مجله مهندسی مکانیک مدرس، مهر ۱۳۹۳، دوره ۱۴، شماره ۷، ص‌ص ۱۵۰-۱۵۶

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

کاربرد روش هم-چرخشی در تحلیل غیرخطی هندسی سازه تنسگریتی و بررسی اثر پیش تنش

اسعد غفوری[۱*]، شیرکو فاروقی[۲]، مهدی بامداد[۳]

۱- مربی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد سنندج، سنندج

۲- استادیار ، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه

۳- استادیار ، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

* سنندج، صندوق پستی ۶۶۱۶۹۳۵۳۹۱، a.ghafori@iausdj.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۱۰ آبان ۱۳۹۲

پذیرش: ۱۳ آذر ۱۳۹۲

ارائه در سایت: ۰۱ شهریور ۱۳۹۳

کلید واژگان:

تنسگریتی

تحلیل غیرخطی استاتیکی

روش هم-چرخشی

چکیده

تنسگریتی به سازه‌های دو یا سه بعدی سبک گفته می‌شود که از نخ به عنوان جزء کششی و میله به عنوان عضو فشاری تشکیل شده است. پایداری سازه تنسگریتی از تعادل تنش داخلی بین اعضای کششی پدید می‌آید. در این مقاله با استفاده از روش هم-چرخشی به بررسی و تحلیل غیرخطی هندسی و همچنین بررسی اثرات نیروی پیش فشار روی سازه تنسگریتی پرداخته می‌شود. این روش بر خلاف روش‌های مرسوم در تحلیل غیرخطی استاتیکی، بخش مهمی از هندسه غیرخطی به وسیله فیلتر هم-چرخشی بررسی می‌شود. عملکرد فلیتر هم-چرخشی بر این اساس است که حرکت صلب سازه را از تغییر فرم سازه در یک جابجایی حذف می‌کند. یکی از مزیت‌های اصلی روش هم-چرخشی این است که برای تحلیل غیرخطی مسایل می‌توان از مدل خطی المان در مختصات محلی استفاده کرد. قسمت غیرخطی به وسیله ماتریس‌های تبدیل که بردار نیرو و ماتریس سختی مماسی را از مختصات محلی به کلی نگاشت می‌دهند، مدل‌سازی می‌شود. سه مسأله عددی به وسیله روش مذکور تحلیل شده‌اند و نتایج نشان می‌دهد که جابجایی سازه تنسگریتی به مقدار نیروی پیش تنش سازه بستگی دارد. جابجایی سازه تنسگریتی با ثابت نگه داشتن نیروی خارجی همراه با افزایش نیروی پیش تنش، کاهش پیدا می‌کند، در حالی که جابجایی سازه تنسگریتی با افزایش نیروی خارجی، موقعیکه نیروی پیش تنش ثابت باشد، افزایش پیدا می‌کند.

Geometrical nonlinear analysis and effect of pre-stress on tensegrity structure using co-rotational method

Asaed Gghafori[1*], Shirko Faroughi[2], Mehdi Bamdad[3]

1- Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University Sanandaj Branch, Sanandaj, Iran
2- Department of Mechanical Engineering, Urmia University of Technology, Urmia, Iran.
3- Department of Mechanical Engineering, Shahrod University of Technology, Shahrod, Iran.
* P.O.B. 6616935391 Sanandaj, Iran, a.ghafori@iausdj.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 01 November 2013
Accepted 04 December 2013
Available Online 23 August 2014

Keywords:
Tensegrity
Geometrical Nonlinear Analysis
Co-rotational Method

ABSTRACT

Tensegrities are a kind of spatial structural system composed of cable (in tension) and strut (in compression). Stability of this system is provided by the self stress state between tensioned and compressed elements. In this paper, co-rotational method is used for study geometrical nonlinear analysis of tensegrity structure and analysis of the effect of pre-stress on it. This approach unlike other available approach in nonlinear static analysis, the major part of geometric non-linearity is treated by a co-rotational filter. The function of CR formulation is to extract relevant deformation quantities free or almost free from any rigid body motion in a given displacement field. One of advantage of the co-rotational approach is the fact that linear models can be easily used in the local coordinate system for modeling of nonlinear problems. The geometric non-linearity is incorporated in the transformation matrices relating local and global internal force vectors and tangent stiffness matrices. Three different numerical examples are studied using this approach. Results demonstrate that the deformations of tensegrity system are dependent on the value of pre-stress in tensegrity systems. The displacements of tensegrity system are decreased for fixed external tensile loading and increasing pre-tension force, however, for fixed pre-tension force and increasing external loading the displacements of tensegrity system are increased.

۱- مقدمه

تنسگریتی نوعی سازه است که ماهیت آن مبتنی بر تعادل بین اعضای کششی و فشاری است. اعضای فشاری (میله) سازه تنسگریتی بوسیله اعضای کششی (کابل) به هم وصل شده‌اند. این سازه‌ها به علت داشتن نسبت سختی به جرم بالا به عنوان جانشین مناسب برای سازه‌های عمرانی، مهندسی مکانیک و هوا فضا معرفی شده‌اند. به عنوان مثال می‌توان از پل‌های معلق نام برد که در این سازه‌ها اعضای کششی اغلب کابل هستند. علاوه بر این، در سال‌های اخیر از سازه تنسگریتی مشبک در ساختن سقف‌ها استفاده می‌شود [۱،۲]. سازه‌های تنسگریتی در ربات‌ها به علت پایین بودن جرمشان استفاده می‌شوند [۳،۴]. اما یکی از مزیت‌های اصلی استفاده از سازه تنسگریتی علاوه

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

A. Ghafori, Sh. Faroughi, M. Bamdad, Geometrical nonlinear analysis and effect of pre-stress on tensegrity structure using co-rotational method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 7, pp. 156-150, 2014 (In Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.7.4.5]

بر پایین بودن جرم آن، امکان تا شدن به علت داشتن تاندون می‌باشد. این ویژگی سبب می‌شود که حجم سازه کوچک و به سادگی قابل حمل و نقل شود، که این مزیت برای سازه‌های هوافضا بسیار مطلوب می‌باشد [۵]. تحلیل کامل سازه تنسگریتی به دو بخش کلی تقسیم می‌شود. قسمت اول به شکل یابی[1] معروف است. شکل یابی فرایندی است که در آن بر اساس یک توپولوژی مشخص، هندسه پایدار سازه ایجاد گردد. قسمت دوم از تحلیل سازه تنسگریتی، بررسی و تحلیل رفتار سازه تحت بار خارجی می‌باشد [۶]. اکثر کارهای مربوط به شکل یابی در پیشینه تحقیق، مرتبط با بردار چگالی نیرو برای یک توپولوژی مشخص است. بعضی از این روش‌ها عبارتند از: ۱- برنامه‌ریزی غیرخطی [۷] ۲- روش عددی دینامیک ریلکسیشن[2] [۸] ۳- چگالی نیرو [۹] ۴- روش اماری [۱۰] ۵- تحلیل عددی [۱۱-۱۳] ۶- روش اجزای محدود [۱۴]. علاوه بر روشهای فوق، پیلیگارینو برای بدست آوردن بردار چگالی نیرو روش استفاده از فضای پوچ[3] ماتریس تعادل را ارائه نمود [۱۵]. اخیراً لی و همکارانش یک روش جدید برای بدست آوردن بردار چگالی نیرو واحد برای سازه تنسگریتی با در نظر گرفتن خصوصیات یک سویه و پایداری ساختار ارائه نمودند [۱۶].

تحلیل غیرخطی استاتیکی سازه تنسگریتی به علت وجود نیروی پیش تنش از اهمیت خاصی برخودار است. در پیشینه تحقیق برای تحلیل سیستم‌هایی غیرخطی روش‌های متنوعی ارائه شده است. ونگ [۱۷] با جدا نمودن سازه تنسگریتی به دو گروه المان های میله و نخ، به بررسی و تحلیل غیرخطی سازه تنسگریتی پرداخته است. کونیلی [۱۸] و اوپنهیم و همکارانش [۱۹] با استفاده از مینیمم نمودن تابع انرژیی مربوط به سازه، اثرات سفتی هندسی و همچنین رابطه غیرخطی نیرو و جابجایی زمانی که سیستم تحت اثر نیروی پیش تنش می‌باشد، را بررسی نموده‌اند. ویلیامز و همکارانش [۲۰] شرایط لازم و کافی برای تعادل تنسگریتی را ارائه نموده‌اند و همچنین آنها نشان داده‌اند که مدل استاتیکی سازه تنسگریتی به یک مساله جبر خطی تبدیل خواهد شد. موراکامی [۲۱،۲۲] معادلات تعادل برای تحلیل استاتیکی و دینامیکی سازه تنسگریتی را با استفاده از فرمولاسیون لاگرانژ ارائه نموده است. اخیراً نوهوگلو [۲۳] با استفاده از روش تکراری نقطه[4] برای تحلیل غیرخطی استاتیک سازه تنسگریتی ارائه نموده است. در این روش معادلات تعادل استاتیکی در هر گره برای هر زیر سیستم باید به تعادل برسد.

سیستم تنسگریتی متشکل از المان‌های نخ و میله می‌باشد و هر دو المان در اجزای محدود به وسیله المان میله[5] مدل‌سازی خواهند شد. در اجزای محدود برای مدل‌سازی غیرخطی المان میله سازه تنسگریتی قبلاً از دو روش لاگرانژ کلی[6] و لاگرانژ به روز شده[7] استفاده شده است. در این مقاله از یک روش جدید به نام روش هم-چرخشی برای تحلیل غیرخطی هندسی استاتیک سازه تنسگریتی استفاده خواهد شد. روش هم-چرخشی زمانی که مودهای حرکت نسبت به مودهای صلب کمتر باشند، مؤثر است. المان سه بعدی میله دارای ۵ مود حرکتی صلب و یک مود حرکتی انبساطی و یا انقباضی است، بنابراین این روش برای تحلیل سازه تنسگریتی متشکل از المان‌های میله، مؤثر می‌باشد. ایده اصلی روش هم-چرخشی این است که در میدان جابجایی سازه، مقدار تغییر فرم سازه بطور کامل از حرکت صلب سازه جدا می‌شود. در این روش ابتدا تغییر فرم میله در مختصات محلی بیان می‌شود. در حالی که قسمت اعظم هندسه غیرخطی سازه در ماتریس تبدیلی که مربوط به تبدیل بردار نیروها و ماتریس سختی مماسی از مختصات محلی به کلی می‌باشد، شرکت می‌کند. یکی از مزیت‌های اصلی روش هم-چرخشی این است که مدل‌های ماده مختلفی به آسانی در مختصات محلی مدل‌سازی خواهند شد و المان‌های خطی مؤثر به طور اتوماتیک به فرمولاسیون غیرخطی تبدیل خواهند شد [۲۴]. روش هم-چرخشی برای اولین بار توسط ویمپر [۲۵] و بیلیشتو [۲۶] ارائه شد. یکی از مرورهای موفق در زمینه هم-چرخشی توسط فلیپا و هاگیون [۲۷] ارائه شده است.

در این مقاله، برای تحلیل غیرخطی استاتیکی سازه تنسگریتی و همچنین بررسی نمودن اثرات نیروی پیش تنش روی سازه تنسگریتی از روش هم-چرخشی[8] استفاده می‌شود. در روش هم- چرخشی برای مدل‌سازی غیرخطی هندسی سازه از مدل خطی المان میله در مختصات محلی استفاده می‌شود. قیود عدم شل شدن برای المان نخ و همچنین قید استحکام برای هر دو المان میله و نخ در هر شکل تعادلی باید در نظر گرفته شوند. در این مقاله فرض می‌شود که مرحله شکل یابی انجام شده و همچنین ضرایب پایه پیش تنش از روش ارائه شده توسط لی و همکارانش [۱۶] بدست آورده می‌شوند. در این مقاله ابتدا نحوه بدست آوردن فرمولاسیون حاکم بر المان میله سه بعدی بر اساس روش هم-چرخشی بیان خواهد شد و در ادامه معادلات تعادل حاکم بر تنسگریتی و قیود لازم در هر شکل تعادلی توضیح داده خواهد شد. به منظور بررسی عددی روش پیشنهادی، سه مسأله عددی تحلیل خواهد شد و نتایج حاصل از بررسی های عددی، نشان می‌دهد که جابجایی سازه تنسگریتی به مقدار پیش تنش و بار خارجی بستگی دارد.

۲- روش هم-چرخشی

ایده اصلی روش هم-چرخشی استفاده از یک سیستم مختصات محلی است که بطور پیوسته همراه با المان مورد نظر، دارای حرکت انتقالی و چرخشی باشد. مقادیر در چهارچوب مختصات محلی و کلی به صورت معادله (۱) بیان می‌شود:

$$\bar{d}_I^e = \bar{d}_I^e(d_J^g) \qquad (۱)$$

در معادله (۱) زیر نویس $(I,J = 1,2)$ بیان کننده تعداد گره‌ها در المان میله می‌باشد و d_J^g یک زیر مجموعه از جابجایی u است. بالانویس‌های e و g به ترتیب بیان کننده داده‌ها درسیستم مختصات محلی و کلی می‌باشند، همچنین علامت تیره نشان دهنده مقدار سینماتیکی حرکت می‌باشد. جابجایی محلی $\bar{d}_I^e$ که برای تشکیل دادن انرژیی کرنشی $W = W(\bar{d}_I^e)$ بکار گرفته می‌شود. بردار نیرو و ماتریس سختی مماسی در مختصات کلی با توجه به تبدیل مختصات بین چارچوب های محلی و کلی به صورت معادلات (۲) و (۳) بیان می‌شود.

$$f^g = \left\{ \frac{\partial w}{\partial \bar{u}_I^e} \frac{\partial d_I^e}{\partial d_I^g} \right\} \qquad (۲)$$

$$K^g = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{d}_I^e \partial \bar{d}_J^e} \frac{\partial \bar{d}_I^e \partial \bar{d}_J^e}{\partial d_K^g \partial d_L^g} + \frac{\partial w}{\partial \bar{d}_I^e} \frac{\partial^2 \bar{d}_I^e}{\partial \bar{d}_K^e \partial \bar{d}_L^e} \right] \qquad (۳)$$

معادلات (۲) و (۳) شامل دو ترم هستند، ترم اول شامل مشتقات انرژی کرنش با توجه به جابجایی محلی می‌باشد:

$$f^e = \left\{ \frac{\partial w}{\partial \bar{d}_I^e} \right\} \qquad (۴\text{-الف})$$

و

1- Form Finding
2- Dynamic Relaxation
3- Null Space
4- Point Iterative
5- Rod Element
6- Total Lagrangian
7- Update Lagrangian
8- Co-Rotational Method

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.7.4.5]

$$K^e = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{d}_I^e \partial \bar{d}_J^e}\right] \quad (۴-ب)$$

با استفاده از معادلات (۴- الف) و (۴- ب) بردار نیرو داخلی و ماتریس سختی مماسی در مختصات محلی بدست آورده می‌شوند. ترم دوم معادلات (۲) و (۳) شامل مشتقات جزیی جابجایی محلی بر حسب جابجایی کلی می‌باشد. این روابط باعث تشکیل شدن ماتریس‌های تبدیل لازم، به منظور بیان نمودن نیروهای داخلی و ماتریس سختی مماسی در چهارچوب سیستم مختصات کلی می‌شوند.

$$S_e = \left\{\frac{\partial \bar{d}_I^e}{\partial d_J^g}\right\} \quad (۵-الف)$$

$$S_{ei} = \left\{\frac{\partial^2 \bar{d}_I^e}{\partial d_K^g \partial d_L^g}\right\} \quad (۵-الف)$$

در حقیقت ماتریس‌های معادله (۵- الف) و (۵- ب) به رابطه غیرخطی معادله (۱) بستگی دارند.

۲-۱- سیستم مختصات و سینماتیک میله

المان میله همچون شکل ۱ در فضا همراه با دو گره در نظر گرفته می‌شود. بردارهای یکه عمود برهم در مختصات محلی به وسیله $r_\alpha, \alpha=1,2,3$ در شکل ۱ نشان داده شده است.

در چارچوب اولیه، سیستم محلی به وسیله سه بردار یکه e_α^0 تعریف شده است. همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، مبداء سیستم مختصات محلی روی یکی از گره‌ها در نظر گرفته شده و در نتیجه جابجایی صلب به وسیله ترم u_1^g تعریف می‌شود. در واقع ترم u_1^g بیان کننده انتقال صلب گره شماره (۱) می‌باشد. جهت‌گیری سیستم مختصات محلی به وسیله ماتریس متعامد R_r که بصورت معادله (۶) بیان می‌شود.

$$R_r = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} \quad (۶)$$

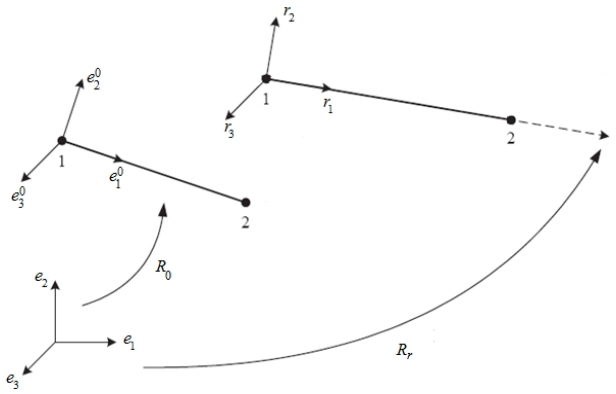
اولین محور مختصات سیستم محلی جدید به فرم معادله (۷) بیان می‌شود.

$$r_1 = \frac{x_2^g + d_2^g - x_1^g - d_1^g}{L_f} \quad (۷)$$

که ترم‌های $x_i^g, i=1,2$ بیان کننده مختصات نقاط گره‌ای المان میله در سیستم مختصات کلی می‌باشد و L_f بیان کننده طول المان میله در شکل تغییر یافته می‌باشد.

$$L_f = \left\| x_2^g + u_2^g - x_1^g - u_1^g \right\| \quad (۸)$$

محورهای دوم و سوم سیستم مختصات محلی برای مسایل یک بعدی مورد استفاده قرار نمی‌گیرد، زیرا تغییر فرم در جهت محور (۱) رخ خواهد داد.



شکل ۱ نمایش سیستم مختصات و سینماتیک المان میله

با توجه به شکل ۱، جابجایی $\bar{u}$ در داخل المان بصورت معادله (۹) مشخص می‌شود.

$$\bar{d} = L_f - L_0 \quad (۹)$$

که L_0 طول المان میله در سیستم مختصات اولیه می‌باشد. برای تبدیل نمودن ماتریس سختی مماسی و بردار نیرو از مختصات محلی به کلی باید از معادله (۹) مشتق گرفته شود.

$$\delta \bar{d}^e = A \delta d^g \quad (۱۰)$$

ماتریس تبدیل حتماً تغییرات جهت را نیز شامل می‌شود. تغییرات کلی معادله (۹) به فرم معادله (۱۱) بیان می‌شود.

$$\delta \bar{d}^e = \delta L_f \quad (۱۱)$$

معادله (۱۱) بعد از یک سری اعمال جبری به صورت معادله (۱۲) بیان می‌شود.

$$\delta \bar{d} = \delta L_f = r\left[\delta \bar{d}_1^{gT} \quad \delta \bar{d}_2^{gT}\right]^T$$
$$r = \left[-r_1^T \quad r_1^T\right] \Rightarrow B = r \quad (۱۲)$$

سیستم مرجع جابجایی محلی $\bar{d}_I^e$ از گره‌های المان را مشخص می‌کند. بردار نیروهای داخلی f^e و ماتریس سختی مماسی K^e بر مبنای انتخاب فرمولاسیون المان محلی محاسبه می‌شود. در ادامه نحوه بدست آوردن بردار نیرو و ماتریس سختی توضیح داده خواهد شد.

بر اساس اصل برابری کار مجازی سیستم در مختصات محلی و کلی، بردار نیروی داخلی در سیستم مختصات کلی به صورت معادله (۱۳) محاسبه می‌شود:

$$f^g = A^T f^e \quad (۱۳)$$

ماتریس سختی مماسی با مشتق گرفتن از رابطه (۱۳) و جایگذاری در معادله (۱۲) بصورت رابطه (۱۴) بیان می‌شود:

$$\delta f^g = A^T \delta f^e + \delta A^T f^e \quad (۱۴)$$

در نتیجه ماتریس سختی مماسی K^g بصورت معادله (۱۵) بدست می‌آید.

$$\delta f^g = K^g \delta d^g \quad (۱۵)$$

از عبارت تغییرات نیرو در المان، $\delta f^e = K^e \delta \bar{d}^e$ و جایگذاری معادله (۱۰)، اولین ترم معادله (۱۴) برابر است با:

$$A^T \delta f^e = A^T K^e A \delta d^g \quad (۱۶)$$

با معرفی نماد $d_i^g = \left[d_{i1}^g \quad d_{i2}^g \quad d_{i3}^g\right], i=1,2$، دومین ترم معادله (۱۴)، با مشتق گرفتن از معادله (۷) به فرم معادله (۱۷) بیان می‌شود:

$$\delta r_1^g = \frac{1}{L_f}\left[I - r_1 r_1^T\right]\begin{bmatrix} \delta d_{21}^g - \delta d_{11}^g \\ \delta d_{22}^g - \delta d_{12}^g \\ \delta d_{23}^g - \delta d_{13}^g \end{bmatrix} \quad (۱۷)$$

معادله (۱۷) را می‌توان به فرم ماتریسی (۱۸) نوشت.

$$\delta r^T = C \delta d_g^g;\ C = \frac{1}{L_f}\begin{bmatrix} C_3 & -C_3 \\ -C_3 & C_3 \end{bmatrix};\ C_3 = \left(I - r_1 r_1^T\right) \quad (۱۸)$$

در نتیجه ماتریس سختی مماسی با اضافه نمودن معادلات (۱۶) و (۱۷) بصورت رابطه (۱۹) بیان می‌شود.

$$K^g = A^T k^e A + f^e C \quad (۱۹)$$

که f^e بیان کننده نیروی داخلی می‌باشد.

ماتریس سختی مماسی و بردار نیرو داخلی کلیه المان‌های تنسگریتی به وسیله روابط (۱۳) و (۱۹) به مختصات کلی نگاشت داده می‌شود. در روش ارائه شده در هر تکرار، نرم باقی‌مانده نیروهای غیر تعادلی که در واقع اختلاف

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.7.4.5]

بین نیروهای خارجی و داخلی در هر گره می‌باشند، محاسبه و روش تا رسیدن به یک تلرانس قابل قبول ادامه می یابد.

۳- سیستم تنسگریتی

برای تحلیل معادلات استاتیکی غیرخطی سازه تنسگریتی از روش هم-چرخشی استفاده خواهد شد. فرض می‌شود مواد استفاده شده در سازه تنسگریتی الاستیک و خطی باشد، و سطح مقطع المان‌های مورد استفاده ثابت در نظر گرفته می‌شوند. در این سازه فرض می‌شود که المان نخ فقط نیروی کشش تحمل می‌کند و المان میله قادر به تحمل هر دو نیرو فشاری و کششی باشد. با در نظر گرفتن فرضیات فوق، معادله تعادل استاتیکی سازه تنسگریتی به صورت معادله (۲۰) بیان می‌شود:

$$\left[K^g\right]\{dU\}=\left\{f^g\right\}=\{P\} \qquad (۲۰)$$

در رابطه فوق $\left[K^g\right]$ بیان کننده ماتریس سختی مماسی، $\{dU\}$، $\left\{f^g\right\}$ و $\{P\}$ به ترتیب بردارهای جابجایی، نیروهای داخلی و نیروهای خارجی می‌باشند. با توجه به ماهیت غیرخطی بودن معادله (۲۰) از روش تکرار برای حل معادله استفاده می‌شود. تحت اثر بار خارجی و نیروی پیش تنش موجود در سازه، جابجایی گره‌های سازه محاسبه می‌شوند. یکی از فاکتورهایی که باید در هر تکرار مورد توجه قرار گیرد این است که اگر طول المان نخ از طول اولیه نخ کمتر باشد، سبب می‌شود که المان نخ دچار پدیده شل شدن[1] گردد در نتیجه نباید سختی این نخ در ماتریس سختی مماسی کلی آورده شود.

در هر شکل تعادلی، q، نیروی پیش تنش از قانون هوک برای مواد الاستیک خطی محاسبه می‌شود. در رابطه (۲۱)، E_i و A_i به ترتیب معرف مدول الاستیسیته و مساحت المان می‌باشد. در نتیجه رابطه بین نیروی پیش تنش و طول اولیه l_{0i} به صورت رابطه (۲۱) قابل محاسبه می‌باشد.

$$f_i(q)=\frac{E_iA_i}{l_{0i}}\left(l_i(q)-l_{0i}\right), i=1,2,\ldots,b \qquad (۲۱)$$

که $l_i(q)$ طول جدید المان در شکل تعادلی، q می‌باشد و b بیان کننده تعداد المانه‌ای موجود در سازه می‌باشد. در هر شکل تعادلی برای این که المان نخ دچار پدیده شل شدن نشود باید معادله (۲۲) صادق باشد:

$$\left(l_i(q)-l_{0i}\right)>0 \qquad (۲۲)$$

مقدار نیروی پیش تنش و بار خارجی بطور مستقیم روی رفتار تغییر فرم سازه تنسگریتی اثر دارند. یکی دیگر از قیدها که به منظور حفظ ساختار سازه تنسگریتی باید ارضا شود، به قید مقاومت در برابر تسلیم[2] مشهور است. به عبارت دیگر کلیه المان‌ها سازه تنسگریتی باید در برابر شکست مقاوم باشند. قیودی که از شکست المان میله و نخ سازه جلوگیری می‌کند، به صورت معادلات (۲۳) و (۲۴) بیان می‌شود.

$$\pm E_i\left(\frac{l_i(q)}{l_{0i}}-1\right)-\sigma_i>0 \qquad (۲۳)$$

$$\pm E_i\left(\frac{l_i(q+u)}{l_{0i}}-1\right)-\sigma_i>0 \qquad (۲۴)$$

که σ_i تنش تسلیم المان مورد نظر می‌باشد و علامت $(\pm)$ به ترتیب برای اجزای نخ و میله بکار گرفته می‌شود.

۴- مثال عددی

در این قسمت، سه مثال عددی برای نشان دادن کارایی روش بیان شده، ارائه می‌شود. برای برنامه‌نویسی محاسبات لازم از نرم‌افزارمتلب استفاده شده است. جابجایی المانهای سیستم تنسگریتی به نیروی پیش‌تنش مشخص شده و بار خارجی اعمال شده بر تنسگریتی بستگی دارد. در این تحلیل فرض اصلی آن است که مرحله شکل یابی سازه تنسگریتی از قبل انجام شده و همچنین جنس ماده و سطح مقطع المان‌های سازه تنسگریتی نیز معین هستند. در کلیه مثال‌ها تلرانس نرم نیروی باقی‌مانده (10^{-6}) در نظر گرفته شده است. همچنین در کلیه مثال‌ها سختی محوری المان‌های میله و نخ به ترتیب EA= 105000kN و EA=31500kN در نظر گرفته شده اند.

۴-۱- تنسگریتی صفحه‌ای

مطابق شکل ۲ یک سازه تنسگریتی صفحه‌ای دو بعدی متشکل از ۸ عضو (شامل ۶ نخ و ۲ میله) و ۶ گره در نظر گرفته می‌شود. این مثال قبلا توسط نگلو [۲۳] و همکارانش با استفاده از روش تکرار نقطه‌ای تحلیل شده و در اینجا این مثال برای نشان دادن صحت نتایج آورده شده است.

برای سازه مذکور با استفاده از روش ارائه شده توسط لی و تران [۱۶] مقادیر ضرایب پایه نیروی پیش تنش در جدول ۱ ارائه شده است.

بردار نیروی پیش تنش $f_i(q)$ به فرم معادله (۲۵) محاسبه می‌شود.

$$f_i=p_s\beta l_i \qquad (۲۵)$$

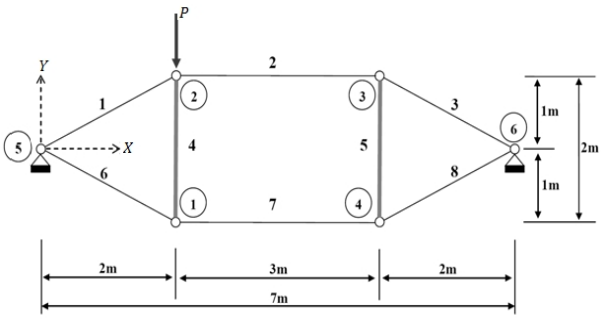
که p_s ضریب بدون بعد نیروی پیش‌تنش و β نشان دهنده ضریب پایه پیش‌تنش و l_i طول المان پیش‌تنش می‌باشد. مقادیر مختلف p_S همراه با بار خارجی برای تحلیل غیرخطی هندسی استاتیکی سازه تنسگریتی در نظر گرفته می‌شود. همان‌طور که در شکل ۲ نشان داده شده است نیروی خارجی P بصورت عمودی در گره ۲ به سازه اعمال می‌شود. برای نشان دادن درستی روش ذکر شده، نتایج بدست آمده از این روش با نتایج روش نگلو [۲۳] مقایسه می‌شود. در جدول ۲ این مقایسه انجام شده است.

جدول ۱ ضریب پایه پیش تنش سازه تنسگریتی صفحه ای

عضو	نخ (۱،۳،۶،۸)	نخ (۲و۷)	میله (۴و۵)
مقادیر پایه نیروی پیش تنش (β)	۲	۱/۳۳۳۳	-۱

جدول ۲ مقایسه نتایج این جدید با نتایج روش نگلو جابجایی عمودی درگره ۲

نیروی خارجی (kN)	نیروی پیش تنش (kN)	روش جدید	تعداد تکرار	نتایج نگلو [۲۳]
۲	۶	-۰/۰۳۶	۳	-۰/۰۴ ~ -۰/۰۲
۶	۶	-۰/۰۵۹	۳	-۰/۰۶ ~ -۰/۰۴
۱۰	۶	-۰/۰۷۶	۳	-۰/۰۸ ~ -۰/۰۶
۲	۸	۰/۰۴	۳	-۰/۰۴ ~ -۰/۰۲
۶	۸	۰/۰۶۱	۳	-۰/۰۶ ~ -۰/۰۴
۱۰	۸	۰/۰۷۸	۳	-۰/۰۸ ~ -۰/۰۶
۱۰	۱۰	۰/۰۸۳	۳	-۰/۱ ~ -۰/۰۸



شکل ۲ سازه تنسگریتی صفحه‌ای [۲۳]

1- Slacking
2- Strength constraint

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.7.4.5]

از جدول ۲ به راحتی می‌توان استنتاج کرد که نتایج بدست آمده با دقت بالایی با نتایج بدست آمده از نگلو همخوانی دارد. با استفاده از نیروی پیش تنش و بار خارجی اعمالی در گره ۲ کلیه قیود ذکر شده ارضا می‌شوند.

۴-۲- سازه تنسگریتی ۴ مدل اسنلسون

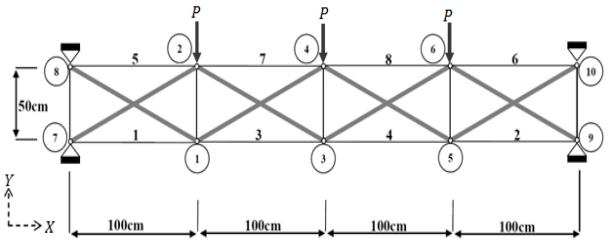
سازه تنسگریتی که از ۴ مدل پایه اسنلسون ایکس تشکیل شده است همچون شکل ۳ در نظر گرفته می‌شود. این سازه شامل ۱۰ گره، ۸ میله و ۱۳ نخ می‌باشد. مقادیر ضریب پایه پیش تنش سازه فوق با استفاده از روش لی و تران [۱۶] در جدول ۳ آورده شده است.

در سازه مذکور بار خارجی P بصورت عمودی در گره‌های ۲، ۴ و ۶ به سازه اعمال می‌شود. مقادیر بار خارجی بین ۱۵ تا ۲۰ کیلو نیوتن و با گام ۱ کیلو نیوتن می‌باشد. سازه تنسگریتی قبل از این که تحت تأثیر بار خارجی قرار گیرد تحت تأثیر نیروی پیش‌تنش می‌باشد. ضریب بدون بعد نیروی پیش‌تنش، p_S بین ۵/ و ۵ کیلو نیوتن و با گام ۵/ کیلو نیوتن تغییر پیدا می‌کند. در این مثال جابجایی عمودی گره‌های ۲، ۴ و ۶ تحت تأثیر نیروهای خارجی و نیروی پیش‌تنش متغیر محاسبه شده‌اند و نتایج در شکل‌های ۴ و ۵ نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل‌های ۴ و ۵ می‌توان فهمید زمانی که نیروی پیش‌تنش ثابت است، مقادیر جابجایی گره‌های ۲،۴ و ۶ با زیاد نمودن مقدار نیروی خارجی، بزرگ‌تر می‌شوند.

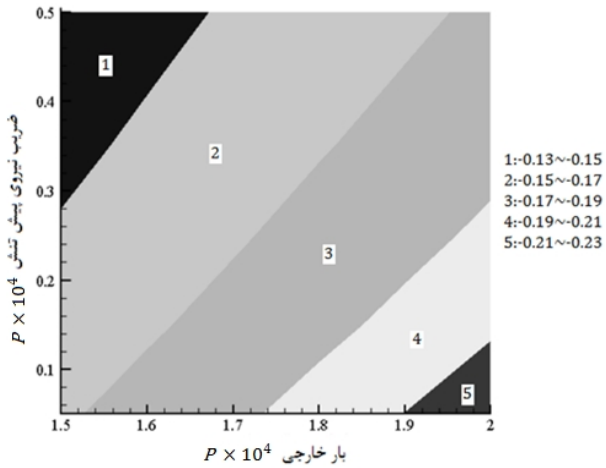
برای مثال اگر ضریب نیروی پیش تنش ۳ کیلو نیوتن باشد و بار خارجی بین ۱۵ تا ۲۰ کیلو نیوتن متغیر باشد، مقادیر جابجایی بین ۰/۱۳- تا ۰/۱۹- سانتی‌متر خواهد بود.

جدول ۳ مقادیر ضریب پایه پیش‌تنش سازه تنسگریتی متشکل از ۴ مدل اسنلسون ایکس

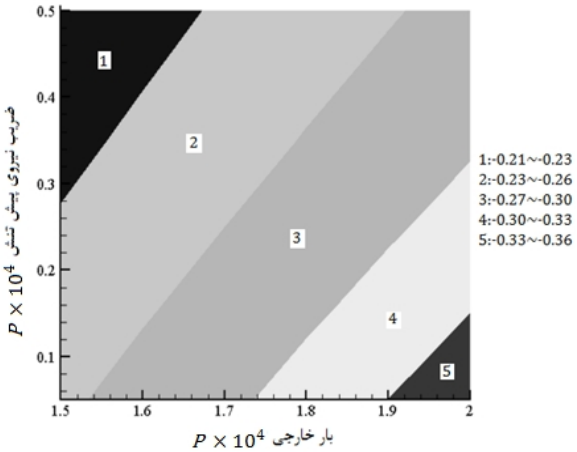
عضو	نخ (۱-۸)	نخ (۹-۱۳)	میله (۱۴-۲۱)
مقادیر پایه نیروی پیش تنش (β)	۵	۲	۱-



شکل ۳ سازه تنسگریتی مونتاژ شده به وسیله ۴ تا مدل اسنلسون ایکس



شکل ۴ مقادیر جابجایی گره‌های ۲ و ۶ بر حسب مقادیر مختلف نیروهای خارجی و نیروی پیش تنش



شکل ۵ مقادیر جابجایی گره ۴ بر حسب مقادیر مختلف نیروهای خارجی و نیروی پیش‌تنش

جدول ۴ مقادیر ضریب پایه نیروی پیش تنش برای سازه متشکل از ۲۰ تا کوادریوپلکس

عضو	نخ	نخ	نخ	نخ	میله
	۱-۱۰	۱۱-۱۸	۳۴-۴۹	۳۵-۲۰۹	۲۱۰-۲۷۹
پیش‌تنش β	۱	۱۷	۱۸	۲	-۲

اما اگر مقدار بار خارجی ثابت در نظر گرفته شود ولی مقدار ضریب نیروی پیش تنش افزایش پیدا کند، جابجایی سازه کاهش پیدا می‌کند. برای نمونه، اگر بار خارجی ۱۸ کیلو نیوتن باشد و مقدار ضریب نیروی پیش تنش بین ۰/۵ تا ۵ کیلو نیوتن متغیر باشد، مقدار جابجایی بین ۰/۳۳- تا ۰/۲۳- سانتی‌متر می‌باشد.

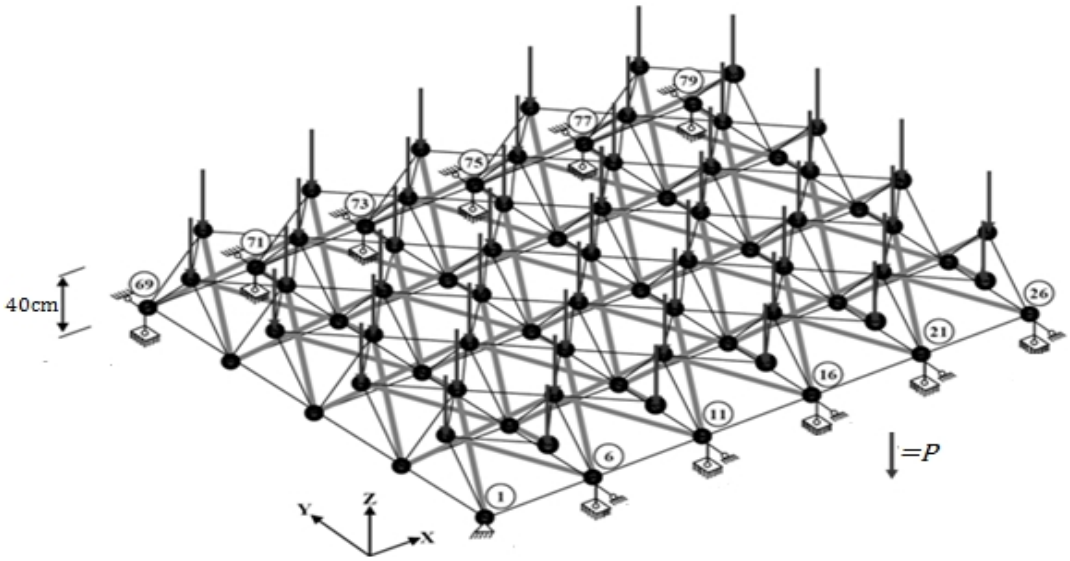
۴-۳- سازه تنسگریتی سه بعدی

در این مثال یک سیستم تنسگریتی سه بعدی که متشکل از ۲۰ مدل کوادریوپلکس در شکل‌های ۶ و ۷ نشان داده شده است. این سازه از ۷۹ گره، ۲۰۹ نخ و ۸۰ میله تشکیل شده است. مقادیر ضریب پیش تنش با استفاده از روش لی و تران [۱۴] برای سازه فوق در جدول ۴ نشان داده شده است.

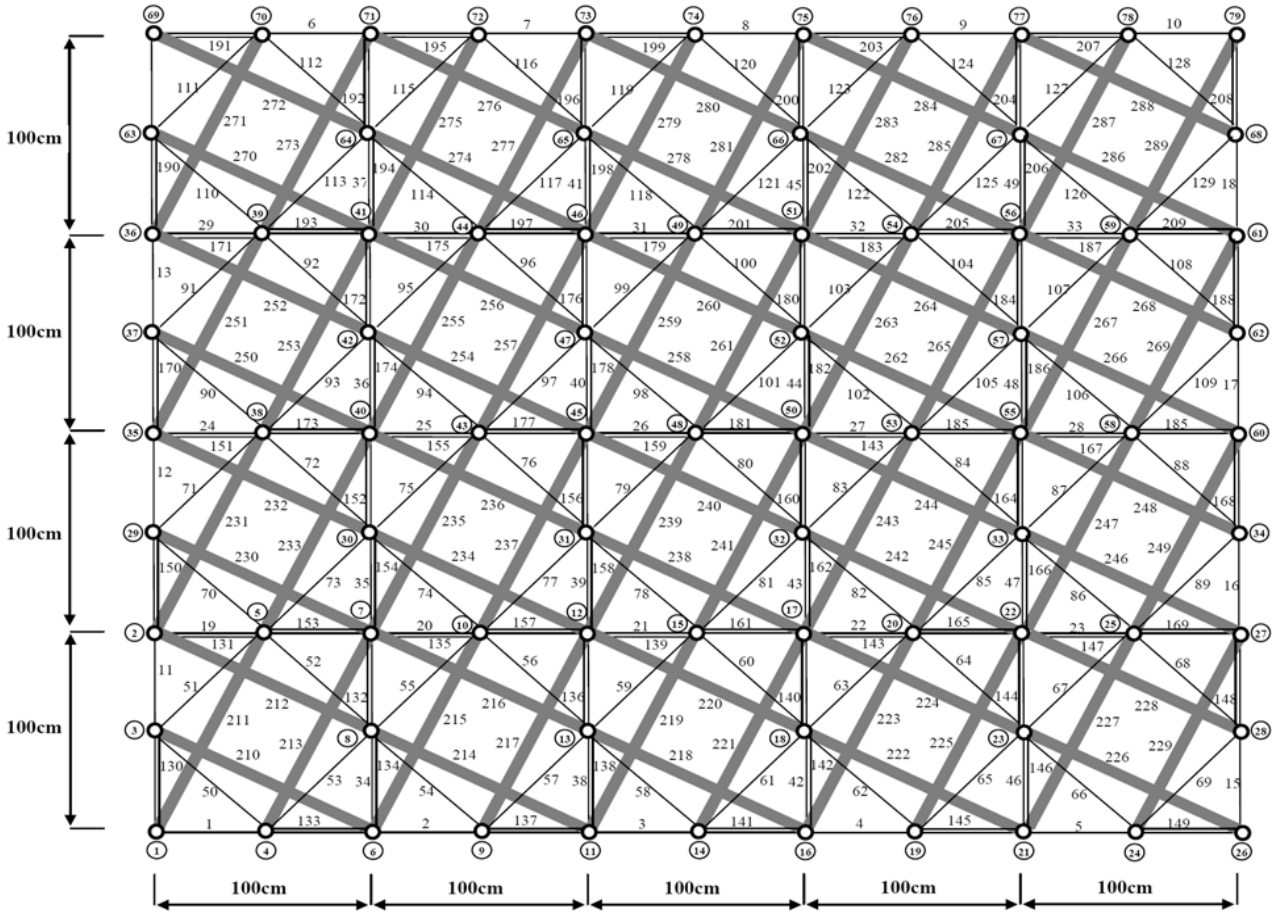
در این مثال عددی، بار خارجی در گره‌های قسمت بالا سازه، یعنی: ۳،۴،۵،۸، ...،۷۴،۷۶،۷۸ به سازه اعمال می‌شود.

مقادیر نیروهای خارجی بین ۱ تا ۱۴/۵ کیلونیوتن با گام ۱/۵ کیلونیوتن متغیر می‌باشد. سازه مذکور قبل از این که تحت اثر بار خارجی قرار گیرد تحت اثر نیروی پیش تنش می‌باشد. ضریب نیروی پیش تنش، p_s بین ۱۰ تا ۱۰۰ کیلو نیوتن با گام ۱۰ کیلونیوتن متغیر می‌باشد. در این مثال، برای نمونه مقادیر جابجایی عمودی گره‌های ۳۷ و ۴۸ تحت اثر بار متغیر خارجی و نیروی پیش‌تنش متغیر در شکل‌های ۸ و ۹ نشان داده شده است. با مشاهده شکل‌های ۸ و ۹ می‌توان فهمید که اگر نیروی پیش تنش ثابت باشد جابجایی گره‌های بالا با افزایش نیروی خارجی افزایش پیدا می‌کند. برای نمونه در گره ۴۸، اگر نیروی پیش تنش ۱۰ کیلو نیوتن باشد و نیروی خارجی اعمال شده به سازه بین ۱۰ تا ۱۴/۵ کیلو نیوتن متغیر باشد، جابجایی گره مورد نظر بین ۰/۰۰۱۲تا ۰/۰۵۵ متر است. ماکزیمم جابجایی سازه تحت اثر نیروی خارجی متغیر و نیروی پیش تنش متغیر در گره ۳۷ رخ خواهد داد. با توجه به داده‌ای بکار گرفته شده مقدار ماکزیمم جابجایی ۰/۱۰۲۱ متر موقعی‌که نیروی پیش تنش ۱ کیلو نیوتن و بار خارجی ۱۴/۵ کیلو نیوتن باشد. با اعمال بار خارجی و نیروی پیش‌تنش، کلیه قیود ذکر شده ارضا شده‌اند.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.7.4.5]



شکل ۶ نمایش پرسپکتیو سازه تنسگریتی سه بعدی مشبکه

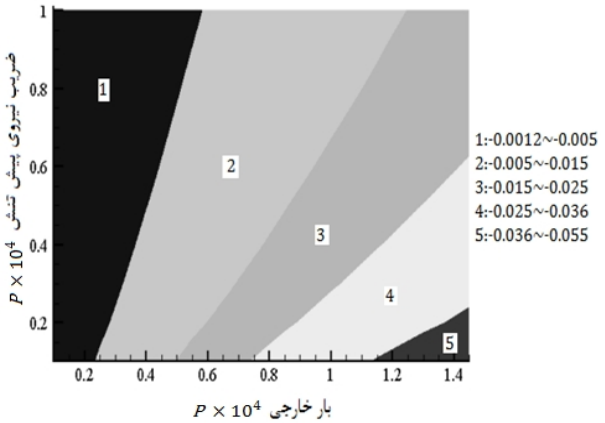


شکل ۷ نمایش دید از بالا سازه تنسگریتی سه بعدی مشبکه

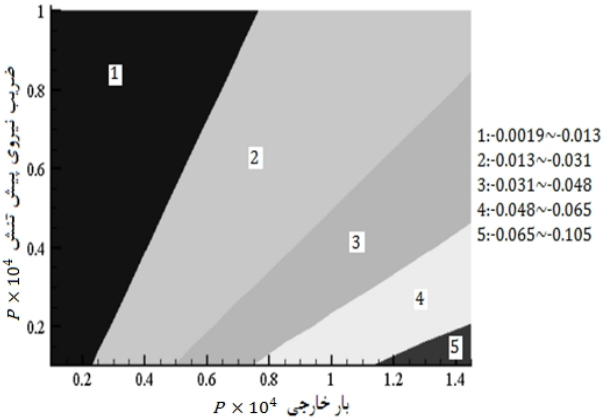
۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش هم-چرخشی برای مطالعه رفتار سازه تنسگریتی تحت اثر بار خارجی بکار گرفته شده است. روش هم-چرخشی بسیار موثرتر از روش‌های معمول در اجزای محدود همانند روش لاگرانژ کلی و لاگرانژ به روز شده می‌باشد، موقعی که تعداد مودهای حرکت صلب المان از مود حرکتی آن بیشتر باشد. در این روش مقدار تغییر فرم از حرکت صلب المان در یک میدان جابجایی بیرون کشیده می‌شود. در واقع در مختصات محلی تغییر فرم سازه محاسبه می‌شود، در حالی که هندسه غیرخطی در ماتریس تبدیلی که بردار نیرو و ماتریس سختی مماسی را از مختصات محلی به کلی نگاشت می-کند، نمایان می‌شود. سه مثال عددی ارائه شده در این کار نشان می‌دهد که فرمولاسیون ارائه شده می‌تواند برای تحلیل رفتار غیرخطی سازه تنسگیریتی تحت بار خارجی مورد استفاده قرار گیرد. در این مثال‌ها نشان داده شده که جابجایی سازه تنسگریتی به مقدار نیروی پیش تنش و بار خارجی بستگی دارد. نتایج این تحقیق را می‌توان بصورت زیر بیان نمود:

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.7.4.5]



شکل ۸ مقادیر جابجایی گره ۴۸ بر حسب مقادیر مختلف نیروهای خارجی و نیروی پیش تنش



شکل ۹ مقادیر جابجایی گره ۳۷ بر حسب مقادیر مختلف نیروهای خارجی و نیروی پیش تنش

۱- ارائه فرمولاسیون روش هم-چرخشی برای المان میله سه بعدی.

۲- جابجایی سازه تنسگریتی به نیروی پیش‌تنش و نیروی خارجی بستگی دارد. مثلاً با افزایش نیروی پیش تنش موقعی که نیروی خارجی ثابت باشد، جابجایی سازه کاهش پیدا خواهد نمود.

۳- اگر مقدار نیروی پیش‌تنش ثابت باشد با افزایش نیروی خارجی مقدار جابجایی سازه بیشتر خواهد شد.

۶- مراجع

[1] S. Adriaenssen, M. Barnes, Tensegrity spline beam and grid shell structures, *Engineering Structure*, No. 23, pp. 29–36, 2001.

[2] J. Quirant, M. Kazi-Aoual, and R. Motro, Designing tensegrity systems: the case of a double layer grid, *Engineering Structure*, No. 25, pp. 1121–1130, 2003.

[3] J. Aldrich, *Control synthesis for a class of light and agile robotic tensegrity structures*, PhD thesis, University of California, 2004.

[4] M. Masic, R. Skelton, Open-loop control of class-2 tensegrity towers, Proc. SPIE 5383, pp.298–308, 2004.

[5] H. Furuya, Concepts of deployable structures in space applications, *International Journal Space Structure*, No. 7, pp.143–152, 1992.

[6] H.C. Tran, and J. Lee, Geometric and material nonlinear analysis of tensegrity structures, Acta Mechanical Science, No. 27, 938-949, 2011..

[7] S. Pellegrino, *Mechanics of kinematically indeterminate structures,* [PhD thesis], UK: University of Cambridge, 1986.

[8] M. Barnes, Form finding and analysis of tension structures by dynamic relaxation, *International Journal Space Structure*, No. 14, pp. 89-104, 1999.

[9] N. Vassart R. Motro Multi-parameter form finding method: Application to tensegrity systems, *International Journal Space Structure,* No. 14, pp.147-154, 1999.

[10] C. Paul, H. Lipson and F. Cuevas, Evolutionary form-finding of tensegrity structures, In: Genetic and evolutionary computation conference, Washington (DC), 2005.

[11] G. Strada, HJ. Bungartz, C. Mohrdieck, Numerical form finding of tensegrity structures, *International Journal Solid and Structures*, No. 43, pp.6855-6868, 2006.

[12] H.C. Tran., J. Lee Advanced form finding of tensegrity structures, *Computer Structure*, No. 88, pp. 237-246, 2010.

[13] H.C. Tran, J. Lee, Initial self- stress design of tensegrity grid structures. *Computer Structure,* No. 88, pp. 558-566, 2010.

[14] M. Pagitz, M.J.J. Tur, Finite element based form-finding algorithm for tensegrity structures. *International Journal Solid and structures,* No. 46, pp. 3235–3240, 2009.

[15] S. Pellegrino, Structural computations with the singular value decomposition of the equilibrium matrix, *International Journal Solid and structures*, No. 30, pp. 3025–3035, 1993.

[16] H. C. Tran, J. Lee, Self- stress design of tensegrity grid structures with exostresses, *International Journal Solid and structures,* No. 47, pp. 2660–2671, 2010.

[17] B. Wang, Cable–strut systems: Part I—tensegrity, *Journal Construct Steel Research,* NO.45, pp. 281–289, 1998.

[18] R. Connelly, Rigidity and energy, *Inventions Mathematical*, No. 66, pp. 11–33, 1982.

[19] I.J. Oppenheim, WO. Williams, Geometric effects in an elastic tensegrity structure, *Journal Elasticity,* No. 59, pp. 51–65 , 2000

[20] D. Williamson, R. Skelton, J. Han, Equilibrium conditions of a tensegrity structure, *International Journal Solid and structures*, No. 40, pp.6347–6367, 2003.

[21] H. Murakami, Static and dynamic analyses of tensegrity structures, part 1. Nonlinear equations of motion, *International Journal Solid and structures*, No. 38, pp. 3599–3613, 2001.

[22] H. Murakami, Static and dynamic analyses of tensegrity structures, part 2. Quasi static analysis, *International Journal Solid and structures*, No. 38, pp. 3615-3629, 2001.

[23] A. Nuhoglu, K. A. Korkmaz. A practical approach for nonlinear analysis of tensegrity systems, *Engineering. Computer*, No. 23, pp. 456-462, 2010.

[24] A. Eriksson, C. Pacoste, Element formulation and numerical techniques for stability problems in shells, *Computer Methods Applied Mechanic Engaging,* No. 191, pp. 3775-3810, 2002.

[25] G. Wempner, Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells, *International Journal Solid and structures*, No. 5, pp. 117-153, 1969.

[26] T. Belytschko, B.J. Hsieh. Non-linear transient finite element analysis with convected co-ordinates, *International Journal Numerical Mathematic Engineering*, No. 7, pp. 255-271, 1973.

[27] C.A. Felippa, B. Haugen, A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory, *Computer Methods Applied Mechanic Engineering*, No. 194, pp. 2285-2335, 2005.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.7.4.5]