مجله مهندسی مکانیک مدرس، شهریور 1396، دوره 17، شماره 6، ص‌ص 377-384

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بهینه‌سازی روش مکمل متعامد طبیعی جداشده با استفاده از مفاهیم فنر مجازی

علی رئوفیان[1]، افشین تقوایی‌پور[2]، علی کمالی‌ایگلی[2*]

1- دانشجوی کارشناسی‌ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

* تهران، صندوق پستی 15875-4413، alikamalie@aut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 11 دی 1395

پذیرش: 11 خرداد 1396

ارائه در سایت: 08 تیر 1396

کلید واژگان:

دینامیک مستقیم

ربات‌های موازی

فنر مجازی

روش مکمل متعامد طبیعی جداشده

چکیده

در پژوهش پیش‌رو به معرفی روشی بهینه‌شده در تحلیل دینامیک مستقیم ربات‌های موازی سریع پرداخته شده است. بدین منظور با الهام‌گیری از روش فنر مجازی لاگرانژ، روش نیوتنی مکمل متعامد طبیعی جداشده، اصلاح شده است. پیشتر در خصوص روش‌های انرژی از مفاهیم فنرهای مجازی استفاده شده است. استفاده از روش فنر مجازی در روش نیوتونی مکمل متعامد طبیعی جداشده شیوه‌ای جدید که در این پژوهش معرفی شده است. به منظور شفاف‌سازی روش اصلاح شده و مقایسه ابعاد مختلف آن‌ها از یک مکانیزم صفحه‌ای 3RRR به عنوان مدل مرجع استفاده شده است. با توجه به نتایج به‌دست آمده فرایند استخراج معادلات در روش دینامیکی جدید بسیار کم هزینه‌تر است. این در حالی است که دقت این روش مشابه روش فنر مجازی لاگرانژ و همچنین بر خلاف روش‌های انرژی قادر به محاسبه عکس‌العمل‌های قیدی نیز است. از سویی دیگر روش اصلاح شده نسبت به روش مکمل متعامد طبیعی جدا شده زمان حل بیشتری دارد و برای محاسبات ریل تایم[1] مناسب به نظر نمی‌رسد. قیود سیستم در سیستم‌های حلقه بسته باید به گونه‌ای تعریف شده باشد که بیانگر تغییرات طولی فنرهای مجازی باشد، در غیر این صورت روش پیشنهادی پاسخ صحیح به‌دست نمی‌دهد.

A Modification in the Decoupled Natural Orthogonal Complement Method, Using Virtual Spring Concepts

Ali Raoofian[1], Afshin Taghvaeipour[1], Ali Kamali Eigoli[1*]

1- Department of Mechanical Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran.
* P.O.B. 15875-4413 Tehran, Iran, alikamalie@aut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 17 January 2016
Accepted 09 June 2016
Available Online 29 June 2017

Keywords:
Forward dynamics
Parallel robots
Virtual spring
Decoupled natural orthogonal complement method

ABSTRACT

In this study, a modified method has been introduced for forward dynamic analysis of fast parallel robots. For this purpose, inspired by the Lagrange-Virtual Spring (LVS) method, the Decoupled Natural Orthogonal Complement (DeNOC) method is modified which is a Newtonian based method. So far, virtual springs have already been used in energy based methods. However, using the virtual springs in DeNOC method is a novel approach which is proposed in current study. In order to clarify the advantages of Modified Decoupled Natural Orthogonal Complement (MDeNOC) method, a planar 3RRR mechanism is chosen as case study. According to the results, the process of deriving the equations of motion is much less costly while the accuracy of MDeNOC is similar to the LVS and unlike the energy methods; the modified method is also able to calculate the constraint reactions, as well. On the other hand, the calculation time of MDeNOC is much more than the DeNOC and hence, is not suitable for real time calculations. Also, in closed loop systems, constraints must be defined in such a way that expresses the virtual springs' longitudinal changes; otherwise, MDeNOC will not give proper results.

1- مقدمه

استفاده از ربات‌های موازی که به نوعی مکانیزم‌های حلقه بسته هستند، در سال‌های اخیر افزایش چشمگیری داشته است. دلیل این امر را می‌توان در موارد گوناگون استفاده از این دست ربات‌ها در صنایع جستجو کرد. به دلیل سرعت و شتاب بالای ربات‌های موازی بسیاری از صنایع در بخش‌های بسته‌بندی و گردآوری نیاز جدی به این‌گونه ربات‌ها احساس می‌کنند. مکانیزم‌های حلقه باز مانند ربات‌های سری به دلیل استفاده از موتور و عملگر[2] در مفصل‌ها دارای جرم و اینرسی بالایی هستند و قادر به تولید سرعت و شتاب بالا نیستند. این در حالی است که موتورها و عملگرهای ربات‌های موازی در پایه ثابت شده و نیازی به استفاده از بازوهای مستحکم و با جرم زیاد در طراحی آن‌ها نیست. اگرچه ربات‌های موازی سبک، سریع و پرشتاب هستند، اما به دلیل وجود قیود سینماتیکی در آن‌ها محاسبات سینماتیکی و دینامیکی آن‌ها با چالش‌های جدی‌تری روبه‌رو است و در بسیاری از موارد استخراج فرم بسته برای حل معادلات یادشده تقریباً غیرممکن است.

روش‌های گوناگونی جهت استخراج معادلات دینامیکی وجود دارد. از این قبیل می‌توان به روش‌های بر پایه انرژی مانند لاگرانژ، اصل همیلتون، اصل

[1] Real time
[2] Actuator

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

A. Raoofian, A. Taghvaeipour, A. Kamali Eigoli, A Modification in the Decoupled Natural Orthogonal Complement Method, Using Virtual Spring Concepts, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 6, pp. 377-384, 2017 (in Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-09-21]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.20.0]

کار مجازی و روش‌های برداری نظیر نیوتن- اویلر و روش مکمل متعامد طبیعی اشاره کرد [2,1]. از آن‌جا که معادلات دینامیک استخراج شده از روش‌های گفته‌شده غیرخطی و کوپل هستند، حل تحلیلی این دست از معادلات غیرممکن به نظر می‌رسد. برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی کوپل از روش‌های عددی مختلفی استفاده می‌گردد. متغیرهای موجود در معادلات در تحلیل ربات‌های موازی به دلیل وجود قیود سینماتیکی حلقه بسته مستقل نیستند و پاسخ‌های به‌دست‌آمده باید معادلات قیدی را علاوه‌بر معادلات دیفرانسیل ارضا کند. در نتیجه روش‌های مختلفی از سوی محققان برای حل این گونه معادلات پیشنهاد شده است. معادلات دینامیکی به‌دست‌آمده از این روش‌ها از نظر تئوری یکسان است، ولی از لحاظ هزینه محاسباتی تفاوت دارند [4,3].

روش نیوتن- اویلر شناخته‌شده‌ترین روش تحلیل و بررسی سیستم‌های دینامیکی است. برای نمونه یزدانی و همکاران وی در [5] به تحلیل دینامیک ربات‌های موازی با استفاده از روش نیوتن- اویلر پرداخته‌اند. سالاریه نیز با استفاده از روش یادشده دینامیک یک ربات اسکلت خارجی را تحلیل کرده است [6]. استفاده از این روش منجر به محاسبه تمامی عکس‌العمل‌های قیدی می‌شود که ممکن است لزوماً نیازی به آن‌ها نباشد؛ بنابراین نیازمند صرف زمان مازاد جهت محاسبات نیروها و گشتاورهای مقاوم است. تاکنون محققان بسیاری درپی معرفی روش‌هایی بودند تا بدون نیاز به محاسبه عکس‌العمل‌های قیدی از روش نیوتن- اویلر جهت استخراج معادلات دینامیکی بهره جویند. اساس این روش‌ها بر پایه استفاده از ماتریس تبدیل سرعت[1] است. ستون‌های ماتریس یادشده فضای پوچ[2] ماتریس قیود سرعتی[3] را تشکیل می‌دهند و می‌توان با ضرب ماتریس تبدیل سرعت در ماتریس قیود سرعتی این ترم‌ها را از دسته معادلات حذف کرد. ماتریس تبدیل سرعت رابطی میان بردار سرعت مرکز جرم هر لینک (خطی و دورانی) با بردار سرعت‌های مفصلی[4] است [7]. پس از آن انجلس و لی[5] مکمل متعامدی را از قیود سرعتی استخراج کردند که منتهی به روش «مکمل متعامد طبیعی» شد [8]. در مراجع [10,9] ساها[6] ماتریس تبدیل سرعت را برای ربات‌های سری به دو ماتریس جداگانه تجزیه و روش خود را «مکمل متعامد طبیعی جداشده» نام‌گذاری کرد. روش یادشده علاوه‌بر بازگشتی[7] بودن دارای مرتبه حداقلی[8] نیز هست. هیچ یک از روش‌های دیگری که تا پیش از این روش ارائه شده بودند دو ویژگی گفته‌شده را با هم نداشت. ماتریس اینرسی موجود در معادلات حرکت با تجزیه‌شدن ماتریس تبدیل سرعت به صورت تحلیلی تجزیه و در نتیجه آن الگوریتم‌هایی برای محاسبه دینامیک مستقیم سیستم‌ها به صورت بازگشتی ارائه شد [11]. در سال 2001 میلادی ساها و شیلن[9] با اعمال تصحیحاتی در روش مکمل متعامد طبیعی جداشده توانستند این روش را برای ربات‌های موازی نیز به‌کار ببرند [12]. پس از آن خان[10] با استفاده روش یادشده به تحلیل دینامیکی یک ربات صفحه‌ای موازی 3RRR پرداخت [4]. دیمیتروو[11] نیز با استفاده از همین روش به تحلیل ربات‌های فضایی پرداخت [13]. رائو و همکاران وی نیز با به‌کارگیری فرایندی مشابه مدل دینامیکی را برای دسته خاصی از ربات‌های موازی به نام هگزااسلاید[12] ارائه کردند [14].

روش فنر مجازی نخستین بار توسط ونگ[13] و همکاران جهت مدل‌سازی دینامیکی سیستم‌های دارای حلقه بسته معرفی شد [15]. این روش جهت ساده‌سازی فرایند به‌دست آوردن معادلات حرکت سیستم‌ها پیشنهاد شد. از فنر و دمپرهای مجازی برای تحلیل ربات‌های سری دارای لینک و مفصل‌های انعطاف‌پذیر نیز استفاده شده است تا انعطاف‌پذیری آن‌ها را به صورت جدا[14] مدل کنند. منطق به‌کار گرفته‌شده در این روش باز کردن زنجیرهای سینماتیکی سیستم و اتصال آن‌ها با فنرهایی با ضریب کشسانی بسیار زیاد است. در نتیجه دوباره حلقه بسته سینماتیکی سیستم به وجود می‌آید. با استفاده از این روش وابستگی متغیرها و مختصه‌های تعمیم‌یافته سیستم به هم از بین می‌رود و به جای آن ترم انرژی پتانسیل کشسانی در معادلات لاگرانژ ظاهر می‌شود. معادلات به‌دست‌آمده جبری نیستند و فرایند استخراج معادلات نیازمند صرف زمان کمتری است، چرا که نیازی به استخراج روابط قیدی موجود در سیستم نیست. سادگی موجود در این روش سبب استفاده گسترده آن در دهه اخیر شد. ونگ و همکاران روش فنر مجازی را بر یک مکانیزم چهار میله‌ای صفحه‌ای اعمال کردند و تأثیر مقادیر مختلف ضریب کشسانی فنر به‌کار رفته را مورد بررسی قرار دادند [15]. خان در [17,16] روش فنر مجازی، تثبیت قیود[15] و ضرایب لاگرانژ (با استفاده از روش حذف ضرایب) را برای یک مکانیزم چهارمیله‌ای صفحه‌ای با یکدیگر مقایسه کرده است.

در پژوهش پیش‌رو نخست روش مکمل متعامد طبیعی جداشده (م.م.ط.ج) معرفی و تبیین می‌شود، سپس با الهام از رابطه تحلیلی میان روش ضرایب لاگرانژ و ف.م.ل. به معرفی روش مکمل متعامد طبیعی جداشده اصلاح‌شده (م.م.ط.ج.ا) پرداخته خواهد شد. کاربرد فنر مجازی در روش نیوتونی م.م.ط.ج. شیوه‌ای جدید از محاسبه دینامیک سیستم‌های مقید است که در تحقیق پیش‌رو بررسی خواهد شد. از مزیت‌های روش م.م.ط.ج.ا. می‌توان به هزینه محاسباتی کمتر استخراج معادلات نسبت به م.م.ط.ج. و دقت محاسبات مشابه ف.م.ل. اشاره کرد. با استفاده از م.م.ط.ج.ا. قابلیت محاسبه عکس‌العمل‌های قیدی موجود در مسئله نیز وجود دارد. این در حالی است که روش ف.م.ل. از چنین ویژگی برخوردار نیست. سپس نشان داده خواهد شد قیود سیستم و نحوه بیان آن‌ها نیز نقشی اساسی ایفا می‌کنند و روش جدید ارائه‌شده تنها هنگامی به درستی عمل می‌کند که قیود تعریف‌شده دارای مفهوم فیزیکی باشند. در انتها روش‌های م.م.ط.ج. و م.م.ط.ج. اصلاح شده بر یک ربات صفحه‌ای 3RRR اعمال خواهند شد و دقت روش جدید ارائه‌شده و تأثیر نحوه تعریف قیود سیستم مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

2- روش مکمل متعامد طبیعی جداشده اصلاح‌شده

روابط پیش‌رو براساس تئوری پیچه[16] نوشته شده‌اند. براساس این تئوری بردارهای پیچه[17] و رنچ[18] به صورت رابطه (1) بیان می‌شوند.

$$t_i = \begin{bmatrix} \omega_i \\ v_i \end{bmatrix} ; \qquad w_i = \begin{bmatrix} n_i \\ f_i \end{bmatrix} \tag{1}$$

[1] Velocity Transformation Matrix
[2] Null Space
[3] Velocity Constraint Matrix
[4] Joint Velocity Vector
[5] Angeles and Lee
[6] Saha
[7] Recursive
[8] Minimal Order
[9] Schiehlen
[10] Khan
[11] Dimitrov
[12] Hexaslide
[13] Wang
[14] Lump
[15] Stabilization Method
[16] Screw Theory
[17] Twist Vector
[18] Wrench Vector

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-09-21]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.20.0]

در آن، ω_i و v_i به ترتیب بردار سه بعدی سرعت زاویه‌ای و بردار سه بعدی سرعت خطی مرکز جرم لینک i هستند. n_i و f_i نیز به ترتیب بردار سه بعدی ممان و نیروهای وارد بر لینک i هستند.

در روش م.م.ط.ج.ا. برای استخراج معادلات حرکت سیستم‌های دینامیکی حلقه بسته از یک الگوی دو مرحله‌ای استفاده می‌شود که مشابه روش فنر مجازی لاگرانژ است. در مرحله نخست ابتدا حلقه‌های بسته سیستم باز و پس از آن معادلات نیوتن- اویلر برای هر شاخه به صورت جداگانه نوشته می‌شود. شاخه‌های جداشده توسط فنرهای مجازی دوباره به یکدیگر متصل می‌شوند. با افزایش ضریب سختی فنرها قیودی که سبب بسته بودن حلقه‌هاست دوباره برقرار می‌شود. فرایند گفته‌شده را می‌توان به صورت شماتیک در شکل 1 مشاهده کرد.

در یک سیستم چند جسمی حلقه بسته متشکل از j حلقه باز، معادلات نیوتن- اویلر حلقه باز i-ام را می‌توان به صورت رابطه (2) نشان داد [18].

$$M^i\dot{t}^i = -\dot{M}^i t^i + w^{A^i} + w^{G^i} + w^{C^i} + w^{cs^i} \tag{2}$$

با فرض این‌که در هر حلقه باز، k میله[1] صلب وجود داشته باشد، متغیرهای موجود در رابطه (2) به صورت زیر است.

$M^i \equiv$ ماتریس جرم با ابعاد $6k \times 6k$

$t^i \equiv [t_1^T \ \ldots \ t_k^T]^T$، بردار $6k$ بعدی پیچه

$w^{C^i} \equiv$ بردار $6k$ بعدی رنچ‌های قیود مفصلی[2]

$w^{cs^i} \equiv$ بردار $6k$ بعدی رنچ‌های فنرهای مجازی موجود در سیستم

$w^{A^i} \equiv$ بردار $6k$ بعدی رنچ‌های عملگرها[3]

$w^{G^i} \equiv$ بردار $6k$ بعدی سایر رنچ‌های موجود در مسئله (از قبیل جاذبه زمین و ...)

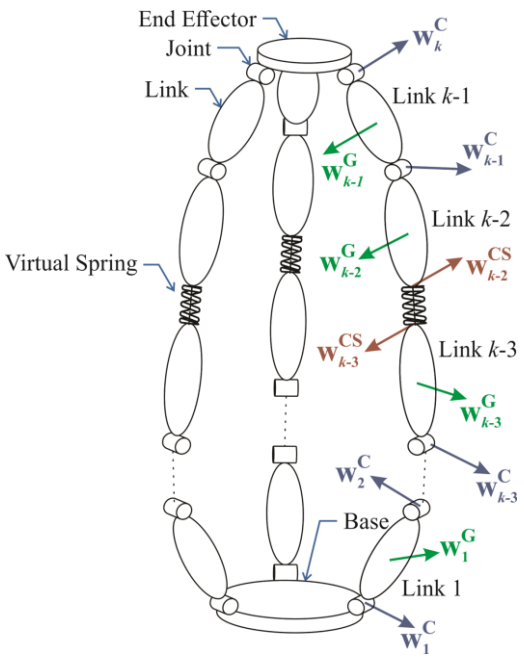

Fig. 1 Incorporating virtual springs in modified decoupled natural orthogonal complement method and the corresponding wrenches of one chain with k links

شکل 1 به‌کارگیری فنرهای مجازی در روش مکمل متعامد طبیعی جداشده و رنچ‌های معادل وارد بر یک شاخه متشکل از k میله صلب

[1] Link
[2] Joint Constraints
[3] Actuators

فرم سرعتی قیود سیستم در یک سیستم حلقه بسته متشکل از j حلقه باز را میتوان به صورت همگن خطی[4] رابطه (3) نشان داد [18].

$$\dot{c} = Kt = 0\,; \qquad t = [t^{1^T} \ \ldots \ t^{j^T}]^T \tag{3}$$

در آن، K و t به ترتیب ماتریس ژاکوبین قیود و بردار پیچه کلی سیستم است [17].

بردار پیچه هر شاخه را می‌توان با استفاده از ماتریس مکمل متعامد طبیعی T^i برحسب متغیرهای مفصلی همان شاخه نوشت. رابطه متغیرهای مفصلی که همان مختصات تعمیم‌یافته سیستم نیز هستند را با بردار پیچه کلی هر شاخه می‌توان به صورت رابطه (4) نوشت.

$$t^i = T^i\dot{q}^i; \qquad t^i = [t_1^{i^T} \ \ldots \ t_k^{i^T}]^T \tag{4}$$

در رابطه (4)، $\dot{q}$ بردار سرعت تعمیم‌یافته سیستم است. با جای‌گذاری رابطه (4) در رابطه (3) می‌وان فرم سرعتی قیود سیستم را به شکل رابطه (5) خلاصه کرد.

$$\dot{c} = Kt = KT\dot{q} = A\dot{q} = 0 \tag{5}$$

در رابطه (5)، $A = KT$ و به A ماتریس ژاکوبین قیود اطلاق می‌گردد. در روش م.م.ط.ج. ماتریس مکمل متعامد طبیعی به صورت رابطه (6) به دو ماتریس جداگانه تجزیه می‌شود.

$$t^i = T^i\dot{q}^i = N_l^i N_d^i \dot{q}^i \tag{6}$$

در آن $N_l^i N_d^i$ مکمل متعامد جدا شده است. N_l^i و N_d^i به ترتیب ماتریس‌های پایین مثلثی و قطری است. با مشتق‌گیری از رابطه (6) می‌توان رابطه (7) را به صورت زیر نوشت.

$$\dot{t}^i = \dot{N}_l^i N_d^i \dot{q}^i + N_l^i \dot{N}_d^i \dot{q}^i + N_l^i N_d^i \ddot{q}^i \tag{7}$$

در سیستم‌های حلقه بسته کار نیروهای مربوط به قیود هولونوم به صورت رابطه (8) صفر است.

$$\left(w^{C^i}\right)^T t^i = 0 \tag{8}$$

با جای‌گذاری رابطه (4) در رابطه (8) به صورت رابطه (9) نتیجه می‌شود.

$$\left(w^{C^i}\right)^T T^i \dot{q}^i = 0 \tag{9}$$

با توجه به این‌که متغیرهای مفصلی یک حلقه باز نسبت به یکدیگر مستقل هستند، از رابطه (9) می‌توان نتیجه گرفت $\left(w^{C^i}\right)^T T^i = 0$ یا به عبارت دیگر رابطه (10) است.

$$(T^i)^T w^{C^i} = 0 \tag{10}$$

در صورتی که بردار قیود سیستم به گونه‌ای تعریف شده باشد که بیانگر تغییرات طولی فنرهای مجازی باشد، بردار نیروهای اعمالی توسط فنرها برابر است با $f_s = K_s c$ که K_s ماتریس قطری ضرایب سختی فنرهای مجازی سیستم است. در شرایط ایده‌آل باید $c = 0$ باشد. با توجه به آن‌که عناصر بردار f_s کراندار هستند، جهت برقراری $c = 0$، باید عناصر ماتریس K_s به بی‌نهایت میل کنند. در شرایطی که مقادیر عناصر K_s بسیار بزرگ هستند، فنرهای به‌کار رفته چون مفصل‌های سیستم حلقه بسته عمل می‌کنند و کار رنچ‌های اعمالی توسط فنرها w^{cs}، مانند رنچ‌های قیدی صفر است. کار این رنچ‌ها بر بردار پیچه کلی t برای هر حرکت دلخواه به صورت رابطه (11) صفر است.

$$t^T w^{cs} = 0\,; \qquad w^{cs} = [w^{cs^1} \ \ldots \ w^{cs^j}]^T \tag{11}$$

با توجه به سختی زیاد فنرها رابطه (3) نیز قابل اعمال بر سیستم است. در صورتی که طرفین رابطه (3) ترانهاده شوند و سپس در بردار f_s پس ضرب شوند می‌توان به صورت رابطه (12) نوشت.

$$t^T K^T K_s c = 0 \tag{12}$$

با مقایسه روابط (12,11) رابطه (13) نتیجه می‌شود.

$$w^{cs} = K^T K_s c \tag{13}$$

[4] Linear Homogeneous Form

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-09-21]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.20.0]

حال به پیش ضرب $(T^i)^T$ در رابطه (2) و با توجه به رابطه (10) می‌توان رابطه (14) را نوشت.

$$\left(N_d^i\right)^T\left(N_l^i\right)^T M^i \dot{t}^i = -\left(N_d^i\right)^T\left(N_l^i\right)^T \dot{M}^i t^i + \tau^{A^i} + \tau^{G^i} + (T^i)^T w^{cs^i} \quad (14)$$

در آن $\tau^{A^i} = \left(N_d^i\right)^T\left(N_l^i\right)^T w^{A^i}$ و $\tau^{G^i} = \left(N_d^i\right)^T\left(N_l^i\right)^T w^{G^i}$ است. حال با جای‌گذاری مقدار $\dot{t}^i$ از رابطه (7) در رابطه (14) و مرتب‌سازی حاصل، رابطه (15) به‌دست خواهد آمد.

$$\left(N_d^i\right)^T\left(N_l^i\right)^T[M^i N_l^i N_d^i \ddot{q}^i + \left(M^i \dot{N}_l^i N_d^i + M^i N_l^i \dot{N}_d^i + \dot{M} N_l^i N_d^i\right)\dot{q}^i] = \tau^{A^i} + \tau^{G^i} + (T^i)^T w^{cs^i} \quad (15)$$

رابطه (15) را می‌توان به حالت خلاصه به صورت رابطه (16) نوشت.

$$I^i \ddot{q}^i + C^i \dot{q}^i = \tau^{A^i} + \tau^{G^i} + (T^i)^T w^{cs^i} \quad (16)$$

که در آن رابطه (17) برقرار است.

$$I^i = \left(N_d^i\right)^T\left(N_l^i\right)^T M^i N_l^i N_d^i$$
$$C^i = \left(N_d^i\right)^T\left(N_l^i\right)^T\left(M^i \dot{N}_l^i N_d^i + M^i N_l^i \dot{N}_d^i + \dot{M} N_l^i N_d^i\right) \quad (17)$$

I^i و C^i به ترتیب ماتریس اینرسی تعمیم‌یافته[1] و ماتریس نیروهای گریز از مرکز و کوریولیس[2] نام دارند [6].

همان‌طور که پیش‌تر توضیح داده شد شاخه‌های باز شده سیستم توسط فنرهای مجازی به یکدیگر متصل می‌شوند. با توجه به این‌که نیروهای وارده از طرف هر فنر به دو شاخه متصل به آن برابر است، معادلات حرکت به‌دست‌آمده از تمامی شاخه‌ها را می‌توان به صورت رابطه (17) مرتب کرد.

$$\begin{bmatrix}[I\ddot{q} + C\dot{q}]^1 \\ \vdots \\ [I\ddot{q} + C\dot{q}]^j\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}[\tau^A + \tau^G]^1 \\ \vdots \\ [\tau^A + \tau^G]^j\end{bmatrix} = T^T w^{cs} \quad (18)$$

که درآن رابطه (18) به صورت زیر است.

$$T = \mathrm{blkdiag}(T^i)\ ;\ \ w^{cs} = [w^{cs^i} \ \ \dots \ \ w^{cs^j}]^T \quad (19)$$

در رابطه (18)، T ماتریسی است که T^i عناصر روی قطر آن را تشکیل می‌دهند و سایر عناصر آن صفر است.

با فرض به میزان کافی سخت‌بودن فنرهای موجود در سیستم حاصل جای‌گذاری رابطه (13) در رابطه (17) برابر با رابطه (19) است.

$$\begin{bmatrix}[I\ddot{q} + C\dot{q} - \tau^A - \tau^G]^1 \\ \vdots \\ [I\ddot{q} + C\dot{q} - \tau^A - \tau^G]^j\end{bmatrix} = T^T K^T K_s c = A^T K_s c \quad (20)$$

رابطه‌ای که در [17] برای روش مکمل متعامد طبیعی جداشده استخراج شده و به صورت رابطه (20) است.

$$\begin{bmatrix}[I\ddot{q} + C\dot{q} - \tau^A - \tau^G]^1 \\ \vdots \\ [I\ddot{q} + C\dot{q} - \tau^A - \tau^G]^j\end{bmatrix} = A^T \lambda \quad (21)$$

در رابطه (20)، λ بردار ضرایبی است که معادلات دینامیکی شاخه‌های سیستم را به یکدیگر مرتبط می‌کند و سبب برقراری قیود سیستم می‌شود. با مقایسه روابط (20,19) می‌توان دریافت در صورتی که در روش مکمل متعامد طبیعی جدا شده به جای متغیر λ، عبارت $K_s c$ جای‌گذاری شود، رابطه دینامیکی روش م.م.ط.ج.ا. حاصل می‌شود. ماهیت بردار قیود c نکته حائز اهمیت در این قسمت است. در فرایند استخراج معادلات دینامیکی روش م.م.ط.ج.ا. بردار قیود c بیانگر تغییرات طولی فنرهای مجازی است. در صورتی که قیود به گونه‌ای دیگر بیان شوند پاسخ به‌دست‌آمده از روش م.م.ط.ج.ا. صحیح نخواهد بود.

با توجه به این‌که روش مکمل متعامد طبیعی معرفی شده در [17] بازگشتی و حداقلی (با حداقل تعداد معادلات دیفرانسیل ممکن حل می‌شود) در هر بازه زمانی نیاز به حل سینماتیک مستقیم سیستم است. برخلاف روش م.م.ط.ج. به دلیل وجود فنر در روش م.م.ط.ج.ا. وابستگی مختصات سیستم به یکدیگر حذف می‌شود و در روش م.م.ط.ج.ا. نیازی به محاسبه سینماتیک مستقیم در هر بازه زمانی نیست. نتایج هر بازه زمانی شرایط اولیه بازه زمانی بعدی را تشکیل می‌دهند، همچنین حداقل‌سازی معادلات در روش مکمل متعامد طبیعی جداشده با استفاده از ماتریس ژاکوبین قیود و نرخ زمانی تغییرات آن صورت می‌گیرد. در روش م.م.ط.ج.ا. نیازی به محاسبه ماتریس ژاکوبین و نرخ تغییرات آن نیست. محاسبه ماتریس‌های یادشده در روش مکمل متعامد طبیعی جدا شده نیازمند صرف زمان قابل توجهی است که در روش جدید پیشنهادی حذف شده است.

3- مدل مرجع: مکانیزم صفحه‌ای 3RRR

شماتیک مکانیزم صفحه‌ای 3RRR در شکل 2 نشان داده شده است. سیستم سه درجه آزادی مورد نظر دارای سه شاخه متقارن است که هر شاخه با اندیس‌های I، II و III نشان داده می‌شود. هر سه شاخه سکوی ثابت[3] B (زمین) را به سکوی متحرک[4] P متصل می‌کنند. سکوی متحرک یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع S_P است که انتهای هر شاخه به رئوس آن لولا شده‌اند. تمامی مفصل‌های مکانیزم از نوع لولاست. مفصل‌های ثابت و محرک هر شاخه به ترتیب با O^I، O^{II} و O^{III} نشان داده شده‌اند و بر رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع بزرگ‌تر به ضلع S_B قرار گرفته‌اند. باقی مفصل‌ها غیرفعال است.

هر شاخه نیز از دو میله با طول‌های l_1 و l_2 تشکیل شده است (شکل 2). جرم و ممان اینرسی حول محور عمود بر صفحه حرکت هر لینک به ترتیب m_i و I_i، $i = 1,2$ در نظر گرفته شده است. جرم و ممان اینرسی سکوی متحرک نیز به ترتیب با m_P و I_P مشخص می‌شوند.

جهت تحلیل دینامیک مستقیم مکانیزم پیش‌رو با استفاده از روش م.م.ط.ج.ا. همان‌طور که در بخش 2 اشاره شد، نخست باید حلقه‌های بسته سیستم باز شود؛ بنابراین مانند شکل 3 ابتدا اتصال سکوی متحرک به سه شاخه باز شده و با استفاده از فنرهای مجازی دوباره شاخه‌ها به سکوی متحرک متصل شده‌اند. در حالت کنونی تمامی مختصات تعمیم‌یافته سیستم نسبت به یکدیگر مستقل و بردار مختصات تعمیم‌یافته سیستم به صورت

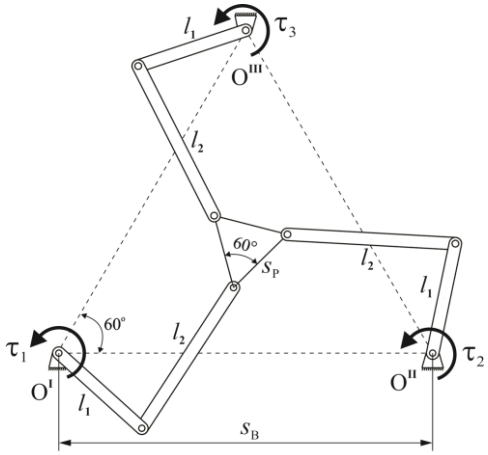

Fig. 2 The 3RRR planar mechanism

شکل 2 مکانیزم صفحه‌ای 3RRR

[1] Generalized Inertia Matrix
[2] Matrix of Centrifugal and Coriolis Forces
[3] Base
[4] Moving Platform

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-09-21]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.20.0]

رابطه (21) است.

$$q = [\theta_1^{I} \quad \theta_2^{I} \quad \theta_1^{II} \quad \theta_2^{II} \quad \theta_1^{III} \quad \theta_2^{III} \quad x \quad y \quad \theta_P]^T \tag{22}$$

در هر شاخه و برای هر میله یک بردار مکان دو بعدی d_i تعریف می‌شود که واصل محور مفصلی i-ام به مرکز جرم میله i-ام است. بردار دوبعدی r_i نیز به صورت واصل مرکز جرم میله i-ام به محور مفصلی میله $i+1$ تعریف می‌شود. بردارهای یادشده برای شاخه II در شکل 3 نشان داده شده است. مرکز جرم هر میله نیز در مرکز سطح آن فرض می‌شود. رابطه میان پیچه دو لینک متوالی را می‌توان به صورت رابطه (22) نشان داد [17].

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= B_{i+1,i} t_i + p_{i+1}\dot{\theta}_{i+1} \\ B_{i+1,i} &= \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ E(r_i + d_{i+1}) & 1 \end{bmatrix} \\ p_{i+1} &= \begin{bmatrix} 1 \\ E d_{i+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{23}$$

1 ماتریس واحد 2□2 و $0^T = [0 \quad 0]$ است. به ماتریس $B_{i+1,i}$ و P_{i+1} به ترتیب ماتریس توزیع پیچه[1]، و ماتریس مولد پیچه[2] اطلاق می‌شود [17]. در هر شاخه رابطه بین t_2^j و t_1^j براساس رابطه (22) به صورت رابطه (23) خواهد بود.

$$t_2^j = B_{21}^j t_1^j + p_2^j \dot{\theta}_2^j \quad j = I, II, III \tag{24}$$

از سویی دیگر رابطه (24) به شرح زیر است.

$$t_1^j = p_1^j \dot{\theta}_1^j \quad j = I, II, III \tag{25}$$

با توجه به روابط (24,23,6) ماتریس‌های N_l^j و N_d^j برای هر شاخه به صورت رابطه (25) خواهد بود.

$$N_l^j = \begin{bmatrix} 1_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ B_{21}^j & 1_{3\times3} \end{bmatrix} \quad N_d^j = \begin{bmatrix} p_1^j & 0_{3\times1} \\ 0_{3\times1} & p_2^j \end{bmatrix} \quad j = I, II, III \tag{26}$$

به صورت مشابه برای سکوی متحرک نیز می‌توان رابطه (26) را نوشت.

$$t_P = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{\theta}_P]^T \tag{27}$$

بنابراین رابطه (27) به شرح زیر است.

$$N_l^P = N_d^P = 1_{3\times3} \tag{28}$$

با توجه به اتصال شاخه‌ها توسط فنرهای مجازی سیستم دارای 9 مختصات تعمیم‌یافته مستقل است (رابطه (21)). از آن‌جایی که مکانیزم صفحه‌ای 3RRR دارای 3 درجه آزادی است، 6 رابطه قیدی در مسئله وجود دارد که تغییر طول‌های فنرهای مجازی در راستای افقی و عمودی است؛ بنابراین c یک بردار 1□6 بعدی است و با استفاده از رابطه (28) می‌توان ماتریس

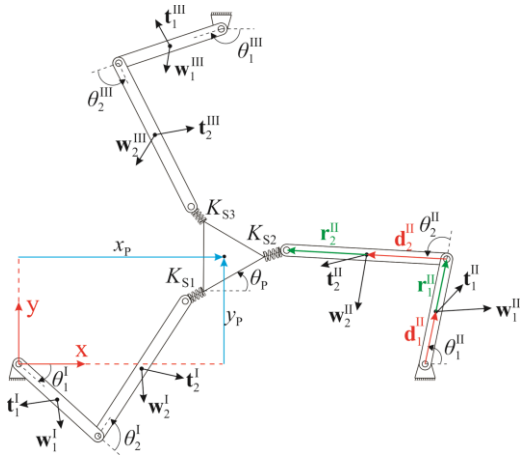

Fig. 3 Incorporating virtual springs in order to connect the cut open chains

شکل 3 به‌کارگیری فنر مجازی جهت اتصال شاخه‌های باز سیستم

[1] Twist Propagation Matrix
[2] Twist Generator

ژاکوبین قیود را به‌دست آورد.

$$A = \frac{\partial c}{\partial q} \tag{29}$$

4- نتایج

جهت استخراج پاسخ دینامیکی سیستم نخست باید ورودی‌های مسئله مشخص شوند. ورودی‌ها متشکل از شرایط اولیه و گشتاورهای ورودی موتورهاست. شرایط اولیه با توجه به مسیر حرکت[3] مرکز جرم سکوی متحرک و سینماتیک سیستم به‌دست می‌آید. برای استخراج گشتاورهای ورودی نخست روابط دینامیک معکوس ربات با استفاده از روش مکمل متعامد طبیعی استخراج و گشتاورهای مورد نیاز موتورها (واقع در مفصل‌های O^I، O^{II} و O^{III} در شکل 2) برای مسیر حرکتی استخراج شده است.

مسیر مورد نظر باید به گونه‌ای انتخاب شود که خود و مشتقات اول و دوم آن علاوه‌بر پیچیدگی نسبی دارای پیوستگی نیز باشند تا از اعمال شوک به سیستم جلوگیری شود. یکی از این مسیرها مسیر رز[4]ی شکل است. مسیر رزی شکل به‌کار گرفته شده با ضابطه به فرم قطبی رابطه (29) نشان داده می‌شود.

$$r = r_0 \cos(2\theta) \tag{30}$$

مسیر حرکتی ربات 3RRR را می‌توان در شکل 4 مشاهده نمود.

ابعاد و جرم میله‌های مکانیزم مورد نظر به همراه مشخصات ابعادی مسیر در جدول 1 مشخص شده است. مشخصات ابعادی و جرمی مکانیزم مانند داده‌های موجود در [17] در نظر گرفته شده است.

جهت ارزیابی دقت روش مکمل متعامد طبیعی جداشده اصلاح شده، لگاریتم مجموع اندازه قیود به عنوان خطای قیدی در رابطه (30) در نظر گرفته شده است.

$$e_C = \log\left(\sum_{i=1}^{6} |C_i|\right) \tag{31}$$

در رابطه (30)، C_i عناصر بردار قیود c هستند

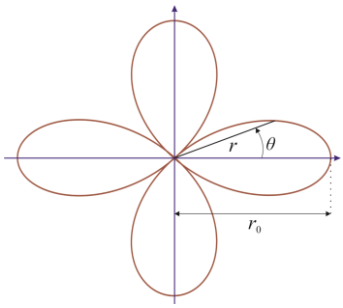

Fig. 4 The Rose trajectory

شکل 4 مسیر حرکت رزی‌شکل

جدول 1 مشخصات ابعادی و جرمی

Table 1 Dimensions and inertia properties

مشخصات مکانیزم				مشخصات مسیر	
کمیت	مقدار	کمیت	مقدار	کمیت	مقدار
l_1	0.4 m	m_1	3 kg	r_0	5 cm
l_2	0.6 m	m_2	4 kg		
S_B	1.2 m	m_P	8 kg		
S_P	0.4 m	I_1	0.04 kg m^2		
I_P	0.0817 kg m^2	I_2	0.12 kg m^2		

[3] Trajectory
[4] Rose

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-09-21]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.20.0]

برای مقایسه بهتر نتایج خطای موقعیت نیز علاوه‌بر خطای قیدی برای نتایج حاصل مطابق رابطه (31) محاسبه شده است.

$$e_P = \log\left||r| - |\bar{r}|\right| \tag{32}$$

در رابطه (31)، r و $\bar{r}$ به ترتیب بردار موقعیت مرکز جرم سکوی متحرک به‌دست‌آمده از منحنی مسیر و روش مکمل متعامد طبیعی جداشده اصلاح شده است.

شبیه‌سازی در مدت 6 ثانیه و با استفاده از روش رانگ کوتای 4 و 5 و با بازه‌بندی انطباقی و با خطای نسبی 10^{-3} انجام شده است. مسیر حرکت سکوی متحرک نیز به گونه‌ای در نظر گرفته شده است که هر مسیر کامل در مدت 2 ثانیه طی می‌شود.

جدول 2 زمان حل هر روش مکمل متعامد طبیعی جداشده اصلاح‌شده را به ازای مقادیر مختلف ضریب سختی فنرهای مجازی نشان می‌دهد. با توجه به جدول 2 با افزایش مقدار ضرایب سختی فنرهای مجازی، زمان حل به صورت محسوسی افزایش می‌یابد. دلیل این امر استفاده از مقادیر بسیار زیاد برای K_s است که منجر به استیف[1] شدن معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله می‌شود. از سویی دیگر مقادیر بسیار زیاد K_s نیز سبب بروز خطاهای محاسباتی در روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل می‌شود و در نتیجه دقت پاسخ کاهش می‌یابد. مقدار بهینه‌ای برای K_s باید پیدا شود. افزایش قابل توجه زمان حل را می‌توان در پژوهش‌های دیگری که از روش فنر مجازی لاگرانژ استفاده کرده‌اند (و معادلات حاکم بر دینامیک مسئله استیف بوده‌اند) نیز مشاهده کرد [17-16,4]. روش ارائه شده را نمی‌توان برای محاسبات ریل‌تایم[2] به‌کار برد.

شکل 5 خطای قیدی (e_C) روش مکمل متعامد طبیعی جداشده اصلاح‌شده را با مقادیر مختلف K_s و با خطای نسبی RT=1e-3 نشان می‌دهند. با توجه به شکل 5 با ازدیاد K_s خطای قیدی کاهش می‌یابد. در صورتی که خطای قیدی با دقت صدم میلی‌متر مورد نظر باشد خطای قیدی به ازای $K_s \geq 10^5$ N/m کمتر از 5- و قابل قبول است. جهت مقایسه بهتر نتایج میزان خطای موقعیت (e_P) نیز در شکل 6 نشان داده شده است. با توجه به شکل 6 خطای موقعیت نیز به ازای $K_s \geq 10^6$ N/m کمتر از 5- است. در نهایت با در نظر گرفتن نتایج خطای قیدی و موقعیت می‌توان گفت برای $K_s \geq 10^6$ N/m مقادیر هر دو خطا در محدوده مناسب قرار دارند. $K_s = 10^6$ N/m به عنوان مقدار بهینه ضریب سختی فنرهای مجازی انتخاب می‌شود. از سوی دیگر با توجه به نتایج جدول 2 زمان محاسبات به‌ازای $K_s = 10^6$ N/m حدود 45 ثانیه است. زمان تقریبی حل مسئله پیش‌رو با استفاده از روش مکمل متعامد طبیعی جداشده حدود 2 ثانیه است. زمان حل روش

جدول 2 زمان محاسبه روش مکمل متعامد طبیعی جداشده اصلاح‌شده به ازای مقادیر مختلف ضریب سختی فنرهای مجازی

Table 2 Calculation time of the modified natural orthogonal complement method with different stiffness coefficient of virtual springs

ضریب سختی فنرهای مجازی	زمان محاسبات
$K_s = 10^1$ N/m	0.576 s
$K_s = 10^2$ N/m	0.921 s
$K_s = 10^3$ N/m	1.648 s
$K_s = 10^4$ N/m	3.550 s
$K_s = 10^5$ N/m	11.898 s
$K_s = 10^6$ N/m	45.592 s
$K_s = 10^7$ N/m	160.600 s
$K_s = 10^8$ N/m	499.424 s

[1] Stiff
[2] Real Time

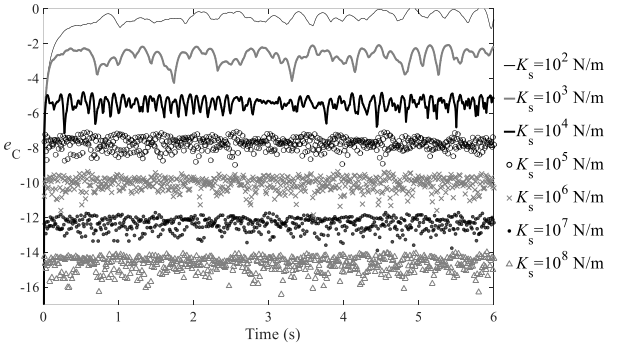

Fig. 5 The constraint error of the modified natural orthogonal complement method with different values of K_s

شکل 5 خطای قیدی روش مکمل متعامد طبیعی جداشده اصلاح‌شده به ازای مقادیر K_s مختلف

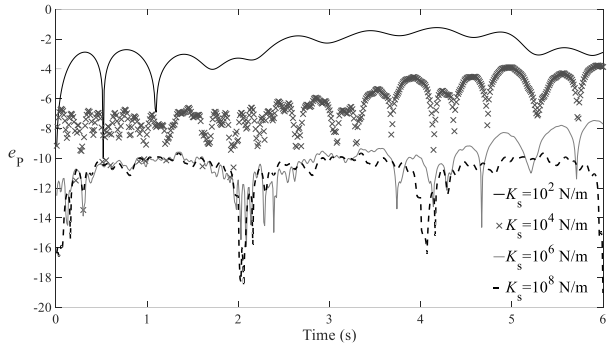

Fig. 6 The position error of the modified natural orthogonal complement method with different values of K_s

شکل 6 خطای موقعیت روش مکمل متعامد طبیعی جداشده اصلاح‌شده به ازای مقادیر K_s مختلف

اصلاح شده بسیار بیشتر از روش پایه است. این در حالی که در روش پایه فرایند استخراج معادلات دینامیکی بسیار طولانی‌تر است. بنابراین روش اصلاح شده برای حل دینامیک مستقیم و محاسبه نیروهای قیدی به صورت تخمینی و با هزینه محاسبات اولیه کمتر مناسب است.

5- نتیجه‌گیری

در این پژوهش به معرفی روشی اصلاح شده جهت تحلیل دینامیک مستقیم ربات‌های موازی سریع پرداخته شد. روش پیشنهادی با استفاده از مفاهیم روش فنر مجازی لاگرانژ توسعه یافته است. استفاده از روش فنر مجازی در روش نیوتونی مکمل متعامد طبیعی جدا شده شیوه‌ای جدید است که در این مطالعه معرفی شد.

در روش جدید پیشنهادی برخلاف روش مکمل متعامد طبیعی جدا شده وابستگی مختصات سیستم به یکدیگر حذف می‌شود و در روش اصلاح شده نیازی به محاسبه سینماتیک مستقیم در هر بازه زمانی نیست، و نتایج هر بازه زمانی شرایط اولیه بازه زمانی بعدی را تشکیل می‌دهند. از سویی دیگر با مقایسه روابط مشخص شد در روش اصلاح شده نیازی به محاسبه ماتریس ژاکوبین و نرخ تغییرات آن نیست. محاسبه ماتریس‌های یادشده در روش مکمل متعامد طبیعی جداشده نیازمند صرف زمان قابل توجهی که در روش جدید پیشنهادی حذف شده است.

در ادامه روش اصلاح‌شده پیشنهادی بر یک مکانیزم صفحه‌ای 3RRR اعمال شد. براساس نتایج عددی به‌دست آمده اگرچه خطای قیدی و موقعیت به‌دست‌آمده از روش اصلاح‌شده در محدوده قابل قبولی قرار داشتند، زمان

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-09-21]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.20.0]

حل روش اصلاح شده (حدود 45 ثانیه) به صورت قابل توجهی بیشتر از روش مکمل متعامد طبیعی جداشده (حدود 2 ثانیه) بود که به دلیل استفاده از مقادیر بسیار زیاد برای K_s و استیف‌شدن معادلات است. همچنین با استفاده از روش اصلاح‌شده تمامی عکس‌العمل‌های قیدی سیستم قابل محاسبه هستند. روش پیشنهادی م.م.ط.ج.ا. برای تخمین عکس‌العمل‌های قیدی سیستم‌های دینامیکی مناسب است.

در روش‌های مبتنی بر فنر مجازی از نظر تئوری با افزایش مقدار K_s دقت نتایج نیز افزایش می‌یابد، ولی در عمل با افزایش بیش از حد مقدار K_s، معادلات استیف‌شده و دقت محاسبات عددی کاهش می‌یابد. به مقداری بهینه برای K_s نیاز و چگونگی بیان رابطه قیدی در این دو روش بسیار حائز اهمیت است. قیود به‌کار رفته در این روش‌ها حتماً باید بیانگر تغییرات طولی فنرهای مجازی به‌کار رفته باشند. در غیر این صورت پاسخ به‌دست‌آمده از این دو روش صحیح نخواهد بود.

6- فهرست علایم

A, K	ماتریس ژاکوبین قیود
B	ماتریس توزیع پیچه
c	بردار قیود مکانی سیستم
C	ماتریس نیروهای گریز از مرکز و کوریولیس
e_C	خطای قیدی
e_P	خطای موقعیت
E	ماتریس ضرب خارجی
f	بردار نیرو
g	شتاب گرانش
I	ماتریس اینرسی تعمیم‌یافته
I_c	ماتریس اینرسی جرمی مرکز جرم
K_s	ثابت کشسانی فنر
l	طول میله ربات
m	جرم
M	ماتریس جرم
n	بردار ممان
N_l	ماتریس پایین مثلثی مکمل متعامد طبیعی جداشده
N_d	ماتریس قطری مکمل متعامد طبیعی جداشده
p	بردار مولد پیچه
q	بردار مختصات عمومی سیستم
$\dot{q}$	بردار سرعت‌های عمومی سیستم
RT	خطای نسبی
t	زمان
t	بردار پیچه
T	ماتریس مکمل متعامد طبیعی
v	بردار سرعت انتقالی
w	بردار رنچ
x	موقعیت افقی مرکز جرم سکوی متحرک
y	موقعیت عمودی مرکز جرم سکوی متحرک

علایم یونانی

λ	بردار ضرایب
τ	بردار نیروهای عمومی سیستم
ω	بردار سرعت زاویه‌ای
θ	زاویه نسبت به افق با میله‌ی قبل

بالانویس‌ها

A	مربوط به تحریک کننده‌ها
C	مربوط به قید
CS	مربوط به فنرهای مجازی
G	مربوط به گرانش
I	شاخه اول مکانیزم
II	شاخه دوم مکانیزم
III	شاخه سوم مکانیزم
P	سکوی متحرک

زیرنویس‌ها

B	پایه ثابت
C	مربوط به قید
P	سکوی متحرک- موقعیت

7- مراجع

[1] L. W. Tsai, *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*, pp. 424-447, New Jersey: Wiley, 1999.
[2] J. Ginsberg, *Advanced Engineering Dynamics*, pp. 245-285, Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
[3] J. Brinker, B. Corves, M. Wahle, A comparative study of inverse dynamics based on clavel, *Proceedings of the 14th IFToMM World Congress*, Taipei, Taiwan, October 25-30, 2015.
[4] W. A. Khan, V. N. Krovi, S. K. Saha, J. Angeles, Modular and recursive kinematics and dynamics for parallel manipulators, *Multibody System Dynamics*, Vol. 14, No. 3-4, pp. 419-455, 2005.
[5] M. Yazdani, M. Tale Masouleh, M. Hasanvand, I. Yahyapour, M. Ghafouri Tabrizi, Inverse dynamic problem of two parallel manipulators with identical limbs structures, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 13, pp. 281-290, 2014. (in Persian فارسی)
[6] H. Salarieh, Dynamic analysis and control system design for a lower extremity exoskeleton, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 5, pp. 102-116, 2013. (in Persian فارسی)
[7] S. Saha, S. Shah, P. Nandihal, Evolution of the DeNOC-based dynamic modelling for multibody systems, *Mechanical Sciences*, Vol. 4, No. 1, pp. 1-20, 2013.
[8] J. Angeles, S. K. Lee, The formulation of dynamical equations of holonomic mechanical systems using a natural orthogonal complement *Applied Mechanics*, Vol. 55, No. 1, pp. 243-244, 1988.
[9] S. K. Saha, The UDUT decomposition of manipulator inertia matrix, *Proceeding of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2829-2834, Nagoya, Aichi, Japan, May 21-27, 1995.
[10] S. K. Saha, A decomposition of the manipulator inertia matrix, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 13, No. 2, pp. 301-304, 1997.
[11] S. K. Saha, Simulation of industrial manipulators based on the UDUT decomposition of inertia matrix, *Multibody System Dynamics*, Vol. 9, No. 1, pp. 63-85, 2003.
[12] S. K. Saha, W. O. Schiehlen, Recursive kinematics and dynamics for parallel structured closed-loop multibody systems, *Mechanics of Structures and Machines*, Vol. 29, No. 2, pp. 143-175, 2001.
[13] D. N. Dimitrov, *Dynamics and Control of Space Manipulators During a Satellite Capturing Operation*, PhD Thesis, Department of Aerospace Engineering, Tohoku University, Sendai, 2006.
[14] A. B. K. Rao, S. Saha, P. V. Rao, Dynamics modelling of hexaslides using the decoupled natural orthogonal complement matrices, *Multibody System Dynamics*, Vol. 15, No. 2, pp. 159-180, 2006.
[15] J. Wang, C. M. Gosselin, L. Cheng, Modeling and simulation of robotic systems with closed kinematic chains using the virtual spring approach, *Multibody System Dynamics*, Vol. 7, No. 2, pp. 145-170, 2002.
[16] W. A. Khan, C. P. Tang, V. N. Krovi, Modular and distributed

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-09-21]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.20.0]

forward dynamic simulation of constrained mechanical systems–A comparative study, *Mechanism and Machine Theory,* Vol. 42, No. 5, pp. 558-579, 2007.

[17] W. A. Khan, *Distributed Dynamics of Systems with Closed Kinematic Chains*, Thesis, McGill University, Montréal, 2002.

[18] J. Angeles, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms*, Fourth Edittion, pp. 512-523, Springer Science & Business Media, 2013.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-09-21]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.20.0]