



## Nonlinear Viscoelastic Formulation of Spinal Ligament

### ARTICLE INFO

#### Article Type

Original Research

#### Authors

Haghpanahi M.<sup>\*1</sup> PhD,  
Fazeli Veisari S.<sup>1</sup> MSc

#### How to cite this article

Haghpanahi M, Fazeli Veisari S. Nonlinear Viscoelastic Formulation of Spinal Ligament. Modares Mechanical Engineering, 2019;19(9): 2227-2234.

### ABSTRACT

Soft tissues exhibit viscoelastic behavior, which includes time-dependent creep and stress relaxation, and hysteresis in a loading cycle. Changes in the viscoelastic properties of soft tissues such as spinal ligaments under dynamic loading can cause the damages. In this study viscoelastic behavior of spinal ligaments is investigated by considering two different quasi-linear viscoelastic models under dynamic loading for creep and stress relaxation. After developing equations, the results of formulation were compared with the results of experimental data in the literature and finally, the viscoelastic model that had more accurate behavior to the results of experiments, was choose as the appropriate model of spinal ligament. For this purpose, obtained data by Hingoryani in an experimental study (related to creep and relaxation tests on rabbit medial ligament) were plotted in a log-log graph. According to the graphs, it was found that the strain rate decreased with higher levels of stress and relaxation rate decreased with higher levels of strain. According to the results, present formulation and the obtained constants of the equations had acceptable accordance with the experimental results, and therefore these equations can be used for spinal ligaments with acceptable accuracy.

**Keywords** Viscoelastic; Nonlinear; Ligament; Spine

<sup>1</sup>Mechanical Engineering Faculty, University of Science and Technology, Tehran, Iran

#### \*Correspondence

Address: Mechanical Engineering Faculty, University of Science and Technology, Tehran, Iran

Phone: -

Fax: -

mhaghpanahi@iust.ac.ir

#### Article History

Received: June 04, 2018

Accepted: February 07, 2019

ePublished: September 01, 2019

### CITATION LINKS

[1] Tendons and ligaments: A morphological and biochemical comparison [2] On the viscoelastic properties of the anteromedial bundle of the anterior cruciate ligament [3] Knee ligaments: Structure, function, injury and repair [4] Biomechanics: Mechanical properties of living tissues [5] Determination of viscoelastic properties of the periodontal ligament using nanoindentation testing and numerical modeling [6] A new viscoelastic model for preconditioning in ligaments and tendons [7] Viscoelastic properties of the facial retaining ligaments [8] Viscoelastic shear properties of articular cartilage and the effects of glycosidase treatments [9] A nonlinear constitutive model for stress relaxation in ligaments and tendons [10] Biomechanics of the cervical spine part 2 cervical spine soft tissue responses and biomechanical modeling [11] Viscoelasticity of periodontal ligament: An analytical model [12] In situ multi-level analysis of viscoelastic deformation mechanisms in tendon collagen [13] Recruitment viscoelasticity of the tendon [14] On the characterization of nonlinear viscoelastic materials [15] Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials, with an introduction to linear viscoelasticity [16] A single integral finite strain viscoelastic model of ligaments and tendons [17] Viscoelastic constitutive law in large deformations: Application to human knee ligaments and tendons [18] The strength and failure characteristics of rat medial collateral ligaments [19] The mechanical properties of skeletally mature rabbit anterior cruciate ligament and patellar tendon over a range of strain rates [20] Nonlinear viscoelasticity in rabbit medial collateral ligament

## فرمولاسیون ویسکوالاستیک غیرخطی لیگامان ستون فقرات

محمد حق‌پناهی\* PhD

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران

سمیرا فاضلی‌ویسی MSc

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران

### چکیده

بافت‌های نرم رفتار ویسکوالاستیک شامل خزش وابسته به زمان، واماندگی تنش و هیستریزس از خود نشان می‌دهند. تغییرات در مشخصات ویسکوالاستیک بافت‌های نرم مانند لیگامان‌های ستون فقرات، تحت بارگذاری‌های دینامیکی می‌تواند منجر به بروز آسیب شود. در این مقاله رفتار ویسکوالاستیک لیگامان ستون فقرات با در نظر گرفتن دو مدل متفاوت ویسکوالاستیک نیمه‌خطی تحت بارگذاری‌های دینامیکی برای خزش و واماندگی تنش بررسی شده است. پس از به دست آوردن معادلات حاکم، نتایج حاصل از فرمولاسیون با نتایج آزمایشات مربوطه موجود در منابع، مقایسه شده است و در نهایت مدل ویسکوالاستیکی که رفتار نزدیکتری به نتایج آزمایشات داشت، به عنوان مدل مناسب برای لیگامان‌های ستون فقرات در نظر گرفته شد. بدین منظور داده‌های مربوط به مطالعه آزمایشگاهی انجام شده توسط هینگورانی (مربوط به آزمایش خزش و واماندگی روی لیگامان میانی خرگوش) در یک نمودار تمام لگاریتمی ترسیم شدند. طبق نمودارها مشاهده شد که نرخ کرنش با سطوح بالاتر تنش کاهش یافته و نرخ واماندگی نیز با سطوح بالاتر کرنش کاهش پیدا کرد. با توجه به نتایج حاصله، فرمولاسیون مورد انتخاب و مقادیر حاصله برای ثوابت معادلات، تطابق قابل قبولی با نتایج آزمایشگاهی داشت و می‌توان از این معادلات با دقت قابل قبولی برای لیگامان‌های ستون فقرات استفاده کرد.

کلیدواژه‌ها: ویسکوالاستیک، غیرخطی، لیگامان، ستون فقرات

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۳/۱۴

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۱۸

\*نویسنده مسئول: mhaghpanahi@iust.ac.ir

### ۱- مقدمه

لیگامان‌های ستون فقرات از خود، رفتار ویسکوالاستیک خطی نشان می‌دهند. به این معنی که رفتار مکانیکی آنها وابسته به زمان و تاریخچه بارگذاری است. ویسکوالاستیسیت به دو خاصیت ویسکوزیته و الاستیسیت در مواد اشاره دارد. ویسکوزیته بیانگر میزان گرانبوی و الاستیسیت بیانگر خاصیت ارتجاعی در مواد است. مواد ویسکوز یا گرانبوی مانند عسل، در برابر نیروهای برشی از خود مقاومت نشان می‌دهند. مواد الاستیک نیز به موادی گفته می‌شود که در اثر اعمال نیروهای کششی به سرعت کشیده می‌شوند (مانند کش) و پس از قطع نیرو به شکل اولیه خود بر می‌گردند. مواد ویسکوالاستیک دارای هر دوی این ویژگی‌ها هستند، با این توضیح که کشیده شدن این مواد در اثر اعمال نیروهای کششی، وابسته به زمان است. زمانی که بافت‌ها در کرنش ثابت نگه داشته می‌شوند، تنش در بافت کاهش پیدا می‌کند. این پدیده تحت عنوان واماندگی تنش نامیده می‌شود. برعکس، وقتی تنش ثابت نگه داشته می‌شود، کرنش در بافت‌ها افزایش پیدا می‌کند که این پدیده خزش نامیده می‌شود.

خزش و واماندگی تنش از خصوصیات مهم بافت‌ها محسوب شده و تشخیص این خواص منجر به نتایج قابل توجهی می‌شود. برای به دست آوردن نتایج مفید، لازم است آزمایشات در سطوح مختلف (نرخ‌های مختلف) تنش و کرنش انجام شوند.

این خواص ویسکوالاستیک با افزایش سن، آسیب‌های وارده و غیره می‌تواند تغییر کند. در گذشته، مطالعات زیادی در مورد

خاصیت ویسکوالاستیک لیگامان<sup>[1, 2]</sup> و تاندون<sup>[3-5]</sup> در مورد انسان‌ها، بز، خرگوش و خوک انجام شده است. مطالعه خاصیت ویسکوالاستیک لیگامان برای تشخیص رفتارهای طبیعی و غیرطبیعی بافت‌ها و همچنین توسعه مواد پیوندی که برای جایگزینی لیگامان‌ها و تاندون‌های آسیب‌دیده به کار می‌روند، بسیار مفید است. به عنوان مثال، انجام یک آزمایش واماندگی تنش روی نمونه در یک سطح کرنش، اطلاعاتی راجع به رفتار وابسته به زمان نمونه در اختیار ما قرار می‌دهد، اما در مورد خطی یا غیرخطی بودن، اطلاعاتی به ما نمی‌دهد<sup>[6]</sup>. برای تشخیص خواص ویسکوالاستیک غیرخطی، نیاز به انجام آزمایشات واماندگی در سطوح مختلف کرنش است. در این مقاله، رفتار ویسکوالاستیک لیگامان ستون فقرات با در نظر گرفتن دو مدل متفاوت برای خزش و واماندگی تنش بررسی شده است. پس از به دست آوردن معادلات حاکم، نتایج حاصل از فرمولاسیون با نتایج آزمایشات مربوطه موجود در منابع، مقایسه شده است و در نهایت، مدل ویسکوالاستیکی که رفتار نزدیکتری به نتایج آزمایشات داشت، به عنوان مدل مناسب برای لیگامان‌های ستون فقرات در نظر گرفته شد.

### ۱-۱- لیگامان

لیگامان‌ها باندهای کوتاه فیبری هستند که اتصالات استخوان به استخوان را به هم مرتبط می‌کنند و وظیفه حفظ تعادل و پشتیبانی حرکت اتصالات را بر عهده دارند. برای فهم مکانیزم‌های آسیب، بررسی بیومکانیک لیگامان بسیار مهم است. مود گسیختگی در لیگامان‌ها قویاً وابسته به نرخ بارگذاری است. بنابراین ویسکوالاستیسیت در لیگامان‌ها پارامتر مهمی از پاسخ بافت به بارگذاری است.

کلاژن‌ها، اجزای اصلی تحمل‌کننده بارهای کششی در لیگامان‌ها هستند. لیگامان‌ها مواد کامپوزیتی بیولوژیک متشکل از یک ماتریس زمینه تقویت‌شده به وسیله شبکه فیبری از کلاژن و الاستین هستند. مشابه سایر بافت‌های نرم اسکلتی عضلانی، وظیفه اولیه سلول‌ها حفظ موقعیت کلاژن‌ها است. تقریباً ۲/۳ وزن لیگامان‌ها را آب تشکیل می‌دهد و ۷۰ تا ۸۰٪ وزن باقیمانده شامل کلاژن‌های پروتئینی فیبریلار است. ماتریس زمینه لیگامان شامل بافت‌های همبند که پیرامون فیبرها قرار می‌گیرد و شامل پروتئوگلیکان و گلیکوسمینوگلیکان است. آب بین مولکول‌های پروتئوگلیکان به دام می‌افتد و خاصیت ویسکوالاستیک لیگامان را تأمین می‌کند<sup>[7-9]</sup>.

### ۱-۲- خواص الاستیک لیگامان‌ها

لیگامان‌ها نقش مهمی در سینماتیک و حفظ تعادل مفاصل ایفا می‌کنند. به دلیل طبیعت چروک‌دار فیبرهای لیگامان، در صورت افزایش نیرو، فیبرها کشیده می‌شوند و در نتیجه فیبرهای مجاور نیز وارد مکانیزم تحمل بار می‌شوند. در نتیجه، سفتی بافت افزایش می‌یابد. این افزایش سفتی به صورت غیرخطی است. مطالعات زیادی روی رفتار کششی تک‌محوره لیگامان‌ها تحت شرایط بارگذاری نیمه‌استاتیک و بارگذاری‌های با نرخ بالا انجام شده است<sup>[10-13]</sup>.

### ۲- مطالعات انجام‌شده در زمینه مدل‌سازی تحلیلی رفتار ویسکوالاستیک خزش و واماندگی مواد بیولوژیک

در گذشته، چندین معادله ساختاری برای توصیف رفتار ویسکوالاستیک غیرخطی مواد بیولوژیک توسعه پیدا کرده‌اند و بیشتر این مطالعات بر مبنای معادلات شاپری<sup>[14]</sup> و فیندل و

واماندگی وابسته به زمان است. مدل‌های ساختاری متعددی برای توصیف رفتار ویسکوالاستیک غیرخطی مواد توسعه پیدا کرده‌اند. در این مطالعه، یک فرم انتگرالی به نام بر هم نهی غیرخطی به کار برده شده است. این مدل تابعیت تابع واماندگی به نرخ کرنش و تابعیت تابع خزش به نرخ تنش را برای مواد ویسکوالاستیک غیرخطی ممکن می‌کند. در این مدل از معادلات ۱ که توسط فانگ به دست آمده، استفاده شده است. مدول کرنشی، قابل جداسازی به حاصل ضرب دو متغیر زمان و کرنش فرض شده است:

$$E(t, \varepsilon) = E_{\tau}(t)g(\varepsilon) \quad (2)$$

به خاطر جدایی‌پذیری، این فرمولاسیون برای مواد ویسکوالاستیک نیمه‌خطی قابل استفاده است. زیرا در این مواد ترم وابسته به زمان، قابل جدا شدن از ترم وابسته به کرنش است.

#### ۴- رابطه متقابل خزش و واماندگی

در ویسکوالاستیک خطی رابطه بین مدول خزش  $J(t)$  و مدول واماندگی  $E(t)$  با استفاده از تبدیل لاپلاس به راحتی به دست می‌آید:

$$\int_0^t J(t-\tau)E(\tau)d\tau = \int_0^t J(\tau)E(t-\tau)d\tau \quad (3)$$

رفتار  $E(t)$  به صورت توان منفی از  $t$  در نظر گرفته می‌شود:

$$E(t) = At^{-n} \quad (4)$$

که در رابطه بالا  $n$  و  $A$  ثابت هستند.

تابع خزش مربوطه به شرح زیر است: ( $\Gamma$  تابع گاما است)

$$J(t) = \frac{1}{A\Gamma(1-n)\Gamma(1+n)} t^n \quad (5)$$

و رابطه زیر نیز برقرار است:

$$E(t) = \frac{\sin\pi}{\pi} \frac{1}{J(t)} \quad (6)$$

برای یک تابع واماندگی که شامل یک عبارت نمایی به علاوه یک ثابت است، رابطه تابع خزش متناظر نیز شامل یک عبارت نمایی خواهد بود، اما ثابت زمانی خزش بزرگ‌تر از ثابت زمانی واماندگی خواهد بود. خزش و واماندگی، هر دو جنبه‌هایی از حساسیت رفتار مکانیکی مواد به زمان هستند. بنابراین پیش‌بینی یکی از دیگری باید امکان‌پذیر باشد (مانند مواد ویسکوالاستیک خطی که در بالا به آن اشاره شد).

آزمایشات واماندگی که در آن باید کرنش ثابت در نظر گرفته شود، بسیار مشکل‌تر از آزمایشات خزش است که در آنها نرخ تنش ثابت در نظر گرفته می‌شود. آزمایشات واماندگی با استفاده از سیستم‌های پیچیده و هزینه‌بر کنترلی قابل انجام هستند. بنابراین انجام آزمایش خزش و سپس پیش‌بینی رفتار واماندگی با استفاده از رفتار خزش مواد ویسکوالاستیک به وسیله روابط تئوری، روشی مطلوب است. علی‌رغم اینکه تشخیص رابطه متقابل خزش و واماندگی در مواد ویسکوالاستیک غیرخطی به راحتی مواد ویسکوالاستیک خطی نیست، توسعه فرمولاسیون‌های مربوطه، روشی کارا برای بررسی رفتار مواد ویسکوالاستیک غیرخطی است. رابطه‌ای که /شبی و جونر برای خزش در نظر گرفته‌اند، به صورت زیر است:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = b\sigma^t \quad (7)$$

همکاران [15] توسعه پیدا کرده‌اند. مدل ایجاد شده توسط جانسون و همکاران [16] برای تغییر شکل‌های بزرگ بوده و در مدل پیولتی، تنها نرخ کرنش در نظر گرفته شده است. مطالعات پاسخ مکانیکی لیگامان‌های انسان به طور کلی بر آزمایشات ویسکوالاستیک نیمه‌استاتیک واماندگی تنش و خزش تکیه می‌کنند [17]. کروونشیلد و همکاران [18] نشان دادند که مکانیزم گسیختگی در لیگامان‌ها به نرخ بارگذاری وابسته است. بیشتر آسیب‌های مربوط به ورزشکاران در نرخ‌های بالای بارگذاری اتفاق می‌افتد. مطالعاتی هم در زمینه خواص ویسکوالاستیک لیگامان حیوانات انجام شده است. وان و همکاران [2] مطالعه‌ای در خصوص خواص ویسکوالاستیک وابسته به زمان و بارگذاری لیگامان‌ها انجام دادند. پاسخ لیگامان‌ها به نرخ‌های کرنش ۰/۰۱ و ۱%/S حساس بوده است. آنها پس از رسم نمودار لگاریتمی به این نتیجه رسیدند که تابع واماندگی در بلندمدت خطی است. طبق مطالعات انجام شده نشان داده شده که طبیعت ویسکوالاستیک بافت‌های نرم برای توجیه پاسخ مکانیکی آنها در محدوده گسترده‌ای از نرخ‌های بارگذاری، بسیار مهم و اثرگذار است. رفتار مادی بافت‌های نرم وابسته به کرنش و نرخ تغییرات آن است. تعدادی از مطالعات تئوری و نتایج آزمایش‌های انجام شده برای توصیف رفتار ویسکوز بافت‌های نرم براساس آزمایشات خزش و واماندگی تنش انجام شده‌اند. اما دستیابی به پاسخ دقیق بافت‌ها در محدوده‌ای از نرخ‌های بارگذاری بسیار مشکل است (مخصوصاً در نرخ‌های بالای بارگذاری).

دانتو و وو [19] پاسخ لیگامان‌های قدامی و تاندون‌های پتلار خرگوش را در یک محدوده نرخ‌های کرنش بررسی کردند. در این مطالعه، لیگامان و تاندون در معرض بارگذاری کششی قرار گرفته شد تا در نرخ‌های مختلف کشش، گسیختگی رخ دهد. طبق نتایج این آزمایش، برای هر دو لیگامان با افزایش نرخ کرنش، مدول افزایش پیدا کرد. در مطالعه دیگری، خواص ویسکوالاستیک قدامی خوک بررسی شد. طبق نتایج این مطالعه، تابع واماندگی نسبت به لگاریتم زمان، خطی نبوده است. یک آزمایش کشش سیکلی با کشش قطعه از یک تا ۵% کرنش و نرخ کرنش ثابت ۲/۷۸%/S انجام شد. از تئوری ویسکوالاستیسیته نیمه‌خطی فانگ برای انطباق رفتار سیکلی استفاده شد. اما اثر نرخ کرنش بررسی نشد. این مطالعات برخی جنبه‌های خواص ویسکوالاستیک لیگامان‌های حیوانات را بیان می‌کنند، اما داده‌های گزارش شده برای بررسی کامل رفتار ویسکوالاستیک دینامیکی بافت‌ها کافی نیستند.

در این مقاله، یک فرم تک‌انتگرالی به نام بر هم نهی غیرخطی را در نظر گرفته‌ایم. این معادله، تابع واماندگی را به سطح کرنش و خزش را به تنش وابسته می‌کند و در نتیجه، دقت فرمولاسیون بالاتر می‌رود و نتایج حاصله به داده‌های آزمایشگاهی نزدیک‌تر خواهد بود. مزیت فرمولاسیون حاضر، دقت بالاتر و نزدیک‌تر شدن نتایج به داده‌های آزمایشگاهی است.

#### ۳- معادلات ساختاری ویسکوالاستیک برای لیگامان

در مواد ویسکوالاستیک خطی، رابطه بین تنش و کرنش وابسته به زمان  $\sigma(t)$  و  $\varepsilon(t)$  با استفاده از انتگرال بولتزمن به شرح زیر است:

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (الف-۱)$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t-\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (ب-۱)$$

که در روابط بالا،  $J(t)$  مدول خزش وابسته به زمان و  $E(t)$  مدول

در این فرمولاسیون، کرنش کل ( $\varepsilon$ ) به صورت مجموع قسمت الاستیک  $\varepsilon_{elastic} = \frac{\sigma}{E}$  و قسمت خزشی  $\varepsilon_{creep}$  در نظر گرفته می‌شود.

شیبی و جونز از این عبارت مشتق‌گیری کرده و جایگزین می‌کنند. بعد از یک تنش اولیه  $\sigma_0$  در زمان  $t=0$  تا تنش نهایی  $\sigma_f$  در زمان  $t$  انتگرالی کردند تا واماندگی تنش را به دست آورند:

$$\sigma_f(t) = \{bE(n-1)t + \left(\frac{1}{\sigma_0^{n-1}}\right)\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (8)$$

واماندگی تنش نهایی در زمان کوتاه تقریباً ثابت است. برای  $n=2$  (غیرخطی از درجه ۲) در زمان طولانی واماندگی به سمت  $\frac{1}{t}$  می‌رود. روش‌های دیگر که در آنها خزش اولیه در نظر گرفته نمی‌شود، توسط پوپوف بررسی شده‌اند.

در رابطه پیشنهادشده توسط پوپوف، کرنش خزشی تابعی جدایی‌ناپذیر از زمان و تنش در نظر گرفته می‌شود:

$$\varepsilon_p = 1 + \frac{s}{E} (e^{\frac{\sigma}{\sigma_1}} - 1) T \quad (9)$$

$T = Ct^m$  تابعی از زمان و  $S_1$  ثابت است. معادله دیفرانسیلی مربوط به تابع واماندگی مورد نظر آنها به شرح زیر است:

$$\frac{d\varepsilon_e}{dt} + \frac{d\varepsilon_p}{dt} = 0 \quad (10)$$

که در این رابطه،  $\varepsilon_p$  کرنش پلاستیک و  $\varepsilon_e$  کرنش الاستیک است.

$$\frac{d\varepsilon_e}{dt} = \frac{-1}{E} \frac{d\sigma}{dt} \quad (11)$$

با دیفرانسیل‌گیری از کرنش خزشی و مساوی عبارت بالا قرار دادن آن داریم:

$$d\sigma = -S_1 \frac{e^{\frac{\sigma}{\sigma_1}} - 1}{1 + Te^{\frac{\sigma}{\sigma_1}}} dT \quad (12)$$

در تحلیل /شیبی و پوپوف، رابطه متناظر بین خزش و واماندگی در مواد ویسکوالاستیک خطی (که تحلیل آنها به مراتب ساده‌تر از مواد الاستیک غیرخطی است) شامل انتگرال کانوولوشن است. فرض ساده‌کننده، این بوده که رابطه مشابه، بین نرخ کرنش خزش و تنش تحت شرایط تنش ثابت و کرنش ثابت (واماندگی) برقرار است. خزش در یک معادله دیفرانسیل غیرخطی با رابطه زیر ارائه شده است:

$$\sigma'(t) + a\sigma(t) + b\sigma^2(t) = E \cdot (\varepsilon'(t) + \gamma\varepsilon(t)) \quad (13)$$

انتگرال معادله تشکیل‌دهنده استفاده شده در اینجا به تابع واماندگی اجازه می‌دهد تا وابسته به سطح کرنش باشد. کرنش وابسته به زمان نسبت به تنش خزشی ثابت و به صورت مجموع تابع پله هوی‌ساید در زمان نوشته می‌شود:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0)H(t) + \sum_{i=0}^n \Delta\varepsilon_i H(t - t_i) \quad (14)$$

$$\sigma(t) = \varepsilon(0)E(t, \varepsilon(0)) + \sum_{i=0}^n \Delta\varepsilon_i E(t - t_i, \varepsilon(t_i)) \quad (15)$$

با تقسیم عبارت بالا بر  $\sigma$  و استفاده از تعریف مدول خزش خواهیم داشت:

$$1 = J(0, \sigma)E(t, \varepsilon(0)) + \sum_{i=0}^n \Delta J_i E(t - t_i, \varepsilon(t_i)) \quad (16)$$

$$(17)$$

$$1 = J(0, \sigma)E(t, \varepsilon(0)) + \int_0^t E(t - \tau, \varepsilon(\tau)) \frac{\partial J(\tau, \sigma)}{\partial \tau} d\tau$$

مدول خزش  $J$  تابعی از زمان و تنش است. مانند حالت خطی، وابستگی به زمان در انتگرال دیده می‌شود.

از آنجایی که برای خزش تحت تنش ثابت  $\sigma=0$ ، برای  $t < 0$  داریم  $\sigma(t) = \sigma$  و برای  $t > 0$  داریم:  $\varepsilon(t) = \sigma J(t, \sigma)$  معادله ۱۷، به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$1 = J(0, \sigma)E(t, \sigma J(0, \sigma)) + \int_0^t E(t - \tau, \sigma) J(\tau, \sigma) \frac{\partial J(\tau, \sigma)}{\partial \tau} d\tau \cdot \frac{1}{2} \quad (18)$$

برای حالت خطی رابطه بالا برابر معادله ۴ است (با تبدیل لاپلاس قابل اثبات است). برای اینکه بتوان یک رابطه صریح بین خزش و واماندگی برقرار کرد، می‌توان یک شکل تابعی برای یکی از توابع ویسکوالاستیک فرض کرد:

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t - \tau, \varepsilon(\tau)) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (19)$$

انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء از رابطه ۱۹ منجر می‌شود به:

$$\sigma(t) = E(0, \varepsilon(t)) \cdot \varepsilon(t) - \int_0^t \frac{\partial E(t - \tau, \varepsilon(\tau))}{\partial \tau} \varepsilon(\tau) d\tau \quad (20)$$

و با جایگزینی خواهیم داشت:

$$\sigma(t) = E(0, \sigma J(t, \sigma)) \cdot \sigma J(t, \sigma) - \int_0^t \frac{\partial E(t - \tau, \sigma J(\tau, \sigma))}{\partial \tau} \sigma J(\tau, \sigma) d\tau \quad (21)$$

با تقسیم رابطه ۲۱ بر  $\sigma$  خواهیم داشت:

$$(22)$$

$$1 = J(0, \sigma)E(t, \sigma J(0, \sigma)) + \int_0^t E(t - \tau, \sigma) J(\tau, \sigma) \frac{\partial J(\tau, \sigma)}{\partial \tau} d\tau$$

برای دستیابی به یک ارتباط صحیح، چند تابع مستقل از زمان فرض می‌شود و تخمین‌هایی در نظر گرفته می‌شود تا عبارات به ترم‌های با درجات پایین‌تر تبدیل شوند. حال با توجه به مدل‌های موجود برای لیگامان ستون فقرات رفتار خزشی را به صورت ترکیبی از توابع توانی  $t^n$  و  $t^{2n}$  در دو حالت مختلف به صورت زیر فرض می‌کنیم:

#### ۴-۱- فرمولاسیون اول

در این حالت تابع خزش را به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$J(t, \sigma) = g_1 t^n + g_2 \sigma(t^n + At^{2n}) \quad (23)$$

از طرفی فرض می‌کنیم:

$$E(t, \varepsilon) \approx f_1 t^{-n} + f_2 \varepsilon(t)(t^{-n} + t^{-2n}) \quad (24)$$

در ادامه نشان داده می‌شود که  $f_1 = \frac{\sin(n\pi)}{n\pi g_1}$  و  $f_2 = -\frac{f_1 g_2}{g_1^2}$  و  $A$  با استفاده از تابع گامای  $n$  به دست می‌آید.

مشتق تابع خزش به شرح زیر است:

$$(25)$$

$$\frac{\partial J(\tau, \sigma)}{\partial \tau} = ng_1 \tau^{n-1} + ng_2 \sigma \tau^{n-1} + 2nAg_2 \sigma \tau^{2n-1}$$

از آنجایی که کرنش خزشی به صورت زیر است:

$$\varepsilon(t) = J(t) \sigma \quad (26)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$f_1 g_2 + f_2 g_1^2 = 0 \quad (۴۰)$$

$$f_1 g_2 A 2n \left\{ \frac{\Gamma(-n+1)\Gamma(2n)}{\Gamma(1+n)} \right\} + f_2 g_1^2 = 0 \quad (۴۱)$$

از مساوی قراردادن معادلات ۴۰ و ۴۱ خواهیم داشت:

$$A = \left\{ \frac{\Gamma(n+1)}{2n\Gamma(1-n)\Gamma(2n)} \right\} \quad (۴۲)$$

در نتیجه:

$$f_1 g_2 + f_2 g_1^2 = 0, \quad f_2 = -\frac{f_1 g_2}{g_1^2} \quad (۴۳)$$

بنابراین با توجه به منحنی‌های خزش، پیش‌بینی رفتار واماندگی با استفاده از رابطه‌ای که بین ثوابت خزش و واماندگی در معادلات بالا به دست آمد، قابل حصول است.

#### ۴-۲- روابط فرمولاسیون دوم

در این حالت تابع خزش را به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$J(t, \sigma) = g_1 t^n + g_2 \sigma t^m \quad (۴۴)$$

از طرفی فرض می‌کنیم:

$$E(t, \varepsilon) \approx f_1 t^{-n} + f_2 \varepsilon(t)(t^{-q}) \quad (۴۵)$$

که  $f_2$  و  $q$  در ادامه مشخص می‌شوند. نشان داده می‌شود که  $f_1 = \frac{\sin(n\pi)}{n\pi g_1}$  و  $q = 3n - m$  است.

مشتق تابع خزش به شرح زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial J(\tau, \sigma)}{\partial \tau} = n g_1 \tau^{n-1} + m g_2 \sigma \tau^{m-1} \quad (۴۶)$$

از آنجایی که کرنش خزشی به صورت  $\varepsilon(t) = J(t)\sigma$  است، خواهیم داشت:

$$\varepsilon(t) = g_1 \sigma t^n + g_2 \sigma^2 t^m \quad (۴۷)$$

با صرف نظر از ترم شامل  $\sigma^2$  در معادله ۴۷ و با جایگزینی در معادله ۴۵ خواهیم داشت:

$$E(t, \varepsilon(t)) = f_1 t^{-n} + f_2 g_1 \sigma t^{-n+q} \quad (۴۸)$$

با جایگزینی روابط ۴۸ و ۴۶ در معادله ۱۷ خواهیم داشت:

$$1 = \int_0^t \{ f_1 (t-\tau)^{-n} + f_2 g_1 \sigma (t-\tau)^{-q+n} \} \{ n g_1 \tau^{n-1} + m g_2 \sigma \tau^{m-1} \} d\tau \quad (۴۹)$$

حال در عبارت بالا کلیه  $\sigma$ های مستقل را برابر یک و کلیه  $\sigma$ های وابسته را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$1 = f_1 g_1 \int_0^t n (t-\tau)^{-n} \tau^{n-1} d\tau \quad (۵۰)$$

برای به دست آوردن انتگرال بالا از روشی که در قسمت قبل ذکر شد، استفاده می‌کنیم. با روندی مشابه خواهیم داشت:

$$1 = f_1 g_1 \frac{n\pi}{\sin(n\pi)} \quad (۵۱)$$

با جمع کردن کلیه عبارات وابسته  $\sigma$  با هم و صرف نظر کردن از توان‌های بزرگ‌تر از یک  $\sigma$  خواهیم داشت:

$$(۵۲)$$

$$0 = f_1 g_2 m \left\{ \frac{\Gamma(-n+1)\Gamma(m)}{\Gamma(1+m-n)} \right\} t^{m-n} + f_2 g_1^2 n \left\{ \frac{\Gamma(-q+n+1)\Gamma(n)}{\Gamma(1+2n-q)} \right\} t^{-q} + 2n$$

از معادلات ۲۳ و ۲۶ خواهیم داشت:

$$\varepsilon(t) = g_1 \sigma t^n + g_2 \sigma^2 (t^n + A t^{2n}) \quad (۲۷)$$

با صرف نظر از ترم شامل  $\sigma^2$  در معادله ۲۷ و با جایگزینی در رابطه ۲۴ خواهیم داشت:

$$E(t, \varepsilon(t)) = f_1 t^{-n} + f_2 g_1 \sigma + f_2 g_1 \sigma t^{-n} \quad (۲۸)$$

با جایگزینی روابط ۲۸ و ۲۵ در معادله ۱۷ خواهیم داشت:

$$1 = \int_0^t \{ f_1 (t-\tau)^{-n} + f_2 g_1 \sigma + f_2 g_1 \sigma (t-\tau)^{-n} \} \{ n g_1 \tau^{n-1} + n g_2 \sigma \tau^{n-1} + 2n A g_2 \sigma \tau^{2n-1} \} d\tau$$

حال در عبارت بالا کلیه  $\sigma$ های مستقل را برابر یک و کلیه  $\sigma$ های وابسته را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$1 = f_1 g_1 \int_0^t n (t-\tau)^{-n} \tau^{n-1} d\tau \quad (۳۰)$$

برای به دست آوردن انتگرال بالا داریم:

$$\int_0^t (t-\tau)^{n-1} \tau^{m-1} d\tau = \int_0^t \tau^{m-1} \tau^{n-1} \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{n-1} d\tau \quad (۳۱)$$

قرار می‌دهیم:  $\frac{\tau}{t} = u$ ، بنابراین  $\tau = ut$  بوده، در نتیجه  $du = \frac{d\tau}{t}$  است. بنابراین اگر  $\tau = 0$  باشد، خواهیم داشت:  $u=0$  و اگر  $\tau = t$  خواهیم داشت:  $u=1$ .

با جایگزین کردن نتیجه بالا در معادله ۳۱ خواهیم داشت:

$$\int_0^t t^{n-1} (ut)^{m-1} (1-u)^{n-1} t du = t^{m+n-1} \int_0^1 u^{m-1} (1-u)^{n-1} du$$

طبق تعریف تابع بتا داریم:

$$B(m, n) = \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^{m-1} du = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (۳۱)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$t^{m+n-1} B(m, n) = t^{m+n-1} \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (۳۴)$$

$$\int_0^t n (t-\tau)^{n-1} \tau^{-n} d\tau = n \Gamma(-n+1) \Gamma(n) \quad (۳۵)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\Gamma(-n+1)\Gamma(n) = \frac{\pi}{\sin(n\pi)} \quad (۳۶)$$

در نتیجه:

$$\int_0^t n (t-\tau)^{n-1} \tau^{-n} d\tau = \frac{n\pi}{\sin(n\pi)} \quad (۳۷)$$

و از رابطه ۳۰ خواهیم داشت:

$$1 = f_1 g_1 \frac{n\pi}{\sin(n\pi)} \quad (۳۸)$$

با جمع کردن کلیه عبارات وابسته  $\sigma$  با هم و صرف نظر کردن از توان‌های بزرگ‌تر از یک  $\sigma$  خواهیم داشت:

$$(۳۹)$$

$$0 = \left\{ f_1 g_2 \frac{\sin(n\pi)}{(n\pi)} + f_2 g_1^2 \frac{\sin(n\pi)}{(n\pi)} \right\} + \left\{ f_1 g_2 A_2 \left\{ \frac{\Gamma(-n+1)\Gamma(2n)}{\Gamma(1+n)} \right\} + f_2 g_1^2 \right\} t^n$$

برای اینکه رابطه ۵۲ سازگار باشد، لازم است توان  $t$  در هر دو عبارت یکسان باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} m - n &= -q + 2n \\ q &= 3n - m \end{aligned} \quad (53)$$

با جایگزینی معادله ۵۳ در ۵۲ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f_1 g_2 m \left\{ \frac{\Gamma(-n+1)\Gamma(m)}{\Gamma(1+m-n)} \right\} t^{m-n} \\ + f_2 g_1^2 n \left\{ \frac{\Gamma(m-2n+1)\Gamma(n)}{\Gamma(1+m-n)} \right\} t^{m-n} = 0 \end{aligned}$$

با ساده‌سازی عبارت بالا و حذف عبارات مشابه خواهیم داشت:

$$f_2 = \left\{ \frac{-f_1 g_2 m \Gamma(-n+1)\Gamma(m)}{g_1^2 n \Gamma(1-2n+m)\Gamma(n)} \right\} \quad (55)$$

با استفاده از برازش منحنی مقادیر  $m, n, g_2, g_1$  به دست می‌آیند. به دلیل نرم‌شدگی کرنش غیرخطی که در لیگامان دیده می‌شود، در رابطه ۴۴ باید  $g_1$  مثبت و  $g_2$  منفی باشند. از آنجایی که شیب واماندگی  $q = 3n - m$  است، این مدل‌سازی نشان می‌دهد که واماندگی نسبت به خزش با سرعت بیشتری رشد پیدا می‌کند (به دلیل اینکه  $m > 3n - m$  است).

در نتیجه با توجه به منحنی‌های خزش، پیش‌بینی رفتار واماندگی با استفاده از رابطه‌ای که بین ثوابت خزش و واماندگی در معادلات بالا به دست آمد، قابل حصول است.

#### ۵- داده‌های آزمایشگاهی

در این مقاله برای بررسی دقت فرمولاسیون مورد استفاده، از نتایج تحقیقی که در سال ۲۰۰۴ توسط هیئنگورانی و همکاران انجام شد [20] استفاده شده است. در آن تحقیق، بارگذاری‌های خزش و واماندگی تنش روی ۱۵ خرگوش نیوزیلندی با سن بین ۶ الی ۸ ماه و وزن بین ۳/۲ تا ۳/۶ کیلوگرم انجام شد. حیوانات با یک میلی‌لیتر پنتا‌تاربیبتول معدوم شدند و اندام حرکتی تحتانی آنها از ناحیه مفصل ران جدا و در دمای  $-37^\circ\text{C}$  قرار داده شد. در ده مرحله، آزمایشات واماندگی تنش و خزش در سطوح مختلف تنش و کرنش انجام شد. در روز آزمایش، بافت‌ها در محیطی با دمای حدود  $6^\circ\text{C}$  برای مدت ۴ ساعت نگه داشته شدند و بعد برای انجام تست به دمای اتاق آورده شدند. سپس کل بافت‌های مجاور به‌طور کامل جدا شدند. عرض و ضخامت لیگامان‌ها با استفاده از یک کالیپر با درجه دقت  $0.1$  میلی‌متر اندازه‌گیری شدند. اندازه‌گیری‌ها سه بار تکرار شد و مقادیر میانگین برای محاسبه مساحت مورد استفاده قرار گرفت. سپس نمونه‌ها وارد دستگاه آزمایش با لودسل  $200$  نیوتن شدند. سپس لیگامان‌ها در یک حمام مملو از محلول فسفات بافر، مستغرق و به مدت ۱۰ دقیقه بازیافت شدند تا اثر بارگذاری‌های قبلی به‌طور کامل حذف شود.

آزمایشات واماندگی تنش در محدوده کرنش صفر تا  $0.5\%$  انجام شدند. در ابتدا یک پیش‌بار  $0.5$  نیوتن اعمال و سپس کرنش‌های مد نظر اعمال شدند. جابه‌جایی‌ها در نرخ کرنش  $10\%/s$  اعمال شدند. این نرخ کرنش برای کرنش‌های کمتر از  $5\%$  منجر به زمان‌های رمپ حدود  $0.3$  ثانیه می‌شود. جابه‌جایی‌های مد نظر برای مدت  $100$  ثانیه اعمال شده و سپس لیگامان‌ها برای مدت  $1000$  ثانیه بازیافت شدند. این زمان ریکاوری بر پایه آزمایشاتی که

روی موش‌ها انجام شده بود، در نظر گرفته شد. طبق نتایج این آزمایشات، در کرنش زیر  $5\%$  که مربوط به آستانه آسیب است، بازه زمانی حدود  $10$  برابر زمان انجام تست برای بازیافت‌کردن اثرات بارگذاری کافی است. بعد از ریکاوری، روش مذکور برای هر لیگامان در  $5$  سطح کرنش دیگر تکرار شد.

آزمایشات خزش نیز با روشی مشابه واماندگی انجام شدند، با این تفاوت که در این آزمایشات، نیرویی معادل ماکزیمم نیروی دیده‌شده در شروع آزمایشات واماندگی برای مدت  $100$  ثانیه روی لیگامان‌ها اعمال شد و سپس  $1000$  ثانیه زمان ریکاوری برای نمونه‌ها در نظر گرفته شد. در مجموع روی هر لیگامان،  $5$  آزمایش خزش انجام شد. تنش‌های اعمالی تنش مهندسی (نیرو تقسیم بر سطح مقطع اولیه) و بین صفر تا حدود  $55$  نیوتن در نظر گرفته شدند. نتایج آزمایشات با استفاده از یک دوربین CCD-IRIS و یک صفحه نمایش برای نمایش داده‌ها ثبت شدند.

#### ۶- نتایج

همان‌طور که در بخش قبل توضیح داده شد، در مطالعه هیئنگورانی، داده‌های مربوط به خزش و واماندگی لیگامان خرگوش در سطوح مختلف تنش و کرنش جمع‌آوری شد و لیگامان‌ها به مدت  $100$  ثانیه و پس از آن برای یک بازه ریکاوری  $1000$  ثانیه‌ای مورد آزمایش قرار گرفتند. در ابتدا واماندگی تنش انجام شد و سپس آزمایشات خزش روی لیگامان جانبی انجام پذیرفت. همچنین پیش‌بار به میزان  $0.5$  نیوتن به لیگامان‌ها اعمال شد. طبق نتایج آن مطالعه مشاهده شد که نرخ خزش با افزایش سطوح تنش، روند کاهشی داشته و نرخ واماندگی نیز در سطوح بالاتر کرنش، روند کاهشی از خود نشان داده است.

روش مورد استفاده برای به‌دست‌آوردن ثوابت معادلات به شرح زیر است:

نمودارهای ایزوکرنال کرنش نسبت به تنش برای دو زمان مختلف ایجاد شد. اولین ایزوکرنال با استفاده از رابطه مستقل از زمان کرنش نسبت به تنش  $\varepsilon(t) = g_1 \sigma + g_2 \sigma^2$  برازش منحنی انجام شد تا مقادیر  $g_1$  و  $g_2$  به دست بیایند. با استفاده از مقادیر  $g_1$  و  $g_2$  حاصله با استفاده از معادله شماره ۴۴ برازش انجام شد و مقادیر  $m$  و  $n$  به دست آمدند. مقادیر ثوابت حاصله  $g_2, g_1, m$  و  $n$  در معادلات قرار گرفتند و بدین وسیله معادلات خزش و واماندگی توسعه یافتند.

همان‌طور که در بخش قبل تشریح شد، در مطالعه‌ای که توسط هیئنگورانی و همکاران [20] انجام شد، لیگامان میانی خرگوش تحت تست خزش و واماندگی قرار گرفت و داده‌های مربوطه در مقادیر مختلف تنش و کرنش به دست آمد. داده‌های مربوطه در یک نمودار تمام لگاریتمی ترسیم شدند. نمودار کرنش حاصل از فرمولاسیون به‌ازای دو مقدار متفاوت تنش ( $41/2$  و  $18/4$  مگاپاسکال) رسم شد و نتایج با داده‌های آزمایشگاهی مورد مقایسه قرار گرفت. طبق نمودارها ملاحظه می‌شود که نرخ کرنش با سطوح بالاتر تنش کاهش می‌یابد و نرخ واماندگی نیز با سطوح ایزوکرنال تنش برای دو مقدار مختلف کرنش ( $3/5$  و  $6/5\%$ ) یا استفاده از فرمولاسیون به دست آمد و نتایج با داده‌های آزمایشگاهی مورد مقایسه قرار گرفت (نمودار ۲). همان‌طور که در نمودارها مشاهده می‌شود، نتایج حاصله از فرمولاسیون، تطابق قابل قبولی با نتایج مطالعه آزمایشگاهی هیئنگورانی و همکاران [20] داشته است.

کرنش نسبت به تنش برای دو زمان مختلف به دست آمد. اولین ایزوکرونال با توجه به فرمولاسیون برازش شد تا مقادیر  $g_1$  و  $g_2$  به دست بیاید. دومین ایزوکرونال با توجه به مقادیر  $g_1$  و  $g_2$  به دست آمده در مرحله قبل برای به دست آوردن  $n$  و  $m$  (از فرمولاسیون) برازش شد و در انتها با استفاده از مقادیر حاصله، منحنی واماندگی تنش برازش شد. همان طور که در نمودارهای ۱ و ۲ ملاحظه می شود، فرمولاسیون مورد انتخاب و مقادیر حاصله برای ثوابت معادلات، تطابق قابل قبولی با نتایج آزمایشگاهی داشت و می توان از این معادلات با دقت قابل قبولی برای لیگامان های ستون فقرات استفاده کرد.

**تشکر و قدردانی:** نگارندگان بر خود لازم می دانند از دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه علم و صنعت که امکان انجام این پژوهش را فراهم کرد تشکر و قدردانی نمایند.

**تأییدیه اخلاقی:** این مقاله تاکنون در نشریه دیگری (به طور کامل یا بخشی از آن) به چاپ نرسیده و همچنین برای بررسی یا چاپ به نشریه دیگری فرستاده نشده است.

**تعارض منافع:** بدین وسیله نویسندگان اعلام می کنند این اثر حاصل یک پژوهش مستقل بوده و هیچ گونه تضاد منافی با اشخاص دیگر یا سازمان ها ندارد.

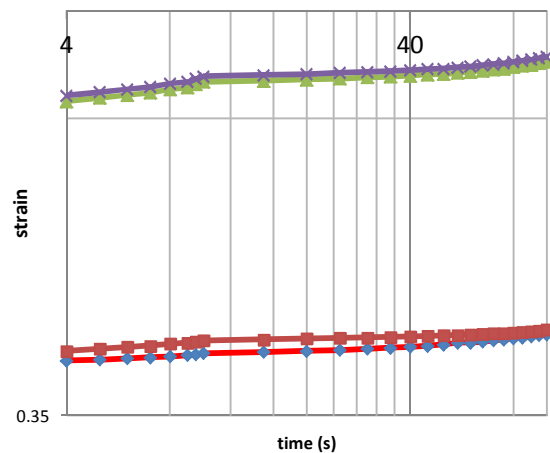
**سهم نویسندگان:** محمد حق پناهی (نویسنده اول)، نگارنده مقدمه/اروش شناس/پژوهشگر کمکی/تحلیلگر آماری/نگارنده بحث (۴۰٪)؛ سمیرا فاضلی ویسری (نویسنده دوم)، نگارنده مقدمه/اروش شناس/پژوهشگر اصلی/تحلیلگر آماری/نگارنده بحث (۶۰٪)

**منابع مالی:** این پژوهش از هیچ سازمانی حمایت مالی دریافت نکرده است.

### منابع

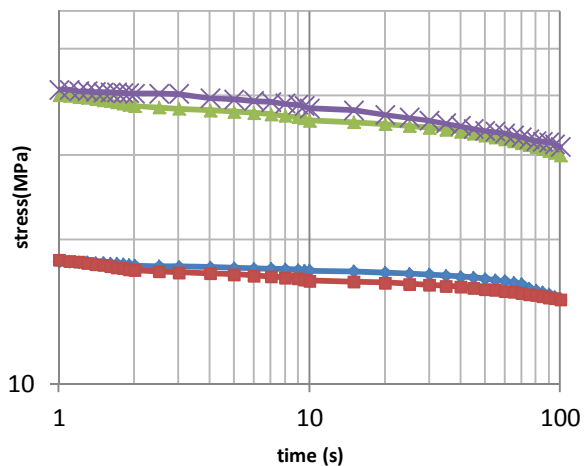
- 1- Amiel D, Frank C, Harwood F, Fronck J, Akeson W. Tendons and ligaments: A morphological and biochemical comparison. *Journal of Orthopaedic Research*. 1984;1(3):257-265.
- 2- Kwan MK, Lin TH, Woo SL. On the viscoelastic properties of the anteromedial bundle of the anterior cruciate ligament. *Journal of Biomechanics*. 1993;26(4-5):447-452.
- 3- Daniel DM, Akeson WH, O'Connor JJ. *Knee ligaments: Structure, function, injury and repair*. New York: Raven Press; 1990.
- 4- Fung YC. *Biomechanics: Mechanical properties of living tissues*. 2<sup>nd</sup> Edition. New York: Springer; 1993.
- 5- Huang H, Tang W, Yang Y, Wu B, Yan B. Determination of viscoelastic properties of the periodontal ligament using nanoindentation testing and numerical modeling. *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*. 2016;16(6):1650089.
- 6- Sopakayang R. A new viscoelastic model for preconditioning in ligaments and tendons. *Proceedings of the World Congress on Engineering (WCE)*, Vol III, July 3-5, 2013, London UK. London: WCE 2013; 2013.
- 7- Shi H, Yang N, Wang Z. Viscoelastic properties of the facial retaining ligaments. *Plastic and Reconstructive Surgery*. 2017;139(3):815e-816e.
- 8- Zhu W, Mow VC, Koob TJ, Eyre DR. Viscoelastic shear properties of articular cartilage and the effects of glycosidase treatments. *Journal of Orthopaedic Research*. 1993;11(6):771-781.

stress:18.4MPa(experiment) stress:18.4MPa(formulation)  
stress:41.2MPa(experiment) stress:41.2MPa(formulation)



نمودار ۱) نمودار خزش برای نتایج آزمایشات و فرمولاسیون به ازای دو مقدار تنش ۱۸/۴ و ۴۱/۲ مگاپاسکال

strain:3.5%(formulation) strain:3.5%(experiment)  
strain:6.5%(formulation) strain:6.5%(formulation)



نمودار ۲) نمودار واماندگی برای نتایج آزمایشات و فرمولاسیون به ازای دو مقدار کرنش ۳/۵ و ۶/۵٪

### ۷- تفسیر نتایج و نتیجه گیری

در این مقاله، رفتار ویسکوالاستیک لیگامان ستون فقرات با در نظر گرفتن دو مدل متفاوت ویسکوالاستیک نیمه خطی تحت بارگذاری های دینامیکی برای خزش و واماندگی تنش بررسی شد. پس از به دست آوردن معادلات حاکم، نتایج حاصل از فرمولاسیون با نتایج آزمایشات مربوطه موجود در منابع، مقایسه شد و در نهایت مدل ویسکوالاستیکی که رفتار نزدیک تری به نتایج آزمایشات داشت، به عنوان مدل مناسب برای لیگامان های ستون فقرات در نظر گرفته شد. بدین منظور، داده های مربوط به مطالعه آزمایشگاهی انجام شده توسط هیئنگورانی و همکاران [20] (مربوط به آزمایش خزش و واماندگی روی لیگامان میانی خرگوش) در یک نمودار تمام لگاریتمی ترسیم شدند. طبق نمودارها ملاحظه شد که نرخ کرنش با سطوح بالاتر تنش، کاهش یافت و نرخ واماندگی نیز با سطوح بالاتر کرنش کاهش پیدا کرد. نمودارهای ایزوکرونال

nonlinear viscoelastic materials, with an introduction to linear viscoelasticity. Amsterdam: North Holland Publishing Company; 1976.

16- Johnson GA, Livesay GA, Woo SL, Rajagopal KR. A single integral finite strain viscoelastic model of ligaments and tendons. *Journal of Biomechanical Engineering*. 1996;118(2):221-226.

17- Pioletti DP, Rakotomanana LR, Benvenuti JF, Leyvraz PF. Viscoelastic constitutive law in large deformations: Application to human knee ligaments and tendons. *Journal of Biomechanics*. 1998;31(8):753-757.

18- Crowninshield RD, Pope MH. The strength and failure characteristics of rat medial collateral ligaments. *The Journal of Trauma*. 1976;16(2):99-105.

19- Danto MI, Woo SLY. The mechanical properties of skeletally mature rabbit anterior cruciate ligament and patellar tendon over a range of strain rates. *Journal of Orthopaedic Research*. 1993;11(1):58-67.

20- Hingorani RV, Provenzano PP, Lakes RS, Escarcega A, Vanderby Jr R. Nonlinear viscoelasticity in rabbit medial collateral ligament. *Annals of Biomedical Engineering*. 2004;32(2):306-312.

9- Davis FM, De Vita R. A nonlinear constitutive model for stress relaxation in ligaments and tendons. *Annals of Biomedical Engineering*. 2012;40(12):2541-2550.

10- Yoganandan N, Kumaresan S, Pintar FA. Biomechanics of the cervical spine part 2 cervical spine soft tissue responses and biomechanical modeling. *Clinical Biomechanics*. 2001;16(1):1-27.

11- Bosiakov SM, Koroleva AA, Rogosin SV, Silberschmidt VV. Viscoelasticity of periodontal ligament: An analytical model. *Mechanics of Advanced Materials and Modern Processes*. 2015;1:7.

12- Gupta HS, Seto J, Krauss S, Boesecke P, Screen HRC. In situ multi-level analysis of viscoelastic deformation mechanisms in tendon collagen. *Journal of Structural Biology*. 2010;169(2):183-191.

13- Raz E, Lanir Y. Recruitment viscoelasticity of the tendon. *Journal of Biomechanical Engineering*. 2009;131(11):111008.

14- Schapery RA. On the characterization of nonlinear viscoelastic materials. *Polymer Engineering and Science*. 1969;9(4):295-310.

15- Findley WN, Lai JS, Onaran K. Creep and relaxation of