



## اعمال مدل زیر شبکه‌ای غیر همسانگرد با کمترین اتلافات در نرم‌افزار اپن فوم و ارزیابی آن در تحلیل جریان آشفته داخل کانال

امیرپویان ظهیری<sup>1</sup>، احسان روحی<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد  
2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد  
\* مشهد، صندوق پستی 91775-1111، e.roohi@um.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 11 شهریور 1396  
پذیرش: 16 آذر 1396  
ارائه در سایت: 01 دی 1396  
کلید واژگان:

مدل زیر شبکه‌ای غیر همسانگرد با کمترین اتلافات  
مقیاس‌های زیر شبکه‌ای  
جریان کانال آشفته  
نرم افزار اپن فوم

### چکیده

مدل‌های زیر شبکه‌ای با کمترین اتلافات یک جایگزین ساده برای مدل‌های اسماگورینسکی برای اعمال اثر مقیاس‌های زیر شبکه‌ای در روش شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ می‌باشند. اخیراً یک عضو جدید از این خانواده با نام مدل زیر شبکه‌ای غیر همسانگرد با کمترین اتلافات معرفی شده است. مدل غیر همسانگرد با کمترین اتلافات از نوع مدل‌های زیر شبکه‌ای لزجت-گردابه‌ای و استاتیکی می‌باشد و علاوه بر این که دارای هزینه‌ی محاسباتی کمتری در مقایسه با مدل اسماگورینسکی دینامیکی می‌باشد، قادر است اثر جهات مختلف را در محاسبه‌ی تنش‌های زیر شبکه‌ای در نظر بگیرد و همچنین قادر به تحلیل جریان‌های در حال گذار از حالت لایه‌ای به آشفته نیز می‌باشد. در مطالعه حاضر، مدل زیر شبکه‌ای مذکور برای اولین بار در نرم‌افزار مرجع باز اپن فوم اعمال شده است و عملکرد آن در پیش‌بینی رفتار جریان در داخل یک کانال با جریان هوای حرکت داده شده توسط اختلاف فشار ارزیابی شده است. دقت مدل مورد نظر در اعداد رینولدز مختلف شامل جریان‌های در حال گذار و کاملاً آشفته بررسی و نتایج حاصل با نتایج مدل اسماگورینسکی دینامیکی و شبیه‌سازی عددی مستقیم مقایسه شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که این مدل زیر شبکه‌ای در گستره‌ی وسیعی از اعداد رینولدز دارای دقت بسیار بالایی در محاسبه‌ی پروفیل‌های سرعت لایه‌ی مرزی و کمیت‌های آشفتگی مرتبه‌ی اول و دوم می‌باشد.

## Implementation of the anisotropic minimum-dissipation (AMD) sub-grid scale model in OpenFOAM and its evaluation in treating turbulent channel flow

Amirpouyan Zahiri, Ehsan Roohi\*

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran  
\* P.O.B. 91775-1111, Mashhad, Iran, e.roohi@um.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 02 September 2017  
Accepted 07 December 2017  
Available Online 22 December 2017

**Keywords:**  
AMD Model  
Sub-Grid Scales  
Turbulent Channel Flow  
OpenFOAM Software

### ABSTRACT

“Minimum-dissipation sub-grid models” are simple alternatives to the Smagorinsky-type approaches to imposing sub-grid scales (SGS) effects in the large-eddy simulation (LES) approach. Recently, a new model in this family called “anisotropic minimum-dissipation (AMD)” model is represented. AMD is classified as a static type eddy-viscosity sub-grid scale model. The model is more cost effective than the dynamic Smagorinsky model, furthermore; it is not only able to consider the effect of various directions in computing sub-grid stress but also capable of operating for transitional flows from laminar to turbulent. In this study, this sub-grid model has been implemented in the open source package OpenFOAM and its performance is evaluated in the prediction of the flow field inside a channel with a pressure driven air flow. The accuracy of the model has been investigated at different Reynolds numbers including transient and fully turbulent flows and compared with the dynamic Smagorinsky model as well as direct numerical simulation (DNS) solutions. Results reveal that this sub-grid model is quite accurate over a broad range of Reynolds numbers once calculating velocity profiles as well as first and second-order turbulent quantities.

### 1- مقدمه

وابسته به ابعاد شبکه‌ی محاسباتی استفاده می‌شود. در این رهیافت مقیاس‌های مختلف ساختار جریان آشفته از مقیاس‌های بسیار بزرگ تا مقیاس‌های کوچک به صورت دقیق شبیه‌سازی می‌شوند. علاوه بر این، نتایج حل عددی به دست آمده از LES با افزایش تعداد سلول‌های محاسباتی به نتایج شبیه‌سازی مستقیم عددی<sup>1</sup> (DNS) میل می‌کند [1]. به دلیل داشتن توانایی در

برخلاف روش‌های میانگین‌گیری رینولدز در معادلات ناویر استوکس<sup>1</sup> (RANS) که در آن‌ها از یک میانگین‌گیری زمانی استفاده می‌شود، در رهیافت شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ<sup>2</sup> (LES) از یک میانگین‌گیری مکانی

<sup>1</sup> Reynolds-averaged Navier-Stokes

<sup>2</sup> Large eddy simulation

<sup>3</sup> Direct Numerical simulation

### Please cite this article using:

A. Zahiri, E. Roohi, Implementation of the anisotropic minimum-dissipation (AMD) sub-grid scale model in OpenFOAM and its evaluation in treating turbulent channel flow, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 12, pp. 478-484, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

معادلات بقای جرم و ممنتوم جریان تراکم‌ناپذیر به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + p \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}) = 0 \quad (2)$$

در معادلات فوق، بردار  $(u_i)$  نشان‌دهنده‌ی سرعت،  $(p)$  نشان دهنده‌ی فشار و  $(D_{ij})$  نشان‌دهنده‌ی تانسور نرخ کرنش<sup>۴</sup> می‌باشد:

$$D_{ij} = 0.5 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

عملیات فیلترکردن یک متغیر مانند  $\phi$  توسط یک تابع پیش تعریف شده فیلتر کننده  $G = G(x, \Delta)$  انجام می‌شود. تابع  $G$  دارای یک مقیاس طول قطع می‌باشد که مقیاس‌های کوچکتر از  $\Delta$  در  $\phi$  ظاهر نمی‌شوند و به عبارت دیگر مقیاس‌های کوچکتر از  $\Delta$  به وسیله‌ی رابطه‌ی (4) از متغیر  $\phi$  فیلتر می‌شوند:

$$\overline{\phi}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(r, t') G(x - r, t - t') dt' dr \quad (4)$$

$\Delta$  را مقیاس زیر شبکه‌ای می‌نامیم و  $\phi'$  را که دربر گیرنده‌ی مقیاس‌های زیر شبکه‌ای است را جمله زیر شبکه‌ای می‌نامیم و داریم:

$$\overline{\phi} = \phi - \phi' \quad (5)$$

متغیر  $\Delta$  به اندازه‌ی شبکه‌ی محاسباتی وابسته می‌باشد و از رابطه‌ی (6) محاسبه می‌شود:

$$\Delta = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y \Delta z} \quad (6)$$

با همگشت<sup>۵</sup> تابع  $G$  در معادلات پیوستگی و ممنتوم، معادلات فیلترشده‌ی پیوستگی و ممنتوم که در رهیافت LES مورد استفاده می‌باشند، به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u}_i \overline{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ v \left( \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (8)$$

در روابط (7) و (8) متغیرهای دارای علامت بار (-) نشان‌دهنده‌ی کمیت‌های فیلتر شده می‌باشند. نکته‌ی اصلی در معادلات بالا اضافه شدن جمله  $\frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}$  می‌باشد که مجهول است و به معادلات ناویر-استوکس افزوده شده است. می‌توان  $\tau_{ij}$  را به صورت زیر نوشت [2]:

$$\tau_{ij} = \overline{u}_i \overline{u}_j - \overline{u}_i \overline{u}_j \quad (9)$$

معمولاً جمله  $\tau_{ij}$  مدل می‌شود. عبارت  $\tau_{ij}$  را تانسور تنش‌های زیر شبکه‌ای می‌نامیم. در واقع  $\tau_{ij}$  مشابه همان تنش‌های رینولدز در روش‌های RANS می‌باشد و معمول‌ترین روش برای به دست آوردن آن این است که از یک لزجت زیرشبکه‌ای  $(\nu_{ij})$  که نقشی مشابه لزجت آشفتگی در روش-های RANS را دارد استفاده شود.

## 2-2- مدل‌های مقیاس‌های زیرشبکه‌ای

روش‌های مختلفی برای مدل کردن اثر تانسور تنش‌های زیر شبکه‌ای  $(\tau_{ij})$  یا همان اثر مقیاس‌های زیرشبکه‌ای وجود دارد. با توجه به این که انتظار می‌رود مقیاس‌های زیرشبکه‌ای دارای رفتاری همگون و هم‌جهت باشند معمولاً از روش‌های لزجت-گردابه برای انجام مدل‌سازی زیرشبکه‌ای استفاده می‌شود. در این روش فرض می‌شود که تانسور تنش‌های زیرشبکه‌ای دارای یک رابطه-ی خطی با تانسور نرخ کرنش  $(D_{ij})$  به صورت زیر است:

نظر گرفتن مکانیزم‌های موجود در دینامیک جریان، رهیافت شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ برای مدل سازی جریان‌های آشفتگی که در بسیاری از موارد ناپایا می‌باشند بسیار توانمند می‌باشد و در مسائل مهندسی به عنوان جایگزین روش DNS پذیرفته شده است [2]. در روش شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ مقیاس‌های جریان به دو دسته‌ی مقیاس‌های شبکه‌ای که اندازه‌ی آن‌ها بزرگتر از ابعاد شبکه‌ی محاسباتی می‌باشد و مقیاس‌های زیرشبکه‌ای که اندازه‌ی آن‌ها کوچکتر از ابعاد شبکه‌ی محاسباتی می‌باشند تقسیم می‌شوند. مقیاس‌های شبکه‌ای به صورت مستقیم با حل معادلات بقا استخراج می‌شوند در حالی که اثر مقیاس‌های کوچکتر از ابعاد شبکه با استفاده از مدل‌های زیرشبکه‌ای محاسبه شده و در حل عددی اعمال می‌شود. یک روش اصلی برای مدل‌سازی اثر مقیاس‌های زیر شبکه‌ای روش‌های گردابه-لزجت می‌باشد که در آن‌ها از یک لزجت زیرشبکه‌ای برای به دست آوردن تانسور تنش‌های زیرشبکه‌ای استفاده می‌شود. در میان روش‌های گردابه-لزجت، یکی از مهم-ترین مدل‌های زیرشبکه‌ای مدل اسماگورینسکی<sup>۱</sup> [3] می‌باشد که اولین بار در سال 1963 توسط جوزف اسماگورینسکی برای پیش‌بینی جریان‌های جوی ارائه گردیده است. این مدل بعداً توسط دیردورف توسعه داده شد [4]. مدل اسماگورینسکی از خانواده مدل‌های زیرشبکه‌ای استاتیکی می‌باشد. ژرمانو و همکاران [5] و معین و همکاران [6] روش اسماگورینسکی دینامیکی<sup>۲</sup> (DS) که در آن ضریب لزجت گردابه‌ای به صورت محلی محاسبه می‌شود را ارائه نمودند که در مقایسه با مدل‌های استاتیکی با دقت بهتری جریان آشفتگی را مدل‌سازی می‌کرد. دسته‌ی جدیدی از مدل‌های زیرشبکه‌ای، مدل‌هایی تحت عنوان مدل‌های با کمترین اتلافات می‌باشند که اولین بار توسط ورستاین و همکاران ارائه شدند [7,8]. اخیراً نیز رزوما و همکاران [9] مدل زیرشبکه‌ای غیرهمسانگرد با کمترین اتلافات<sup>۳</sup> (AMD) را ارائه کرده‌اند و آبکار و همکاران [10] ضرایب ثابت مدل زیرشبکه‌ای مذکور را به صورت ریاضی استخراج کردند. آن‌ها مدل AMD را برای تحلیل جریان با انتقال حرارت گسترش دادند و دقت مدل در تحلیل لایه مرزی روی یک دیواره بررسی نمودند. لازم به ذکر است که مدل AMD در دسته‌ی روش‌های استاتیکی قرار می‌گیرد و از نظر محاسباتی در مقایسه با روش اسماگورینسکی دینامیکی هزینه‌ی کمتری دارد. در مدل AMD گردابه‌های زیرشبکه‌ای به صورت سه‌بعدی مدل می‌شوند و به عبارت دیگر اثر جهات مختلف مختصات دکارتی در مدل‌سازی اثر مقیاس‌های زیرشبکه‌ای در نظر گرفته می‌شود.

در مطالعه حاضر، برای اولین بار مدل زیرشبکه‌ای غیرهمسانگرد با کمترین اتلافات به صورت موفقیت آمیز در بسته‌ی نرم‌افزاری این فوم اعمال شده است و دقت آن در پیش‌بینی رفتار جریان آشفتگی داخل کانال و برای در رینولدزهای مختلف ارزیابی شده است. همان‌گونه که نشان داده خواهد شد، مدل زیرشبکه‌ای غیرهمسانگرد با وجود استفاده از ضرایب ثابت دقت بسیار مناسبی در تحلیل جریان آشفتگی دارد.

## 2- توصیف معادلات حاکم و مدل‌های عددی مورد استفاده

در این قسمت معادلات حاکم از جمله معادلات پیوستگی و ممنتوم و همچنین معادلات مورد استفاده برای مدل زیر شبکه‌ای غیرهمسانگرد با کمترین اتلافات و مدل اسماگورینسکی دینامیکی ارائه می‌شود.

### 1-2- معادلات حاکم بر رهیافت LES

<sup>1</sup> Smagorinsky

<sup>2</sup> Dynamic Smagorinsky (DS)

<sup>3</sup> Anisotropic Minimum Dissipation

<sup>4</sup> Rate of strain tensor

<sup>5</sup> Convolve

در تحقیق حاضر، مقدار مناسب برای این ضریب در شرایطی که از گسسته-ساز مرتبه دوم استفاده شود 1/12 می‌باشد. در همین رابطه مقدار  $\Delta t$  اندازه‌ی شبکه در جهات مختلف دستگاه مختصاتی می‌باشد. بنابر این مدل AMD جهات مختلف یک مقیاس زیر شبکه‌ای را لحاظ می‌نماید و به همین دلیل این مدل غیرهمسانگرد نامیده می‌شود. با توجه به اینکه در جریان‌های آشفته با اعداد رینولدز بالا، مقیاس‌های زیرشبکه‌ای رفتار ناهمسانگرد دارند، استفاده از یک مدل غیرهمسانگرد معمولاً عملکرد مناسبی خواهد داشت.

### 3- بیان مسئله و روش حل

در این مطالعه مدل زیرشبکه‌ای AMD با استفاده از زبان برنامه‌نویسی شی-گرای ++C به بست‌ی نرم‌افزاری مرجع باز این‌فوم اعمال شده است و در نتیجه می‌توان با استفاده از کتابخانه‌های گسترده‌ی این‌فوم، این مدل زیرشبکه‌ای جدید را برای استفاده در انواع جریان‌های تراکم‌ناپذیر، جریان‌های چندفازی، جریان‌های دارای اثر الکترومغناطیس جریان‌های کاویتاسیونی و غیره به‌کار برد. همچنین این‌فوم دارای قابلیت موازی‌سازی چند سیستم رایانه‌ی برای انجام یک حل عددی می‌باشد که این موضوع از نقطه‌نظر سرعت انجام حل عددی بسیار مهم می‌باشد.

هندسه‌ی مسئله مورد بررسی شامل یک سیال نیوتونی تراکم‌ناپذیر در میان دو صفحه‌ی موازی به‌صورت "شکل 1" می‌باشد. این دو صفحه موازی که یکی از آن‌ها در  $y = 0$  و دیگری در  $y = 2h$  قرار گرفته است، دارای شرط مرزی دیوار بدون لغزش می‌باشند و شرط مرزی پیرویدیک<sup>1</sup> در طرفین کانال در نظر گرفته شده است. با ایجاد یک گرادیان فشار در داخل دامنه‌ی محاسباتی، سیال در میان دو صفحه و با سرعت موردنظر به حرکت در آورده می‌شود. به‌منظور ارزیابی مدل زیرشبکه‌ای AMD، حل‌های عددی در سه عدد رینولدز 3250، 6675 و 12500 انجام گرفته است که با توجه به نتایج DNS [1]، این مقادیر به ترتیب رینولدزهای اصطکاکی 180، 395 و 590 را به‌دست می‌دهند. دامنه‌ی محاسباتی به‌صورت یک کانال مستطیل شکل به ابعاد  $L_x \times L_y \times L_z = 2\pi \times 2 \times \pi$  می‌باشد. مقدار رینولدز اصطکاکی با استفاده از سرعت اصطکاکی  $u_\tau = \sqrt{\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} |_{y=0}}$  بی‌بعد می‌شود. تعداد نقاط شبکه در جهات مختلف کانال به‌صورت  $N_x \times N_y \times N_z = 100 \times 136 \times 80$  می‌باشد. اندازه‌ی شبکه در جهت‌های  $x$  و  $z$  به صورت یکنواخت و در جهت  $y$  به منظور در نظر گرفتن اثر دیواره، متراکم شده است.

مقدار کمیت‌های  $\Delta x^+$ ،  $\Delta y^+$  و  $\Delta z^+$  که برحسب  $u_\tau$  و  $\nu$  بی‌بعد شده‌اند در جداول 1 الی 3 و برای دو مدل زیرشبکه‌ای DS و AMD در سه عدد رینولدز 3250، 6675 و 12500 گزارش شده‌اند. این کمیت‌ها نیز مشابه رینولدز اصطکاکی با استفاده از پارامتر سرعت اصطکاکی و لزجت دینامیکی  $\nu$  بی‌بعد می‌شوند. همان‌طور که مشاهده می‌کنید در کلیه‌ی اعداد رینولدز، مقدار  $\Delta y^+$  کمتر از 1 به‌دست آمده است و به عبارت دیگر زیرلایه‌ی لزج لایه‌ی مرزی با دقت مناسبی حل شده است.

### 4- نتایج

کلیه‌ی نتایج ارائه شده در این مقاله به‌صورت میانگین‌گیری زمانی و مکانی ارائه شده است. این میانگین‌گیری‌ها پس از آن‌که جریان سیال به شرایط کاملاً پایا رسیده است، انجام شده است. به عبارت دیگر عمل میانگین‌گیری پس از گذشت مدت زمان  $10T$  از آغاز حل عددی شروع شده است. در این‌جا

$$\tau_{ij}^d = \tau_{ij} - (\delta_{ij}/3)\tau_{kk} = -2\nu_T \bar{D}_{ij} \quad (10)$$

در رابطه‌ی (10) لزجت زیرشبکه‌ای می‌باشد که باید با استفاده از یک روش مناسب مدل‌سازی شود. نخستین بار اسم‌گورینسکی [3] رابطه‌ی (11) را با استفاده از این فرض که مقیاس‌های کوچک با یکدیگر در تعادل می‌باشند، ارائه نمود:

$$\nu_T = (C_S \Delta)^2 |\bar{S}| \quad (11)$$

در رابطه‌ی بالا،  $C_S$  ثابت اسم‌گورینسکی می‌باشد و  $|\bar{S}| = (2\bar{D}_{ij}\bar{D}_{ij})^{1/2}$  اندازه‌ی تانسور نرخ کرنش می‌باشد. در روش اسم‌گورینسکی ساده ضریب  $C_S$  به‌صورت ثابت و مستقل از زمان و مکان و اندازه‌ی مقیاس‌ها در نظر گرفته می‌شود. روش اسم‌گورینسکی و کلیه‌ی روش‌هایی که در آن‌ها ضرایب به‌صورت ثابت در نظر گرفته می‌شوند، روش‌های استاتیکی نامیده می‌شوند. این موضوع می‌تواند مقداری خطا در پیش‌بینی نتایج عددی چه در رینولدز-های بالا و چه در رینولدزهای پایین ایجاد نماید [11] بنابرین ضریب مدل اسم‌گورینسکی ساده برای بهبود نتایج نیازمند کالیبراسیون دقیق می‌باشد [12,13]. در بست‌ی نرم‌افزاری این‌فوم مقدار ثابت  $C_S$  از رابطه‌ی (12) به‌دست می‌آید که در آن ضرایب  $C_k = 0.094$  و  $C_e = 1.048$  می‌باشند.

$$C_S^2 = C_k \sqrt{C_k/C_e} \quad (12)$$

یک روش دیگر برای مدل‌سازی زیرشبکه‌ای روش اسم‌گورینسکی دینامیکی یا DS می‌باشد که در آن ضرایب ثابت به‌صورت محلی و با استفاده از یک فیلتر آزمون با عرض  $2\Delta$  به‌دست می‌آیند [5]. علامت بار ( $\sim$ ) نشان دهنده‌ی خواص فیلتر شده و  $\bar{\Delta}$  نشاندهنده‌ی عرض فیلتر آزمون یا همان  $2\Delta$  می‌باشد. پس از همگشت کردن تابع فیلتر آزمون به معادلات فیلترشده‌ی ممنتم و پیوستگی و انجام محاسبات جبری، در نهایت می‌توان به رابطه‌ی (13) برای به‌دست آوردن تانسور تنش زیر شبکه‌ای  $\tau_{ij}$  دست یافت.

$$\tau_{ij} - (\delta_{ij}/3)\tau_{kk} = \frac{(-2C(\bar{\Delta}^2 |\bar{D}| \bar{D}_{ij} - \bar{\Delta}^2 |D| \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij}))}{(\bar{\Delta}/\Delta)^2 (|\bar{D}| \bar{D}_{mn} \bar{D}_{mn}) - (|\bar{D}| \bar{D}_{pq} \bar{D}_{pq})} |\bar{D}| \bar{D}_{ij} \quad (13)$$

با وجود دقت بالای روش DS، این روش دارای معایبی همچون افزایش هزینه محاسباتی در مقایسه با روش اسم‌گورینسکی ساده و همچنین نیاز به انجام میانگین‌گیری و قطع به‌منظور جلوگیری از ناپایداری‌های عددی می‌باشد [15]. یک مشکل روش‌های دینامیکی این است که در رابطه‌ی (13) مقدار ضریب  $C$  نامعلوم می‌باشد [5]. برای جریان داخل کانال فرض می‌شود  $C$  تنها تابعی از فاصله از سطح کانال  $y$  و زمان  $t$  است. علامت  $\langle \rangle$  نشان‌دهنده‌ی میانگین‌گیری مکانی در طول یک صفحه موازی با دیوار می‌باشد. مدل اسم‌گورینسکی دینامیکی از دقت بالاتری در مقایسه با مدل استاتیکی آن برخوردار می‌باشد [9].

مدل زیرشبکه‌ای اصلی مورد بررسی در این مقاله مدل زیرشبکه‌ای غیرهمسانگرد با کمترین اتلافات (AMD) می‌باشد که در دسته‌ی مدل‌های استاتیکی قرار می‌گیرد. در این روش از رابطه‌ی (14) برای به‌دست آوردن لزجت آشفته‌ی استفاده می‌شود.

$$\nu_t = - \frac{(\partial_k \bar{u}_i)(\partial_k \bar{u}_j) \bar{D}_{ij}}{(\partial_i \bar{u}_m)(\partial_i \bar{u}_m)} \quad (14)$$

$$\partial_k = c_i \Delta_i \partial_i \quad (15)$$

رابطه‌ی (14) یک رابطه‌ی اندیسی می‌باشد که دارای سه اندیس تکرار می‌باشد. بسط این عبارت 27 جمله ایجاد می‌کند.  $\partial_k$  نیز از رابطه‌ی (15) به‌دست می‌آید. در رابطه‌ی (15)،  $c_i$  یک ثابت می‌باشد که با توجه به مرجع [10] مقدار آن به مرتبه‌ی دقت گسسته‌سازی معادلات وابسته می‌باشد. با توجه به تحلیل ریاضی انجام گرفته در مرجع مذکور و انجام آزمون‌های عددی متعدد

<sup>1</sup> Periodic boundary condition

جدول 4 مقایسه هزینه‌ی محاسباتی برای دو روش AMD و DS در سه عدد رینولدز مختلف

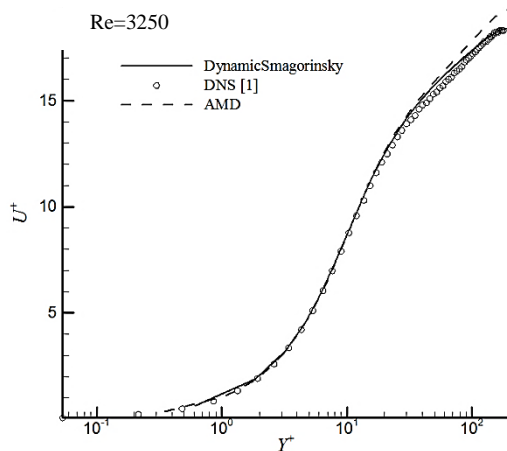
**Table 4** Numerical cost of AMD and DS models for three different Reynolds numbers

Re	زمان متوسط اجرا (ثانیه)		اختلاف (%)
	AMD	DSM	
3250	450	466	3.5
6675	1205	1241	3
12500	2250	2442	8.5

**4-1- پروفیل سرعت متوسط و رینولدز اصطکاکی**

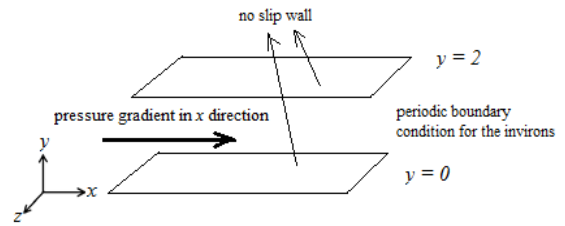
در "شکل‌های 2 الی 4" پروفیل سرعت متوسط‌گیری شده در داخل کانال برای دو مدل زیر شبکه‌ای مختلف اسماگورینسکی دینامیکی و AMD به همراه نتایج DNS با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود پروفیل سرعت به‌دست آمده از مدل‌های اسماگورینسکی دینامیکی و AMD نتایجی نزدیک به پروفیل DNS در ناحیه‌ی لگاریتمی لایه‌ی مرزی ( $y^+ > 10$ ) به‌دست داده اند. مدل AMD با وجود آنکه در دسته‌ی مدل‌های زیرشبکه‌ای استاتیکی قرار دارد، پروفیل سرعتی با دقت تقریباً مشابه روش دینامیکی اسماگورینسکی به دست داده است. هر دو مدل در زیرلایه‌ی لزجی ( $y^+ < 10$ ) دارای جواب‌هایی منطبق بر نتایج DNS می‌باشند. البته مدل اسماگورینسکی دینامیکی در رینولدز پایین 3250 پیش‌بینی اندکی دقیق‌تر از مدل AMD در ( $y^+ > 10$ ) ارائه داده است اما در رینولدز 6675 و 12500 که از نظر مدلسازی آشفتگی دارای اهمیت بیشتری می‌باشند نتایج هر دو مدل انطباق مناسبی با یکدیگر دارند.

در جداول 5 الی 7، مقادیر رینولدز اصطکاکی برای دو مدل دینامیکی اسماگورینسکی و AMD به همراه نتایج DNS در سه عدد رینولدز مختلف آورده شده است. همچنین مقادیر خطای هر دو روش نسبت به روش DNS در ستون سوم آورده شده است. همان‌طور که قبلاً بیان شد، رینولدز اصطکاکی تابعی از تنش دیواره می‌باشد و یک پارامتر مهم در بررسی دقت مدل زیر شبکه‌ای می‌باشد. همان‌طور که از نتایج جدول 6 مشاهده می‌شود، هر دو مدل AMD و اسماگورینسکی دینامیکی در عدد رینولدز جریان 6675 دارای خطای کمتری نسبت به دو عدد رینولدز دیگر می‌باشند. محدوده خطای دو مدل نیز نزدیک به یکدیگر می‌باشد.



**Fig. 2** Profiles of the mean of the normalized stream wise component of velocity for Re = 3250.

شکل 2 پروفیل‌های متوسط‌گیری شده‌ی مولفه‌ی سرعت محوری بی‌بعد در رینولدز 3250



**Fig. 1** Numerical domain for and boundary condition

شکل 1 ناحیه‌ی محاسباتی و شرایط مرزی

جدول 1 پارامترهای عددی از مدل‌های مختلف زیر شبکه‌ای جریان آشفته‌ی کانال برای عدد رینولدز 3250

**Table 1** Numerical parameters in LES of turbulent channel flow for Re = 3250

نام مدل	$\Delta z^+$	$\Delta y^+$	$\Delta x^+$
DS	7.83	0.238	12.54
AMD	7.7	0.2339	12.32

جدول 2 پارامترهای عددی از مدل‌های مختلف زیر شبکه‌ای جریان آشفته‌ی کانال برای عدد رینولدز 6675

**Table 2** Numerical parameters in LES of turbulent channel flow for Re = 6675

نام مدل	$\Delta z^+$	$\Delta y^+$	$\Delta x^+$
DS	15.08	0.4609	24.12
AMD	14.6	0.4436	23.37

جدول 3 پارامترهای عددی از مدل‌های مختلف زیر شبکه‌ای جریان آشفته‌ی کانال برای عدد رینولدز 12500

**Table 3** Numerical parameters in LES of turbulent channel flow for Re = 12500

نام مدل	$\Delta z^+$	$\Delta y^+$	$\Delta x^+$
DS	24.78	0.7524	39.64
AMD	24.66	0.7488	39.45

منظور از  $T$  دوره‌ی زمانی‌ای می‌باشد که در آن سیال یک مرتبه کل دامنه‌ی محاسباتی را طی می‌نماید. به‌منظور اطمینان از استقلال جواب‌های میانگین-گیری شده از مقیاس‌های زمانی کوچک، عمل میانگین‌گیری برای مدت زمانی معادل  $20T$  انجام گرفته شده است. میانگین‌گیری مکانی نیز بر روی صفحات با بردار نرمال در جهت  $y$  صورت گرفته است به‌عبارتی، منظور از سرعت در یک  $y^+$  مشخص، سرعت میانگین‌گیری شده به مدت  $20T$  و بر روی یک صفحه‌ی موازی صفحه‌ی  $zx$  که در آن موقعیت  $y^+$  قرار گرفته است، می‌باشد. در ادامه نتایج عددی برای دو مدل زیرشبکه‌ی DS و AMD برای سه عدد رینولدز مختلف 3250، 6675 و 12500 و در داخل کانال مقایسه شده است. کلیه‌ی نتایج با استفاده از یک شبکه‌ی محاسباتی یکسان به‌دست آمده است.

به‌علاوه یک آزمون مقایسه هزینه‌ی محاسباتی نیز برای مسئله‌ی مورد نظر در کانال و در اعداد رینولدز مختلف انجام شده است. این هزینه‌ی محاسباتی در عدد کورانت برابر 0.3 برای دو مدل DS و AMD به‌دست آمده است. مقادیر به‌دست آمده برای هزینه‌ی محاسباتی در جدول 4 نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود روش AMD در تمامی رینولدزها هزینه محاسباتی کمتری از مدل DS دارد اما میزان کاهش زمان محاسباتی زیاد می‌باشد که باتوجه به این‌که در سایر قسمت‌های کد عددی تغییری اعمال نشده است، این افزایش راندمان منحصرأ مربوط نوع مدل زیر شبکه‌ای استفاده شده می‌باشد.

جدول 7 مقادیر رینولدز اصطکاکی برای دو مدل اسمگورینسکی دینامیکی و AMD

در رینولدز 12500 در مقایسه با نتایج DNS

Table 7 Values of friction Reynolds for dynamic Smagorinsky and AMD model for Re = 12500

نام مدل	رینولدز اصطکاکی	خطا (%)
DNS [1]	180	
AMD	628	6.4
DS	631	7

اثر این جریان، اثر بسیار مهمی در پیش‌بینی دامنه‌ی سرعت خواهد گذاشت. در "شکل‌های 5 الی 7" نمودار انحراف استاندارد از ریشه مربع متوسط<sup>1</sup> سرعت آشفتگی در جهت جریان،  $u^{rms} = \sqrt{\langle u^2 \rangle}$  برای دو مدل AMD و اسمگورینسکی دینامیکی و برای سه عدد رینولدز مختلف و برحسب  $y^+$  آورده شده است. همان‌طور که در این سه شکل مشاهده می‌شود، در ناحیه‌ی زیرلایه‌ی ویسکوز یعنی  $y^+ < 10$ ، نتایج بسیار نزدیک به جواب‌های DNS می‌باشند اما در خارج این منطقه تفاوت‌هایی میان این نتایج به وجود آمده است. در "شکل 5" نمودار  $u^{rms}$  برای عدد رینولدز 3250 آورده شده است و همان‌طور که مشاهده می‌شود در این عدد رینولدز پایین که جریان در ناحیه-ی گذار قرار دارد، هر دو مدل پیش‌بینی بسیار دقیقی از سرعت آشفتگی به دست داده اند و علاوه بر این جواب هر دو مدل تقریباً بر روی هم افتاده است. این مسئله نشان می‌دهد که با کاهش اثر گردابه‌های زیرشبکه‌ای نتایج هر دو مدل به یکدیگر نزدیک می‌شوند، چراکه تفاوت جواب‌ها ناشی از تفاوت این دو مدل در رهگیری اثر این مقیاس‌ها می‌باشد.

در "شکل‌های 6 و 7"، نمودارهای انحراف استاندارد از ریشه مربع متوسط  $u^{rms}$  برحسب  $y^+$  و برای دو عدد رینولدز 6675 و 12500 آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود میزان خطا با افزایش عدد رینولدز و اثر مقیاس‌های زیر شبکه‌ای افزایش یافته است. به‌علاوه به دلیل تفاوت ماهیت دو مدل در رهگیری اثر مقیاس‌های کوچک پیش‌بینی این دو مدل نیز با افزایش اثر این مقیاس‌ها دچار تفاوت‌هایی گردیده است. نکته‌ی قابل توجه این است که برای هر دو مدل زیرشبکه‌ای در  $y^+$  های کوچکتر و در اطراف قله‌ی نمودار خطای مثبت و در نواحی دورتر از دیواره پیش‌بینی با خطای منفی مشاهده می‌شود. در هر دو عدد رینولدز دقت مدل AMD در

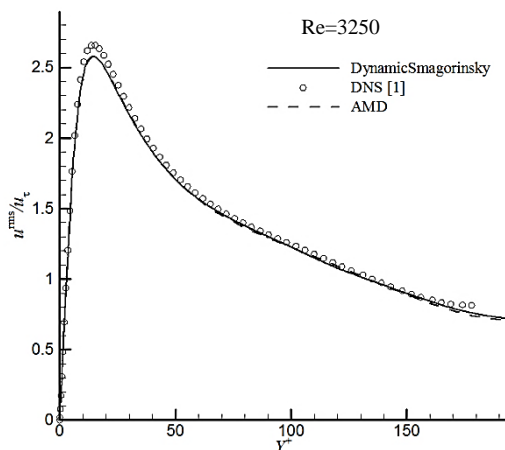


Fig. 5 Profiles of the normalized standard deviation of the stream wise component of velocity,  $u^{rms}/u_t$  for Re = 3250

شکل 5 پروفیل‌های بی‌بعد انحراف استاندارد مولفه سرعت محوری برای عدد رینولدز 3250

<sup>1</sup> Root mean square

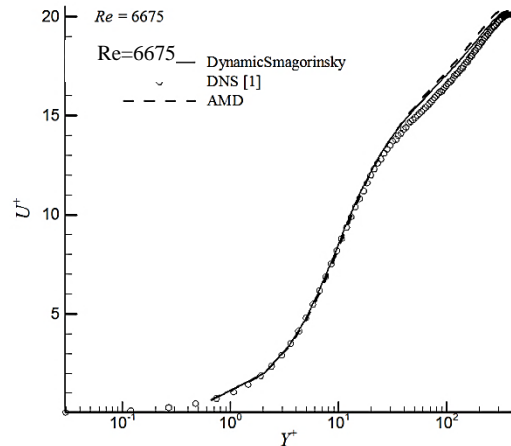


Fig. 3 Profiles of the mean of the normalized stream wise component of velocity for Re = 6675.

شکل 3 پروفیل‌های متوسط‌گیری شده مولفه سرعت محوری بی‌بعد در رینولدز 6675

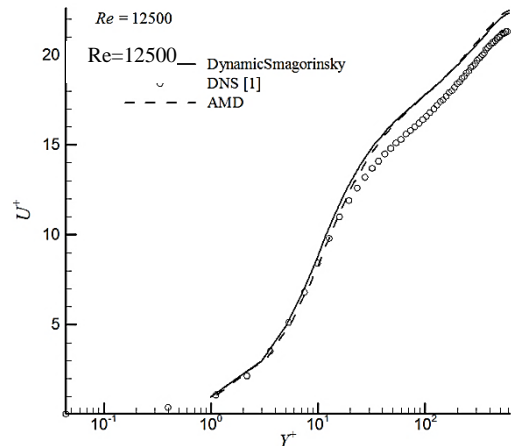


Fig. 4 Profiles of the mean of the normalized stream wise component of velocity for Re = 12500.

شکل 4 پروفیل‌های متوسط‌گیری شده مولفه سرعت محوری بی‌بعد در رینولدز 12500

جدول 5 مقادیر رینولدز اصطکاکی برای دو مدل اسمگورینسکی دینامیکی و AMD

در رینولدز 3250 در مقایسه با نتایج DNS

Table 5 Values of friction Reynolds for dynamic Smagorinsky and AMD model for Re = 3250

نام مدل	رینولدز اصطکاکی	خطا (%)
DNS [1]	180	
AMD	196.2	9
DS	199.6	10.9

جدول 6 مقادیر رینولدز اصطکاکی برای دو مدل اسمگورینسکی دینامیکی و AMD

در رینولدز 6675 در مقایسه با نتایج DNS

Table 6 Values of friction Reynolds for dynamic Smagorinsky and AMD model for Re = 6675

نام مدل	رینولدز اصطکاکی	خطا (%)
DNS [1]	395	
AMD	372	-5.8
DS	384	-2.8

#### 2-4- پیش‌بینی سرعت و تنش

گردابه‌های موجود در جریان سیال، اثر خود را به‌صورت آشفتگی در میدان سرعت نشان می‌دهند و در واقع توانایی یک مدل زیرشبکه در در نظر گرفتن

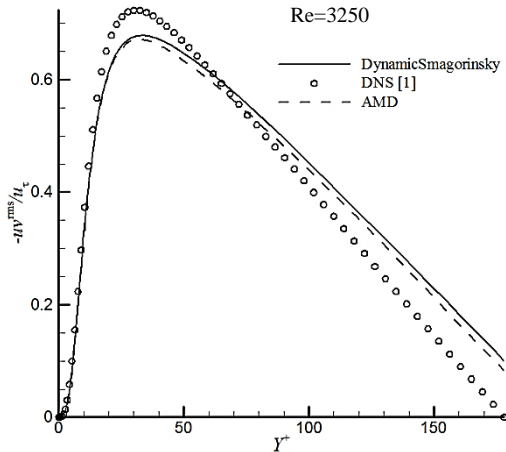


Fig. 8 Profiles of the normalized turbulent shear stress,  $-\langle u'v' \rangle / u_\tau^2$  for Re = 3250.

شکل 8 پروفیل‌های تنش برشی آشفتگی بی‌بعد برای رینولدز 3250

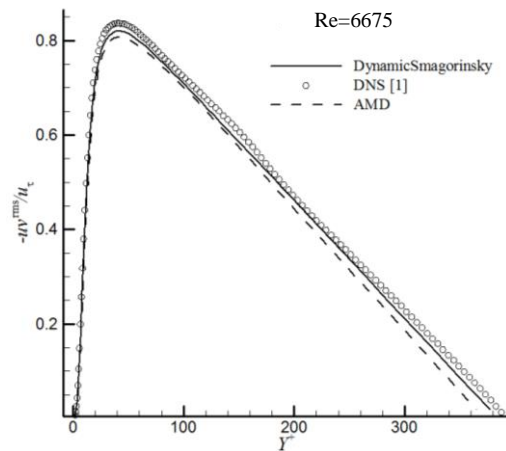


Fig. 9 Profiles of the normalized turbulent shear stress,  $-\langle u'v' \rangle / u_\tau^2$  for Re = 6675

شکل 9 پروفیل‌های تنش برشی آشفتگی بی‌بعد برای رینولدز 6675

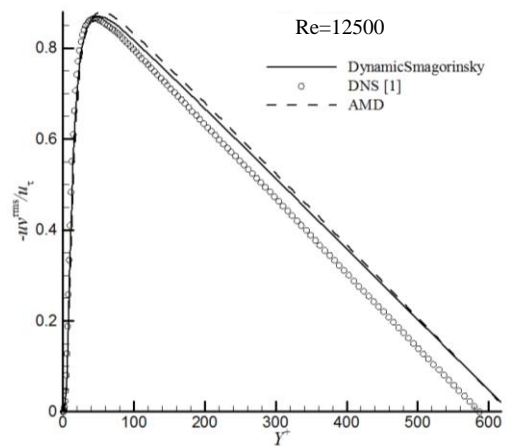


Fig. 10 Profiles of the normalized turbulent shear stress,  $-\langle u'v' \rangle / u_\tau^2$  for Re = 12500

شکل 10 پروفیل‌های تنش برشی آشفتگی بی‌بعد برای رینولدز 12500

این‌فوم، مورد ارزیابی و بررسی در جریان آشفته داخل کانال قرار گرفت. نتایج به‌دست آمده از این مدل زیرشبکه‌ای با نتایج مدل زیرشبکه‌ای اسماغورینسکی دینامیکی و برای سه عدد رینولدز مختلف مورد مقایسه قرار داده شد. مدل AMD به عنوان یک مدل استاتیکی که اثر مقیاس‌های زیرشبکه‌ای را به‌صورت غیرهمجهت در نظر می‌گیرد، پیش‌بینی‌های بسیار

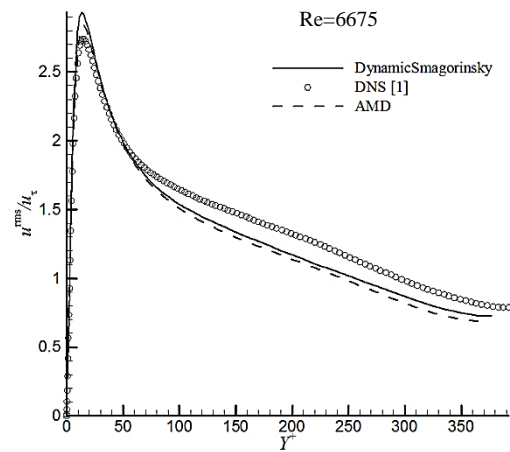


Fig. 6 Profiles of the normalized standard deviation of the streamwise component of velocity,  $u^{rms} / u_\tau$  for Re = 6675

شکل 6 پروفیل‌های بی‌بعد انحراف استاندارد مولفه محوری سرعت برای عدد رینولدز 6675

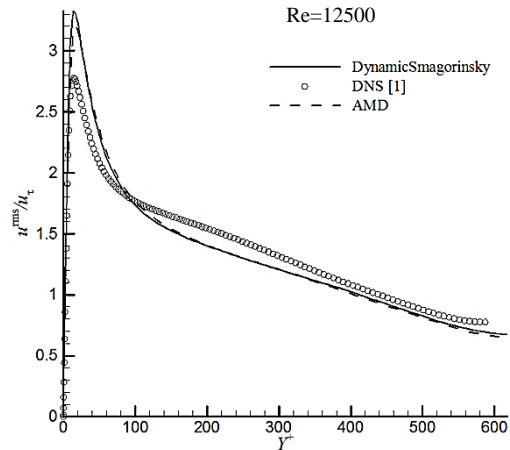


Fig. 7 Profiles of the normalized standard deviation of the streamwise component of velocity,  $u^{rms} / u_\tau$  for Re = 12500

شکل 7 پروفیل‌های بی‌بعد انحراف استاندارد مولفه محوری سرعت برای عدد رینولدز 12500

نواحی نزدیک دیواره بیشتر از مدل اسماغورینسکی دینامیکی بوده است درحالی‌که در نواحی دورتر از دیواره تقریباً نتایج یکسانی برای هر دو مدل به‌دست آمده است.

مولفه‌های تانسور تنش رینولدز از کمیت‌های بنیادین در توصیف اغتشاشات آشفتگی محسوب می‌شوند. در "شکل‌های 8 الی 10"، نمودارهای مولفه‌ی  $xy$  تانسور تنش اغتشاشی (مولفه‌های غیر قطر اصلی) برای سه عدد رینولدز مختلف رسم شده است. منفی این کمیت، به عنوان تنش برشی آشفتگی نام‌گذاری شده است. با توجه به تقارن جریان، مولفه‌های تنش اغتشاشی  $zy$  و  $zx$  برابر صفر می‌باشند. همان‌طور که مشاهده می‌شود در هر سه عدد رینولدز هر دو مدل AMD و اسماغورینسکی دینامیکی نتایج تقریباً مشابهی را به‌دست داده‌اند. قابل ذکر است که دقت بالای مدل AMD در محاسبه تنش برشی که همان مرتبه دوم سرعت به شمار می‌آید نشان‌دهنده توانمندی مناسب این مدل در تحلیل جریان آشفته می‌باشد.

### 5- نتیجه‌گیری

در این مطالعه یک مدل زیرشبکه‌ای جدید موسوم به مدل زیرشبکه‌ای غیرهمسانگرد با کمترین اتلافات (AMD) پس از اعمال به بسته‌ی نرم‌افزاری

- [6] P. Moin, K. D. Squires, S. Lee, A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport, *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, Vol. 3, No. 1, pp. 2746-2757, 1991.
- [7] R. Verstappen, S. Bose, J. Lee, H. Choi, P. Moin, A dynamic Eddy-Viscosity model based on the invariants of the Rate-of-strain, *Proceedings of the Summer Program*, Stanford University, Stanford, pp. 183-192, 2010.
- [8] R. Verstappen, When does eddy viscosity damp subfilter scales sufficiently?, *Journal of Scientific Computing*, Vol. 16, No. 1, pp. 421-430, 2011.
- [9] H. J. Bae, W. Rozema, P. Moin, R. Verstappen, Minimum-dissipation models for large-eddy simulation, *Physics of Fluids*, Vol. 27, No. 8, pp. 085107, 2015.
- [10] M. Abkar, H. J. Bae, P. Moin, Minimum-dissipation scalar transport model for large-eddy simulation of turbulent flows, *Physical Review Fluids*, Vol. 1, No. 4, pp. 041701, 2016.
- [11] P. J. Mason, D. J. Thomson, Stochastic backscatter in large-eddy simulations of boundary layers, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 242, No. 1, pp. 51-78, 1992.
- [12] F. Port'e-Agel, C. Meneveau, M. B. Parlange, A scale-dependent dynamic model for large-eddy simulation: Application to a neutral atmospheric boundary layer, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 415, No. 1, pp. 261-284, 2000.
- [13] E. Bou-Zeid, C. Meneveau, M. Parlange, A scale-dependent Lagrangian dynamic model for largeeddy simulation of complex turbulent flows, *Physics of Fluids*, Vol. 17, No. 2, pp. 025105, 2005.
- [14] C. Meneveau, T. S. Lund, W. H. Cabot, A Lagrangian dynamic subgrid-scale model of turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 319, No. 1, pp. 353-385, 1996.
- [15] B. Vreman, B. Geurts, H. Kuerten, Large-eddy simulation of the turbulentmixing layer, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 339, No. 1, pp. 357-390, 1997.

دقیقی از سرعت اصطکاکی، پروفیل‌های سرعت و کمیت‌های آشفتگی جریان داخل کانال ارائه نمود و دقت این نتایج حتی در مواردی بهتر از مدل اسماکورینسکی دینامیکی به‌دست آمد. مدل AMD برای گستره‌ی وسیعی از اعداد رینولدز، از جریان در حال گذار ( $Re = 3250$ ) گرفته تا جریان کاملا آشفته نتایجی با دقت بسیار بالا ارائه نمود. با توجه به نتایج حاصل در این تحقیق و نتایج مرجع [10] مدل AMD می‌تواند به‌عنوان یک مدل توانمند در کنار مدل‌های زیرشبکه‌ای دینامیکی معرفی گردد.

## 6- مراجع

- [1] R. D. Moser, J. Kim, N. N. Mansour, Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re = 590$ , *Physics of Fluids*, Vol. 11, No. 4, pp. 943-945, 1999.
- [2] C. Fureby, F. F. Grinstein, Large eddy simulation of high-Reynolds-number free and wall-bounded flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 181, No. 1, pp. 68-97, 2002.
- [3] J. Smagorinsky, General circulation experiments with the primitive equations: I. the basic experiment\*, *Monthly Weather Review*, Vol. 91, No. 3, pp. 99-164, 1963.
- [4] J. Deardorff, The use of subgrid transport equations in a three-dimensional model of atmospheric turbulence, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 95, No. 3, pp. 429-438, 1973.
- [5] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, W. H. Cabot, A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model, *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics (1989-1993)*, Vol. 3, No. 7, pp. 1760-1765, 1991.