



Determination of Stress Intensity Factor for Unequal Cracks Emanating from a Quasi-square Hole under Shear

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Ghajar R.*¹ PhD,
Hajimohamadi M.¹ Msc

How to cite this article

Ghajar R, Hajimohamadi M. Determination of Stress Intensity Factor for Unequal Cracks Emanating from a Quasisquare Hole under Shear. Modares Mechanical Engineering. 2019;19(1):21-28.

ABSTRACT

In the different applications of thin plats in engineering industrial, some holes are created in the structure that can have different shapes such as circular, elliptical, and quasi-square. When the plate is subjected to loading, stress concentration around the hole causes the crack initiation in these areas that can results in a catastrophic failure. In this paper, mode II stress intensity factor (SIF) for two unequal aligned cracks emanating from a circle or a quasi-square hole in an infinite plane was investigated. The complex variable theory of Muskhelishvili and conformal mapping method were used. To obtain mapping function, Schwarts Christoffel integral was combined with some simple mapping functions. Accordingly, a new mapping function is presented and approximated to the sum of series expansion. Using this approximate mapping, SIF is calculated with high accuracy. Surfaces of the cracks and hole are traction-free. The plane is subjected to the pure shear at infinity.

The analytical results are in good agreement with the literature. The obtained stress intensity factors have good accuracy for small cracks. The equation presented in this paper is applicable to the length of the different cracks and calculates the intensity coefficients of mode II for very small cracks with high accuracy. Results show that the shape of the hole is important only for the small cracks.

Keywords Analytical Solution; Stress Intensity Factor; Quasi-Square Hole; Unequal Cracks;

CITATION LINKS

[1] Some basic problems of the mathematical theory of elasticity [2] Stress concentration around holes [3] Quasi-square hole with optimum shape in an infinite plate subjected to in-plane loading [4] OStress concentration around irregular holes using complex variable method [5] Analysis of stress concentrations in plates with rectangular openings by a combined conformal mapping - finite element approach [6] Stress distribution around polygonal holes [7] Stress analytical solution for an infinite plane containing two holes [8] Analysis of an infinite plate containing radial cracks originating at the boundary of an internal circular hole [9] United States National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center. An improved method of collocation for the stress analysis of cracked plates with various shaped boundaries [10] Stress intensity factor for the tension of an infinite plate having an elliptical hole with two cracks emanating from its apexes. Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers [11] Stress analysis for a strip with semi-elliptical notches or cracks on both sides by means of rational mapping function [12] Crack originating from a corner of a square hole [13] Stress intensity solutions for the interaction between a hole edge crack and a line crack [14] A numerical analysis of cracks emanating from a square hole in a rectangular plate under biaxial loads [15] A numerical analysis of cracks emanating from an elliptical hole in a 2-D elasticity plate [16] Crack tip stress intensity factors for a crack emanating from a sharp notch [17] A method for stress intensity factor calculation of infinite plate containing multiple hole-edge cracks [18] Analytical solutions of cracks emanating from an elliptical hole under shear [19] Two collinear square-hole cracks in an infinite plate in tension [20] Analytical calculation of stress intensity factors for unequal cracks emanating from a circular hole in infinite plane [21] An analytical solution for the stress field and stress intensity factor in an infinite plane containing an elliptical hole with two unequal aligned cracks

¹Applied Mechanics Department, Mechanical Engineering Faculty, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

*Correspondence

Address: Room 636, No 7, Pardis Street, Mollasadra Avenue, Vanak Square, Tehran, Iran. Postal Code: 1999143344

Phone: +98 (21) 84063240

Fax: +98 (21) 88677274

ghajar@kntu.ac.ir

Article History

Received: May 19, 2018

Accepted: September 17, 2018

ePublished: January 1, 2019

تعیین ضریب شدت تنش ترک‌های نابرابر نشات‌گرفته از سوراخ شبه‌مربعی تحت بار برشی

رحمت‌اله قاجار* PhD

گروه طراحی جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

مجتبی حاجی‌محمدی MSc

گروه طراحی جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

چکیده

در کاربردهای مختلف صفحات نازک صنعتی، سوراخ‌هایی با اشکال مختلفی از قبیل دایروی، بیضوی و شبه‌مربعی در سازه ایجاد می‌گردد. تمرکز تنش ناشی از بارگذاری در اطراف این سوراخ‌ها، منجر به جوارنه‌زنی ترک در این نواحی شده و ممکن است خطراتی را ایجاد نماید. بنابراین بررسی مساله سوراخ ترک‌دار حایز اهمیت است. در این پژوهش ضریب شدت تنش مود دوم در صفحه نامحدود حاوی سوراخ دایروی یا شبه‌مربعی که دو ترک نابرابر هم‌راستا از آن نشات گرفته، به روش تحلیلی متغیر مختلط موسخلیشویلی و نگاشت همدیس مورد بررسی قرار گرفت. برای یافتن نگاشت، انتگرال کریستفل شوارتز با نگاشت‌های ساده ترکیب می‌شود. نهایتاً یک تابع نگاشت جدید ارایه و به صورت مجموع عبارات کسری تقریب زده می‌شود. با استفاده از این تابع نگاشت تقریبی، ضریب شدت تنش با دقت بالایی محاسبه می‌گردد. سطوح ترک و سوراخ عاری از تنش هستند و صفحه تحت بارگذاری برشی خالص دوردست است. مقایسه نتایج روش تحلیلی حاضر با سایر مراجع تطابق خوبی را نشان می‌دهد. رابطه ارایه‌شده در این مقاله، برای طول ترک‌های متفاوت کاربرد دارد و ضرایب شدت تنش مود دوم را برای ترک‌های خیلی کوچک نیز با دقت بالایی محاسبه می‌نماید. نتایج نشان می‌دهد که شکل سوراخ فقط برای ترک‌های کوچک حایز اهمیت است.

کلیدواژه‌ها: حل تحلیلی، ضریب شدت تنش، سوراخ شبه‌مربعی، ترک‌های نابرابر

تاریخ دریافت: ۹۷/۰۲/۲۹

تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۶/۲۶

* نویسنده مسئول: ghajar@kntu.ac.ir

۱- مقدمه

در کاربردهای مختلف صفحات نازک صنعتی، سوراخ‌هایی برای ایجاد دسترسی به سایر قسمت‌های سازه تعبیه می‌شود. معمولاً در این قطعات و سازه‌ها سوراخ‌هایی با اشکال مختلف از جمله دایروی، بیضوی و شبه‌مربعی ایجاد می‌شود. هنگامی که صفحه تحت بارگذاری قرار می‌گیرد، تمرکز تنش اطراف این سوراخ‌ها منجر به جوارنه‌زنی ترک در این نواحی می‌شود که وضعیت خطرناکی را به وجود خواهد آورد. در دهه‌های گذشته محققان به تعیین تنش‌ها و ضرایب تمرکز تنش در نزدیکی سوراخ‌ها با اشکال مختلف در صفحات نامحدود پرداخته‌اند. یکی از قوی‌ترین روش‌ها روش متغیر مختلط است. موسخلیشویلی روش متغیر مختلط را برای حالت دوطبقه‌ای بیان کرده و نشان داده است که تابع پتانسیل تنش می‌تواند به صورت مجموع دو تابع تحلیلی بیان شود و حل مساله منوط به تعیین این توابع تحلیلی است [1]. ساوین با استفاده از روش متغیر مختلط موسخلیشویلی، میدان تنش در اطراف اشکال مختلف سوراخ‌ها در جسم همسان‌گرد نامحدود را ارایه کرده است [2].

با توجه به کاربرد صفحات حاوی سوراخ مربعی، دورلی و راجایا [3] به منظور ایجاد کمترین ضریب تمرکز تنش، شعاع گوشه‌ها و اضلاع مربع را بهینه‌سازی کرده‌اند. سیمها و موهای‌اتر [4] از یک تابع نگاشت کلی برای یافتن توزیع تنش در اطراف سوراخ با شکل‌های مختلف در یک صفحه همسان‌گرد نامحدود استفاده کرده و توزیع تنش را برای حالت بارگذاری کششی و برشی خالص در دوردست به دست آورده‌اند. لوح‌قلم و همکاران [5] با استفاده از روش متغیر مختلط و ترکیب روش نگاشت همدیس و اجزای محدود، توزیع

تنش اطراف سوراخ مستطیل‌شکل تحت بار خمشی را تعیین نموده‌اند. شارما [6] حل عمومی برای توزیع تنش حول سوراخ چندضلعی در صفحه همسان‌گرد نامحدود تحت بارگذاری دومحوری را به دست آورده و اثر هندسه سوراخ و الگوی بارگذاری را روی ضریب تمرکز تنش بررسی نموده است. لو و همکاران [7] یک صفحه همسان‌گرد دارای دو سوراخ را بررسی و ضریب تمرکز تنش را به روش تحلیلی متغیر مختلط و نگاشت همدیس ارایه کرده‌اند.

با توجه به این که جوارنه‌زنی ترک در محل تمرکز تنش قطعات بسیار رایج بوده، بررسی این پدیده برای جلوگیری از حوادث حایز اهمیت است. برای اولین بار بووی [8] یک سوراخ دایره‌ای با ترک لبه‌ای و یک جفت ترک لبه‌ای متقارن در یک صفحه نامحدود تحت تنش یکنواخت را با استفاده از روش نگاشت مختلط بررسی نموده است. با استفاده از تعریف بسط تابع ویژه، نیومن [9] یک روش تجمعی مرزی بهبودیافته و مقدار ضریب شدت تنش را برای دو ترک متقارن در دو طرف یک سوراخ دایروی و بیضوی در صفحات محدود و نامحدود ارایه کرده است. صفحه حاوی سوراخ بیضوی با دو ترک لبه‌ای متقارن و تحت بار دوردست کششی توسط نیستانی و ایسیو [10] مورد بررسی قرار گرفته است و برای طول ترک‌های متوسط (نه خیلی کوچک) نتایج عددی را ارایه نموده‌اند.

هاسبه و هوریوچی [11] با استفاده از روش موسخلیشویلی و نگاشت همدیس، توزیع تنش و ضریب تمرکز تنش را برای ناچ بیضی‌شکل در تسمه به دست آورده و ضریب شدت تنش ترک لبه‌ای یک تسمه را نیز با همین روش ارایه نموده‌اند. هاسبه و اوند [12] ضریب شدت تنش مود اول را در صفحه نامحدود همسان‌گرد به دست آورده‌اند و صفحه، حاوی سوراخ مربعی بود که یک ترک از یکی از گوشه‌های آن نشات گرفته است. آنها از روش موسخلیشویلی و نگاشت همدیس استفاده نموده‌اند که فضای خارج مربع ترک‌دار را به ناحیه خارج دایره واحد می‌نگارد. این مساله برای سه حالت بارگذاری در دوردست، در جهت x و y و برش خالص بررسی شده است. هاسبه و چن [13] با کاربرد نگاشت همدیس و روش جمع آثار، اثر متقابل ترک و سوراخ دایروی ترک‌دار را بررسی کرده و یک صفحه همسان‌گرد نامحدود را برای بارگذاری‌های مختلف کششی تک‌محوره، کششی دومحوره، برشی و جابه‌جایی روی مرز دایره مورد مطالعه قرار داده‌اند. یان [14، 15] با استفاده از روش عددی المان مرزی، ضرایب شدت تنش در ترک‌های نشات‌گرفته از گوشه‌های سوراخ دایروی، مربعی و مثلثی در صفحات نامحدود را محاسبه کرده و المان‌های ناپیوستگی جابه‌جایی نوک ترک ویژه‌ای را برای مدل‌کردن تکینگی نوک ترک ارایه نموده است. او برای حالت‌های بارگذاری مختلف کشش در دوردست و فشار داخلی روی سوراخ، ضرایب شدت تنش را به دست آورده است. فیلیپس و همکاران [16] با استفاده از روش توزیع جابه‌جایی و معادله انتگرالی، ضرایب شدت تنش ترک نشات‌گرفته از یک ناچ با گوشه تیز و یک ترک نشات‌گرفته از گوشه سوراخ مربعی را مورد بررسی قرار داده‌اند. ژائو و همکاران [17] یک روش تحلیلی برای محاسبه ضرایب شدت تنش در صفحه نامحدود حاوی چندین سوراخ ترک‌دار را ارایه نموده‌اند. در این پژوهش از خواص توابع مختلط متغیر برای تعیین توابع تنش استفاده و روش جمع آثار تقریبی برای حل مساله ضریب شدت تنش در سوراخ‌های چندگانه، ارایه و علاوه بر آن از ترک معادل برای اصلاح روش استفاده شده است. لیو و دوآن [18] دو ترک با طول نابرابر در لبه سوراخ بیضی‌شکل تحت بار برشی در دوردست را با استفاده از روش تابع متغیر مختلط بررسی و راه حل‌های تحلیلی برای توابع تنش و ضرایب شدت تنش ارایه نموده‌اند. نتایج آنها

۳- تئوری مساله

میدان تنش بر حسب تابع تنش ایری $U(x, y)$ عبارت از رابطه ۱ است:

رابطه ۱:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}; \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

در غیاب نیروهای حجمی، معادله سازگاری عبارت از رابطه ۲ است.

رابطه ۲:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0$$

موسخلیشویلی معادله اخیر را حل و پاسخی به‌صورت رابطه ۳ ارائه داده است^[1].

رابطه ۳:

$$U(x, y) = Re[\bar{z}\phi_1(z) + \chi_1(z)]$$

در رابطه ۳، Re بیانگر قسمت حقیقی عبارت داخل براکت و $\phi_1(z)$ و $\chi_1(z)$ توابع تحلیلی از متغیر مختلط $z = x + iy$ هستند.

با فرض این که ناحیه تغییرات متغیر مختلط z ، ناحیه صفحه نامحدود حاوی سوراخ ترک‌دار باشد و سطح سوراخ و ترک‌ها فاقد بارگذاری باشند، با قراردادن مبدا مختصات در مرکز سوراخ (خارج ناحیه)، مقادیر $\phi_1(z)$ و $\psi_1(z)$ به‌صورت روابط ۴ و ۵ به دست می‌آیند^[2].

رابطه ۴:

$$\phi_1(z) = B_1 z + \phi_1^0(z)$$

رابطه ۵:

$$\psi_1(z) = (B_2 + iC_2)z + \psi_1^0(z)$$

مقادیر B_1 ، B_2 و C_2 با توجه به مقادیر تنش‌ها در دوردست به‌صورت رابطه ۶ به دست می‌آیند.

رابطه ۶:

$$B_1 = \frac{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty}{4}; B_2 = \frac{\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty}{2}; C_2 = \tau_{xy}^\infty$$

برای بارگذاری برشی خالص، مقادیر B_1 و B_2 صفر هستند. برای تعیین توابع تحلیلی $\phi_1(z)$ و $\psi_1(z)$ باید یک تابع نگاشت همدیس $\omega(\zeta)$ تعریف نمود، به‌طوری که ناحیه خارج دایره واحد را به ناحیه مورد نظر تبدیل نماید.

با استفاده از نگاشت $\omega(\zeta)$ و با فرض $\phi_1(z) = \phi_1(\omega(\zeta))$ و $\psi_1(z) = \psi_1(\omega(\zeta))$ برای بارگذاری برشی خالص به‌صورت رابطه ۷ ساده می‌شود.

رابطه ۷:

$$\phi_1(\zeta) = \phi_0(\zeta)$$

$$\psi_1(\zeta) = iC_2 \omega(\zeta) + \psi_0(\zeta)$$

۳-۱- نگاشت دایره واحد ترک‌دار

نگاشتی که ناحیه خارج دایره واحد را به ناحیه خارج دایره واحد با دو ترک نابرابر انتقال دهد، به‌صورت رابطه ۸ به دست می‌آید.

برای طول ترک‌های کوچک مناسب نیست. میاتو و همکاران^[19] با استفاده از اصل بوکنر و روش عددی المان مرزی، اثر متقابل دو سوراخ مربعی شکل ترک‌دار را در صفحه همسان‌گرد نامحدود تحت کشش بررسی نموده‌اند. قاجار و حاجی‌محمدی^[20] دو ترک نابرابر نشات‌گرفته از سوراخ دایروی در صفحه نامحدود و تحت بارگذاری‌های مختلف را با استفاده از روش موسخلیشویلی مطالعه کرده‌اند. ضرایب شدت تنش ارایه‌شده برای طول ترک‌های متوسط و بلند دقت خوبی دارد. در مطالعه‌ای دیگر توسط آنها، با ارایه نگاشت جدید و بسط تابع نگاشت به مجموع عبارات کسری، ضرایب شدت تنش ترک‌های نابرابر نشات‌گرفته از سوراخ دایروی و بیضوی در یک صفحه نامحدود محاسبه شده است^[20]. روش اخیر برای طول ترک‌های کوچک نیز دقت بالایی دارد.

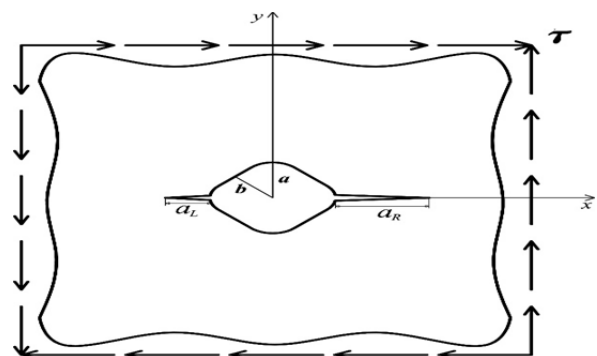
اگر چه کارهای زیادی برای تعیین ضرایب شدت تنش در صفحات همسان‌گرد حاوی گشودگی‌های دایروی و بیضوی انجام شده، اما سوراخ مربعی شکل کمتر مورد توجه بوده است. در تحقیقات پیشین، سوراخ مربعی با گوشه‌های تیز مورد بررسی قرار گرفته، در حالی که سوراخ مربعی با گوشه گرد در صنایع کاربرد داشته است، لذا در پژوهش حاضر، سوراخ مربعی با گوشه‌های گرد (شبه‌مربعی) تجزیه و تحلیل شد.

برخی از کارهای تحلیلی پیشین برای طول ترک‌های کوچک مناسب نبوده^[18, 20]، از طرفی بیشتر تحقیقات نیز برای ترک‌های متقارن و بارگذاری کششی انجام شده است. از آنجایی که سازه‌ها ممکن است تحت بارگذاری‌های متفاوت قرار گیرند، در این پژوهش صفحه تحت بارگذاری برشی مورد بررسی قرار گرفت. بنابراین هدف پژوهش حاضر تعیین ضرایب شدت تنش برای بارگذاری برشی و ترک‌های نابرابر نشات‌گرفته از سوراخ شبه‌مربعی و دایروی بود.

در این پژوهش صفحه نامحدود حاوی سوراخ شبه‌مربعی و دایروی ترک‌دار با استفاده از روش متغیر مختلط موسخلیشویلی و ارایه تابع نگاشت به‌صورت مجموع توابع کسری بررسی شد. در نگاشت جدید، انتگرال کریستفل-شوارتز با نگاشت‌های ساده ترکیب شد. سطوح ترک و سوراخ عاری از تنش بوده و ضریب شدت تنش مود دوم برای بار برشی دوردست ارایه شد. مقایسه نتایج تحلیلی با تحقیقات گذشته، تطابق و دقت روش را نشان داد. علاوه بر آن، روش حاضر ترک‌های کوچک را نیز به‌خوبی تحلیل کرد.

۲- تعریف مساله

یک صفحه نامحدود حاوی یک سوراخ شبه‌مربعی یا دایروی که دو ترک همراستا با طول‌های نابرابر از آن نشات گرفته است، تحت بار برشی دوردست قرار دارد (شکل ۱). رفتار ماده الاستیک خطی، تغییر شکل‌های بی‌نهایت کوچک بوده، به‌طوری که تئوری مکانیک شکست الاستیک خطی قابل کاربرد است.



شکل ۱) صفحه نامحدود حاوی سوراخ شبه‌مربعی ترک‌دار تحت بارگذاری برشی

$$\omega_1(\zeta) = Z_1 = M \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + N + Q(\zeta)$$

$$Q(\zeta) = \zeta \sqrt{\frac{\left(M \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + N \right)^2 - 1}{\zeta^2}}$$

که در آن M و N عبارت از رابطه ۹ است.

رابطه ۹:

$$M = \frac{\delta_1 + \delta_2}{4}; N = \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}$$

$$\delta_i = \frac{1}{2} \left(1 + l_i + \frac{1}{1 + l_i} \right); i = 1, 2$$

l_i اندازه طول ترک‌های نشات‌گرفته از سوراخ دایروی واحد است. برای بررسی سوراخ دایروی به شعاع R که ترک‌هایی به طول‌های a_i از آن نشات گرفته است، مقدار l_i از رابطه ۱۰ به دست می‌آید.

رابطه ۱۰:

$$l_i = \frac{a_i}{R}$$

۳-۲- نگاشت شبه‌مربع

برای به‌دست‌آوردن تابع نگاشت مربع ترک‌دار، ابتدا باید نگاشتی که ناحیه خارج دایره واحد را به ناحیه خارج مربع می‌نگارد، تعیین نمود. این نگاشت با استفاده از انتگرال کریستفل-شوارتز به صورت رابطه ۱۱ است.

رابطه ۱۱:

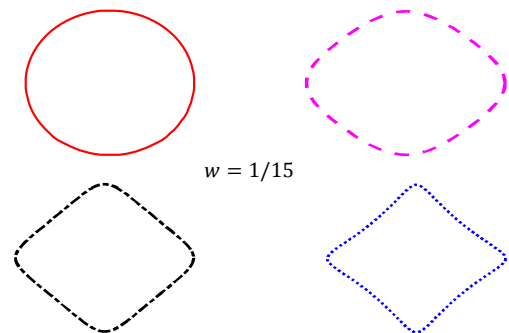
$$\omega_s(\zeta) = \lambda \int \left(1 - \frac{1}{t^4} \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

پارامتر λ معرف اندازه سوراخ و اندیس s معرف نگاشت مربع است. با استفاده از تئوری بسط دوجمله‌ای نیوتن، عبارت داخل انتگرال به صورت سری تبدیل و سپس انتگرال محاسبه می‌شود [2]. با در نظر گرفتن جمله اول سری، تابع نگاشت صفحه حاوی سوراخ شبه‌مربعی به صورت رابطه ۱۲ است.

رابطه ۱۲:

$$Z_s = \omega_s(\zeta) = \lambda \left[\zeta + \frac{w}{\zeta} \right]$$

پارامتر w ضریب اولین جمله سری است. با تغییر مقادیر w ، شکل سوراخ شبه‌مربعی تغییر می‌کند (شکل ۲). وقتی که $w = 1/9$ باشد، اضلاع شبه‌مربع تقریباً صاف است و می‌توان آن را یک مربع با گوشه‌های گرد شده در نظر گرفت که شعاع گوشه‌ها 0.222 است.



شکل ۲) انواع سوراخ‌های به‌ازای wهای متفاوت

شکل ۲) انواع سوراخ‌های به‌ازای wهای متفاوت

۳-۳- نگاشت شبه‌مربع ترک‌دار

با ترکیب روابط ۸ و ۱۲، تابع نگاشت ناحیه خارج دایره واحد به ناحیه خارج شبه‌مربع با دو ترک نابرابر به صورت رابطه ۱۳ به دست می‌آید.

رابطه ۱۳:

$$Z = \omega(\zeta) = \lambda \left[\omega_1(\zeta) + \frac{w}{[\omega_1(\zeta)]^3} \right]$$

در کاربرد رابطه ۱۳ ضروری است که مقدار l_i متناظر با طول ترک‌های نشات‌گرفته از سوراخ شبه‌مربعی تعیین شود. بدین منظور مختصات گوشه‌ای که ترک از آن نشات می‌گیرد با جای‌گذاری $\omega_1(\zeta) = 1$ در رابطه ۱۳ به دست می‌آید. به همین ترتیب با کاربرد مختصات نوک ترک تعیین و سپس از این دو مختصات، طول ترک به صورت رابطه ۱۴ محاسبه می‌شود.

رابطه ۱۴:

$$a_i = -\lambda w + \lambda l_i + \frac{\lambda w}{(1 + l_i)^3}$$

a_i طول ترک نشات‌گرفته از سوراخ شبه‌مربعی است. با حل معادله ۱۴ به روش عددی، مقدار l_i تعیین و با جای‌گذاری در رابطه ۹ مقادیر M و N به دست می‌آیند.

مشتق اول و دوم تابع نگاشت رابطه ۱۳ که در محاسبات بعدی کاربرد دارد، به صورت روابط ۱۵ و ۱۶ محاسبه می‌شوند:

رابطه ۱۵:

$$\omega'(\zeta) = \lambda \omega'_1(\zeta) \left[1 - \frac{3w}{[\omega_1(\zeta)]^4} \right]$$

رابطه ۱۶:

$$\omega''(\zeta) = \lambda \omega''_1(\zeta) \left[1 - \frac{3w}{[\omega_1(\zeta)]^4} \right] + \lambda [\omega'_1(\zeta)]^2 \left[\frac{12w}{[\omega_1(\zeta)]^5} \right]$$

مشتق اول و دوم تابع $\omega_1(\zeta)$ نیز برابر با روابط ۱۷ و ۱۸ است.

رابطه ۱۷:

$$\omega'_1(\zeta) = M \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) \left[\frac{\omega_1(\zeta)}{Q(\zeta)} \right]$$

رابطه ۱۸:

$$\omega''_1(\zeta) = \left(\frac{2M}{\zeta^3} \right) \left(\frac{\omega_1(\zeta)}{Q(\zeta)} \right) - \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right)^2 \left(\frac{M^2}{[Q(\zeta)]^3} \right)$$

لازم به توضیح است که با جای‌گذاری $w = 0$ در رابطه ۱۳، نگاشت سوراخ دایروی به دست خواهد آمد.

۳-۴- تعیین توابع تنش مختلط

همان طور که اشاره شد، حل مساله منوط به تعیین تابع تحلیلی $\varphi(\zeta)$ است. در رابطه ۷ تابع $\varphi_0(\zeta)$ با استفاده از رابطه ۱۹ به دست می‌آید [2].

رابطه ۱۹:

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \cdot \frac{\overline{\varphi'_0(t)}}{t - \zeta} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1^0 + if_2^0}{t - \zeta} dt$$

$$\varphi_0(\zeta) = -\lambda M \left(\sum_{i=1}^4 \sum_{k=3}^{14} \frac{\varphi'_0(\delta_k)}{\omega'(\delta_k)} \frac{E_k^i (\zeta_k^i)^2}{\zeta - \zeta_k^i} \right) + \frac{2\lambda M C_2 i}{\zeta}$$

رابطه ۲۶:

$$\varphi'_0(\zeta) = \lambda M \left(\sum_{i=1}^4 \sum_{k=3}^{14} \frac{\varphi'_0(\delta_k)}{\omega'(\delta_k)} \frac{E_k^i (\zeta_k^i)^2}{(\zeta - \zeta_k^i)^2} \right) - \frac{2\lambda M C_2 i}{\zeta^2}$$

با جای‌گذاری $\zeta = \delta_k^i$ در رابطه ۲۶، ۴۸ معادله مختلط به دست می‌آید که با حل آنها، مقادیر $\varphi'_0(\zeta)$ تعیین و با جای‌گذاری آن در رابطه ۲۵، تابع $\varphi_0(\zeta)$ به دست می‌آید.

ضریب شدت تنش مود دوم ترک سمت راست $K_{II,R}$ و ترک سمت چپ $K_{II,L}$ از رابطه ۲۷ به دست می‌آیند [18].
 رابطه ۲۷:

$$K_{II,R} = \frac{2\sqrt{\pi} \varphi'_0(1)}{i \sqrt{\omega''(1)}}$$

$$K_{II,L} = 2\sqrt{\pi} \frac{\varphi'_0(-1)}{\sqrt{-\omega''(-1)}}$$

با استفاده از رابطه ۲۶ و مشتق دوم تابع نگاشت در رابطه ۱۶، ضریب شدت تنش به صورت روابط ۲۸ و ۲۹ تعیین می‌شوند:
 رابطه ۲۸:

$$K_{II,R} = \frac{2\sqrt{\pi}\lambda M}{\sqrt{\omega''(1)}} [-2C_2 + \frac{1}{i} \left(\sum_{i=1}^4 \sum_{k=3}^{14} \left(\frac{\varphi'_0(\delta_k)}{\omega'(\delta_k)} \frac{E_k^i (\zeta_k^i)^2}{(1 - \zeta_k^i)^2} \right) \right)]$$

رابطه ۲۹:

$$K_{II,L} = \frac{2\sqrt{\pi}\lambda M}{\sqrt{-\omega''(-1)}} [-2C_2 + \frac{1}{i} \left(\sum_{i=1}^4 \sum_{k=3}^{14} \left(\frac{\varphi'_0(\delta_k)}{\omega'(\delta_k)} \frac{E_k^i (\zeta_k^i)^2}{(1 + \zeta_k^i)^2} \right) \right)]$$

۴- نتایج و بحث

در این بخش با جای‌گذاری مقادیر عددی در روابط به دست آمده، نتایج برای بارگذاری برشی تعیین و با داده‌های اجزای محدود و مراجع مقایسه شد. ضریب شدت تنش توسط مقدار K_{II0} با $\tau\sqrt{\pi a_{eq}}$ بی‌بعد می‌شود. K_{II0} ضریب شدت تنش ترک مرکزی با طول معادل است.

۴-۱- نتایج سوراخ دایروی ترک‌دار

ضریب شدت تنش مود دوم ترک‌های برابر $(a_R = a_L)$ نشات‌گرفته از سوراخ دایروی به شعاع R از رابطه ۲۸ محاسبه شد و با نتایج اجزای محدود لیبو و دوآن [18] مقایسه شدند (نمودار ۱). در

در عبارت $\frac{\omega(t) \overline{\varphi'_0(t)}}{\omega'(t) t - \zeta}$ تابع $\varphi_0(t)$ و مشتقات آن خارج دایره واحد تحلیلی بوده، بنابراین مزدوج آن داخل دایره واحد در تمامی نقاط تحلیلی است. با انجام محاسبات و ساده‌سازی مشخص می‌شود که تابع $\overline{\varphi'_0(t)}$ نیز ریشه‌ای درون دایره واحد ندارد، بنابراین فقط لازم است تحلیلی‌بودن عبارت $\omega(t)$ بررسی شود. براساس مراجع [18, 20]، تابع $\omega(t)$ درون دایره واحد دارای قطب نیست، لذا مقدار انتگرال اول سمت راست رابطه ۱۹، صفر می‌شود و به همین دلیل است که نتایج آنها برای ترک‌های کوچک دقت کافی ندارد. اما در تحقیق حاضر با تقریب‌زدن تابع نگاشت $\omega(t)$ به صورت مجموع عبارات کسری مشخص شد که تابع $\omega(t)$ در درون دایره واحد دارای قطب است و در نتیجه جواب انتگرال اول در سمت راست رابطه ۱۹ صفر نمی‌شود.

با توجه به این که تابع $\omega_1(t)$ فاقد ریشه است، بنابراین طبق رابطه ۱۳، قطب‌های تابع نگاشت $\omega(t)$ همان قطب‌های تابع نگاشت $\omega_1(\zeta)$ است. مراحل تقریب‌زدن تابع نگاشت $\omega_1(\zeta)$ در منبع حاج‌محمدی و قاجار [21] به صورت کامل شرح داده شده است و در پژوهش حاضر از نتایج آن به صورت رابطه ۲۰ استفاده شد.
 رابطه ۲۰:

$$\omega_1(\zeta) = M \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + N + M\zeta \left(C^4 + \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^{14} \frac{E_k^i}{1 - \frac{\alpha_k \gamma_i}{\zeta}} \right)$$

پارامترهای C ، γ_i ، α_k و E_k^i در پی‌نوشت تعریف شدند. عبارت سری رابطه ۲۰ دارای ۴۸ قطب درون دایره واحد بوده، بنابراین حاصل انتگرال اول در سمت راست معادله ۱۹ برابر با رابطه ۲۱ است.
 رابطه ۲۱:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\omega(t) \overline{\varphi'_0(t)}}{\omega'(t) t - \zeta} dt = -\lambda M \sum_{i=1}^4 \sum_{k=3}^{14} \frac{E_k^i (\zeta_k^i)^2 \overline{\varphi'_0(\delta_k^i)}}{\zeta - \zeta_k^i \omega'(\delta_k^i)}$$

که در آن در رابطه ۲۲:

رابطه ۲۲:

$$\zeta_k^i = \alpha_k \gamma_i; \delta_k^i = \frac{1}{\zeta_k^i}$$

با فرض این که سطح سوراخ و ترک‌ها عاری از تنش بوده، مقدار عبارت $f_1^0 + if_2^0$ برابر با رابطه ۲۳ است.
 رابطه ۲۳:

$$f_1^0 + if_2^0 = iC_2 \overline{\omega(\zeta)}$$

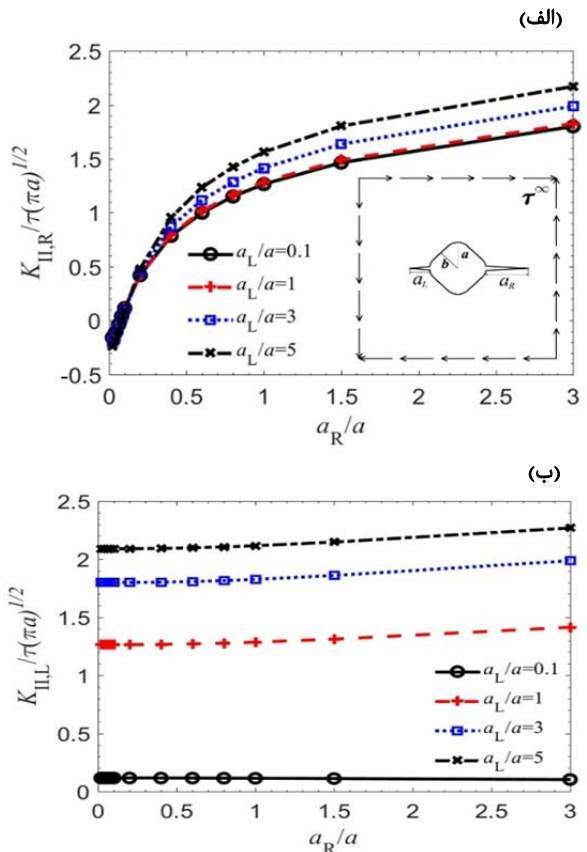
با جای‌گذاری رابطه ۲۳ در انتگرال دوم سمت راست معادله ۱۹، مقدار انتگرال برابر با رابطه ۲۴ است.
 رابطه ۲۴:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1^0 + if_2^0}{t - \zeta} dt = -\frac{2iC_2\lambda M}{\zeta}$$

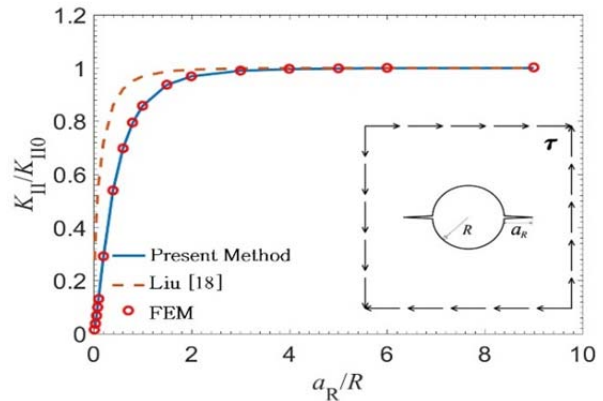
بنابراین تابع $\varphi_0(\zeta)$ و مشتق اول آن به صورت رابطه ۲۵ و ۲۶ به دست می‌آیند:

حالت به‌ازای طول ترک‌های مختلف نشان داده شد (نمودار ۳). در این نمودار برای هر منحنی، طول ترک سمت چپ، ثابت بود و مقدار طول ترک سمت راست افزایش می‌یافت.

با افزایش طول هر کدام از ترک‌ها، ضریب شدت تنش ترک دیگر نیز تغییر و مقدار کمی افزایش یافت (نمودار ۳). برای تمامی ترک‌های سمت چپ، شیب منحنی در a_R/a های کوچک قابل توجه بود (نمودار ۳). با افزایش طول ترک سمت راست، شیب منحنی کاهش یافت و سپس تقریباً ثابت ماند. این موضوع می‌تواند ناشی از تاثیر میدان تنش گوشه شبه‌مربع باشد که ترک از آن نشأت گرفته است. با افزایش طول ترک، اثر میدان تنش گوشه شبه‌مربع روی ضریب شدت تنش کاهش یافت.



مدل اجزای محدود برای نوک ترک از المان‌های مثلثی و برای سایر نواحی از المان‌های چهارضلعی استفاده و با استفاده از روش کانتور انتگرال در تعریف ترک، ضریب شدت تنش محاسبه شد.



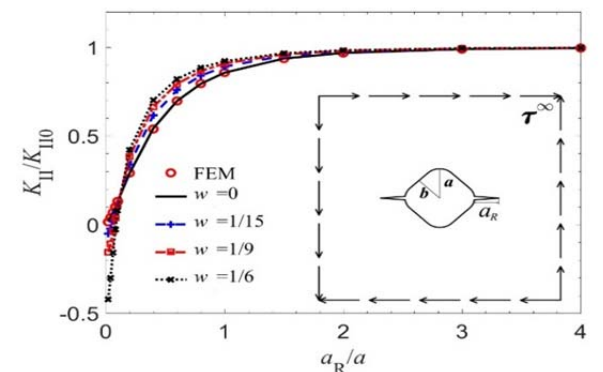
نمودار ۱) مقایسه K_{II} ترک‌های برابر نشأت‌گرفته از سوراخ دایروی

مقادیر به‌دست‌آمده (نمودار ۱) از روش تحلیلی و اجزای محدود تطابق خوبی را نشان داد. لیو و دوآن [18] برای طول ترک‌های کوچک مناسب نبوده و علت آن صرف‌نظرکردن از عبارت انتگرال اول در سمت راست معادله ۱۹ است. همچنین مشاهده شد که برای ترک‌هایی با طول برابر، مقدار ضریب شدت تنش مود دوم با افزایش طول ترک به مقدار ترک مرکزی با طول معادل $a_{eq} = (R + a_R)$ همگرا می‌شود.

۴-۲- نتایج سوراخ شبه‌مربعی ترک‌دار

ضریب شدت تنش مود دوم برای ترک‌های برابر نشأت‌گرفته از سوراخ شبه‌مربعی با w های متفاوت به دست آمد (نمودار ۲). مقادیر K_{II} برای حالت $w = 0$ با نتایج اجزای محدود برای سوراخ دایروی یکسان بود. با توجه به این که با افزایش w تمرکز تنش در گوشه‌هایی که ترک از آن نشأت گرفته است، تغییر می‌کند، مقدار K_{II} نیز در طول ترک‌های کوچک متفاوت به دست می‌آید، اما اثر تمرکز تنش گوشه‌ها در طول ترک‌های بلند دیده نمی‌شود. نتایج ضریب شدت تنش ترک‌های بلند به نتایج مساله با ترک مرکزی با طول معادل $a_{eq} = (a + a_R)$ همگرا می‌شود.

نمودار ۳) مقادیر K_{II} برای ترک‌های نابرابر نشأت‌گرفته از سوراخ شبه‌مربعی با $w=1/9$ (الف) ترک سمت راست (ب) ترک سمت چپ



نمودار ۲) مقادیر K_{II} ترک‌های برابر نشأت‌گرفته از سوراخ دایروی و شبه‌مربعی با w های متفاوت

۵- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر با استفاده از روش تحلیلی متغیر مختلط، ارایه نگاشت جدید و بسط تابع نگاشت به مجموع عبارات کسری، رابطه‌ای برای ضریب شدت تنش مود دوم ترک‌های نابرابر نشأت‌گرفته از سوراخ شبه‌مربعی ارایه شد. نتایج نشان داد که برای طول ترک‌های بلند، شکل سوراخ اثر چندانی بر ضریب شدت تنش ندارد. به عبارتی ضریب شدت تنش ترک‌های بلند با نتایج صفحه حاوی ترک مرکزی به طول معادل برابر خواهد بود. همچنین ضریب شدت تنش تحلیلی ترک‌های کوچک در مقایسه با مقادیر ارایه‌شده در مراجع دقت بالایی دارد.

تشکر و قدردانی: موردی از سوی نویسندگان گزارش نشده است.

تاییدیه اخلاقی: موردی از سوی نویسندگان گزارش نشده است.

تعارض منافع: موردی از سوی نویسندگان گزارش نشده است.

منابع

- 1- Muskhelishvili NI. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Berlin: Springer; 1977.
- 2- Savin GN. Stress concentration around holes. Oxford: Pergamon Press; 1961.
- 3- Durelli AJ, Rajaiiah K. Quasi-square hole with optimum shape in an infinite plate subjected to in-plane loading. Journal of Mechanical Design. 1981;103(4):866-870.
- 4- Simha KRY, Mohapatra SS. Stress concentration around irregular holes using complex variable method. Sadhana. 1998;23(4):393-412.
- 5- Louhghalam A, Igusa T, Park C, Choi S, Kim K. Analysis of stress concentrations in plates with rectangular openings by a combined conformal mapping - finite element approach. International Journal of Solids and Structures. 2011;48(13):1991-2004.
- 6- Sharma DS. Stress distribution around polygonal holes. International Journal of Mechanical Sciences. 2012;65(1):115-124.
- 7- Lu AZ, Xu Z, Zhang N. Stress analytical solution for an infinite plane containing two holes. International Journal of Mechanical Sciences. 2017;128-129:224-234.
- 8- Bowie OL. Analysis of an infinite plate containing radial cracks originating at the boundary of an internal circular hole. Studies in Applied Mathematics. 1956;35(1-4):60-71.
- 9- Newman JC, United States National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center. An improved method of collocation for the stress analysis of cracked plates with various shaped boundaries. Washington D C: National Aeronautics and Space Administration; 1971.
- 10- Nisitani H, Isida M. Stress intensity factor for the tension of an infinite plate containing an elliptical hole with two symmetrical edge cracks. Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. 1973;39(317):7-14. [Japanese]
- 11- Hasebe N, Horiuchi Y. Stress analysis for a strip with semi-elliptical notches or cracks on both sides by means of rational mapping function. Ingenieur Archiv. 1978;47(3):169-179.
- 12- Hasebe N, Ueda M. Crack originating from a corner of a square hole. Engineering Fracture Mechanics. 1980;13(4):913-923.
- 13- Hasebe N, Chen YZ. Stress intensity solutions for the interaction between a hole edge crack and a line crack. International Journal of Fracture. 1996;77(4):351-366.
- 14- Yan X. A numerical analysis of cracks emanating from a square hole in a rectangular plate under biaxial loads. Engineering Fracture Mechanics. 2004;71(11):1615-1623.
- 15- Yan X. A numerical analysis of cracks emanating from an elliptical hole in a 2-D elasticity plate. European Journal of Mechanics A Solids. 2006;25(1):142-153.
- 16- Philipps AG, Karuppanan S, Churchman CM, Hills DA. Crack tip stress intensity factors for a crack emanating from a sharp notch. Engineering Fracture Mechanics. 2008;75(18):5134-5139.
- 17- Zhao J, Xie L, Liu J, Zhao Q. A method for stress intensity factor calculation of infinite plate containing multiple hole-edge cracks. International Journal of Fatigue. 2012;35(1):2-9.
- 18- Liu S, Duan S. Analytical solutions of cracks emanating from an elliptical hole under shear. Chinese Journal of Aeronautics. 2014;27(4):829-834.

سهم نویسندگان: رحمت‌اله قاجار (نویسنده اول)، روش‌شناس/پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۵۰٪)؛ مجتبی حاجی‌محمدی (نویسنده دوم)، نگارنده مقدمه/پژوهشگر اصلی/تحلیلگر آماری (۵۰٪)

منابع مالی: موردی از سوی نویسندگان گزارش نشده است.

۶- پی‌نوشت

پارامتر Y_i ($i = 1, 4$) تابعی از طول ترک‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$Y_1 = -\frac{1}{2M} [N - 1 - \sqrt{N^2 - 2N + 1 - 4M^2}]$$

$$Y_2 = \bar{Y}_1$$

$$Y_3 = -\frac{1}{2M} [N + 1 - \sqrt{N^2 + 2N + 1 - 4M^2}]$$

$$Y_4 = \bar{Y}_3$$

مقادیر α_k و A_k از حل عددی رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{j=1}^m (A_j \alpha_j^k) = c_k$$

$$c_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2} - k + 1\right) \frac{(-1)^k}{k!}$$

برای حل این رابطه از روش پیشنهادی هاسبه و هوریچی^[11] استفاده شد.

همچنین مقادیر C و E_k^i به صورت روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$C = 1 + \sum_{k=1}^{14} A_k$$

$$E_k^i = -C^3 A_k + \mathcal{E}_{1,k}^i + \mathcal{E}_{2,k}^i + \mathcal{E}_{3,k}^i$$

مقادیر $\mathcal{E}_{1,k}^i, \mathcal{E}_{2,k}^i$ و $\mathcal{E}_{3,k}^i$ برابر با رابطه‌های زیر هستند:

$$\mathcal{E}_{1,k}^i = C^2 A_k \alpha_k Y_i \sum_{s=1}^3 \sum_{j=1}^{14} \frac{A_j}{\alpha_k Y_i - \alpha_j Y_{p(i,s)}}$$

$$\mathcal{E}_{2,k}^i = -C A_k (\alpha_k Y_i)^2 * \sum_{s=1}^3 \sum_{j=1}^{14} \frac{A_j}{\alpha_k Y_i - \alpha_j Y_{p(i,s)}} \sum_{n=1}^{14} \frac{A_n}{\alpha_k Y_i - \alpha_n Y_{q(i,s)}}$$

$$\mathcal{E}_{3,k}^i = A_k (\alpha_k Y_i)^3 \times \sum_{j=1}^{14} \frac{A_j}{\alpha_k Y_i - \alpha_j Y_{p(i,1)}} \times \sum_{m=1}^{14} \frac{A_m}{\alpha_k Y_i - \alpha_m Y_{q(i,1)}} \sum_{n=1}^{14} \frac{A_n}{\alpha_k Y_i - \alpha_n Y_{r(i,1)}}$$

اندیس‌های p, q و r نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$p = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; q = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}; r = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

آرایه‌های ماتریس‌های رابطه بالا، اندیس پارامتر Y به عنوان مثال $Y_{p(3,2)} = Y_2$ هستند.

of Mechanical Engineering. 2017 Mar. [Persian]

21- Hajimohamadi M, Ghajar R. An analytical solution for the stress field and stress intensity factor in an infinite plane containing an elliptical hole with two unequal aligned cracks. Applied Mathematics and Mechanics. 2018;39(8):1103-1118.

19- Miao C, Wei Y, Yan X. Two collinear square-hole cracks in an infinite plate in tension. Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2015;75:32-38.

20- Ghajar R, Hajimohamadi M. Analytical calculation of stress intensity factors for unequal cracks emanating from a circular hole in infinite plane. Amirkabir Journal