ماهنامه علمى پژوهشى





mme.modares.ac.ir

## شبیهسازی عددی جریان سیال میکروپلار در رگ گرفته شده مخروطی نامتقارن

### احمدرضا حقيقى<sup>1\*</sup>، آسيه شادىپور<sup>2</sup>، محمد شهبازىاصل<sup>3</sup>

1– دانشیار، ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه 2- دانشجوی کارشناسی ارشد، ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه

- مسیر وی در مسی رسم ریا سی در برای در منابع می میرد . 3- دانشجوی دکتری، ریاضی کاربردی، دانشگاه تبریز، تبریز

\* اروميه، صندوق پستى ah.haghighi@uut.ac.ir ،57155419

چکیده	اطلاعات مقاله
در تحقیق حاضر ویژگی های جریان ناپایدار خون در طول یک سرخرگ گرفته شده مورد بررسی قرار میگیرد. رگ مورد مطالعه دارای گرفتگی مخروطی از نوع نامتقارن بوده و دیوارهای آن الاستیک در نظر گرفته شده است. همچنین جریان خون بهصورت تراکمناپذیر، آرام و کاملاً گسترش یافته فرض شده است. برای در نظر گرفتن تاثیر ذرات معلق در خون، از مدل میکروپلار ارینگن برای توصیف سیال استفاده شده است. معادلات حاکم برجریان استخراج شده و با فرض گرفتگی خفیف سادهسازی صورت گرفته است. یک نگاشت مناسب بر روی معادلات مومنتوم و شرایط اولیه و مرزی اعمال میشود تا شبکهی مش کسینوسی به شبکهی مش منظم تبدیل شود. معادلات حاکم تحت شرایط مرزی ویژهای به اثرات پارامترهای مربوط به جریان و زاویه مخروطی برای بررسی پروفیل های سرعت محوری و چرخشی، دبی حجمی، تش برشی دیواره، مقاومت در برابر جریان لحاظ شده است. همچنین مشخصههای جریان خون در طول سرخرگ الاستیک و غیرالاستیک با همدیگر مقایسه میشوند که این امر اهمیت الاستیک فرض شدن رگ را نشان میدهد. به منظور اثبات درستی، نتایج بهدست آمده با نتایج تحقیقات بنشن معدد مقارسه قالی گرفته میشوند که این امریزه الاستیک فرض شدن رگ را نشان میدهد. به منظور اثبات درستی، نتایج به مورد برشی برشی	مقاله پژوهشی کامل دریافت: 26 خرداد 1396 ارائه در سایت: 10 آذر 1396 <i>کلید واژگان:</i> جریان خون ناپایا سیال میکروپلار گرفتگی نامتقارن روش تفاضلات متناهی

# Numerical simulation of micropolar fluid flow through an asymmetric tapered stenosis artery

#### Ahmad Reza Haghighi\*, Asiyeh Shadipour, Mohammad Shahbazi Asl

Department of Mathematics, Urmia University of Technology, Urmia, Iran \* P.O.B. 57155419, Urmia, Iran, ah.haghighi@uut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION	ABSTRACT
Original Research Paper Received 01 June 2017 Accepted 11 October 2017 Available Online 01 December 2017	In the present study, properties of unsteady blood flow through an stenosed artery is investigated. The study has a tapered artery stenosed and asymmetric elastic wall is considered. The flow of blood is assumed to be incompressible, laminar and fully developed. To consider the effect of suspended particles in the blood, fluid model is used to describe micropolar Eringen. Governing equations are extracted and Mild stenosis approximation is applied to simplify. Also, an suitable converted is applied to momentum equations, initial and boundary conditions, the cosine shape mesh grid to regular mesh grid by utilizing suitable transformation. Non-slip boundary condition equations using finite difference method is solved numerically. To investigate the graphical shapes in the study, the effect of parameters related to flow and tapered angle has been the matter of into rest to investigate the Axial and rotational velocity profiles, the volumetric flow rate, Wall shear stress and the results confirm the importance of elastic assumed and the results confirm the importance of elastic assumed entering the province literature.
<i>Keywords:</i> unsteady blood flow micropolar fluid asymmetric stenosed finite difference scheme	

گرفتگی تکمتقارن و یا غیرمتقارن رایجترین مدل برای شبیهسازی رگ گرفته شده در مطالعات مهندسی پزشکی به شمار می رود. این مدل بهطور گسترده توسط دانشمندان و مهندسین پزشکی برای تجزیه و تحلیل همودینامیک قسمت گرفتگی مورد استفاده قرار میگیرد [4,3]. با این حال ممکن است گرفتگی رگ بیشتر و اشکال نامنظمی به خود گیرد رفتار رئولوژیک پیچیدهی خون بخصوص در رگ گرفته شده، مویرگهای باریک نمی تواند توسط هر مدل ساختاری پیش بینی شود. به همین دلیل محققان چندین معادله با هدف تجزیه و تحلیل همودینامیک خون ارایه کردهاند [5].

#### 1- مقدمه

تجزیه و تحلیل جریان خون در طول رگ گرفته شده یکی ازموضوعات مورد علاقه و روبه رشد امروزهی علوم پزشکی در سطح جهان میباشد. شبیهسازی عددی با تحقیقات آزمایشگاهی در درمان و تشخیص بیماریهای قلبی-عروقی که یکی از علل عمدهی مرگومیر در انسان میباشد کارا هستند [1]. تحقیقات نظری و تجربی جریان خون در میان عروق با مشکلاتی مواجه است که بهطور گسترده با توجه به هندسه رگ و رفتار رئولوژیکی جریان خون طبقهبندی شده است [2]. لوله غیرالاستیک با یک مانع جهت نشان دادن

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

A. R. Haghighi, A. Shadipour, M. Shahbazi Asl, Numerical simulation of micropolar fluid flow through an asymmetric tapered stenosis artery, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 12, pp. 33-41, 2018 (in Persian)

خون سیالی است که از سوسپانسیون سلولهای مختلفی مانند گلبولهای قرمز، گلبولهای سفید، لکوسیتها و پلاکتها در مایعی به نام پلاسما تشکیل شده است [7,6]. حجم بیشتر خون را سلولهای قرمز احاطه کرده است [8].

سیال میکروپلار پیشنهادی ارینگن که در آن از تغییر شکل المانهای زير ساختى سيال صرفنظر شده و تنها حركات چرخشى وخطى ميكروذرات مورد بررسی قرار می گیرد [10,9]. این نوع سیالات دربردارندهی برخی اثرات میکروسکوپی ناشی از تغییر شکل محلی ذرات و میکروحرکات عناصر است [11]. این مدل یک مدل توسعهیافته از مدل ناویر-استوکس کلاسیک است که یک مدل بسیار مناسب و ساده نسبت به سایر مدلهای دیگر است [12]. در [13]، شبیهسازی یک مدل دوبعدی و دو لایهای از جریان خون غیردایم در طول سرخرگ گرفته شده با استفاده از روش تفاضل محدود انجام شده است که در آن نوع گرفتگی هندسه نسبت به جهت محوری غیرمتقارن و نسبت به جهت شعاعی متقارن در نظر گرفته شده است. سنکار و همکاران با فرض جریان خون به صورت سیال غیرنیوتونی یک مدل ریاضی برای جریان خون در طول سرخرگ گرفته شده ارایه کردند. جریان خون در این مطالعه بهصورت پالسی و متقارن محور و تراکمناپذیر فرض شده است و معادلات حاکم از روش اختلال حل شدهاند [14]. پونالاگوسامی و پریادهارشینی یک مدل دو لایه از جریان خون در میان رگ گرفته با ویسکوزیتههای متغیر درحضور میدان مغناطیسی که در آن از مدل سیال میکروپلار در لایه مرکزی و از یک سیال نیوتونی در لایه ی جانبی استفاده شده است و معادلات حاکم بر جریان از روش عددی کرانک نیکلسون حل شده است [15]. الکت و عباس در تحقیق خود با در نظر گرفتن یک کاتتر در میان رگ گرفته شدهی مخروطی از سیال میکروپلار برای رگ گرفته با گرفتگی خفیف استفاده کردند [16].

تحقیقات یانگ [17] برپایهی فرض گرفتگی خفیف رگ بوده است که در مطالعهی خود جریان خون را بهصورت سیال نیوتنی و هندسه را بهصورت متقارن در نظر گرفته است. رامانا دی و همکاران [18] از فرض گرفتگی خفیف در مطالعهی خود که در مورد مدلسازی ریاضی جریان خون ضربانی در یک رگ با گرفتگی غیرمتقارن به همراه کاتتر، اثر زاویه مخروطی و سرعت لغزش مورد بررسی قرار داده، استفاده کردهاند.

آترواسکلروز در سطح دیواره رگ دارای بینظمی است و هندسهی آن نسبت به جهت محوری نامتقارن هست [20,19] بهطور کلی بینظمی و نامتقارن بودن مدل هندسی باعث پیچیدگی در انجام شبیهسازی عددی و تحلیلی می شود از این رو در اکثر تحقیقات پیشین هندسه ی گرفتگی به صورت متقارن در نظر گرفته شده است. همچنین عروق در حالت طبیعی به صورت مخروطي هستند [21]. در اين مطالعه هندسه مفروض وابسته به زمان و به صورت الاستیک با گرفتگی غیر متقارن در جهت محوری در نظر گرفته شده است. همچنین بهدلیل گرادیان فشار ضربانی خون جریان خون بهصورت پالسی در نظر گرفته می شود. مدل سیال میکروپلار برای توصیف ذرات در مايع ويسكوز در بخش شرياني مناسب مي باشد كه مزيت آن نسبت به سیالات غیرنیوتونی دیگر این است که علاوه بر سرعت محوری و سرعت شعاعی، سرعت چرخشی، بهمنظور چرخش میکروذرات مورد بررسی قرار مى گيرد [23,22]. معادلات حاكم با استفاده از روش عددى تفاضلات متناهى حل شدهاند در مطالعهی حاضر درمورد اثرات پارامتر میکروپلار و تاثیر مخروطی بودن رگ مفروض بر روی مشخصه های هیدرودینامک جریان خون بحث شده است.

#### 2- فرمولبندی مسئله 2-1- هندسه گرفتگی

(1)

جریان خون را به صورت تراکم ناپذیر، دو بعدی و کاملا توسعهیافته در مسیر مستقیم، ضربانی، در رگ گرفته شده ی مخروطی با طول L در نظر گرفته می شود. نوع گرفتگی نسبت به محور نامتقارن ولی نسبت به شعاع متقارن در نظر گرفته می شود. یک سیستم استوانه ای  $(r, \theta, z)$  برای تجزیه و تحلیل مشکلات جریان استفاده شده است در حالی که محور r, r در راستای شعاعی و محوری رگ هستند. معادله ی توصیفی هندسه گرفتگی بی بعد وابسته به زمان به صورت زیر بیان می شود (شکل 1) [44–28]:

$$R(z,t) = \begin{cases} (1+\xi z)[1-\eta[l_0^{ng-1}(z-\beta) \\ (z-\beta)^{ng}]]a_1(t), \beta \le z \le \beta + l_0 \\ (1+\xi z)a_1(t) & \text{OW} \end{cases}$$

که در آن R(z,t),  $\eta = \delta/R_0 L_0^{ng} ng^{ng(ng-1)}/(ng-1)$  شعاع رگ گرفته شده، R شعاع رگ در ناحیه بدون گرفتگی،  $2 \leq ng$  پارامتر مربوط به گرفتگی، L طول رگ گرفته موردنظر،  $l_0$  طول گرفتگی و  $\beta$  نشاندهنده یمن غیرطبیعی از مبدا،  $\sigma_m$  نشاندهنده ی ارتفاع بحرانی بخش غیرطبیعی در موقعیت خاص  $m_0^{1/ng-1}$  اتفاق می افتد. پارامتر زمان (1) به این صورت تعریف می شود:

ی ه ترتیب بیانگر زاویه فاز،  $k_r$ ,  $\phi = a_1(t) = 1 + k_r \cos(\omega t - \phi)$ پارامتر نوسان و فرکانس زاویه ای می باشد. ( $\tan \theta$ ) =  $\tilde{\zeta}$  پارامتر کنترل همگرایی، واگرایی در یک رگ است. نمودار شماتیک رگ غیرمخروطی در "شکل 1" نشان داده شده است [26-24,14]:

#### 2-2- معادلات حاکم بر جریان خون

معادلات بیبعد حاکم بر جریان خون ناپایای سیال میکروپلار در دستگاه مختصات استوانهای بهصورت زیر است [29]:

$$\sigma_{m} \left( \frac{\partial u_{1}}{\partial r} + \frac{u_{1}}{r} \right) + \frac{\partial u_{2}}{\partial z} = 0$$

$$\sigma_{m} \mathcal{E}^{2} \left( \frac{\partial u_{1}}{\partial t} + \mathcal{E} \operatorname{Re} \left( \sigma_{m} u_{1} \frac{\partial u_{1}}{\partial r} + u_{2} \frac{\partial u_{1}}{\partial z} \right) \right)$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial r} + \sigma_{m} \mathcal{E}^{2} \left( \frac{\partial^{2} u_{1}}{\partial r^{2}} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{1}}{\partial r} + \frac{u_{1}}{r^{2}} \right)$$

$$- M \mathcal{E}^{2} \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$(3)$$

$$\alpha \left[ \frac{\partial u_2}{\partial t} \right] + \mathcal{E} \operatorname{Re} \left( \sigma_m u_1 \frac{\partial u_2}{\partial r} + \mathcal{E}^2 u_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} \\ + (1+M) \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} + \mathcal{E}^2 u_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right) \\ + \frac{M}{r} \frac{\partial (rw)}{\partial r} \tag{4}$$



Fig. 1 Geometry of stenosed artery with tapering شکل 1 هندسه در رگ گرفته شدهی مخروطی

بررسی معادله مومنتوم در جهت 
$$r$$
 در معادله (7) نشان میدهد: $\frac{\partial p}{\partial r} \ll \frac{\partial p}{\partial z}$  تغییرات فشار در جهت  $r$  درمقایسه با جهت  $z$  بسیار ناچیز است و همین طور معادله پیوستگی نشان میدهد که:  
 $\sigma^*$ 

$$\frac{\sigma_m}{R_0} \ll 1$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z} \ll 1$$
ندابط مشخص شدهی گذشتگی خفیف معادلات حاکم بر حریان بهصورت

با شرايد م بر جریان به زیر بازنویسی میشوند:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \tag{11}$$

$$\alpha \left[ \frac{\partial u_2}{\partial t} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + (1+M) \left[ \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} \right] + M \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial rw}{\partial r} \right]$$
(12)

$$\alpha J \left[ \frac{\partial W}{\partial t} \right] = -M \left( 2w + \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) + k \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (rw)}{\partial r} \right)$$
(13)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = A_0 + A_1 \operatorname{Re}\{e^{2\pi\omega_p t}\}$$
(14)

$$f_p$$
 و  $\omega = 2\pi f_p$  دامنه ثابت گرادیان فشار،  $A_1$  دامنه پالسی،  $\omega = 2\pi f_p$  و  $\omega$   
فرکانس پالسی است. فرم بیبعد معادله (14) بهدست میآید:  
می

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = B(1 + e\cos(ct)) \tag{15}$$

در معادلات (5-3).  $\alpha = \rho \omega R_0^2 / 2 \pi \mu$ عدد ومرسلی Re =  $\rho U_0 R_0 / \mu$  عدد رينولدز و همچنين:

$$e = \frac{A_1}{A_0} , c = \frac{\omega_p}{\omega} , B = \frac{A_0 R_0^2}{\mu U_0}$$
(16)

شرایط مرزی و شرایط اولیه برای جریان خون به صورت زیر معادلات در نظر گرفته می شود [33,32]:

شرايط اوليه:

$$u_{2}(r, z, 0) = 2U_{0} \left[ 1 - \left(\frac{\nu}{R}\right)^{2} + \frac{4\nu}{\beta_{1}^{2}} I_{0}(\beta_{1}) \left\{ \frac{I_{0}(\beta_{1}\nu)}{I_{0}(\beta_{1})} - 1 \right\} \right]$$
  
$$w(r, z, 0) = 0$$
(17)

شرايط مرزى:  $\partial u_{n}(r,z,t)$ 

$$\frac{\partial u_2(r,z,t)}{\partial r}|_{r=0} = 0, \quad w(r,z,t)|_{r=0} = 0$$

$$u_2(r,z,t)|_{r=R} = 0, \\ w(r,z,t)|_{r=R} = -\lambda \left(\frac{\partial u_2(r,z,t)}{\partial r}\right)$$
(18)
expansion of the second sec

جریان متفارن محور است و در محور رگ تغییراتی نسبت به ارتفاع ندارد. همچنین جمله دوم به این دلیل است که در مرکز رگ جریان چرخشی نداريم. جمله سوم نشان دهنده شرط مرزی عدم لغزش در دیواره هست. شرط مرزی دیواره برای سرعت چرخشی از مرجع [13] انتخاب شده است با توجه به این که جریان سیال کاملا گسترش یافته فرض شده است بنابراین در جهت جریان تغییرات ندارد و یا به بیان ریاضی  $\partial u_2/\partial z = 0$  و از لایهی مرزی عبور کرده است. این فرض برای اعمال شرایط مرزی در جهت جریان یعنی ابتدای رگ (z=0) و همچنین انتهای رگ (z=L) استفاده شده است.  $\nu = m \beta_1 / 4(I_1(\beta_1))$  و  $\beta_1^2 = N(2-m)$  و الاتباع بسل توسعه يافته،  $I_0$ و  $I_1$  تابع بسل بهبود یافته مرتبه اول از نوع اول است.

عبارات مناسب برای دبی حجمی، تنش برشی دیواره و مقاومت در برابر

$$\begin{aligned} \alpha J \frac{\partial w}{\partial t} + \mathcal{E} \operatorname{Re} J \left( \sigma_m u_1 \frac{\partial w}{\partial r} + u_2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &= -2Mw - M \left( \frac{\partial u_2}{\partial r} - \sigma_m \mathcal{E}^2 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \\ &+ K \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (rw)}{\partial r} \right) + \mathcal{E}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$
(5)

 $w = \frac{R_0 w^*}{U_0}, u_2 = \frac{u_2^*}{U_0}, r = \frac{r^*}{R_0}, z = \frac{z^*}{l_0}, t = \frac{t^* U}{2\pi}, R$ 

$$= \frac{1}{R_0}$$

$$p = \frac{R_0^2 p^*}{\rho U_0^2 l_0}, J = \frac{J^*}{R_0^2}, u_1 = \frac{u_1^* l_0}{U_0 \sigma_m}, K = \frac{\gamma}{\mu R_0^2}, M = \frac{m_1}{\mu}$$
(6)
$$p \quad (29) \quad (29) \quad (20) \quad (21) \quad (21)$$

#### 2-3- تجزیه و تحلیل شرط گرفتگی خفیف

برای سادهسازی معادلات از فرض گرفتگی خفیف استفاده شده است که معادلات بیبعد پیوستگی و مومنتوم با تغییرات شرایط گرفتگی و مقدارهای مشخصههای سرعت در فضای بی بعد از یک مرتبه بزرگی که تقریبا یک یا کمتر از یک که به طور نمادین با (1)0 نشان داده می شود که

هموار  $w, u_2, u_1$  و  $\mathcal{E} = R_0 / l_0 \simeq O(1)$  هموار  $\sigma_m = \sigma_m^* / R_0 \leq 1$ و پیوسته باشند مشتقاتشان از مرتبهی یک است [30]. با استفاده از این فرض معادلات (2-5) به صورت زير تبديل مي شوند [17] :

$$\begin{aligned} O\left(\frac{1}{l_0}\right) & \left(O\left(\frac{R_0}{R_0}\right)O(1) + O\left(\frac{1}{l_0^2}\right)O(1)\right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z} + (1+M)\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial r} + (\frac{R_0}{l_0})^2 u_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right) \\ &\quad + \frac{M}{r}\frac{\partial(rw)}{\partial r} \\ \left(O(1) - O(1) - O\left(\frac{R_0^2}{l_0^2}\right)O(1)\right) O(1) \\ &\alpha J\frac{\partial w}{\partial t} + \mathcal{E}\operatorname{Ref}\left(\sigma_m u_1\frac{\partial w}{\partial r} + u_2\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ &\quad O\left(\frac{R_0}{l_0}\right) \left(O\left(\frac{\sigma_m^*}{R_0}\right)\right) \\ &= -2\operatorname{Mw} - M\left(\frac{\partial u_2}{\partial r} - \sigma_m \mathcal{E}^2\frac{\partial u_1}{\partial z}\right) \\ &\quad (O(1) - O\left(\frac{\sigma_m^* R_0^2}{l_0^2}\right)) \\ &\quad + K\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rw)}{\partial r}\right) + \mathcal{E}^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \\ &\quad (O(1) - O\left(\frac{R_0^2}{l_0^2}\right)) \end{aligned}$$
(10)

(10)

مهندسی مکانیک مدرس، اسفند1396، دورہ 17 شمارہ 12

حالت گسسته شدهی شرایط اولیه و مرزی بهصورت روابط زیر بهدست م.آیند:

$$(u_{2})_{i,j}^{1} = 2U_{0} \left[ 1 - \Psi^{2} + \frac{4\nu}{\beta_{1}^{2}} I_{0}(\beta_{1}) \left\{ \frac{I_{0}(\beta_{1}\nu)}{I_{0}(\beta_{1})} - 1 \right\} \right]$$
  

$$(w)_{i,j}^{1} = 0$$
  

$$(u_{2})_{i,1}^{k} = (u_{2})_{i,2}^{k}, \quad (u_{2})_{i,N+1}^{k} = 0$$
  

$$(w)_{N+1,j}^{k} = -\frac{\lambda}{R_{i}^{k}} (\frac{\partial u_{2}}{\partial \Psi})_{i,N+1}^{k}$$
(31)

بعد از محاسبهی سرعت مقادیر دبی حجمی و تنش برشی دیواره و مقاومت در برابر جریان از روابط (24) - (26) بهدست میآیند:

$$Q_i^k = (R^2)_i^k \int_0^1 (u_2)_{i,j}^k \Psi_j d\Psi$$

$$(1+M) \ \partial u_2 \qquad (M)$$

$$(\tau_w)_{i,j}^k = \left(\frac{1+M}{R_i^k \alpha^2}\right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial \Psi}\right)_{i,j}^k + \left(\frac{M}{\alpha^2}\right) w_{i,j}^k \tag{33}$$

$$\Lambda_{i}^{k} = \frac{L(B(1+\psi\cos(ct)))_{i}}{(R^{2})_{i}^{k}\int_{0}^{1}(u_{2})_{i,j}^{k}\Psi_{j}d\Psi}$$
(34)

#### 1-3- شرط پایداری

مقدار طول گام شعاعی برابر  $0.025 = \Psi \Delta e$  مقدار طول گام محوری برابر  $\Delta z = 0.01$  فرض میشود. برای محاسبه گام زمانی پیشرو باید توجه داشت که روش بیان شده یک روش صریح است که پایداری آن برطبق عدد کورانت به صورت زیر است [36,33]:

$$\begin{aligned} \Delta t &= C \min\left[\Delta t_1, \Delta t_2\right] , \quad 0 < C < 1, \\ \Delta t_1 &\leq \min\left[\frac{\mathrm{Re}}{2}, \frac{\Delta \Psi^2 \Delta z^2}{2\left(\Delta \Psi^2 + \Delta z^2\right)}\right], \\ \Delta t_2 &\leq \min\left[\frac{\Delta \Psi}{u_2}, \frac{\Delta z}{u_1}\right]. \end{aligned} \tag{35}$$

بنابراین طول گام زمانی در این مطالعه  $\Delta t = 0.0001$  فرض شده است.

#### 4- بحثها و نتایج عددی

در نرمافزار متلب با استفاده از پارامترهای بی بعد زیر بهمنظور شبیهسازی عددی و ارائه نتایج شماتیکی استفاده شده است [38,37,33,23]:

$$= 3, l_0 = 1.4, \theta = 0, k_r = 0.05, f_p = 1.2, m = 0.85, N = 1$$
  
$$\Delta \Psi = 0.025, \Delta z = 0.01, \Delta t = 0.0001, M = 0.1, K = 0.1,$$
  
$$e = 0.2, B = 4, J = 0.1$$

بهمنظور اعتبارسنجی نتایج بهدست آمده، سرعت محوری برای جریان خون در رگهای گرفته شده از مطالعه ی پرالهاد و اسچولتز [12] در "شکل 2" با سرعت محوری بهدست آمده از مطالعه حاضر در بیشترین نقطه بحرانی گرفتگی و میزان گرفتگی  $\sigma_m = 0.2 R_0$  در زمان 3 t = 1 مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج بهدست آمده توافق قابل قبولی با هم دارند.

در "شکل 3" چند شبیهسازی با اندازههای مختلف شبکه (نسبتاریز و درشت) برای مشخصات سرعت محوری جریان خون در رگ گرفتهشدهی مخروطی ارایه شده است. این شبیهسازی در مورد مطالعه استقلال از شبکه بودن به منظور بررسی خطا مرتبط با اندازههای شبکه استفاده میشود که نمایانگر این است که سه مشربندی مجزا همپوشانی خوبی دارند. با انتخاب شبکههای مش متفاوت سرعت محوری ثابت بوده است و این امر نشانگر مستقل بودن مسئله از شبکه است [3].

پروفیل سرعت محوری بی عد جریان خون در طول رگ با زاویه ی مخروطی ( $\sigma_m = 0.2R_0$ ) با میزان گرفتگی یکسان ( $\sigma_m = 0.2R_0$ ) به همراه نمودار سرعت محوری بی بعد جریان خون در طول رگ غیرالاستیک جریان در متغیرهای بیبعد بهصورت زیر تعریف میشود:

$$Q = \int_{0}^{K} u_2 r dr \tag{19}$$
$$r_1 = -\left(\frac{1+M}{2}\right) \frac{\partial u_2}{\partial u_2} + \left(\frac{M}{2}\right) w \tag{20}$$

$$L_{w} = \left(\frac{R\alpha^{2}}{\alpha}\right) \frac{\partial r}{\partial r} + \left(\frac{\alpha^{2}}{\alpha^{2}}\right)^{w}$$
(20)  
$$L = \left|\frac{L\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)}{Q}\right|$$
(21)

به منظور بی حرکت و غیرالاستیک کردن دیواره سرخرگ مفروض، ابتدا نگاشت  $\Psi = r/R(z,t)$  را روی معادلات حاکم بر جریان و شرایط مرزی و اولیه اعمال می کنیم [35,34,32]. با اعمال این تبدیل مختصات، دیواره سرخرگ به صورت غیرالاستیک صلب تبدیل شده و به سرخرگ مستطیلی شکل تبدیل می شود. نتیجه اعمال این روی معادلات حاکم و شرایط مرزی و اولیه به صورت زیر خواهد بود:

$$\alpha \left[\frac{\partial u_2}{\partial t}\right] = B\left(1 + e\cos(ct)\right) + \frac{(1+M)}{R^2} \left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial \Psi^2} + \frac{1}{\Psi} \frac{\partial u_2}{\partial \Psi}\right] + \frac{M}{R} \left[\frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi w}{\partial \Psi}\right]$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial \Psi}\right] = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \Psi}\right]$$

$$\alpha J \left[ \frac{\partial w}{\partial t} \right] = -M \left( 2w + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \Psi} \right) + \frac{K}{R^2} \frac{\partial}{\partial \Psi} \left( \frac{1}{\Psi} \frac{\partial (\Psi w)}{\partial \Psi} \right)$$
(23)  
$$\frac{\partial u_2(\Psi, z, t)}{\partial \psi} = 0$$

$$\begin{aligned} \Psi &= 0: \quad \frac{(\Psi, Z, Y)}{\partial \Psi} &= 0, \quad w(\Psi, z, t) = 0 \\ \Psi &= 1: \quad u_2(\Psi, z, t) = 0, \\ w(\Psi, z, t) &= -\frac{\lambda}{R} \left( \frac{\partial u_2(\Psi, z, t)}{\partial \Psi} \right) \end{aligned}$$
(2)

به طور مشابه دبی حجمی، تنش برشی دیواره و مقاومت در برابر جریان به فرم زیر در نظر گرفته میشود:

$$Q = R^2 \int_0^1 u_2 \Psi d\Psi \tag{25}$$

$$\tau_{w} = \left(\frac{1+M}{R\alpha^{2}}\right)\frac{\partial u_{2}}{\partial \Psi} + \left(\frac{M}{\alpha^{2}}\right)w \tag{26}$$

$$1 = \frac{L(B(1 + e\cos(ct)))}{R^2 \int_0^1 u_2 \Psi d\Psi}$$
(27)

#### 3- روش عددی

(22)

اگرچه معادلات (21) و (22) معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند در این شرایط بهتر این است که از یک روش تقریبی استفاده کرد. در روش تفاضلات متناهی صریح که تقریب تفاضل مرکزی برای تقریب مشتقات مکانی و فرمول تقریب تفاضل پیشرو برای تقریب مشتق زمانی استفاده میشود. با توجه به روش تفاضلات متناهی مشتقات جزئی مختلفی از 2<sup>1</sup> ظاهر میشود که در معادلات (21) و (22) جای گذاری شده است:

$$(u_{2})_{i,j}^{k+1} = (u_{2})_{i,j}^{k} + \frac{\Delta t}{\alpha} \left[ (B(1 + e\cos(ct))) + \frac{(1+M)}{R_{0}} \right] \\ \left( \frac{(u_{2})_{i,j+1}^{k} - 2(u_{2})_{i,j}^{k} + (u_{2})_{i,j-1}^{k}}{\Delta \Psi^{2}} \right) + \frac{1}{\Psi} \left( \frac{(u_{2})_{i,j+1}^{k} - (u_{2})_{i,j-1}^{k}}{2\Delta \Psi} \right) + \frac{M}{R^{2}} \\ \left( \frac{(u_{2})_{i,j+1}^{k} - (u_{2})_{i,j-1}^{k}}{2\Delta \Psi} \right) + \frac{(w)_{i,j}^{k}}{\Psi} \right) \left( 28 \frac{1}{2} \left( \frac{(u_{2})_{i,j+1}^{k} - (u_{2})_{i,j-1}^{k}}{2\Delta \Psi} \right) \right) + \frac{(w)_{i,j}^{k}}{\Psi} \right) \left( \frac{(u_{2})_{i,j+1}^{k} - (u_{2})_{i,j-1}^{k}}{2\Delta \Psi} \right) = \frac{(u_{2})_{i,j+1}^{k} - (u_{2})_{i,j-1}^{k}}{2\Delta \Psi}$$

$$\begin{aligned} (w)_{l,j}^{k+1} &= (w)_{l,j}^{k} + \frac{\Delta t}{\alpha J} \left[ -M((2(w)_{l,j}^{k} + \frac{1}{R} \left( \frac{(u_{2})_{l,j+1}^{k} - (u_{2})_{l,j-1}^{k}}{2\Delta \Psi} \right) + \frac{K}{R^{2}} \right. \\ (\left( \frac{(w)_{l,j+1}^{k} - 2(w)_{l,j}^{k} + (w)_{l,j-1}^{k}}{\Delta \Psi^{2}} \right) + \left( \frac{(w)_{l,j+1}^{k} - (w)_{l,j-1}^{k}}{2\Psi \Delta \Psi} \right) - \frac{(w)_{l,j}^{k}}{\Psi} ) ) \right] \end{aligned}$$

Δz ،ΔΨ و Δt به ترتیب طول گامهای مربوط به جهت محوری، جهت شعاعی و جهت زمانی میباشد:

$$\begin{split} \Psi_{j} &= (j-1)\Delta\Psi, \qquad j = 1, 2, \dots, N+1, \qquad \Psi_{(N+1)} = 1, \\ z_{i} &= (i-1)\Delta z, \qquad i = 1, 2, \dots, N+1, \\ t_{k} &= (k-1)\Delta t, \qquad j = 1, 2, \dots \end{split}$$
(30)



Fig.2 Comparison of the dimensionless axial velocity profile with [12] شکل 2 مقایسه سرعت محوری بی بعد بهدست آمده با نتایج [12]



Fig. 3 Cross-sectional velocity profiles of the axial velocity for different grid size at the stenosis section

**شکل 3** پروفیل سرعت مقطعی از سرعت محوری برای اندازههای شبکههای مختلف را در قسمت گرفتگی

با گرفتگی مشابه ( $\sigma_m = 0.2R_0$ ) ، تاثیر افزایش گرفتگی ( $\sigma_m = 0.3R_0$ ) و تاثیر افزایش پارامتر میکروپلار از 0.1Mبه 0.3Mدر زمان E در "شکل 4" نشان داده شده است. "شکل 4" نتیجه میدهد که در زمان E با در نظر گرفتن 0 <  $\theta$  سرعت محوری در مقایسه با 0 =  $\theta$  افزایش می یابد و برای 0 >  $\theta$  سرعت محور در طول رگ گرفته شده کاهش می یابد. با افزایش میزان گرفتگی سرعت محوری کاهش می یابد سرعت محوری جریان خون در رگ گرفتهی غیرالاستیک بیشتر از سرعت محوری جریان در رگ الاستیک است که همین امر اهمیت الاستیک فرض شدن رگ را نشان می دهد.

و همینطور با افزایش پارامتر میکروپلار سرعت محوری در طول رگ گرفته شدهی الاستیک کاهش مییابد. بیشترین مقدار سرعت محوری درخط مرکزی رگ گرفته شده رخ میدهد. همه منحنیهای سرعت از صفر شروع شده و به یک مقدار ثابت در دیواره میرسدکه این امر بهدلیل متحرک بودن دیواره است.

سرعت چرخشی ریزذرات خون برای گرفتگیهای مختلف و اثر مخروطی بودن و تاثیر پارامتر میکروپلار را برای زمان 3=t در "شکل 5" نمایش میدهد. مقدار سرعت چرخشی جریان با نزدیک شدن به دیواره رگ در حال افزایش است. این امر تاثیر گرفته از شرط مرزی اعمال شده با مقایسه



Fig. 4 Dimensionless axial velocity profile for different values شکل 4 سرعت محوری بی بعد برای مقادیر مختلف



Fig. 5 Dimensionless microrotational velocity profile for different values

**شکل 5** سرعت چرخشی بی بعد برای مقادیر مختلف

گرافهای مشاهده شده نشان داده میشود که با افزایش میزان گرفتگی سرعت چرخشی کاهش مییابد و همچنین با در نظر گرفتن  $0 < \theta$  سرعت چرخشی مربوط به ذرات افزایش مییابد و برای  $0 > \theta$  سرعت چرخشی نیز کاهش مییابد. با افزایش پارامتر میکروپلار (0.3K) برای سرعت چرخشی، سرعت چرخشی کاهش مییابد با توجه به منحنیهای ارایه شده سرعت پرخشی جریان خون در رگ الاستیک کمتر از مقدار سرعت در رگ غیرالاستیک است. الگوهای جریان خون برای مقدارهای مختلف پارامترهای همودینامیک و هندسی در "شکل 6" نشان داده شده است. الگوهای (a) و(d)



37



شکل 6 الگوهای جریان لحظه ای از جریان خون

تغییر پارامتر گرفتگی است که با افزایش میزان گرفتگی خطوط جریان کاهش مییابند. الگوی (c) نشاندهنده خطوط جریان در رگ گرفته واگرا ( $0 < \theta$ ) و در مقابل آن نیز الگوی (b) نمایانگر رگ گرفته یهمگرا ( $0 > \theta$ ) است که خطوط جریان در این الگو روند کاهشی دارند. الگوی (e) به ترتیب نمایانگر افزایش پارامتر میکروپلار است که با افزایش این پارامتر سرعت اثر افزایشی دارد و در خطوط جریان نیز افزایش مییابند. الگوی (f) خطوط جریان را در زمان 20.5 انشان میدهد.

روشن است که رفتار ناپایدار جریان خون دبی حجمی را بهطور چشم<sup>7</sup>گیری تحت تاثیر میدهد، این مساله اهمیت فرض ناپایدار بودن جریان خون را نشان میدهد. "شکل 7" میزان دبی حجمی را در نقطهی 1.9= در زمان3= برای گرفتگیهای 0.2R و و0.76، تاثیر پارامتر میکروپلار و رفتار آن میدهدکه با افزایش میزان گرفتگی دبی حجمی کاهش مییابد. دبی حجمی در طول رگ غیرالاستیک در مقایسه با رگ الاستیک مقدار بیشتری دارد و دارای پالسهای متفاوتی است. با افزایش پارامتر میکروپلار برای گرفتگی دبی م.2R دی حجمی کاهش مییابد و همچنین با افزایش میزان گرفتگی دبی

همچنین "شکل 8" نشان میدهد که دبی حجمی رفتاری متناظر با هندسه گرفتگی دارد بهطوری که در شروع گرفتگی مقدار دبی حجمی کاهش یافته و در گرفتگی، ارتفاع بحرانی به پایین ترین سطح خود می سد. همچنین تاثیر پارامتر کم که نشان دهنده ی واگرایی و همگرایی رگ مفروض با



Fig.7 variations Volumetric flow rate\_time





DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.12.22.4

گرفتگی 0.2*R* را مورد بررسی قرار میدهد. با در نظر گرفتن 0 < heta دبی حجمی افزایش و اگر 0 > heta دبی حجمی کاهش مییابد.

در "شکل 9" دبی حجمی به صورت سه بعدی در راستای طول سرخرگ t = 1 به میزان گرفتگی  $\sigma_m = 0.2 R_0$  و t = 1 به دست آمده است. با توجه به "شکل 9" مقدار دبی حجمی با افزایش زمان افزایش پیدا کرده است.

در "شکل 10" تغییرات تنش برشی دیواره نسبت به مکان در طول رگ  $\mathcal{P}_{m}$  فرفتهی مخروطی با تغییر پارامترهای  $\sigma_{m}$ , M و همین طور تنش برشی در طول رگ غیرالاستیک در زمان t = 3 بیان شده است، که از آن نتیجه می شود که تنش برشی در طول رگ غیرالاستیک در مقایسه با رگ الاستیک با میزان گرفتگی مشابه مقدار کمتری دارد و با افزایش مقدار پارامتر میکروپلار مقدار تنش برشی دیواره کاهش می یابد. با افزایش میزان گرفتگی رگ مفروض تنش برشی دیواره نوانیش می یابد.

"شکل 11" نشانگر تنش برشی دیواره در حالت نرمال رگ گرفته شده ی مخروطی در نقطه ی حداکثر گرفتگی و در زمان 5 = t می باشد و همچنین در بردارنده ی تنش برشی جریان خون در رگ گرفته شده ی منبسط شونده و منقبض شونده غیر مخروطی در زمان 5 = t است. با توجه به "شکل 11" تنش برشی دیواره برای رگ غیر مخروطی منبسط شونده در مقایسه با رگ منقبض شونده روند کاهشی دارد پروفیل تنش برشی دیواره ی رگ مخروطی نیز در بین آن ها قرار دارد.



Fig. 9 Surface plot of the volumetric flow rate

**شکل 9** دبی حجمی سه بعدی



Fig. 10 Dimensionless wall shear stress(WSS) profile



Fig. 11 Comparison wall shear stress(WSS) for different tapering angle شکل 11 تنش برشی دیواره در رگ گرفته شده برای زوایای مختلف مخروطی

"شکل 12" دربردارندهی مقاومت در برابر جریان خون در رگ گرفته شدهی مخروطی برای زوایای مختلف مخروطی در نقطهی بحرانی گرفتگی 2.1= در زمان 3 = t می باشد. این قسمت اهمیت فرض ناپایا بودن جریان خون را نشان میدهد و همینطور بیانگر این است که با افزایش زاویه مخروطی مقاومت در برابر جریان نیز کاهش مییابد و با کاهش زاویه مخروطی مقاومت در برابر جریان نیز افزایش مییابد.

شکل 13" نشانگر شکل سه بعدی مقاومت در برابر جریان در راستای  $\sigma_m = 0.2R_0$  لول سرخرگ است که در زمان t = 1 برای میزان گرفتگی n = 4 و n = 4 بهدست آمده است. با توجه به "شکل 13" برخلاف دبی حجمی، با افزایش زمان مقدار مقاومت در برابر جریان کاهش مییابد.

"شکل 14" مقاومت در برابر جریان خون در رگ گرفته شده با تغییر پارامترهای  $M, \sigma_m$  مقاومت در برابر جریان خون در رگ غیرالاستیک در زمان t = 3 را نشان میدهد. با افزایش مقدار گرفتگی از  $0.2R_0$  به 0.5Rمقاومت در برابر جریان نیز افزایش مییابد و همچنین برای گرفتگی یکسان مقاومت در برابر جریان در طول رگ الاستیک بیشتر از مقاومت در برابر جریان در طول رگ غیرالاستیک میاشد.

#### 5- نتیجه گیری

در این مقاله یک شبیهسازی عددی برای آنالیز جریان خون ناپایا، تراکمناپذیر و غیرنیوتونی از طریق یک رگ بیمار با هندسهی وابسته به زمان، مخروطی شکل با گرفتگی و الاستیک فرض شده مورد مطالعه قرار گرفت.



Fig. 12 The resistance impedance for different tapering angle شکل 12 مقاومت در برابر جریان برای زوایای مختلف مخروطی

**شكل 10** پروفيل تنش برشى ديوارەي بى بعد



شکل 13 مقاومت در برابر جریان سه بعدی



Fig. 14 variations resistance impedance-time شکل 14 تغییرات مقاوت دربرابرجریان نسبت به زمان

نتایج حاصل نشان می دهد که فرض الاستیک بودن دقیق تر از فرض غیرالاستیک بودن است و همچنین پارامترهای مانند میزان گرفتگی، زاویه مخروطی وپارامتر میکروپلار تاثیر بسزایی در مشخصه های دینامیکی مانند سرعت محوری و سرعت چرخشی، دبی حجمی، مقاومت در برابر جریان وتنش برشی دیواره دارد. با افزایش میزان گرفتگی و منقبض شدن رگ مخروطی و افزایش پارامتر میکروپلار، سرعت محوری و سرعت چرخشی، دبی حجمی کاهش می یابد، همچنین مقاومت در برابر جریان و تنش برشی دیواره افزایش می یابد. در رگ منبسط شونده مقدار سرعت محوری و سرعت چرخشی و دبی حجمی روندافزایشی و تنش برشی دیواره و مقاومت در برابر عکس است. مقدار سرعت محوری و سرعت چرخشی، دبی حجمی در رگ عکس است. مقدار سرعت محوری و سرعت چرخشی، دبی حجمی در رگ غیرالاستیک بیشتر از رگ الاستیک است و مقاومت در برابر جریان و تنش

#### 6- فهرست علايم

- Re عددرينولدز
- <sup>A</sup>0 دامنه ثابت گرادیان فشار
  - A<sub>1</sub> دامنه پالسی
  - فركانس پالسى  $f_p$
  - ر کې د k<sub>r</sub> پارامتر نوسان
  - پر ر ر کی L طول رگ موردنظر

$$l_0$$
 طول گرفتگی

  $ng \ge 2$ 
 $ng \ge 2$ 
 $ng \ge 2$ 
 $ng \ge 2$ 
 $p$ 
 $\mu$ 
 $p$ 
 $\mu$ 
 $p$ 
 $m$ 
 $p$ 
 $m$ 
 $p$ 
 $m$ 
 $p$ 
 $m$ 
 $p$ 
 $m$ 
 $p$ 
 $m$ 
 $m$ 

طول گام شعاعی

حداکثر گرفتگی

زاويه فاز

گام شعاعی

گام محوری

گام زمانی

ويسكوزيته سيال غير نيوتني

in a stenosed coronary bypass graft, Medical and Biological Engineering and

axi-symmetric stenosed arteries, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 46, No. 1, pp. 296-305, 2011.

simulation of the motion and deformation of red blood cell in viscous flow, Modares Mechanical Engineering, Vol. 13, No. 11, pp. 88-98, 2014. (in

[2] D. S. Sankar, Two-phase non-linear model for blood flow in asymmetric and

[3] L. M. Srivastava, Flow of couple stress fluid through stenotic blood vessels, *Journal of Biomechanics*, Vol. 18, No. 7, pp. 479–485, 1985.

[4] A. Dadvand, M. Navidbakhsh, S. Ghoreishi, M. Baghalnezhad, Numerical

[5] G. R. Cokelet, The rheology of human blood, Biomechanics: Its Foundations And Objectives, Vol. 14, No. 3, pp. 63-103, 1972.

[6] T. Azuma , T. Fukushima, Flow patterns in stenotic blood vessel models,

[7] D. F. Young, N. R. Cholvin, R. L. Kirkeeide, A. C. Roth, Hemodynamics of arterial stenoses at elevated flow rates, *Circulation Research*, Vol. 41, No. 1,

[8] G. Pontrelli, Pulsatile blood flow in a pipe, Computers & Fluids, Vol. 27, No.

[9] A. C. Eringen, Simple microfluids, International Journal of Engineering

[11] R. Bhargava, R. Agarwal, L. Kumar, H. S. Takhar, Finite element study of mixed convection micropolar flow in a vertical circular pipe with variable

[12] R. Pralhad, D. Schultz, Two-layered blood flow in stenosed tubes for

surface conditions, International Journal of Engineering Science, Vol. 42,

Eringen, Theory of microfluids, Journal of Mathematics and

Computing, Vol. 39, No. 4, pp. 488-499, 2001.

Biorheology, Vol. 13, No. 6, pp. 337-55, 1976.

( فارسی Persian

pp. 99-107, 1977.

[10] A. C.

3, pp. 367-380, 1998.

No. 1, pp. 13-27, 2004.

مقاومت در برابر جریان

 $\Lambda \Psi$ 

μ

Λ

 $\sigma_m$ 

φ

i

مهندسی مکانیک مدرس، اسفند1396، دورہ 17 شمارہ 12

Science, Vol. 2, No. 2, pp. 205-217, 1964.

Mechanics, Vol. 16, No. 1, pp. 1-18, 1966.

7- مراجع [1] V. Deplano, C. Bertolotti, O. Boiron, Numerical simulations of unsteady flows

انديسها

علايم

Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-15

DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.12.22.4

- [27] A. R. Haghighi, M. S. Asl, A Mathematical modeling of a two-layered blood flow through constricted vessels, *Journal of Advanced Mathematical Modeling*, Vol. 3, No. 1, pp. 79-99, 2014. (in Persian فارسي)
- [28] S. Shaw, P. Murthy, S. Pradhan, The effect of body acceleration on two dimensional flow of Casson fluid through an artery with asymmetric stenosis, *Open Transport Phenomena Journal*, Vol. 2, No. 1, pp. 55-68, 2010.
- [29] A. Zaman, N. Ali, O. A. Bég, Numerical simulation of unsteady micropolar hemodynamics in a tapered catheterized artery with a combination of stenosis and aneurysm, *Medical & biological engineering & computing*, Vol. 54, No. 9, pp. 1423-1436, 2016.
- [30] S. J. Kline. Similitude and Approximation Theory, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [31] V. K. Sud, G. S. Sekhon, Arterial flow under periodic body acceleration, Bulletin of Mathematical Biology, Vol. 47, No. 1, pp. 35-52, 1985.
  [32] M. A. Ikbal, S. Chakravarty, K. K. Wong, J. Mazumdar, P. K. Mandal,
- [32] M. A. Ikbal, S. Chakravarty, K. K. Wong, J. Mazumdar, P. K. Mandal, Unsteady response of non-Newtonian blood flow through a stenosed artery in magnetic field, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 230, No. 1, pp. 243-259, 2009.
- [33] N. Mustapha, N. Amin, S. Chakravarty, P. K. Mandal, Unsteady magnetohydrodynamic blood flow through irregular multi-stenosed arteries, *Computers in Biology and Medicine*, Vol. 39, No. 10, pp. 896-906, 2009.
- [34] S. Chakravarty, P. K. Mandal, A nonlinear two-dimensional model of blood flow in an overlapping arterial stenosis subjected to body acceleration, *Mathematical and Computer Modeling*, Vol. 24, No. 1, pp. 43–58, 1996.
- [35] A. R. Haghighi, M. S. Asl, Mathematical modeling of micropolar fluid flow through an overlapping arterial stenosis, *International Journal of Biomathematics*, Vol. 8, No. 04, 1550056, 2015.
- [36] S. Mukhopadhyay, G. Layek, Numerical modeling of a stenosed artery using mathematical model of variable shape, *Applications and Applied Mathematics: An International Journal*, Vol. 3, No. 2, pp. 308-328, 2008.
- [37] G. Bugliarello, J. Sevilla, Velocity distribution and other characteristics of steady and pulsatile blood flow in fine glass tubes, *Biorheology*, Vol. 7, No. 2, pp. 85-107, 1970.
- [38] A. R. Haghighi, M. Shabaziasl, M. Kiyasatfar, Mathematical modeling of unsteady blood flow through elastic tapered arterywith overlapping stenosis, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 37, No. 2, pp. 571-578, 2015.
- [39] S. Chakravarty, P. K. Mandal, Heat transfer to micropolar fluid flowing through an irregular arterial constriction, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 56, No. 1, pp. 538-551, 2013.

different diseases, Biorheology, Vol. 25, No. 5, pp. 715-7, 1988.

- [13] A. R. Haghighi, M. Shahbaziasl, Numerical simulation of unsteady blood flow through an elastic artery with a non-symmetric stenosis, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 10, pp. 26-34, 2014. (in Persian (فارسی)) (فارسی)
- [14] D. Sankar, U. Lee, Mathematical modeling of pulsatile flow non-Newtonian fluid in stenosed arteries, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 14, No. 7, pp. 2971-2981, 2009.
- [15] R. Ponalagusamy, S. Priyadharshini, Numerical investigation on two-fluid model (micropolar-Newtonian) for pulsatile flow of blood in a tapered arterial stenosis with radially variable magnetic field and core fluid viscosity, *Computational and Applied Mathematics*, Vol. 5, No. 16, pp. 1-25, 2016.
- [16] M. A. El Kot, W. Abbas. Numerical technique of blood flow through catheterized arteries with overlapping stenosis, *Computer Methods in biomechanics and Biomedical Engineering*, Vol. 20, No. 1, pp. 45-58, 2017.
  [17] D. F. Young, Effect of a time-dependent stenosis on flow through a tube,
- Journal of Engineering for Industry, Vol. 90, No. 2, pp. 248-54, 1968.
- [18] J. R. Reddy, D. Srikanth, S. K. Murthy, Mathematical modeling of time dependent flow of non-Newtonian fluid through unsymmetric stenotic tapered artery: Effects of catheter and slip velocity, *Meccanica*, Vol. 51, No. 1, pp. 55-69, 2016.
- [19] S. Mukhopadhyay, G. Layek, Numerical modeling of a stenosed artery using mathematical model of variable shape, *Applications and Applied Mathematics: An International Journal*, Vol. 3, No. 2, pp. 308-328, 2008.
- [20] S. Chakravarty, P. K. Mandal, Effect of surface irregularities on unsteady pulsatile flow in a compliant artery, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 40, No. 10, pp. 1268-1281, 2005.
- [21] G. Liu, X. Ali B, L. Liu, Numerrical study of pulsating flow through a tapered artery with stenosis, *Chinese Journal of Physics*, Vol. 42, No. 4, pp. 401-409, 2004.
- [22] L. H. Back, T. A. Denton, Some arterial wall shear stress estimates in coronary angioplasty, *Advances in Bioengineering*, Vol. 22, pp. 337–340, 1992.
- [23] L. H. Back, Estimated mean flow resistance increase during coronary artery catheterization, *Journal of Biomechanics*, Vol. 27, No. 2, pp. 169–175, 1994.
- [24] P. K. Mandal, An unsteady analysis of non-Newtonian blood flow through tapered arteries with a stenosis, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 40, No. 1, pp. 151-164, 2005.
- [25] S. Singh, Numerical modeling of two-layered micropolar fluid through an normal and stenosed artery, *International Journal of Engineering*, Vol. 24, No. 2, pp. 177-187, 2011.
- [26] S. Mukhopadhyay, G. C. Layek, Numerical modeling of a stenosed artery using mathematical model of variable shape, *Applications and Applied Mathematics: An International Journal*, Vol. 3, No. 2, pp. 308-328, 2008.