



شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر چند ماده به کمک کد هیدرودینامیکی دوبعدی

سعید پروار¹، حمیدرضا انبارلوئی²، علیرضا علی‌پور^{3*}

1- مربی، مهندسی هوافضا، دانشگاه پیام نور، رشت

2- دانشجوی پسادکتری، دانشگاه ریودوژانیرو، برزیل

3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز

* اهواز، صندوق پستی 6135783151، a.alipoor@scu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 16 آذر 1395

پذیرش: 15 دی 1395

ارائه در سایت: 19 بهمن 1395

کلید واژگان:

شبیه‌سازی عددی

سیال تراکم‌پذیر

روش تعقیب مرز (لول ست)

جریان چند ماده‌ای

مسئله شاک حباب

چکیده

شبیه‌سازی عددی جریان‌های چند ماده‌ای و یا چند فازی، از جمله مسائل چالش برانگیز در میان محققین دینامیک سیالات محاسباتی است. مهم‌ترین چالش در شبیه‌سازی چنین جریان‌هایی به‌وجود آمدن نوساناتی مجازی و ناخواسته در سطوح مشترک و در نتیجه ورود خطا در محاسبات عددی است. از بین بردن چنین نوساناتی نیازمند به‌کارگیری الگوریتم‌های به نسبت پیچیده عددی است. در این مطالعه برای شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر با صرف‌نظر از پدیده‌های انتقال مولکولی از معادلات اولر و حلگر ریمن HLLC و برای تعقیب سطح مشترک دو سیال از الگوریتم لول‌ست استفاده شده، همچنین از یک الگوریتم عددی تصحیح شار با قابلیت توسعه بالا، دقت مناسب و هزینه محاسباتی پایین معرفی شده توسط ابگرال و کارنی برای از بین بردن نوسانات مجازی در فرایند حل عددی استفاده شده است. در این بررسی الگوریتم نامبرده در حالت دو بعدی توسعه داده شده است. حلگر توسعه داده شده به کمک چند مسئله استاندارد یک و دو بعدی ارزیابی شده است. در نهایت از کد توسعه داده شده برای شبیه‌سازی مسئله دو بعدی شاک حباب دو ماده‌ای (هوا- هلیوم) استفاده شده، بررسی‌های انجام شده حاکی از هزینه محاسباتی پایین کد توسعه داده شده و دقت بالای نتایج به‌دست آمده است.

Simulation of compressible multi-material flow by 2D hydrodynamic code

Saeed Parvar¹, Hamid Reza Anbarlooei², Alireza Alipoor^{3*}

1- Faculty of Engineering, Payam Nour University, Rasht, Iran

2- Faculty of Mechanical Engineering, Rio De Janiro University, Brazil.

*3- Department of Mechanical Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran.

* P.O.B. 6135783151 Ahvaz, Iran, a.alipoor@scu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 06 December 2016
Accepted 04 January 2017
Available Online 07 February 2017

Keywords:

Numerical Simulation
Compressible Flow
Tracking Algorithm (Level Set)
Multi-Material Flow
Shock Bubble Flow

ABSTRACT

Numerical simulation of multi-material or multi-phase flows is one of the most challenging problems among computational fluid dynamics researchers. The main difficulty of these problems is producing some unexpected and non-physical oscillations at material interface which generate errors in computation. For eliminating this source of error, many sophisticated algorithms have been proposed recently. By neglecting diffusion processes, Euler equations and HLLC Reimann solver are applied. In addition, Level set algorithm is implemented to track interferences between two materials. An accurate, easily developed and low computational cost algorithm, proposed by Abgrall and Karni, is used to prevent generating the oscillations in the interfaces. In the current work, the algorithm is developed to 2 dimensional algorithms. Afterwards, the result of 1 and 2 dimensional codes are evaluated to verify the developed algorithm by some standard problems such as sod problem. Finally, shock-bubble (Air-Helium) interaction problem is simulated to investigate the effect of the algorithm in 2 dimensional simulations. The comparison shows that the code and its result have very good accuracy with very low computational cost.

1- مقدمه

با توجه به آن انجام پذیرد. شبکه محاسباتی در روش‌های تک ماده‌ای به گونه‌ای است که مرزهای فیزیکی بر مرزهای محاسباتی قرار می‌گیرند. برای نمونه تطابق مرزهای فیزیکی و محاسباتی برای یک مساله نمونه در شکل 1- a نشان داده شده است. در این شکل سلول‌های روشن حاوی ماده A و سلول‌های تیره حاوی ماده B است، همچنین مرز نشان داده شده با خط تیره بیانگر مرز مابین این دو ماده و دقیقاً روی مرزهای محاسباتی (شبکه محاسباتی) واقع شده است. از سوی دیگر حالت چند ماده‌ای در شکل (b-1) نشان داده شده است. در این حالت مرز فیزیکی روی مرزهای محاسباتی (شبکه محاسباتی) واقع نشده؛ بنابراین روش چند ماده در مقایسه با روش

امروزه شبیه‌سازی‌های فیزیکی رفتار سیستم‌ها در زمان طراحی به منظور کاهش تعداد و خطرات آزمایشات مورد نیاز گسترش فراوانی یافته است. شبیه‌سازی «جریان‌های تراکم‌پذیر» با در نظر گرفتن این رویکرد از پرکاربردترین مباحث است. در بیشتر مواردی که در طبیعت وجود دارد دو و یا چند ماده یا سیال در اندرکنش با یکدیگر قرار دارند، که برای شبیه‌سازی پدیده‌های حاصل از اندرکنش دو و یا چند ماده نیازمند اتخاذ رویکرد مناسب است. انتخاب یک روش عددی مناسب مستلزم تعیین مرز مشترک این مواد با هم و حرکت و اندرکنش آن بر سیالات است تا سایر بخش‌های شبیه‌سازی

Please cite this article using:

S. Parvar, H. R. Anbarlooei, A. Alipoor, Simulation of compressible multi-material flow by 2D hydrodynamic code, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 2, pp. 211-220, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

جرم و تعقیب جبهه شبیه است [11,10]. گادا و همکاران در سال 2011 از مدل دو شبکه مجزا برای حل جریان دو فاز استفاده کردند. ایشان معادله لول‌ست و انرژی با یک شبکه ریزتر از شبکه محاسباتی معادله پیوستگی مومنتم حل کردند [12]. در سال 2013 زاسپل و همکاران با کمک از مزایا الگوریتم پردازش موازی به شبیه‌سازی جریان تراکم‌ناپذیر دوفاز پرداختند [13]. در سال 2014 ژائو و همکاران به توسعه و بهبود تابع علامت به کمک ایجاد تغییراتی در مقاردهی اولیه پرداختند [14]. در روش‌های یادشده الگوریتم مورد استفاده به نسبت الگوریتم‌های عددی پیچیده و گاهی توسعه این روش‌ها به حالت دو یا سه بعدی دشوار است. از جمله محققین ایرانی که مطالعات چشمگیری در زمینه شبیه‌سازی جریان چند فازی و چند ماده‌ای داشتند می‌توان به مطالعات انصاری و دارمی‌زاده اشاره کرد. ایشان ابتدا با کمک مدل کاپیلا و یا همان روش پنج معادله کاهش‌یافته به توسعه الگوریتم مرتبه یک جهت حل مسئله متلاشی‌شدن قطره در اثر اصابت موج ضربه‌ای پرداختند [15]. سپس با کمک روش ماسل-هنکاک دقت الگوریتم یادشده را به مرتبه دو جهت شبیه‌سازی جریان‌های دوفازی گاز مایع افزایش دادند [16]. اما هدف از مطالعه کنونی به‌کارگیری یک الگوریتم عددی با هزینه محاسباتی پایین و دقت بالا و با قابلیت توسعه به هندسه‌های سه بعدی است. برای این منظور از روش آبگرا و کارنی [11] جهت نیل به هدف استفاده شد. روش ارائه شده توسط ایشان به صورت یک بعدی بوده که در این بررسی به دو بعد توسعه داده شده است. حلگر توسعه داده شده با استفاده از مسائل استاندارد و متداول ارزیابی و پس از حصول اطمینان از صحت کد توسعه داده‌شده در مسئله پیچیده و با هزینه محاسباتی بالای شاک حباب دو ماده‌ای (هوا-هلیوم) به‌کار گرفته و نتایج حاصل از کد توسعه داده‌شده با نتایج آزمایشگاهی بسط داده شده است.

2- معادلات حاکم

معادلات دینامیک گاز بر جریان اصلی با در نظر گرفتن سه فرض اساسی استخراج شده است. این فرضیات عبارت است از یک یا دو بعدی بودن تحلیل، صرف نظر از پدیده‌های انتقال مولکولی و استفاده از معادله حالت گاز کامل؛ بنابراین از معادلات اولر در مطالعه کنونی استفاده شد که شکل برداری، بقایی و دو بعدی این معادلات در مختصات دکارتی به صورت روابط (2,1) آورده شده است.

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = 0 \quad (1)$$

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E + p)u \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \end{bmatrix} \quad (2)$$

F و G روابط (21) شار جریان در دو راستای x و y است که با توجه به جریان مشخص می‌شوند، u و v مؤلفه سرعت ذره نسبت به یک دستگاه ساکن، ρ چگالی، P فشار سیال و E انرژی داخلی کل بر واحد جرم است که از رابطه (3) محاسبه می‌شود.

$$E = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{u^2 + v^2}{2} \quad (3)$$

در آن γ نسبت گرمای ویژه است. در معادلات بالا 4 معادله وجود دارد که شامل یک معادله بقای جرم، دو معادله بقای مومنتم و یک معادله بقای انرژی که چهار معادله و پنج مجهول می‌شوند، به همین دلیل نیاز به معادله کمکی دیگری برای حل مسئله احساس می‌شود که می‌توان از معادله حالت گاز کامل (4) استفاده کرد.

$$p = \rho(\gamma - 1)e \quad (4)$$

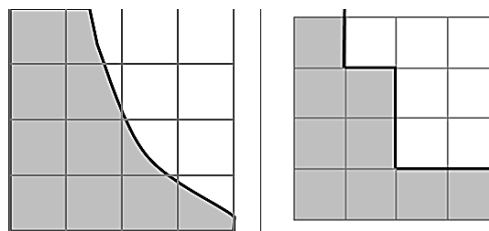


Fig. 1 Comparing single material and multi materials algorithm, a- Single Material algorithm, b- Multi materials algorithm

شکل 1 مقایسه الگوریتم تک ماده‌ای با چند ماده‌ای، الف- الگوریتم تک ماده‌ای، ب- الگوریتم چند ماده‌ای

تک ماده نیازمند الگوریتم عددی دقیق و مناسب برای تعیین محل مرز فیزیکی است. از آنجایی که در این حالت مرز فیزیکی و سلول‌های چند ماده‌ای وارد پروسه حل عددی خواهند شد، پیچیدگی الگوریتم عددی مورد استفاده افزوده خواهد شد.

در سال‌های اخیر محققین مختلفی آغاز به توسعه الگوریتم‌های عددی جهت شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر چند ماده‌ای کرده‌اند. از مهم‌ترین مشکلات پیشرو در این مطالعات به‌وجود آمدن نوسانات غیر فیزیکی در سطوح مشترک که دلیل آن محاسبه شار اشتباه در مرز بین دو ماده است [1]. برای از بین بردن این نوسانات ناخواسته الگوریتم‌های عددی متعددی توسعه داده شده است. با توجه به گسترش سریع روش‌های عددی، علاقه‌مندی بسیاری جهت توسعه این الگوریتم‌ها برای شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر چند ماده‌ای ایجاد شده است. از جمله این مطالعات می‌توان به کارهای نوح و وود وارد که به ارائه روش حجم سیال¹ منتهی شد [2] اشاره کرد. در این روش معادله بقا جرم و انرژی برای هر ماده به‌طور جداگانه و معادله مومنتم برای کل جریان نوشته می‌شود. در این حالت پایداری جرم و انرژی برای کل جریان به کمک معادله گونه‌ها ارزیابی و محاسبه می‌شود. کارنی در سال 1994 روش تکامل تدریجی فشار² ارائه کرد [3]. ایشان در این روش از یک ترم تصحیح‌کننده لرج جهت از بین بردن خطا (نوسان غیر فیزیکی) استفاده کرد. جنی و همکاران روش تصحیح انرژی داخلی³ را معرفی کردند [4]. ایشان در هر گام زمانی به اصلاح انرژی داخلی در نواحی سطوح مشترک می‌پرداختند. روش سیال شبح⁴ ارائه‌شده توسط فدکیو و همکاران اشاره کرد [5]. این روش براساس الگوریتم لول‌ست توسعه داده شده است، در هر گام زمانی پس از شناسایی محل سطوح مشترک با کمک برونیایی در راستای عمود بر سطوح مشترک به اصلاح مقادیر فشار، سرعت و چگالی می‌پردازد. با توسعه بیشتر روش‌های عددی محققین شروع به توسعه و تکمیل الگوریتم‌های پیچیده‌تر، با کارایی بیشتر برای حل مسائل مختلف کرده‌اند. از جمله آن‌ها می‌توان به کارهای گیبو و همکاران اشاره کرد که در سال 2002 و 2005 روش سیال شبه را برای نواحی تیز سطح مشترک توسعه دادند [6,7]. گمز و همکاران به دو برابر کردن دقت محاسباتی در نواحی سطوح مشترک پرداختند [8]. مین و همکاران در سال 2007 از الگوریتم تطبیق شبکه برای بهبود نتایج خود استفاده کردند [9]. سپس شین و همکاران در سال‌های 2002 و 2009 از ایده روش لول‌ست برای حل سیال در نواحی نزدیک به سطوح مشترک استفاده کردند، روش ارائه‌شده توسط آن‌ها بسیار به روش حجم سیال در پایداری

¹ Volume of Fluid
² Pressure Evolution Model
³ Internal Energy Correction Algorithm
⁴ Ghost Fluid Method

رابطه (8) معادله کلی لول‌ست را نشان می‌دهد که می‌توان آن را به شکل رابطه (9) نیز نشان داد.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \psi = 0 \quad (9)$$

در رابطه (9) ψ تابع لول‌ست و V بردار سرعت حرکت مرز است. معادله لول‌ست از نوع معادلات هامیلتون-ژاکوبی⁷ است [21] برای حل معادله بالا از روش ENO مرتبه دوم استفاده شد که نحوه اعمال این روش به طور کامل در مراجع [24-22] داده شده است.

تابعی که در ابتدا برای حل معادله لول‌ست به عنوان شرط اولیه در نظر گرفته می‌شود، تابع فاصله است، ولی پس از حرکت مرز و حل معادله لول‌ست معمولاً این تابع به صورت تابع فاصله باقی نمی‌ماند. این بدان معناست که برای حفظ خواص تابع فاصله باید بین هر دو گام زمانی مقادردهی دوباره باشد. روشی که برای حفظ خواص تابع فاصله استفاده می‌شود، حل معادله‌ای است که مقدار تابع ψ را به‌گونه‌ای اصلاح کند که همواره $|\nabla \psi| = 1$ باقی بماند؛ بنابراین با برقراری این خاصیت تابع ψ همواره به صورت تابع فاصله حفظ می‌شود. این معادله که به معادله مقادردهی مجدد معروف است [20-24] به صورت رابطه (10) است.

$$\psi_t + S(\psi_0)(|\nabla \psi| - 1) = 0 \quad (10)$$

در معادله (10)، $\psi_0 = \psi(x, y, 0)$ است و تابع $S(\psi_0)$ تابع علامت⁸ است که خارج از مرز برابر 1، داخل مرز برابر -1 و روی مرز برابر صفر است. البته پس از بررسی‌های عددی متعدد رابطه (11) تابعی هموار و مناسب برای استفاده در رابطه (10) تشخیص داده شده است [24-20]. این معادله در مدت زمان فرضی و غیرواقعی بین دو گام زمانی مربوط به معادله اصلی لول‌ست تا جایی حل می‌شود که پاسخ آن به یک حالت پایا برسد، یا به عبارت دیگر جمله نخست ψ_t برابر صفر شود.

$$S(\psi_0) = \frac{\psi_0}{\sqrt{\psi_0^2 + \Delta x^2}} \quad (11)$$

4- شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر چند ماده‌ای روش آبگرا و کارنی

اساس کار این روش بدین‌گونه است که فرض کنید دو سلول در کنار هم دارای دو سیال متفاوت هستند که در نتیجه دارای متغیرهای اولیه و بقایی مساوی و یا متفاوت با توجه به معادله حالت مربوطه است (روابط (12)، (13)).

$$U_L = \begin{bmatrix} \rho_L \\ \rho u_L \\ \rho v_L \\ E_L \end{bmatrix}, \gamma_L \quad (12)$$

$$U_R = \begin{bmatrix} \rho_R \\ \rho u_R \\ \rho v_R \\ E_R \end{bmatrix}, \gamma_R \quad (13)$$

از آنجایی محاسبه شار جریان وابسته به این متغیرهاست، در نتیجه مقادیر متفاوت اولیه منجر به محاسبه شار متفاوت و در نتیجه تولید یک نوسان غیرفیزیکی ناخواسته می‌شود (شکل 2).

$$F_{i+\frac{1}{2}} = (U_L, U_R; \gamma_L, \gamma_R) \quad (14)$$

آبگرا و کارنی برای رفع این مشکل پیشنهاد کردند دو شار متفاوت در مرز دو سلول به جای یک شار محاسبه شود.

محاسبه شار اول با فرض این که هر دو سلول مجاور (در i و $i+1$) دارای

از روش WAF¹ که توسط تورو ارائه شده در این شبیه‌سازی استفاده شده است. روش یادشده یک الگوریتم پیوسته² و بالادستی³ با دقت مرتبه دوم در مکان و زمان در فضای دوبعدی است که از حل‌کننده ریمن HLLC⁴ برای محاسبه شار استفاده می‌کنند [17-19].

2-1- مسائل تقارن محوری و کاهش ابعاد

در برخی از مسائل می‌توان با استفاده از مزایای تقارن محوری از پیچیدگی‌های حل عددی مسئله مورد نظر کاست. به عنوان نمونه برای حل مسئله‌ای در راستای شعاعی با تقارن محوری می‌توان از معادلات بازنویسی‌شده در مختصات استوانه‌ای استفاده کرد و به سیستم معادلاتی ساده‌تری برای حل دست یافت. در این‌گونه مسائل برای تبدیل معادلات مورد نظر از یک ترم چشمه هندسی⁵ استفاده می‌شود. این ترم توسط متغیر S به معادلات حاکم اضافه می‌شود؛ بنابراین این معادلات به صورت روابط (5، 6) بازنویسی می‌شوند. تنها تفاوت این معادلات با دستگاه روابط (2، 1) این است که u مؤلفه سرعت ذره بر محور z و v مؤلفه سرعت ذره بر محور r است.

$$U_t + F(U)_z + G(U)_r = S \quad (5)$$

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{r}(\rho v) \\ -\frac{\alpha}{r}(\rho uv) \\ -\frac{\alpha}{r}(\rho v^2) \\ -\frac{\alpha}{r}((E+p)u) \end{bmatrix} \quad (6)$$

در حالت تقارن شعاعی در این معادلات $\alpha = 1$ برای حالت دوبعدی و $\alpha = 2$ برای حالت سه بعدی و r نیز فاصله از محور تقارن است [17، 18]. در مسائل چند بعدی فرض تقارن شعاعی ارزش زیادی در ارزیابی و اعتبارسنجی کدهای عددی دارد.

3- روش تعقیب مرز (لول‌ست)

روش‌های تعقیب‌کننده سطح مشترک به روش‌هایی اطلاق می‌شود که حرکت و تغییر شکل سطوح یا منحنی‌هایی که شامل مرزهای داخلی و سطوح مشترک می‌شوند را توصیف و تعقیب می‌کنند. روش لول‌ست یکی از روش‌ها با دیدگاه اولیری است که برای تعقیب ناپیوستگی موجود میان دو سیال و یا یک سیال و جامد به کار می‌رود. این روش نخستین بار توسط اوشر در سال 1989 مورد استفاده قرار گرفت [20]. در این روش مرز Γ می‌تواند به صورت باز یا بسته در منطقه ψ گسترش یابد. هدف محاسبه حرکت مرز Γ تحت میدان سرعت v است. این میدان سرعت می‌تواند به موقعیت، زمان و هندسه مربوط به مرز و یا فیزیکی خارج از مرز وابسته باشد. مرز در زمان‌های بعدی توسط مقدار صفر تابع لول‌ست تعقیب می‌شود (رابطه 7).

$$\Gamma(t) = \{\vec{x} | \psi(\vec{x}, t) = 0\} \quad (7)$$

در این روش ابتدا برای کل میدان حل یک تابع ضمنی ψ به‌گونه‌ای تعریف می‌شود که روی مرز $\psi = 0$ ، داخل مرز $\psi < 0$ و خارج از مرز $\psi > 0$ باشد [9]. $\psi = 0$ مرز یا تابع صفر لول‌ست نامیده می‌شود. اگر از تابع ضمنی $\psi(x, y, t) = cte$ مشتق کلی گرفته شود، رابطه (8) به دست می‌آید.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0 \quad (8)$$

¹ Weight Averaged Flux

² Unsplit

³ Upwind

⁴ Harten-Lax-van Leer-Contact

⁵ Geometric source terms

⁶ Level Set

⁷ Hamilton- Jacobi

⁸ Sign function

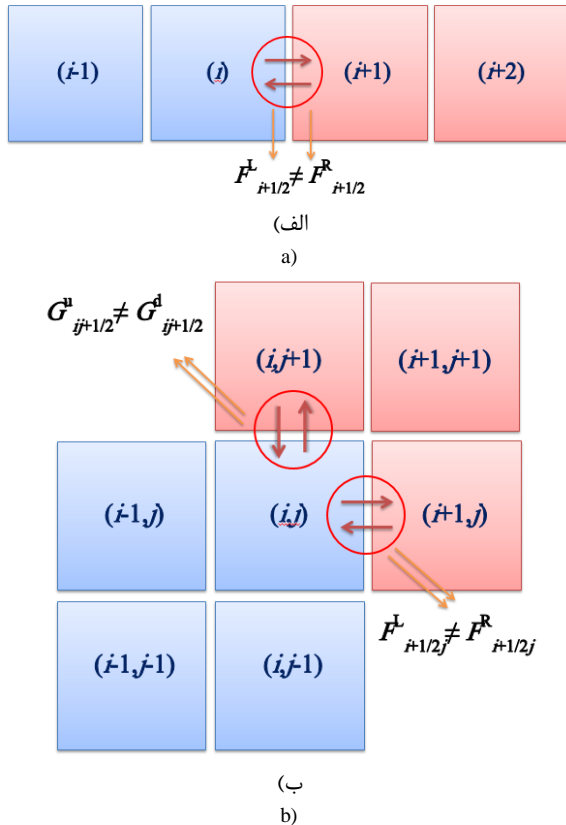


Fig. 2 a- Schematic of single fluid algorithm [1] b- Schematic of developed 1D algorithm to 2D algorithm

شکل 2 الف- طرح‌واره ساده از الگوریتم حل جریان یک ماده‌ای [1]، ب- طرح‌واره توسعه الگوریتم یک بعدی به الگوریتم دو بعدی

6-1- مسئله دوماده‌ای لوله شاک¹

این مسئله استاندارد و متداول لوله شاک که جهت ارزیابی کد توسعه داده شده در مطالعه کنونی از دو ماده متفاوت در دو طرف دیافراگم استفاده شده است. شرایط اولیه در نظر گرفته شده برای این شبیه‌سازی در جدول 1 نشان داده شده است. در این مسئله میدان محاسباتی از میانه آن به دو ناحیه مجزای و مساوی تقسیم می‌شود. طول میدان محاسباتی یک، تعداد سلول محاسباتی 100 و عدد کورانت 0.8 فرض شده است.

برای مشاهده و بررسی تأثیر نوسانات غیرفیزیکی ناخواسته نخست این مسئله بدون استفاده از الگوریتم مورد اشاره حل می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود با شکسته شدن دیافراگم سطح مشترک مابین دو ماده از مرکز میدان در مکان تقریبی $(x=0.5)0.5$ سمت راست حرکت می‌کند تا این‌که در زمان 0.2 به مکان 0.65 $(x=0.65)$ می‌رسد (شکل 3).

نوسانات غیرفیزیکی ناخواسته به دلیل محاسبه شار اشتباه در محل سطح مشترک ایجاد شده و با سطح مشترک حرکت می‌کند. تأثیر نوسانات بر منحنی فشار را می‌توان در شکل 4 مشاهده کرد. این نوسانات تأثیرات مخرب‌تری بر منحنی چگالی (شکل 5) و همچنین سرعت (شکل 6) خواهد داشت، به‌گونه‌ای که تغییر شکل این دو منحنی بسیار محسوس است. همان‌طور که مشاهده می‌شود هر سه منحنی در محل سطح تماسی دارای پرش است. اثرات این نوسانات بر منحنی‌ها به کمک دایره در شکل‌های 4-6 مشخص شده است.

سیالی با مقدار γ_L و شار دوم با فرض وجود سیالی با مقدار γ_R در هر دو سلول محاسبه صورت می‌گیرد، در نتیجه روابط (16,15) را به صورت زیر داریم.

$$F_{i+\frac{1}{2}}^L = (U_L, U_R; \gamma_L) \quad (15)$$

$$F_{i+\frac{1}{2}}^R = (U_L, U_R; \gamma_R) \quad (16)$$

سپس از شار چپ $F_{i+\frac{1}{2}}^L$ برای بروزرسانی سیال در سلول i و از $F_{i+\frac{1}{2}}^R$ برای محاسبه خواص سیال در سلول $i+1$ استفاده می‌شود.

5- الگوریتم روش آبگرا و کارنی با استفاده از روش لول‌ست

نخست فرض می‌شود که تمام مقادیر متغیرهای اولیه سلول‌ها در راستای x مشخص است، و سپس الگوریتم به صورت زیر دنبال می‌شود.

1- به کمک مقدار ψ_{ij} مختصات مرز (سطوح مشترک) دو ماده مشخص می‌شود.

2- مقادیر بقایی در هر سلول با کمک معادله حالت مناسب آن محاسبه می‌شوند.

3- اگر $\psi_{ij} \times \psi_{i+1j} > 0$ بنا بر این هیچ مرزی بین دو سلول وجود ندارد و هر دو سلول دارای سیال یکسان است، در نتیجه $\gamma_L = \gamma_R \equiv \gamma$ که به کمک آن یک شار بین سلولی از رابطه $F_{i+\frac{1}{2}}^R = (U_{ij}, U_{i+1j}; \gamma)$ محاسبه می‌شود.

4- در غیر این صورت ($\psi_{ij} \times \psi_{i+1j} \leq 0$) باید دو شار مجزا در نقطه $x_{i+\frac{1}{2}}$ با استفاده از روابط (16,15) محاسبه شود.

5- از معادله (15) برای بروزرسانی $U_L = U_{ij}^n$ و رابطه (14) برای محاسبه $U_R = U_{i+1j}^n$ استفاده می‌شود.

6- در ادامه U_{ij}^{n+1} با استفاده از مقادیر جدید متغیرهای اولیه و مقدار مشخص $\gamma_{L,R}^n$ محاسبه می‌شود.

7- در نهایت تابع لول‌ست ψ_{ij} با کمک میدان سرعت به دست آمده به‌روزرسانی می‌شود.

باید توجه داشت که الگوریتم ارائه شده کاملاً مستقل از روش گسسته‌سازی است [1]، همچنین شار اصلاح شده تنها بر انرژی کل تأثیرگذار است و هیچ تأثیر بر چگالی و مومنتم ندارد [1]، در نهایت باید این نکته را یادآور شد که الگوریتم ارائه شده شرایطی را به وجود می‌آورد که هر سیال فقط خود را می‌بیند این جمله بدین معنی است که شرایط به‌گونه‌ای اصلاح می‌شود که گویی سیال با سیال دیگر در تماس نیست و محاسبات به صورت تک ماده دنبال و در نتیجه از نوسان غیرفیزیکی ناخواسته در مرز دو ماده جلوگیری می‌شود.

همان‌طور که مشاهده می‌شود روش ارائه شده به صورت یک بعدی در راستای x است. برای توسعه این الگوریتم به حالت دو یا سه بعدی کافی است که تمام مراحل بالا بار دیگر در راستای محورهای مختصات y و سپس z صورت پذیرد (شکل 2).

6- نتایج

برای بررسی صحت عملکرد کد به حل چند مسئله کلاسیک پرداخته شده است. نخست کد مورد نظر در حالت یک بعدی مرتبه یک توسعه داده شد و پس از بررسی صحت عملکرد آن به حالت دو بعدی مرتبه دو توسعه داده شد؛ بنابراین نخست چند مسئله یک بعدی و سپس یک مسئله دو بعدی حل شده است.

¹ Sod Problem

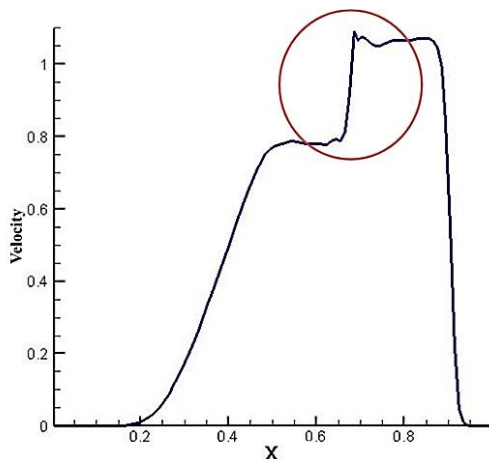


Fig. 6 Diagram of Velocity versus X coordinate at t=0.2—two material sod problem

شکل 6 منحنی سرعت-مکان در t=0.2، مسئله دو ماده‌ای لوله شاک

حال به بررسی تأثیرات استفاده از الگوریتم آبگرا و کارنی بر این نوسان غیرفیزیکی پرداخته می‌شود. شرایط اولیه به طور دقیق مطابق با جدول 1 است و مسئله دوباره تا زمان 0.2 حل می‌شود. بررسی نمودارهای 7-9 با نمودار 4-6 با نشان می‌دهد که هیچ نوسانی در سطح مشترک دو ماده ایجاد نمی‌شود و شکل هر سه منحنی طبیعی است. در نمودار 7-9 رنگ قرمز نشان‌دهنده نمودار به دست آمده از الگوریتم آبگرا و کارنی، نمودارهای آبی نشان‌دهنده عدم اعمال این الگوریتم و یا همان نمودارهای 4-6 هستند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود منحنی فشار در شکل 7 برخلاف شکل 4 در محل سطح مشترک دارای مقدار ثابت و یکنواخت که از خصوصیات سطح تماسی در مسئله لوله شاک است. منحنی سرعت در شکل 9 در مقایسه با شکل 6 نیز دارای مقداری ثابت و یکنواخت در محل سطح تماسی (مرز دوماده) است. بررسی این منحنی‌ها (4-9) نشان داد که محاسبه اشتباه شار در محل سطح تماسی نه تنها منجر به تولید خطا در محل یادشده می‌شود، با گذر زمان این خطا به درون میدان محاسباتی گسترش یافته تأثیراتی مخربی بر نتایج نواحی دیگر و در تمامی نمودارها می‌گذارد، اما با حذف نوسانات غیرفیزیکی، پخش غیرفیزیکی منحنی‌های فشار، چگالی و سرعت در محل سطح تماسی نیز از بین رفته و دیگر گسترش خطا به درون میدان محاسباتی مشاهده نمی‌شود.

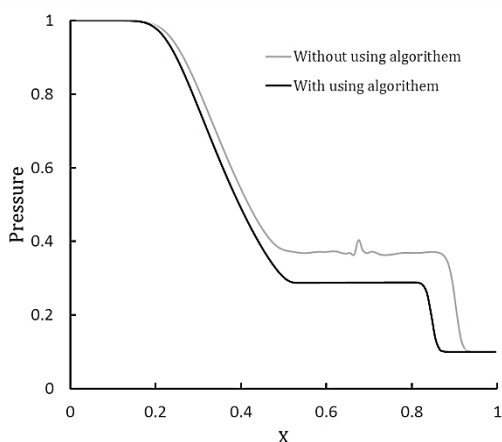


Fig. 7 Diagram of Pressure versus X coordinate at t=0.2—two material sod problem

شکل 7 منحنی فشار-مکان در t=0.2، مسئله دو ماده‌ای لوله شاک

جدول 1 مقادیر اولیه مسئله لوله شاک دو ماده‌ای

Table 1 Initial condition of two material Sod problems

مقادیر متغیرهای اولیه در ناحیه کم فشار	مقادیر متغیرهای اولیه در ناحیه پر فشار
$\rho = 1.0$	$\rho = 0.125$
$u = 0.0$	$u = 0.0$
$p = 1.0$	$p = 0.1$
$\gamma = 1.4$	$\gamma = 1.6$

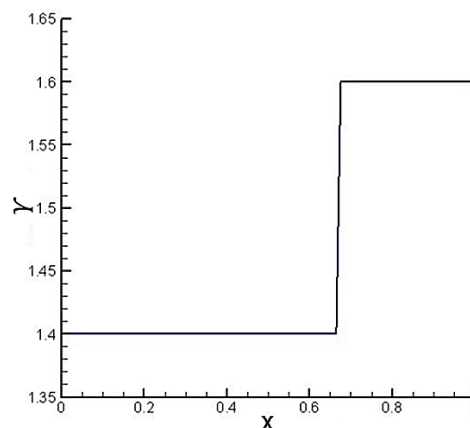


Fig. 3 Diagram of Gamma versus X coordinate at t=0.2—two material sod problem

شکل 3 منحنی گاما-مکان در زمان 0.2 مسئله دو ماده‌ای لوله شاک

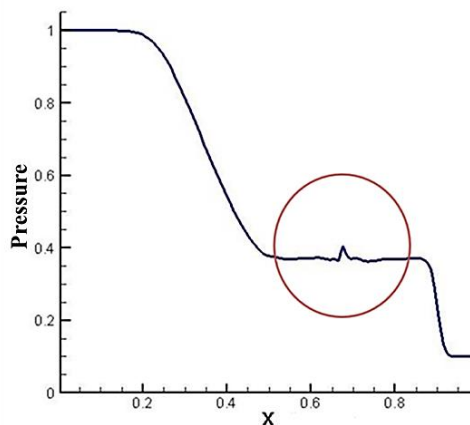


Fig. 4 Diagram of Pressure versus X coordinate at t=0.2—two material sod problem

شکل 4 منحنی فشار-مکان در t=0.2، مسئله دو ماده‌ای لوله شاک

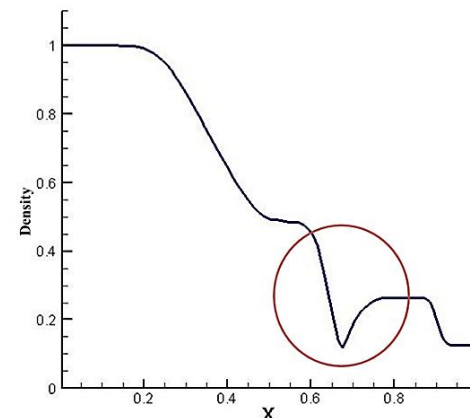


Fig. 5 Diagram of Density versus X coordinate at t = 0.2—two material sod problem

شکل 5 منحنی چگالی-مکان در t=0.2، مسئله دو ماده‌ای لوله شاک

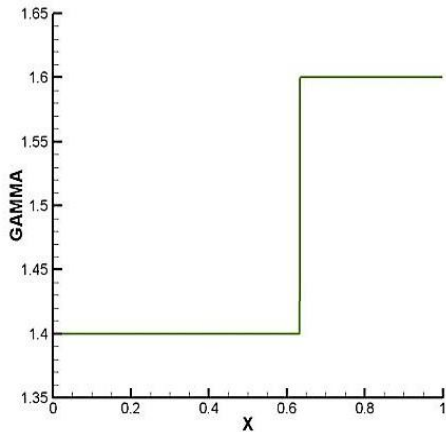


Fig. 10 Diagram of Gamma for two material stiff sod problem at $t=0.01$

شکل 10 منحنی گاما- مکان در زمان $t=0.01$ مسئله دو ماده‌ای لوله شاک قوی

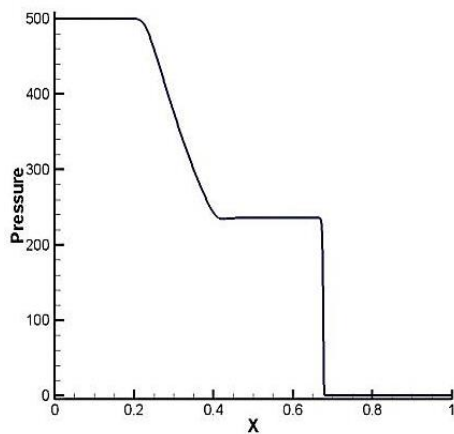


Fig. 11 Diagram of Pressure for two material stiff sod problem at $t=0.01$

شکل 11 منحنی فشار- مکان در زمان $t=0.01$ مسئله دو ماده‌ای لوله شاک قوی

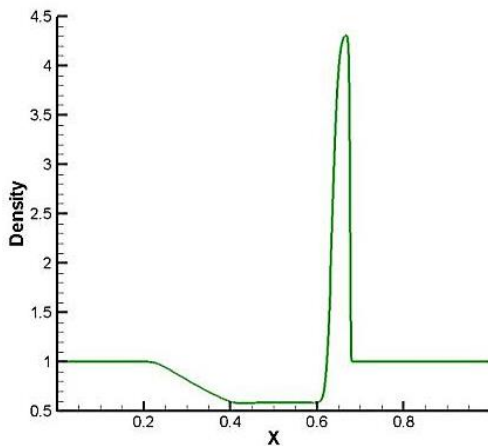


Fig. 12 Diagram of Density for two material stiff sod problem at $t=0.01$

شکل 12 منحنی چگالی- مکان در زمان $t=0.01$ مسئله دو ماده‌ای لوله شاک قوی

3-6- مسئله دو ماده‌ای شاک و حباب²

مسئله شاک و حباب دو ماده‌ای در مختصات استوانه‌ای از جمله مسائل بسیار محبوب در صحت‌سنجی کدهای اولر دوبعدی چند ماده‌ای است. در این

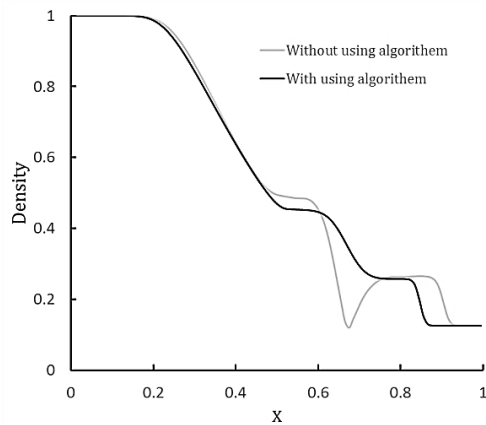


Fig. 8 Diagram of Density versus X coordinate at $t=0.2$ -two material sod problem

شکل 8 منحنی چگالی- مکان در $t=0.2$ مسئله دو ماده‌ای لوله شاک

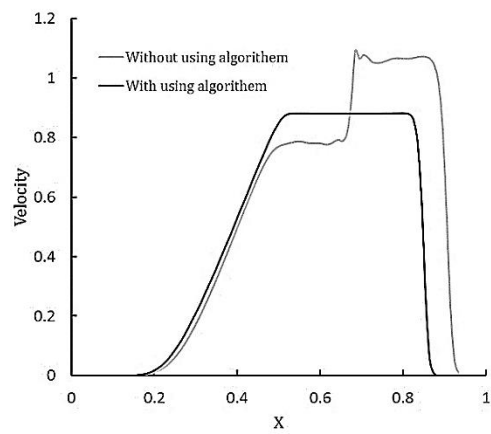


Fig. 9 Diagram of Velocity versus X coordinate at $t=0.2$ - two material sod problem

شکل 9 منحنی سرعت- مکان در $t=0.2$ مسئله دو ماده‌ای لوله شاک

2-6- مسئله دو ماده‌ای لوله شاک قوی¹

برای بررسی دقیق‌تر نسبت فشار دو طرف دیافراگم را 1000 برابر در نظر گرفته می‌شود، به این مسئله در اصطلاح لوله شاک قوی گفته می‌شود. دوباره در این مسئله میدان از میانه آن به دو ناحیه مجزای و مساوی چپ و راست تقسیم می‌شود و شرایط اولیه مطابق با جدول 2 برای آن در نظر گرفته شد. طول میدان محاسباتی برابر 1، تعداد سلول محاسباتی 800، عدد کورانت نیز برابر 0.8 فرض شده است و محاسبات تا رسیدن به زمان 0.01 ادامه یافت. با شکستن دیافراگم دوباره سطح تماسی از محل 0.5 به سمت راست حرکت می‌کند و در زمان 0.01 به مکان تقریبی 0.7 می‌رسد (شکل 10). بررسی شکل‌های 11-13 نشان می‌دهد که در این مسئله نیز مانند مسئله پیشین در محل سطح تماسی هیچ‌گونه نوسان غیرفیزیکی در منحنی‌های فشار، چگالی و سرعت ایجاد نمی‌شود.

جدول 2 مقادیر اولیه مسئله لوله شاک دو ماده‌ای

Table 2 Initial condition of two material stiff Sod problems		
مقادیر متغیرهای اولیه در ناحیه کم فشار	مقادیر متغیرهای اولیه در ناحیه پر فشار	مقادیر متغیرهای اولیه در ناحیه کم فشار
$\rho = 1.0$		$\rho = 0.1$
$u = 0.0$		$u = 0.0$
$p = 500.0$		$p = 0.2$
$\gamma = 1.4$		$\gamma = 1.6$

¹ Stiff Sod Problem

² Shock - Bubble

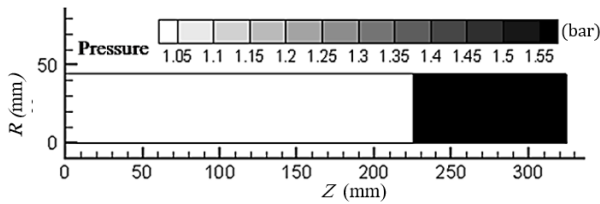


Fig. 15 Contour of Pressure at $t=0.0 \mu s$ –Shock Bubble two material problem

شکل 15 کانتور فشار چگالی در $t=0.0 \mu s$ مسئله شاک- حباب دو ماده‌ای

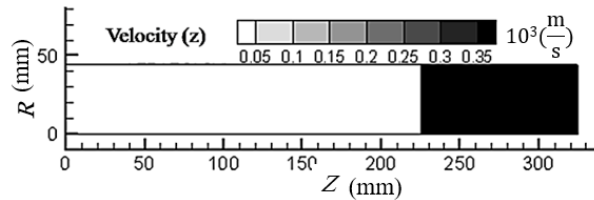


Fig. 16 Contour of Velocity at $t=0.0$ – Shock Bubble two material problem

شکل 16 کانتور سرعت در $t=0.0 \mu s$ مسئله شاک- حباب دو ماده‌ای

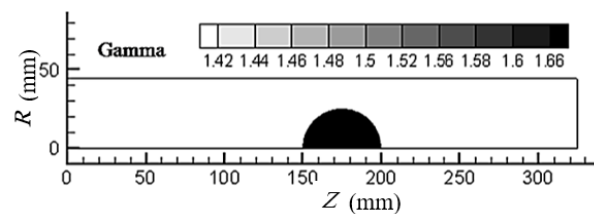


Fig. 17 Contour of Gamma at $t=0.0$ –Shock Bubble two material problem

شکل 17 کانتور گاما اولیه در $t=0.0 \mu s$ مسئله شاک- حباب دو ماده‌ای

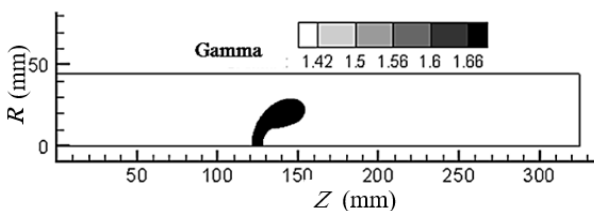


Fig. 18 Contour of Gamma at $t=350 \mu s$ –Cylindrical coordinate

شکل 18 کانتور گاما در $t=350 \mu s$ مختصات استوانه‌ای

نخست نتایج با نتایج ارائه‌شده توسط اسلام و همکاران [5] برای صحت‌سنجی نتایج کد مقایسه شد. مقایسه شکل‌های 21 و 22 نشان می‌دهد که الگوریتم توسعه داده شده از دقت بالایی در یافتن محل ناپوستگی‌ها برخوردار است و نتایج حاصله نیز تطابق بسیار خوبی با نتایج مرجع [5] دارد (این مقایسه در مختصات کارتزین صورت پذیرفت).

برای بررسی نهایی به مقایسه شکل حباب در زمان‌های مختلفی چون 20، 223 و 600 میکروثانیه پس از برخورد شاک با حباب با نتایج تجربی پرداخته شد. تصاویر به‌دست‌آمده از نتایج تجربی دارای ماهیتی سه بعدی و

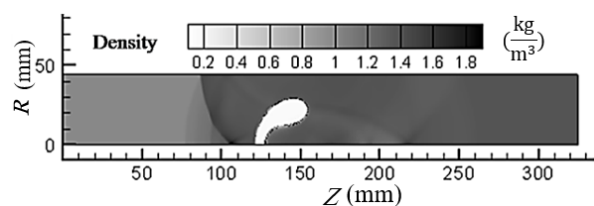


Fig. 19 Contour of Density at $t=350 \mu s$ – Cylindrical coordinate

شکل 19 کانتور چگالی در $t=350 \mu s$ مختصات استوانه‌ای

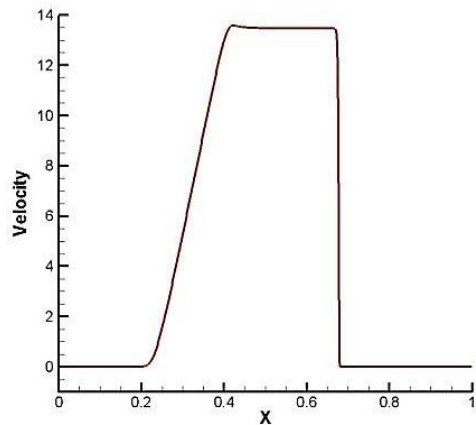


Fig. 13 Diagram of Velocity for two material stiff sod problem at $t=0.01$

شکل 13 منحنی سرعت- مکان در زمان $t=0.01$ مسئله دو ماده‌ای لوله شاک قوی

مسئله موج شاک با ماخ 1.22 واقع در مختصات $Z=225$ به حباب هلیومی به شعاع 25 و با چگالی 0.138 برخورد می‌کند. مرکز حباب در مختصات $Z=175$ و $0R=0$ واقع است. در تمامی محاسبات فقط نیمه بالایی میدان محاسباتی با توجه به تقارن محوری بودن مسئله حل شد و سپس نیمه پایینی میدان با استفاده از فرض تقارن ترسیم می‌شود. شرایط در نظر گرفته شده به‌عنوان شرط اولیه در شکل 14-17 قابل مشاهده است. نتایج حاصل در زمان‌های مختلف با هم مقایسه شده است. شبکه محاسباتی در نظر گرفته شده یک شبکه یکنواخت با ابعاد 89×650 است. مرز بالا و پایین دیوار در این شبیه‌سازی انعکاسی فرض شده و در مرز چپ شرایط ورودی و در مرز راست شرایط خروجی لحاظ شده است [5].

عدم توازن فشار در دو طرف این غشاء پس از شکستن دیافراگم موجب جریان یافتن سیال از ناحیه پر فشار به سمت ناحیه کم فشار و ایجاد یک شاک قائم متحرک می‌شود. این حباب با برخورد شاک و جریان پشت شاک به حباب هلیوم از محل اولیه خود جابه‌جا شده و همراه با جریان پشت شاک و شاک به سمت چپ میدان حرکت می‌کند. برخورد شاک با حباب موجب انحنای یافتن شاک و به‌وجود آمدن امواج عرضی و حرکت آن‌ها به سمت دیواره‌ها می‌شود.

امواج عرضی پس از برخورد با دیواره‌ها به سمت داخل میدان منعکس می‌شوند و با امواج انعکاسی از دیوار مقابل برخورد می‌کنند. این اندرکنش‌ها سبب به‌وجود آمدن جت شده و در نهایت موجب تغییر شکل حباب هلیوم می‌شود. در شکل‌های 18-20 کانتورهای گاما، چگالی و فشار را می‌توان مشاهده کرد. همان‌طور که مشاهده می‌شود هیچ‌گونه نوسانات غیرفیزیکی در سطوح مشترک وجود ندارد. در صورت بروز این نوسانات کانتور در نواحی مرز دو ماده دارای نقاطی بوده که مانند چاه و چشمه عمل می‌کردند.

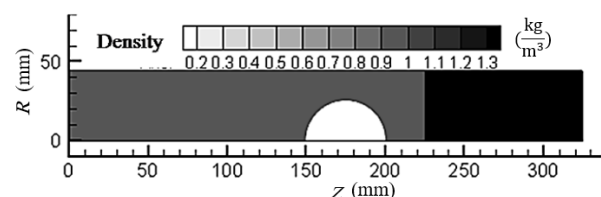


Fig. 14 Contour of Density at $t=0.0 \mu s$ –Shock Bubble two material problem

شکل 14 کانتور چگالی در $t=0.0 \mu s$ مسئله شاک- حباب دو ماده‌ای

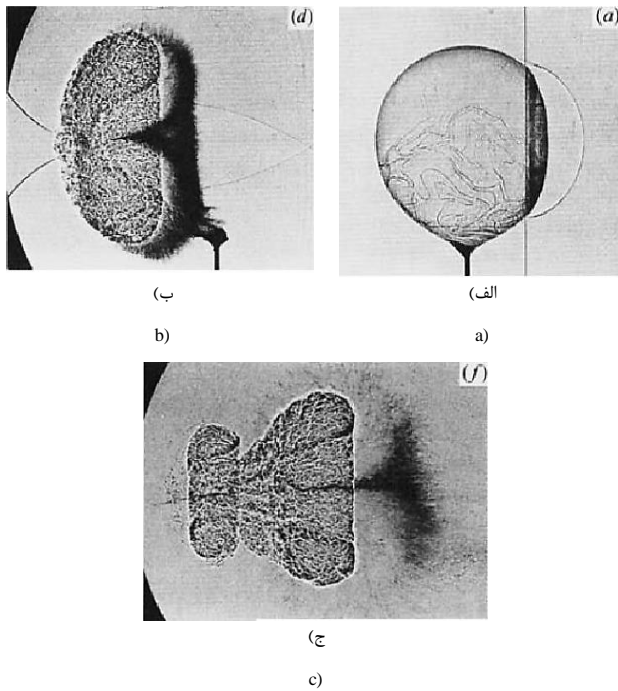


Fig. 23 Schlieren of bubble in times, a-20 μ s, b-223 μ s, c-600 μ s after shock collide the bubble [23]

شکل 23 شلرین شکل حباب در زمان‌های الف- 20 میکروثانیه، ب- 223 میکروثانیه، ج- 600 میکروثانیه پس از برخورد شاک با حباب [23]

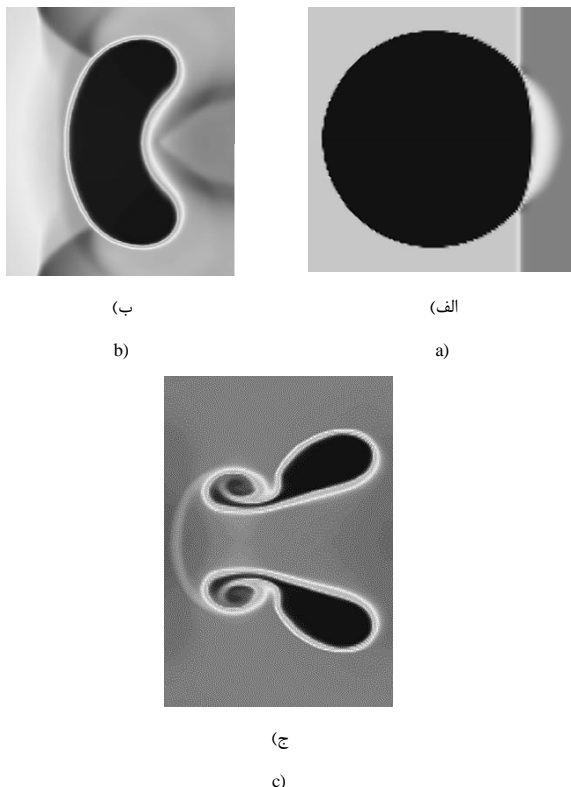


Fig. 24 Schlieren of bubble in times a- 20 μ s, b- 223 μ s, c- 600 μ s after shock collide the bubble (present study).

شکل 24 شکل حباب در زمان‌های الف- 20 میکروثانیه، ب- 223 میکروثانیه، ج- 600 میکروثانیه پس از برخورد با شاک (مطالعه حاضر)

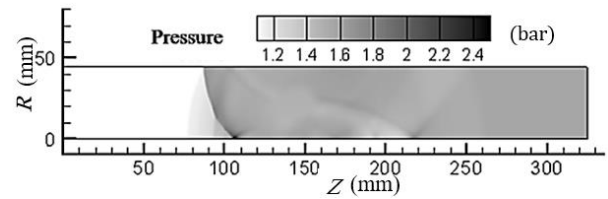


Fig. 20 Contour of Pressure at $t=350 \mu$ s-Cylindrical coordinate

شکل 20 کانتور فشار در $t=350 \mu$ s مختصات استوانه‌ای



Fig. 21 Contour of density in $t=427 \mu$ s – Cartesian coordinate (present work)

شکل 21 کانتور چگالی در $t=427 \mu$ s مختصات کارتزین (مطالعه کنونی)

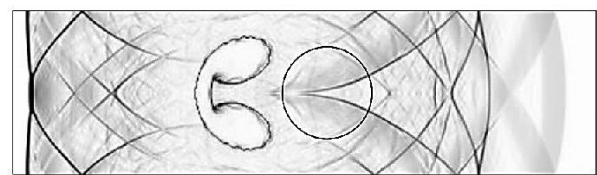


Fig. 22 Contour of Density in $t=427 \mu$ s – Cartesian coordinate [5]

شکل 22 کانتور چگالی در $t=427 \mu$ s مختصات کارتزین نتایج مرجع [5]

نتایج مطالعه حاضر دو بعدی است. برای مقایسه باید نتایج دوبعدی حاضر نسبت به محور تقارن (محور z) دوران داده شود تا بتوان نتایج را با هم مقایسه کرد. مقایسه شکل‌های 23 و 24 حاکی از تطابق قابل قبول شکل حباب با نتایج ارائه شده توسط هاس و همکاران [25] بود.

7- نتیجه‌گیری

پیچیدگی‌های الگوریتم‌های عددی از جمله مشکلات پیشروی در شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر چند ماده معرفی شده است که در صورت توسعه این الگوریتم‌ها به ابعاد بالاتر (دو یا سه بعد) بر پیچیدگی‌های آن‌ها افزوده می‌شود. در کار حاضر از یک الگوریتم بسیار ساده اصلاح شار در سطوح مشترک (روش کارنی و آبگرا) برای نیل به این منظور استفاده شد. این الگوریتم یک روش بسیار ساده با قابلیت توسعه بسیار آسان به ابعاد دوم و سوم است. در مطالعه کنونی از روش لول‌ست برای تعقیب سطوح مشترک استفاده و سپس الگوریتم تصحیح شار مورد نظر از حالت یک بعدی به دو بعدی توسعه داده شد. کد توسعه داده شده برای شبیه‌سازی جریان چند ماده‌ای هیچ‌گونه نوسان غیرفیزیکی در مرز بین دو ماده در حالت یک و یا دو بعدی تولید نمی‌کند و نتایج حاصل از تطابق بسیار خوبی با نتایج محققین دیگر برخوردار بود. به دلیل سادگی توسعه این روش به سادگی می‌توان از آن در شبیه‌سازی‌های سه‌بعدی غیرواکنشی و جریان‌های احتراقی نیز بهره جست. هدف نهایی از کار حاضر نیز استفاده از این الگوریتم در شبیه‌سازی عددی جریان‌های احتراقی است.

8- تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله تشکر و قدردانی خود را از پرفسور اسمندر کارنی استاد ریاضی دانشگاه میشیگان ان‌اربر جهت یاری بی‌دریغ در این پژوهش علمی ابراز می‌دارند.

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L u_L} + \sqrt{\rho_R u_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (11 \text{ a})$$

$$\tilde{a} = \left[(\gamma - 1) \left(\tilde{H} - \frac{1}{2} \tilde{u}^2 \right) \right]^{1/2} \quad (12 \text{ a})$$

در آن آنتالپی $H = ((E + p)) / \rho$ به صورت (13 a) تقریب زده می‌شود.

$$\tilde{H} = \frac{\sqrt{\rho_L H_L} + \sqrt{\rho_R H_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (13 \text{ a})$$

گام سوم: زمان محاسبه شارهای HLLC به کمک رابطه (a14) است.

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{\text{hllc}} = \begin{cases} F_L & \text{اگر } 0 \leq S_L \\ F_{*L} & \text{اگر } S_L \leq 0 \leq S_* \\ F_{*R} & \text{اگر } S_* \leq 0 \leq S_R \\ F_R & \text{اگر } 0 \geq S_R \end{cases} \quad (a14)$$

شار در ناحیه ستاره (15 a) محاسبه می‌شود.

$$F_{*K} = F_K + S_K (U_{*K} - U_K) \quad (15 \text{ a})$$

در آن U_{*K} به صورت (16 a) محاسبه می‌شود.

$$U_{*K} = \rho_K \left(\frac{S_K - u_K}{S_K - S_*} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ S_* \\ v_K \\ \frac{E_K}{\rho_K} + (S_* - u_K) \left[S_* + \frac{P_K}{\rho_K (S_K - u_K)} \right] \end{bmatrix} \quad (16 \text{ a})$$

10- پیوست ب- روش ENO

برای بالا بردن دقت تقریب معادلات مرتبه اول می‌توان از تقریب‌های دقیق‌تری مانند ENO³ [20] برای ψ_x^+ و ψ_x^- به کار برد. در ابتدا برای تشکیل چند جمله‌ای‌های نیوتن، تفاضل⁴ های صفرم، اول و دوم به صورت زیر محاسبه می‌شوند. برای نقطه نام، تفاضل صفرم به صورت (1 b) تعریف می‌شود.

$$D_i^0 \psi = \psi_i \quad (1 \text{ b})$$

تفاضل اول در وسط نقاط شبکه به شکل (2 b) تعریف می‌شود.

$$D_{i+\frac{1}{2}}^1 \psi = \frac{D_{i+1}^0 \psi - D_i^0 \psi}{\Delta x} \quad (2 \text{ b})$$

تفاضل دوم برای نقاط شبکه به شکل (3 b) محاسبه می‌شود.

$$D_i^2 \psi = \frac{D_{i+\frac{1}{2}}^1 \psi - D_{i-\frac{1}{2}}^1 \psi}{2\Delta x} \quad (3 \text{ b})$$

تفاضل‌های نیوتن که در بالا تعریف شدند برای تشکیل یک چند جمله‌ای مرتبه دوم رابطه (4 b) مورد استفاده قرار می‌گیرند.

$$\psi(x) = Q_0(x) + Q_1(x) + Q_2(x) \quad (4 \text{ b})$$

مشقات تابع در حل معادله لولست مورد نیاز است و از معادله (2 b) در نقطه $x = x_i$ مشتق گرفته می‌شود.

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_x = \hat{Q}_1(x_i) + \hat{Q}_2(x_i) \quad (5 \text{ b})$$

مقادیر $\hat{Q}_l(x)$ و مشتق آن با استفاده از چند جمله‌ای‌های نیوتن به صورت (7 b, 6) درمی‌آیند.

$$Q_1(x) = \left[D_{k+\frac{1}{2}}^1 \psi \right] (x - x_i) \quad (6 \text{ b})$$

$$\hat{Q}_1(x) = D_{k+\frac{1}{2}}^1 \psi \quad (7 \text{ b})$$

در تمام روابط برای محاسبه ψ_x^- مقدار $k = i-1$ و برای محاسبه ψ_x^+ مقدار $k = i$ قرار داده می‌شود. $\hat{Q}_1(x_i)$ در واقع همان تقریب بالادستی مرتبه یک است. برای رسیدن به دقت مرتبه دوم علاوه بر $\hat{Q}_1(x_i)$ ، باید مقدار $\hat{Q}_2(x_i)$ نیز محاسبه شود. با توجه به این که تفاضل‌های نیوتن در شکل (1 b) نشان داده

9- پیوست الف- نحوه محاسبه شار در روش HLLC

در روش HLLC محاسبه شار به‌طور خلاصه به صورت شکل الف-1 صورت می‌گیرد [17].

گام اول: ابتدا فشار در منطقه ستاره به کمک روابط الف-1 تا الف-2 محاسبه می‌شود.

$$P_* = \max(0, P_{\text{pvrs}}) \quad (1 \text{ a})$$

$$P_{\text{pvrs}} = \frac{1}{2} (P_L + P_R) - \frac{1}{2} (u_R + u_L) \bar{\rho} \bar{a} \quad (2 \text{ a})$$

$$\bar{a} = \frac{1}{2} (a_R + a_L) \quad (3 \text{ a})$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2} (\rho_R + \rho_L) \quad (4 \text{ a})$$

گام دوم: سرعت امواج چپ رو S_L و راست رو S_R با استفاده از روابط (a5, a6) محاسبه می‌شوند.

$$S_L = u_L - a_L q_L, S_R = u_R + a_R q_R \quad (5 \text{ a})$$

$$q_k = \begin{cases} 1 & \text{اگر } P_* \leq P_k \\ \left[1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left(\frac{P_*}{P_k} - 1 \right) \right] & \text{اگر } P_* > P_k \end{cases} \quad (6 \text{ a})$$

که در این حالت برای محاسبه S_* می‌توان رابطه (7 a) را به کار برد.

$$S_* = \frac{P_R - P_L + \rho_L u_L (S_L - u_L) - \rho_R u_R (S_R - u_R)}{\rho_L (S_L - u_L) - \rho_R (S_R - u_R)} \quad (7 \text{ a})$$

کاربرد گام اول و دوم جهت تخمین سرعت براساس فشار است که به جای آن می‌توان از روش‌های مستقیم تخمین سرعت که توسط دیوس¹ و یا روش² معرفی شده‌اند استفاده کرد که برای حل جریان در حالت چند ماده‌ای مناسب‌تر است.

در روش دیوس سرعت چپ‌رو و راست‌رو دو به صورت ساده (a8, a9) محاسبه می‌شوند.

$$S_L = u_L - a_L, S_R = u_R + a_R \quad (8 \text{ a})$$

و یا

$$S_L = \min(u_L - a_L, u_R - a_R), S_R = \max(u_L + a_L, u_R + a_R) \quad (9 \text{ a})$$

روش پیشرو را برای محاسبه سرعت چپ‌رو و راست‌رو به صورت (10 a) پیشنهاد کرد.

$$S_L = \tilde{u} - \tilde{a}, S_R = \tilde{u} + \tilde{a} \quad (10 \text{ a})$$

در آن سرعت ذره و صوت به صورت (a11, a12) محاسبه می‌شود.

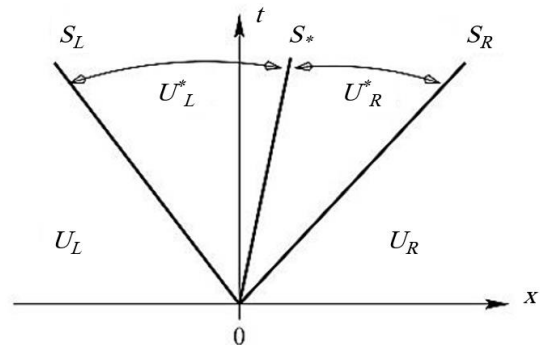


Fig. a-1 HLLC approximate Riemann solver, Solution in the Star Region consists of two constant states separated from each other by a middle wave of speed S_*

شکل الف-1 طرح‌واره حلگر HLLC، در این روش منطقه ستاره شامل دو منطقه با حالت ثابت است که توسط موج میانی که با سرعت S_* در حال حرکت است از هم جدا شده‌اند [17].

³ Essentially nonoscillatory

⁴ Divided difference

¹ Davis

² Roe

,1999.

[6] F. Gibou, R. Fedkiw, L. T. Cheng, M. Kang, A second-order-accurate symmetric discretization of the Poisson equation on irregular domains, *Computational Physics*, Vol. 176, pp. 205–227, 2002.

[7] F. Gibou, R. Fedkiw, A fourth order accurate discretization for the Laplace and heat equations on arbitrary domains, with applications to the Stefan problem *Computational Physic*, Vol. 202, pp. 577–601, 2005.

[8] P. Gomez, J. Hernandez, J. Lopez, On the reinitialization procedure in a narrow-band locally refined level set method for interfacial flows, *Numerical Methods Engineering*, Vol. 63, No. 10, pp.1478–1512, 2005.

[9] C. Min, F. Gibou, A second order accurate level set method on non-graded adaptive Cartesian grids, *Journal of Computational Physic*, Vol. 225, No. 1, pp. 300–21, 2007.

[10] S. Shin, D. Juric, Modeling three-dimensional multiphase flow using a level contour reconstruction method for front tracking without connectivity, *Computational Physics*, Vol. 180, No. 2, pp. 427–470, 2002.

[11] S. Shin, D. Juric, A hybrid interface method for three-dimensional multiphase flows based on front tracking and level set techniques, *Numerical Methods Fluids*, Vol. 60, No. 7, pp. 753–778, 2009.

[12] V. H. Gada, A. Sharma, On novel dual-grid level-set method for two-phase flow simulation, *Computation and Methodology*, Vol. 59, pp. 26–57, 2011.

[13] P. Zaspel, M. Griebel, Solving incompressible two-phase flows on multi-GPU clusters, *Computational Fluids*, Vol. 80, pp. 356–64, 2013.

[14] L. Zhao, X. Bai, T. Li, J. J. R. Williams, Improved conservative level set method. *Numerical Methods in Fluids*, Vol. 75, pp. 575–590, 2014.

[15] M. R. Ansari¹, A. Daramizadeh, Numerical simulation of droplet breakup by shock wave collision, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 1, pp. 41-49, 2012. (in Persian)

[16] A.H. Daramizadeh, M.R. Ansari, Extension of MUSCL-Hancock method for 2D five equation two-fluid model for simulation of gas-liquid two-phase flow, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 11, pp. 137-150, 2014. (in Persian)

[17] E. F. Toro, *Riemann solver and numerical method for fluid dynamics*, pp. 293-542, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 2009.

[18] R. J. Leveque, *Finite volume methods for hyperbolic problems*, pp. 421-485, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[19] C. Hirsh, *Numerical computation of internal and external flows*, pp. 337-539, Wiley Press: Newyork, 2007.

[20] S. Osher, R. P. Fedkiw, *Level set methods and dynamic implicit surfaces*, pp.55-188, Springer-Verlag, New York, 2002.

[21] S. Osher, Fronts Propagating with curvature dependent speed, *Computational Physics*, Vol. 79, pp. 38, 1988.

[22] D. Hartmann, W. Schroder, Differential equation based constrained reinitialization for level set methods, *Computational Physics*, Vol. 227, pp. 6821–6845, 2008.

[23] G. Tian, *Level Set Methods and Sloshing Problems*, pp. 14-55, Saint Mary's University Press, Halifax, Nova Scotia, 2005.

[24] J. A. Sethian, *Level Set Methods and Fast Marching Methods*, 2nd Edition, pp. 15-75, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999.

[25] J. F. Haas , B. Sturtevant, Interaction of weak-shock waves, *Fluid Mechanics*, Vol. 181, pp. 41–76, 1987.

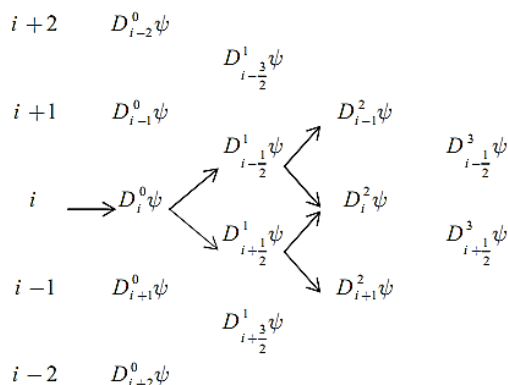


Fig. b- 1 Calculation of Newton interpolation

شکل ب- 1 نحوه درون‌یابی نیوتن

شده، $D_{k+1/2}^1 \psi$ تنها انتخاب برای رسیدن به دقت مرتبه اول است، ولی دو انتخاب ($D_k^2 \psi$ یا $D_{k+1}^2 \psi$) برای رسیدن به دقت مرتبه دوم وجود خواهد داشت.

نکته کلیدی در انتخاب بین $D_k^2 \psi$ و $D_{k+1}^2 \psi$ ، تقریب کردن در جهتی است که مقدار ψ به آرامی تغییر کند و شیب تغییرات آن هموار¹ باشد. به عبارت دیگر در روش ENO سعی بر این است که از میان‌یابی در جهاتی که شیب تغییرات در آن‌ها زیاد است اجتناب شود. با توجه به مطالب گفته‌شده با مقایسه $|D_k^2 \psi|$ و $|D_{k+1}^2 \psi|$ اگر $|D_{k+1}^2 \psi| \leq |D_k^2 \psi|$ باشد، آن‌گاه $c = D_{k+1}^2 \psi$ می‌شود و اگر $|D_k^2 \psi| > |D_{k+1}^2 \psi|$ باشد، $c = D_k^2 \psi$ خواهد شد. اکنون $Q_2(x)$ به صورت (8 b) تعریف می‌شود.

$$Q_2(x) = c(x - x_k)(x - x_{k+1}) \quad (8 b)$$

بنابراین (9 b) به صورت زیر است.

$$\hat{Q}_2(x_i) = c(2(i - k) - 1)\Delta x \quad (9 b)$$

پس از به‌دست‌آوردن $\hat{Q}_2(x_i)$ و جای‌گذاری آن در رابطه (9 b) دقت مرتبه دوم برای محاسبه $\partial \psi / \partial x$ به‌دست می‌آید [20-23].

11- مراجع

[1] R. Abgrall, S. Karni, Computation of compressible multifluid, *Computational Physics*, Vol. 169, pp. 594–623, 2001.

[2] W. F. Noh, P. R. Woodward, Simple line interface calculation, *Lecture Notes in Physics*, Springer-Verlag, Berlin/New York, Vol. 59, pp. 330–339, 1976.

[3] S. Karni, Multi-component flow calculations by a consistent primitive algorithm, *Computational Physics*, Vol. 31, pp. 112, 1994.

[4] P. Jenny, B. Mueller, H. Thomann, Correction of conservative euler solvers for gas mixtures, *Computational Physics*, Vol. 91, pp. 132, 1997.

[5] R. P. Fedkiw, T. Aslam, B. Merriman, S. Osher, A non-oscillatory eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method), *Computational Physics*, Vol. 152, pp. 457–492

¹ Smooth