$g/b=1$	$g/b=0$
حل عددی [7]	0/487	0/436	1/174	1/680
حل تحلیلی [39]	0/517	0/472	1/274	1/827
حل حاضر	0/477	0/434	1/175	1/681

جدول 1 خصوصیات مکانیکی سیلکون و ژرمانیوم

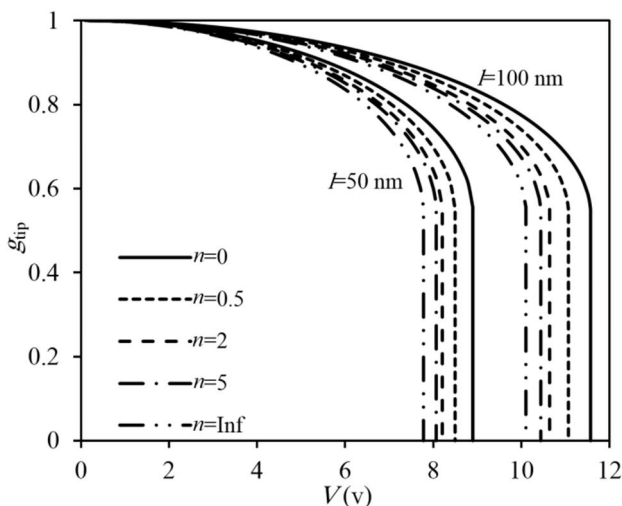
نام ماده	مدول یانگ (MPa)	مدول برشی (MPa)	ضریب پواسون	دانسیته (kgm^{-3})
ژرمانیوم	132	52/38	0/26	5330
سیلکون	173	68/65	0/26	2330

4-1- اعتبارسنجی

در ابتدا برای حصول اطمینان از درستی نتایج، لازم است که نتایج روش حل حاضر اعتبارسنجی و صحت‌سنجی شوند. به دلیل این که هیچ گونه کار آزمایشگاهی و تجربی بر روی نانو و یا میکروتیرهای ساخته شده از مواد تابعی مدرج انجام نگرفته است، در این پژوهش با استفاده از نتایج تجربی موجود در مرجع [38] برای میکروتیر همگن، روش حل حاضر اعتبارسنجی گردیده است. خصوصیات مکانیکی و ابعاد میکروتیر در نظر گرفته شده برای اعتبارسنجی عبارتند از: مدول یانگ و مدول برشی به ترتیب 169 و 65/8 گیگاپاسکال، طول بین 75 تا 250 میکرومتر، ارتفاع 2/94 میکرومتر، عرض 50 میکرومتر و فاصله ابتدایی بین دو الکتروود 1/05 میکرومتر.

اما قبل از اعتبارسنجی لازم است که نتایج روش دیفرانسیل تربیع از تعداد نودهای در نظر گرفته شده بر روی دامنه (طول میکروتیر) مستقل شوند و یا به عبارتی دیگر، تأثیر تعداد نودها بر روی نتایج بی‌اثر باشد. به همین منظور در شکل 3 تغییرات ولتاژ پولین برای دو طول متفاوت میکروتیر نسبت به تعداد نودهای در نظر گرفته شده در روش دیفرانسیل تربیع نشان داده شده است و همانطور که در شکل 3 دیده می‌شود نتایج در تعداد نود 9 و بالاتر از آن همگرا شده‌اند. اما با توجه به بررسی پارامترهای مختلف و احتمال تأثیر این پارامترها بر همگرایی نتایج، تعداد 17 نود دقت بالاتری را فراهم می‌کند، پس تمام نتایجی که در ادامه آورده شده است با استفاده از 17 نود بدست آمده‌اند.

در جدول 2 نتایج بدست آمده از روش حل حاضر و نتایج آزمایشگاهی از مرجع [38] با هم مقایسه شده‌اند. از مقایسه نتایج می‌توان فهمید که، تئوری کلاسیک نمی‌تواند نتایج آزمایشگاهی را بدرستی پیش‌بینی نماید اما تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده می‌تواند این نقص را پوشش داده و فاصله بین نتایج تئوری‌های کلاسیک و نتایج آزمایشگاهی را در مقیاس میکرو و نانو پوشش دهد. لازم به ذکر است که تئوری گرادیان کرنش خاصیت سخت‌شوندگی داشته و با انتخاب پارامتر اثر اندازه حتی به مقدار کوچک، نتایج آن بین نتایج تئوری کلاسیک و آزمایشگاهی قرار می‌گیرد لذا باید مقدار مناسب برای پارامتر اثر اندازه مشخص گردد. از طرفی بدست آوردن مقدار دقیق پارامتر اثر اندازه با توجه به توضیحات ارائه شده در بخش‌های قبلی کار دشواری می‌باشد لذا در این پژوهش سعی شده تا پارامتر اثر اندازه مقداری انتخاب گردد که بهترین پیش‌بینی را برای نتایج آزمایشگاهی داشته باشد. در این بخش با انتخاب $h/l=17/29$ مطابق جدول 2 بیشترین همگرایی بین نتایج این تئوری و نتایج آزمایشگاهی مشاهده می‌گردد. ذکر این نکته در اینجا لازم است که همانطور که مشاهده می‌گردد با بزرگتر شدن طول تیر، اثر تئوری گرادیان کرنش کم‌رنگ‌تر شده و به عبارتی اختلاف بین نتایج پیش‌بینی این تئوری و نتایج آزمایشگاهی زیاده‌تر می‌گردد که مؤید اهمیت تئوری گرادیان کرنش در مقیاس کوچک‌تر و عبارتی نانو نسبت به میکرو می‌باشد. در کل می‌توان گفت، بکار گرفتن تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده شکاف بین نتایج آزمایشگاهی و تئوری کلاسیک را در مقیاس میکرو/نانو پر نموده است.



شکل 5 تغییرات ولتاژ پولین نسبت به تغییرات فاصله جدایی در نوک نانوتیر بر طبق تئوری تنش کوپل اصلاح شده

جدول 4 مقایسه جابجایی نوک نانوتیر (μm) در تئوری های مختلف با نتایج تجربی

ولتاژ (v)	تئوری کلاسیک	تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده		
		l (μm)	تجربی [40]	نتایج
6/96	1/71	0/75	1/42	1/23
7/38	2/15	1/71	1/71	1/54
7/81	بی نهایت (پولین)	2/32	2/32	2

همانند شکل های 4 و 5 که به ترتیب برای تئوری های کلاسیک و تنش کوپل اصلاح شده رسم شده است در شکل 6، تغییرات ولتاژ برای تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده نشان داده شده است. همانطور که در شکل 6 دیده می شود این تئوری ولتاژ پولین بسیار بالاتری را از تئوری تنش کوپل اصلاح شده پیش بینی می کند و همچنین تأثیر افزایش پارامتر اثر اندازه در این تئوری بسیار بیشتر از تئوری تنش کوپل می باشد. علت این امر در این است که در معادله ساختاری تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده سه پارامتر اثر اندازه ظاهر می شود در حالی که در معادله ساختاری تئوری تنش کوپل اصلاح شده یک پارامتر اثر اندازه وجود دارد. از سوی دیگر می توان مشاهده نمود که، تأثیر تغییرات کسر حجمی بسیار وابسته به میزان پارامتر اثر اندازه می باشد. به بیان دیگر، با کاهش میزان پارامتر اثر اندازه از 100 نانومتر به 50 نانومتر تأثیر افزایش کسر حجمی ژرمانیوم که باعث کاهش ولتاژ پولین می شود کمتر شده است.

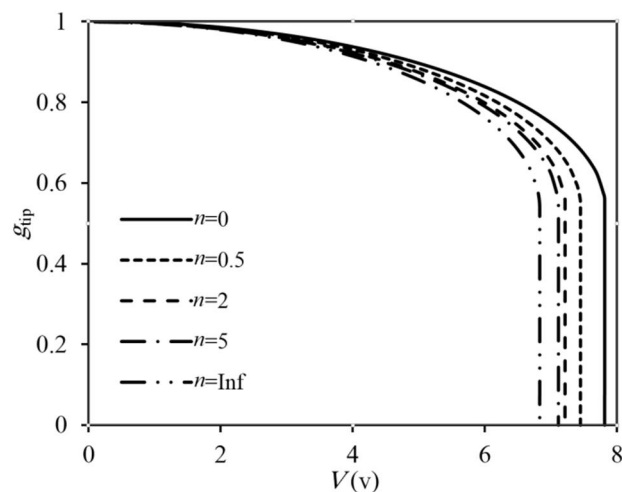
حال برای بررسی چگونگی برهم کنش همزمان تغییرات کسر حجمی و میزان پارامتر اثر اندازه بر روی ولتاژ پولین، در شکل 7 تغییرات ولتاژ پولین برای مقادیر مختلف میزان فاصله جدایی ابتدایی نسبت به افزایش کسر حجمی ژرمانیوم (رشد توان n) رسم شده است. در این شکل، خطوط کامل و خطوط خط چین به ترتیب ولتاژ پولین برای پارامتر اثر اندازه 100 و 50 نانومتر را نشان می دهند. همانطور که در شکل 7 دیده می شود، افزایش میزان کسر حجمی ژرمانیوم تا n=2 باعث کاهش سریع ولتاژ پولین می شود ولی بعد از آن شیب تغییرات کاهش می یابد. از سوی دیگر زمانی که میزان فاصله جدایی ابتدایی کاهش پیدا می کند، تغییرات کسر حجمی تقریباً بی اثر می شود.

برای مقایسه بیشتر نتایج این تئوری با نتایج آزمایشگاهی موجود، در جدول 4 مقایسه ای بین جابجایی نوک تیر در نقطه پولین فیمابین نتایج این تئوری و نتایج آزمایشگاهی مرجع [40] انجام شده است. همانطور که دیده می شود بهترین تطابق بین نتایج با انتخاب l برابر با 0/143 میکرومتر حاصل می گردد. مشابه توضیحات گذشته در جدول 2 در اینجا نیز مشاهده می گردد که تئوری گرادیان کرنش خاصیت سخت شوندگی داشته و نتایج این تئوری به نتایج آزمایشگاهی نزدیکتر است و این نتایج شکاف بین نتایج آزمایشگاهی و تئوری کلاسیک محیط پیوسته را در مقیاس میکرونانو پر نموده است.

4-2- تأثیر هم زمان کسر حجمی و اثر اندازه

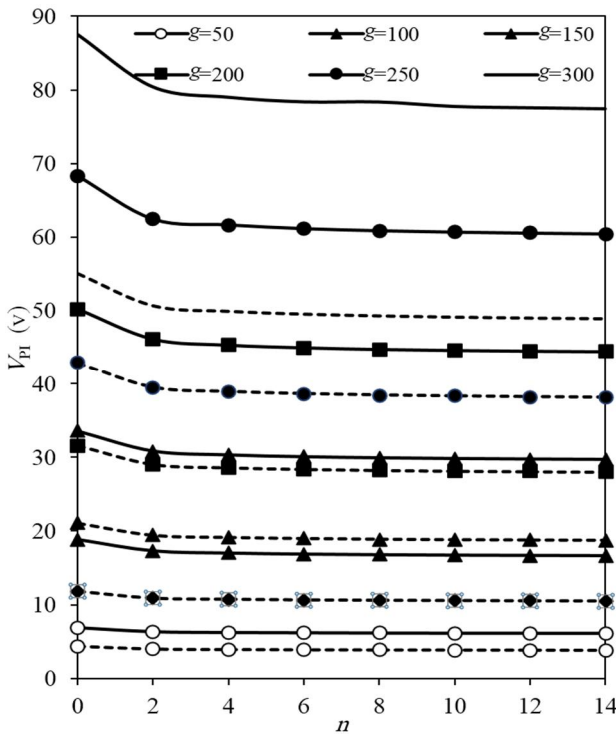
در این بخش، ابتدا برای درک بهتر اثر تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده و پارامتر اثر اندازه بر روی رفتار نانوتیر، نتایج بدست آمده از این تئوری با نتایج تئوری تنش کوپل اصلاح شده و همچنین تئوری کلاسیک، برای مقادیر متفاوت پارامتر اثر اندازه در شکل های 4، 5 و 6 مقایسه می شود. در شکل 4 تغییرات ولتاژ بر مبنای تئوری کلاسیک نسبت به تغییرات فاصله جدایی g_{tip}^1 (فاصله بین نوک تیر با الکتروود ثابت) در نوک نانوتیر نشان داده شده است. برای بررسی توأم اثر کسر حجمی، پنج نوع تیر با کسرهای حجمی متفاوت در نظر گرفته شده است. همانطور که قبلاً نیز اشاره شد توان صفر نشانگر ساخت نانوتیر از ماده سلیکون و توان بی نهایت نشانگر ساخت نانوتیر از ماده ژرمانیوم است. ولتاژی که در آن شیب منحنی بی نهایت می شود ولتاژ پولین نام دارد. همانطور که در شکل 4 دیده می شود با افزایش توان و در نتیجه رشد کسر حجمی ژرمانیوم که ماده نرم تری نسبت به ماده پلی سلیکون است، میزان ولتاژ پولین کاهش یافته است. این امر به دلیل کاهش سختی معادل نانوتیر است.

همانند شکل 4، تغییرات ولتاژ بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده برای پنج نوع نانوتیر و با در نظر گرفتن دو پارامتر اثر اندازه متفاوت در شکل 5 رسم شده است. تأثیر پارامتر اثر اندازه در افزایش سختی نانوتیر و در نتیجه افزایش ولتاژ پولین در تئوری تنش کوپل اصلاح شده نسبت به تئوری کلاسیک به خوبی در شکل 5 دیده می شود. به بیان دیگر در نظر گرفتن پارامتر اثر اندازه باعث افزایش میزان ولتاژ پولین شده است.

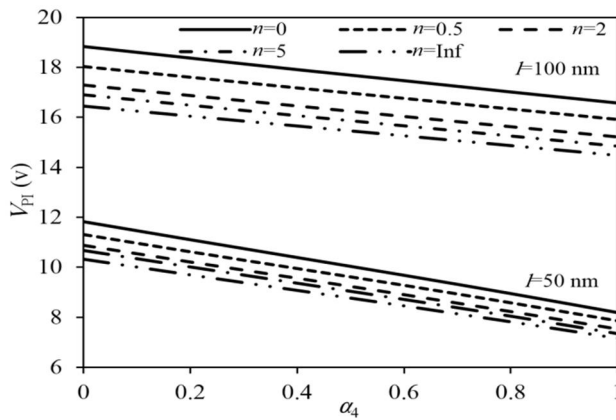


شکل 4 تغییرات ولتاژ پولین نسبت به تغییرات فاصله جدایی در نوک نانوتیر بر طبق تئوری کلاسیک

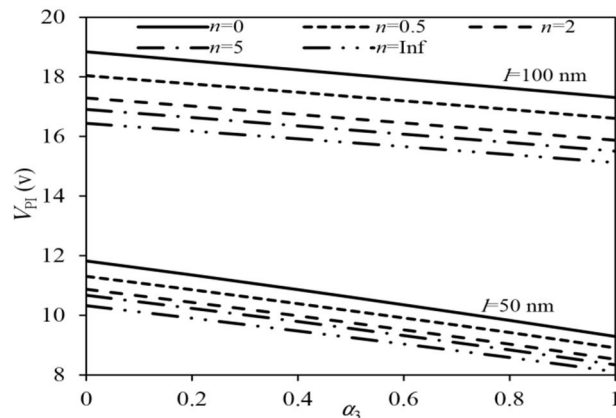
نماید. به همین منظور، تغییرات فاصله جدایی الکترودها (بر اثر خیز نانوتیر) در نوک نانوتیر نسبت به نیروی بی‌بعد کازیمیر در شکل 10 و نسبت به



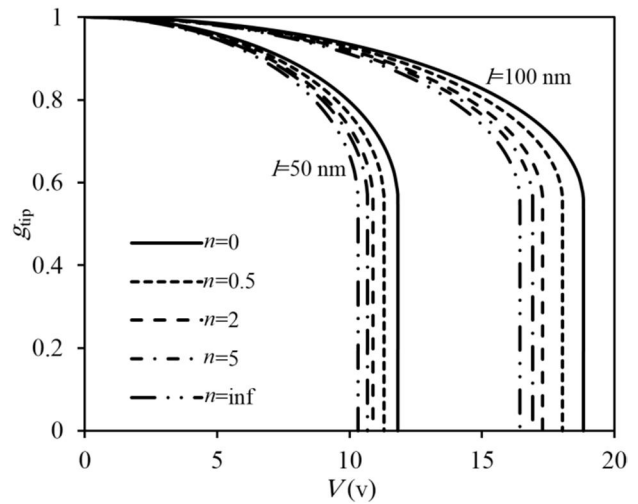
شکل 7 تغییرات ولتاژ پولین نسبت به تغییرات کسر حجمی ماده ژرمانیوم



شکل 8 تغییرات ولتاژ پولین نسبت به افزایش میزان نیروی کازیمیر



شکل 9 تغییرات ولتاژ پولین نسبت به افزایش میزان نیروی واندروالس



شکل 6 تغییرات ولتاژ پولین نسبت به تغییرات فاصله جدایی در نوک نانوتیر بر طبق تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده

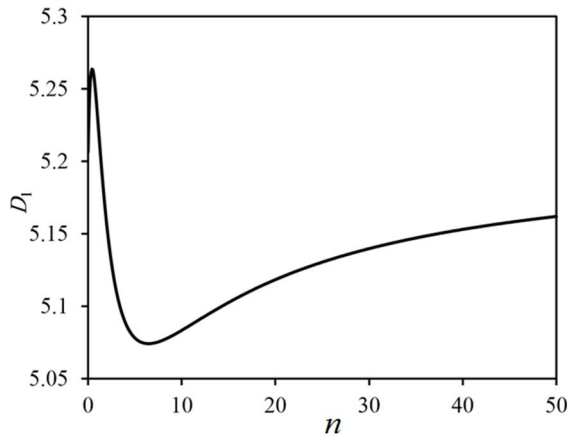
3-4- تأثیر همزمان نیروهای بین مولکولی و کسر حجمی

در این قسمت، اثر نیروهای بین مولکولی (کازیمیر و واندروالس) مورد بررسی قرار می‌گیرد. اگر فاصله جدایی الکترودها در حدود صد نانومتر باشد نیروی کازیمیر باید لحاظ گردد. در شکل 8، تأثیر افزایش این نیرو بر روی میزان ولتاژ پولین برای پنج نوع نانوتیر نشان داده شده است. افزایش نیروی بی‌بعد کازیمیر باعث کاهش میزان ولتاژ پولین می‌شود در حالی که افزایش کسر حجمی ژرمانیوم تأثیر چندانی بر شیب کاهش ولتاژ پولین ندارد. از شکل 8 مشاهده می‌گردد که با کاهش مقدار پارامتر اثر اندازه، مقدار ولتاژ پولین کاهش می‌یابد اما اثر نیروی کازیمیر افزایش می‌یابد. به بیان دیگر کاهش مقدار پارامتر اثر اندازه به معنی کاهش سختی نانوتیر است و از همین رو با کاهش سختی نانوتیر، تأثیر نیروی کازیمیر افزایش یافته و شیب نمودارها در شکل 8 تندتر می‌گردد.

یکی دیگر از نیروهای بین مولکولی تأثیرگذار که در فواصل جدایی کم الکترودها ظاهر می‌شود و میزان آن با توان سوم فاصله جدایی الکترودها رابطه دارد نیروی واندروالس است. تأثیر این نیرو بر روی ولتاژ پولین در شکل 9 رسم شده است. در نگاه اول، با مقایسه دو شکل 8 و 9 می‌توان دریافت که تأثیر نیروی واندروالس بر روی ولتاژ پولین شبیه تأثیر نیروی کازیمیر است و این یک امر منطقی است زیرا هر دو نیرو بصورت بی‌بعد در معادله حاکم بر نانوتیر ظاهر می‌شوند اما با توان متفاوت در فاصله جدایی الکترودها و این تفاوت توان باعث می‌شود که تأثیر نیروی واندروالس به مقدار بسیار کمی کمتر از نیروی کازیمیر باشد و این کاهش در پارامتر اثر اندازه 50 نانومتر به خوبی قابل مشاهده است. نکته دیگری که می‌توان از مقایسه دو شکل 8 و 9 دریافت این است که با افزایش مقدار نیروهای بی‌بعد کازیمیر و واندروالس، خطوط ولتاژ پولین برای هر پنج نوع تیر به هم همگرا می‌شوند که این نکته در پارامتر اثر اندازه کوچکتر بطور واضح قابل مشاهده می‌باشد.

4-4- مقادیر بحرانی

اگر طول نانوتیر بیش از اندازه بلند باشد و یا فاصله جدایی الکترودها بسیار کم باشد، به دلیل وجود نیروهای بین مولکولی ممکن است حتی بدون اعمال ولتاژ مستقیم، نانوتیر حرکت کننده دچار پدیده ناپایداری کششی شود. بنابراین طراح باید از مقدار بحرانی این نیروها اطلاع داشته باشد تا بتواند بر اساس آن میزان ماکزیمم و مینیمم طول و فاصله ابتدایی جدایی الکترودها را تعیین

شکل 12 تغییرات ضریب D_1 با افزایش کسر حجمی ژرمانیوم

همانطور که گفته شد برای دو حالت $n=0$ و $n=\infty$ میزان ضریب D_1 مساوی است زیرا نسبت مدول یانگ به مدول برشی در هر دو جنس با هم برابر است و در نتیجه نیروهای بین مولکولی تأثیر یکسانی بر روی این دو نوع نانوتیر دارند و دو خط مربوط به این مقادیر در شکل 10 و 11 بر روی هم منطبق شده‌اند. لازم به ذکر است که در حالت کلی میزان نیروی بحرانی واندروالس بیشتر از نیروی بحرانی کازیمیر می باشد.

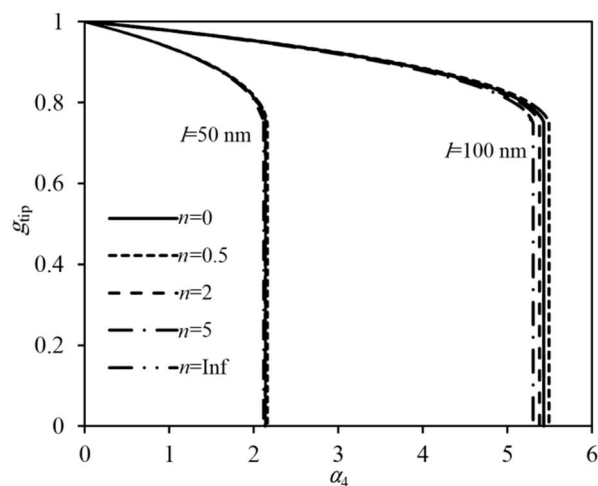
5- نتیجه گیری

در این پژوهش، ناپایداری پولین نانوتیرکننده تیر شکل یک سرگردار ساخته شده از مواد تابعی مدرج تحت اثر نیروهای بین مولکولی با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده مورد بررسی قرار گرفته است. برای بررسی اثر کسر حجمی از قانون توانی استفاده شده است و با استفاده از افزایش میزان کسر حجمی جزء ژرمانیوم پنج نوع متفاوت از نانوتیر مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج زیر را می توان به عنوان نتیجه کلی بیان نمود:

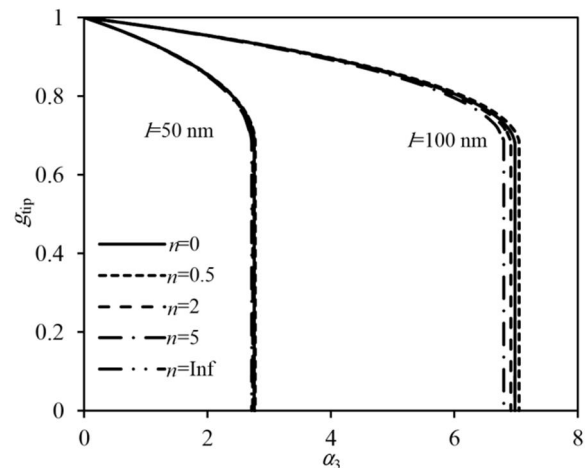
- نتایج بدست آمده از مدل مورد استفاده در این پژوهش تطابق خوبی با نتایج تجربی و روش های حل عددی دیگر از خود نشان دادند و مشاهده شد که تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده می تواند فاصله بین نتایج تجربی و تئوری کلاسیک را با در نظر گرفتن پارامتر اثر اندازه بپوشاند. همچنین این تئوری سختی بالاتری را برای نانو تیر نسبت به تئوری کلاسیک و تنش کوپل اصلاح شده پیش بینی می کند.
- بررسی نتایج نشان می دهد که اثر اندازه یکی از پارامترهای تأثیر گذار بر روی ناپایداری پولین است و با افزایش پارامتر اثر اندازه میزان ولتاژ پولین افزایش و با کاهش آن کاهش می یابد و همچنین اثر پارامتر اثر اندازه در تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده بسیار بالاتر از تئوری تنش کوپل اصلاح شده می باشد.
- بر اساس تابع توانی، چگونگی تغییرات کسر حجمی در راستای ضخامت نانوتیر برای ماده مدل سازی شد. نتایج نشان می دهد که کسر حجمی تأثیر زیادی بر روی ولتاژ پولین دارد و همچنین تأثیر کسر حجمی پارامتری وابسته به پارامتر اثر اندازه نیز است و با افزایش آن افزایش می یابد.
- نیروهای کازیمیر و واندروالس در مقیاس نانو تأثیر زیادی بر روی ولتاژ پولین دارند و باعث کاهش ولتاژ پولین می شوند. همانطور

نیروی بی بعد واندروالس در شکل 11، بدون اعمال ولتاژ رسم شده است. مطابق شکل ها، در مقدار نیرویی که شیب خط بی نهایت می شود، ناپایداری کششی ایجاد می گردد. افزایش پارامتر اثر اندازه در این نمودارها باعث افزایش مقادیر نیروهای بحرانی شده است اما افزایش کسر حجمی ژرمانیوم تأثیر متفاوتی بر روی میزان این نیروها دارد. بعنوان مثال دو خط $n=0$ و $n=\infty$ مربوط به نانوتیر ساخته شده از ژرمانیوم خالص و سیلیکون خالص، دقیقاً بر روی یکدیگر منطبق شده اند اما برای نانوتیر با $n=0/5$ بیشترین میزان نیروی بحرانی مشاهده می گردد. این رفتار، کاملاً متفاوت با حالتی می باشد که در آن ولتاژ مستقیم اعمال می گردد.

برای روشن شدن این رفتار دوگانه باید توجه نمود که چون نیروها بی بعد هستند تنها جایی اثر کسر حجمی و در نتیجه خصوصیات مکانیکی وارد معادله می شوند که ضرایب D_1 و D_2 موجود می باشند لذا باید تغییرات این ضرایب مورد بررسی قرار گیرد. البته مقدار ضریب D_2 بسیار کم می باشد لذا در شکل 12 تغییرات ضریب D_1 با افزایش کسر حجمی ژرمانیوم نشان داده شده است. همانطور که در شکل 12 دیده می شود با افزایش مقدار کسر حجمی، ابتدا ضریب D_1 افزایش سپس کاهش و دوباره افزایش می یابد و در بی نهایت با مقدار اولیه خود تقریباً برابر می گردد. مقدار ماکزیمم D_1 مطابق شکل 12 در توان $n=0/5$ اتفاق می افتد و به همین دلیل بیشترین نیروهای بین مولکولی بحرانی در نانوتیر با این کسر حجمی (با این توان) خواهد بود.



شکل 10 مقادیر بحرانی نیروی کازیمیر بدون اعمال ولتاژ



شکل 11 مقادیر بحرانی نیروی واندروالس بدون اعمال ولتاژ

- nonlinear micro-switches under electrostatic and Casimir forces, *Acta mechanica*, Vol. 218, No. 1-2, pp. 161-174, 2011.
- [21] X. L. Jia, J. Yang, S. Kitipornchai, C. W. Lim, Pull-in instability and free vibration of electrically actuated poly-SiGe graded micro-beams with a curved ground electrode, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, No. 5, pp. 1875-1884, 5//, 2012.
- [22] M. Zamanzadeh, G. Rezazadeh, I. Jafarsadeghi-poornaki, R. Shabani, Static and dynamic stability modeling of a capacitive FGM micro-beam in presence of temperature changes, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 10-11, pp. 6964-6978, 6//, 2013.
- [23] B. Abbasnejad, G. Rezazadeh, R. Shabani, Stability analysis of a capacitive fgm micro-beam using modified couple stress theory, *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 26, No. 4, pp. 427-440, 8//, 2013.
- [24] Y. T. Beni, M. Abadyan, Use of strain gradient theory for modeling the size-dependent pull-in of rotational nano-mirror in the presence of molecular force, *International Journal of Modern Physics B*, Vol. 27, No. 18, 2013.
- [25] Y. Tadi Beni, I. Karimipour, Static pull-in instability analysis of beam type NEMS under molecular force using strain gradient theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 3, pp. 37-49, 2012. (In Persian)
- [26] I. Karimipour, A.R. Karimipour, Y. Tadi Beni, Determination of size-dependent non-linear pull-in instability of clamped nano-Beam based on the modified strain gradient theory using HPM, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 2, pp. 101-112, 2015 (In Persian)
- [27] S. Park, X. Gao, Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 16, No. 11, pp. 2355, 2006.
- [28] R. Maranganti, P. Sharma, A novel atomistic approach to determine strain-gradient elasticity constants: Tabulation and comparison for various metals, semiconductors, silica, polymers and the (ir) relevance for nanotechnologies, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 55, No. 9, pp. 1823-1852, 2007.
- [29] W. Duan, C. M. Wang, Y. Zhang, Calibration of nonlocal scaling effect parameter for free vibration of carbon nanotubes by molecular dynamics, *Journal of Applied Physics*, Vol. 101, No. 2, pp. 024305-024305-7, 2007.
- [30] K. Chan, Y. Zhao, The dispersion characteristics of the waves propagating in a spinning single-walled carbon nanotube, *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, Vol. 54, No. 10, pp. 1854-1865, 2011.
- [31] A. Gusso, G. J. Delben, Dispersion force for materials relevant for micro- and nanodevices fabrication, *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 41, No. 17, pp. 175405, 2008.
- [32] Y. Fu, J. Zhang, Size-dependent pull-in phenomena in electrically actuated nanobeams incorporating surface energies, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 35, No. 2, pp. 941-951, 2011.
- [33] X. L. Jia, S. M. Zhang, L. L. Ke, J. Yang, S. Kitipornchai, Thermal effect on the pull-in instability of functionally graded micro-beams subjected to electrical actuation, *Composite Structures*, Vol. 116, No. 0, pp. 136-146, 9//, 2014.
- [34] C. Shu, *Differential quadrature and its application in engineering*, London: Springer, 2000.
- [35] C. Shu, H. Du, A generalized approach for implementing general boundary conditions in the GDQ free vibration analysis of plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, No. 7, pp. 837-846, 1997.
- [36] G.-F. Wang, X.-Q. Feng, Timoshenko beam model for buckling and vibration of nanowires with surface effects, *Journal of physics D: applied physics*, Vol. 42, No. 15, pp. 155411, 2009.
- [37] S. Kong, S. Zhou, Z. Nie, K. Wang, Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 47, No. 4, pp. 487-498, 2009.
- [38] P. M. Osterberg, S. D. Senturia, M-TEST: a test chip for MEMS material property measurement using electrostatically actuated test structures, *Microelectromechanical Systems, Journal of*, Vol. 6, No. 2, pp. 107-118, 1997.
- [39] A. Ramezani, A. Alasty, J. Akbari, Closed-form solutions of the pull-in instability in nano-cantilevers under electrostatic and intermolecular surface forces, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, No. 14, pp. 4925-4941, 2007.
- [40] B. D. Jensen, M. P. de Boer, N. D. Masters, F. Bitsie, D. A. LaVan, Interferometry of actuated microcantilevers to determine material properties and test structure nonidealities in MEMS, *Microelectromechanical Systems, Journal of*, Vol. 10, No. 3, pp. 336-346, 2001.

که از نتایج مشاهده می گردد، تأثیر این نیروها با کاهش مقدار پارامتر اثر اندازه افزایش می یابد.

• با بررسی مقادیر بحرانی نیروهای بین مولکولی مشاهده گردید که بدون اعمال ولتاژ نیز ممکن است پدیده ناپایداری پولین بر اثر اعمال نیروهای بین مولکولی ایجاد شود و همچنین هر نانوتیر در این قسمت رفتار متفاوتی را وابسته به میزان کسر حجمی ژرمانیوم از خود نشان می دهد.

6- مراجع

- [1] R. Javaheri, M. Eslami, Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 25, No. 7, pp. 603-625, 2002.
- [2] M. M. Zand, M. Ahmadian, Dynamic pull-in instability of electrostatically actuated beams incorporating Casimir and van der Waals forces, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 224, No. 9, pp. 2037-2047, 2010.
- [3] G. Rezazadeh, A. Tahmasebi, M. Zubstov, Application of piezoelectric layers in electrostatic MEM actuators: controlling of pull-in voltage, *Microsystem Technologies*, Vol. 12, No. 12, pp. 1163-1170, 2006/10/01, 2006. English
- [4] E. S. Hung, S. D. Senturia, Extending the travel range of analog-tuned electrostatic actuators, *Microelectromechanical Systems, Journal of*, Vol. 8, No. 4, pp. 497-505, 1999.
- [5] G. Taylor, The coalescence of closely spaced drops when they are at different electric potentials, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 306, No. 1487, pp. 423-434, 1968.
- [6] H. C. Nathanson, W. E. Newell, R. A. Wickstrom, J. R. Davis Jr, The resonant gate transistor, *Electron Devices, IEEE Transactions on*, Vol. 14, No. 3, pp. 117-133, 1967.
- [7] T. Mousavi, S. Bornassi, H. Haddadpour, The effect of small scale on the pull-in instability of nano-switches using DQM, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 50, No. 9, pp. 1193-1202, 2013.
- [8] M. Bordag, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko, New developments in the Casimir effect, *Physics Reports*, Vol. 353, No. 1-3, pp. 1-205, 10//, 2001.
- [9] S. K. Lamoreaux, The Casimir force: background, experiments, and applications, *Reports on progress in Physics*, Vol. 68, No. 1, pp. 201, 2005.
- [10] S. Kong, S. Zhou, Z. Nie, K. Wang, The size-dependent natural frequency of Bernoulli-Euler micro-beams, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 46, No. 5, pp. 427-437, 5//, 2008.
- [11] W. Nix, Mechanical properties of thin films, *Metallurgical Transactions A*, Vol. 20, No. 11, pp. 2217-2245, 1989/11/01, 1989. English
- [12] D. C. C. Lam, F. Yang, A. C. M. Chong, J. Wang, P. Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, No. 8, pp. 1477-1508, 8//, 2003.
- [13] I. Chasiotis, W. G. Knauss, The mechanical strength of polysilicon films: Part 2. Size effects associated with elliptical and circular perforations, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, No. 8, pp. 1551-1572, 8//, 2003.
- [14] W. Koiter, Couple stresses in the theory of elasticity, I and II, *Proceeding of*, 17-29.
- [15] F. Yang, A. C. M. Chong, D. C. C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 10, pp. 2731-2743, 5//, 2002.
- [16] R. D. Mindlin, Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 1, No. 4, pp. 417-438, 11//, 1965.
- [17] N. A. Fleck, J. W. Hutchinson, A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 41, No. 12, pp. 1825-1857, 12//, 1993.
- [18] N. A. Fleck, G. M. Muller, M. F. Ashby, J. W. Hutchinson, Strain gradient plasticity: Theory and experiment, *Acta Metallurgica et Materialia*, Vol. 42, No. 2, pp. 475-487, 2//, 1994.
- [19] A. Witvrouw, A. Mehta, The use of functionally graded poly-SiGe layers for MEMS applications, in *Proceeding of*, Trans Tech Publ, pp. 255-260.
- [20] X. L. Jia, J. Yang, S. Kitipornchai, Pull-in instability of geometrically