



## بررسی تمرکز تنش در مواد مرکب تک لایه یک جهته با ترک‌های زاویه دار و دندانه‌ای

سعید رهنما<sup>1\*</sup>، مهدی ملکی<sup>2</sup>

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه بیرجند، بیرجند

2- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک طراحی کاربردی، دانشگاه بیرجند، بیرجند

\* بیرجند، صندوق پستی 97175/615، srahnama@birjand.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 07 مهر 1394

پذیرش: 15 آبان 1394

ارائه در سایت: 18 آذر 1394

کلید واژگان:

تک لایه ماده مرکب

شیر لگ

تمرکز تنش ترک

زاویه دار

دندانه‌ای

### چکیده

در این مقاله با استفاده از مدل شیرلگ اصلاح شده و اثر بر هم نهی، به بررسی تمرکز تنش در یک ماده مرکب الیافی یک جهته با ترک‌های نامتقارن (زاویه دار و دندانه‌ای) پرداخته شده است. بر خلاف مدل اولیه شیرلگ، در مدل اصلاح شده فیبر و زمینه هر دو دارای قابلیت تحمل بار کششی می‌باشند. با استفاده از معادلات تعادل فیبر و زمینه برای یک المان حجمی معادلات تفاضل دیفرانسیلی استخراج و با اعمال شرایط مرزی، معادلات میدان‌های جابجایی و تنش حل می‌شوند. با استفاده از روش بر هم نهی برای تک لایه‌ای با تعداد  $N$  فیبر و  $r$  فیبر شکسته حداکثر تمرکز تنش در نوک ترک‌های زاویه دار و دندانه‌ای محاسبه می‌شود. نتایج ضعف مدل اولیه شیرلگ در بررسی دقیق تمرکز تنش در مواد مرکب تک لایه برای مقادیر بزرگتر نسبت مدول الاستیسیته زمینه به الیاف را نشان می‌دهد. در ماده مرکب شیشه- اپوکسی با ترک‌های نامتقارن دندانه‌ای و زاویه دار در مدل اصلاح شده، بیشینه تمرکز تنش نسبت به ترک هم‌راستا به ترتیب 39 و 43 درصد کاهش می‌یابد. با افزایش نسبت مدول الاستیسیته زمینه به فیبر، بیشینه ضریب تمرکز تنش در اولین فیبر سالم نوک ترک کاهش می‌یابد. هنگامی که نسبت مدول الاستیسیته زمینه به فیبر به سمت صفر میل می‌کند، نتایج مدل حاضر تطابق خوبی با مدل شیرلگ اولیه نشان می‌دهد.

## An investigation on the stress concentration factor in unidirectional composite lamina with angled and staggered cracks

Saeed Rahnama\*, Mehdi Maleki

Department of Mechanical Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran

\* P.O.B 97175/615 Birjand, Iran, srahnama@birjand.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 29 September 2015

Accepted 06 November 2015

Available Online 09 December 2015

Keywords:

Composite Lamina

Shear-Lag

Modified Shear-Lag

Crack Stress Concentration

Angled

Staggered

### ABSTRACT

In this paper by use of modified shear-lag model and superposition technique, the stress concentration factor in a unidirectional composite lamina with angled and staggered cracks is investigated. Unlike classical shear-lag model, in modified model, both the fiber and matrix are able to sustain axial loads. The differential-difference equations of equilibrium were derived and solved for displacements and stress fields within the lamina for a unit cell of fiber and matrix. The maximum stress concentration factor of lamina with angled and staggered breaks was calculated for a total fiber  $N$  and row of  $r$ , and number of broken fiber using superposition technique. Results show that the classical shear-lag model cannot predict the stress concentration factor accurately when value of Matrix-to-Fiber moduli ratio is increased. In glass-epoxy lamina with staggered and angled cracks, the maximum stress concentration factor decreases by 39% and 43%, respectively, versus the aligned fiber breaks. By increasing the Matrix-to-Fiber moduli and Matrix-to-Fiber volume fraction ratios the maximum stress concentration factor decreases. As Matrix-to-Fiber moduli approaches to zero, results are in good agreement with primary shear-lag model.

### 1- مقدمه

هچپت، مدل اولیه شیرلگ را در تحلیل مواد مرکب ارائه نمود. در این مدل فرض می‌شود که کل بار کششی توسط الیاف تحمل شده و زمینه فقط بار برشی را تحمل می‌کند [1]. هچپت و ون دایک، برای یک تک لایه ماده مرکب با بارگذاری کششی در بی‌نهایت و در امتداد الیاف ضریب تمرکز تنش در اولین فیبر سالم (در حضور یک ترک) را محاسبه و گزارش نمودند [2,3]. رزتوس و شیشه ساز با استفاده از تئوری شیرلگ اصلاح شده، توزیع تنش در مجاورت الیاف شکسته در یک تک لایه را محاسبه نمودند. در این تئوری

در مواد مرکب تقویت شده با الیاف، به دلیل توزیع تصادفی مقاومت الیاف، در حین بارگذاری، بعضی از الیاف شکسته شده و منجر به انتقال تنش از الیاف بریده به الیاف سالم می‌شود. بررسی تمرکز تنش در اطراف الیاف شکسته شده که بیانگر ترک در ماده مرکب است از اهمیت خاصی برخوردار است. بنابراین پیش‌بینی دقیق شکست مواد مرکب نیازمند دانش و آگاهی جامع از وضعیت تنش در اطراف الیاف شکسته شده می‌باشد. مدل شیرلگ یکی از مدل‌های شناخته شده برای بررسی تمرکز تنش در مواد مرکب می‌باشد.

Please cite this article using:

S. Rahnama, M. Maleki, An investigation on the stress concentration factor in unidirectional composite lamina with angled and staggered cracks, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 12, pp. 472-480, 2015 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

S. Rahnama, M. Maleki, An investigation on the stress concentration factor in unidirectional composite lamina with angled and staggered cracks, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 12, pp. 472-480, 2015 (in Persian)

میکروسکوپ‌های الکترونی از ترک‌های واقعی و سطح شکست ایجاد شده در مواد مرکب بیانگر انحراف بریدگی الیاف از مرکز تقارن تک‌لایه می‌باشد به طوری که شکست الیاف و زمینه دقیقاً در راستای عرضی و مستقیم نبوده و شکست فیبرها نسبت به صفحه تقارن عمودی ورق انحراف دارد. این امر منجر به تغییرات قابل ملاحظه‌ای در ضریب تمرکز تنش در نوک ترک می‌گردد. تنها تحقیقی که در این خصوص انجام شده است، مرجع [6] می‌باشد که با استفاده از مدل اولیه شیرلگ که در آن فیبر تمام بار کششی و زمینه فقط برش را تحمل می‌نماید، به بررسی تمرکز تنش و تأثیر این نوع آرایش شکست فیبرها پرداخته شده است.

شکل 1، تصویر میکروسکوپ الکترونی روبشی<sup>2</sup> از سطح شکست یک ماده مرکب را نشان می‌دهد [14]. پر واضح است که شکست فیبرها و زمینه دقیقاً در امتداد یک خط راست نمی‌باشد. بنابراین بررسی توزیع تنش در ترک‌های واقعی مورد توجه پژوهشگران می‌باشد. در تحقیق حاضر ابتدا با استفاده از مدل شیرلگ اصلاح شده، معادلات حاکم در حالت کلی برای یک تک‌لایه ماده مرکب با بریدگی‌های فیبر هم‌راستا استخراج شده و سپس برای حالت ترک‌های نامتقارن دندانه‌ای و زاویه‌دار تعمیم داده می‌شود.

## 2- روش تحلیل

در شکل 2 تک لایه‌ی ماده مرکبی شامل الیاف با مقطع دایره‌ای شکل و تحت بار کششی  $p$  در بی‌نهایت و در راستای الیاف در نظر گرفته شده است. در شکل 3 مقطع تک‌لایه ماده مرکب مورد نظر و همچنین در شکل 2 المان حجمی<sup>3</sup> مورد نظر برای استخراج معادلات تعادل نشان داده شده است.

در این تحقیق، با استفاده از مدل شیرلگ اصلاح شده که در آن زمینه می‌تواند علاوه بر نیروی برشی، بار کششی را نیز تحمل کند [4]، توزیع تنش در تک‌لایه در حضور یک ترک بررسی می‌شود. شکل 2 تک لایه‌ای شامل  $N$  فیبر و  $r$  فیبر شکسته هم‌راستا با محور  $y$  می‌باشد. ترک در وسط صفحه قرار نداشته و از مرکز ورق دارای خروج از مرکزیت در راستای محور  $y$  است و اولین فیبر شکسته آن  $nrs$  می‌باشد.



**Figure 1** SEM photograph of fracture surfaces of a graphite/epoxy laminate [14]

شکل 1 تصویر میکروسکوپ الکترونی روبشی از سطح شکست یک چندلایه ماده مرکب گرافیت/اپوکسی [14]

فرض می‌شود که ماتریس علاوه بر بار برشی، بار کششی را نیز تحمل می‌کند. با کاهش نسبت مدول الاستیک زمینه به الیاف نتایج آنها بر نتایج هجیث [11] منطبق می‌شود [4].

سستری و فونیکس [6,5] به بررسی تمرکز تنش در مواد مرکب تک لایه با آرایش بریدگی‌های الیاف ناهم راستای زاویه‌دار و دندانه‌ای با استفاده از مدل اولیه شیرلگ و روش برهم‌نهی پرداختند. آنها نشان دادند که بیشینه ضریب تمرکز تنش در آرایش بریدگی الیاف دندانه‌ای و زاویه‌دار نسبت به ترک هم راستا به میزان 51 درصد و 64 درصد کاهش را نشان می‌دهد.

ایرن، بیرلین و لاندیس با استفاده از مدل اصلاح شده و روش المان محدود به بررسی تمرکز تنش در مواد مرکب تک‌لایه تک‌جهته پرداختند. نتایج برای زمینه‌های ضعیف منطبق بر کار اولیه هجیث می‌باشد [7].

چاد، لاندیس و مک میکینگ با استفاده از مدل اصلاح شده و با در نظر گرفتن لغزش بین زمینه و الیاف به بررسی توزیع تنش در مواد مرکب فیبری با فواصل الیاف نامساوی پرداختند [8].

هیوویل و همکارانش برای یک تک‌لایه ماده مرکب با استفاده از روش طیف‌نمایی رامان<sup>1</sup>، تأثیر تنش تسلیم برشی ماتریس و همچنین فاصله بین الیاف را بر بیشینه تمرکز تنش بررسی کردند [9].

زیا و همکاران با استفاده از مدل شیرلگ و روش المان محدود به بررسی انتقال تنش در مواد مرکب تقویت شده با فیبر پرداختند [10].

انگوستوپولوس و همکارانش توزیع تنش برشی در ماتریس و تنش عمودی در امتداد الیاف را از طریق انجام آزمایش‌های طیف‌نمایی رامان بررسی نمودند و نشان دادند که نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از مدل شیرلگ تطابق خوبی دارد [11].

شیشه‌ساز و ملکی به بررسی تأثیر فاصله بین الیاف و شکل مقطع الیاف بر توزیع تنش در مواد مرکب تک‌لایه با استفاده از مدل شیرلگ و مدل اصلاح شده شیرلگ پرداختند. نتایج نشان داد با افزایش فاصله بین الیاف حداکثر ضریب تمرکز تنش و حداکثر تنش برشی کاهش می‌یابد و همچنین در الیاف با مقطع مثلثی شکل، با کاهش زاویه قاعده مثلث حداکثر تنش برشی کاهش چشمگیری خواهد داشت به طوری که در زاویه 30 درجه و کسر حجمی الیاف به زمینه 50 درصد، حداکثر تنش برشی 32 درصد کاهش می‌یابد [12].

نارین با استفاده از مدل شیرلگ در مختصات قطبی به بررسی توزیع تنش در استوانه‌های هم‌مرکز با ترک‌های طولی پرداخت. مدل جدید شیرلگ به خوبی توزیع تنش در هرلایه را در حضور میکروتُرک‌ها پیش‌بینی می‌نماید [13].

تاکنون تحقیقی در خصوص بررسی توزیع تنش در مواد مرکب الیافی تک‌لایه با آرایش نامتقارن ترک و همچنین ادغام مدل شیرلگ اصلاح شده و روش برهم‌نهی انجام نشده است. در بسیاری از مقالات معمولاً هندسه صفحه ترک‌دار متقارن فرض می‌شود. در این تحقیق یک تک‌لایه ماده مرکب با  $N$  فیبر که در آن  $r$  فیبر به صورت نامتقارن و با آرایش زاویه‌دار و دندانه‌ای دچار شکست شده‌اند و در بی‌نهایت تحت نیروی کششی  $p$  قرار گرفته است، تحلیل می‌شود. در کارهای انجام شده و نیز بسیاری از مقاله‌های مشابه که از روش شیرلگ برای تحلیل مواد مرکب استفاده می‌کنند، معمولاً هندسه ترک به صورت متقارن در نظر گرفته شده و بریدگی الیاف (ترک) در امتداد یک خط راست و عمود بر امتداد اعمال بار کششی می‌باشند. تصاویر

2- Scanning Electron Microscope (SEM)  
3- Representative Volume Element (RVE)

1- Raman Spectroscopic

عبارت  $e_{n,n-1}$  به صورت رابطه (3) تعریف می شود.

$$e_{n,n-1} = u_n + u_{n-1} - 2u_{n,n-1}^m \quad (3)$$

که  $h$  ضخامت تک لایه،  $d_0$  فاصله بین الیاف ها،  $G$  مدول برشی زمینه و  $p_{n,n-1}^m$  نیروی زمینه بین الیاف  $n$  و  $n-1$  می باشد.

به منظور تشریح نیروی  $p_{n,n-1}^m$  بر حسب تغییر مکان های فیبر و زمینه  $n, n-1$  می توان تغییر مکان در این لایه از زمینه را به صورت (4) نوشت:

$$u_{n,n-1} = u_{n,n-1}^m + B_{n,n-1}y + D_{n,n-1}y^2 \quad (4)$$

در معادله (4)،  $u_{n,n-1}^m$  تغییر مکان مرکز لایه زمینه ای است که بین فیبر  $n$  و  $n-1$  قرار دارد.

با استفاده از شرایط مرزی ثابت های  $B_{n,n-1}$  و  $D_{n,n-1}$  بر حسب تغییر مکان های فیبر و زمینه محاسبه می شوند. بر اساس مقادیر بدست آمده برای ثابت های معادله (4)، تغییر مکان در ماتریس به صورت معادله (5) است.

$$u_{n,n-1} = u_{n,n-1}^m + \left(\frac{u_n - u_{n-1}}{d_0}\right)y + \frac{2}{(d_0)^2}(u_n + u_{n-1} - 2u_{n,n-1}^m)y^2 \quad (5)$$

با استفاده از معادلات الاستیک خطی، نیروی کششی در لایه زمینه  $n, n-1$  به صورت رابطه (6) نوشته می شود.

$$p_{n,n-1}^m = E_m A_m \left[ \frac{du_{n,n-1}^m}{dx} + \frac{1}{6} \left( \frac{de_{n,n-1}}{dx} \right) \right] \quad (6)$$

$E_m$  مدول الاستیک زمینه و  $A_m = hd_0$  است.

به منظور استخراج معادله تعادل فیبر  $n$  ام، فرض می شود تغییر مکان عرضی در امتداد فیبر یکنواخت بوده و معادله (7) به دست می آید.

$$\tau_{xy} = G \left( \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta \vartheta}{\delta x} \right) = G \frac{\delta u}{\delta y} \quad (7)$$

با استفاده از معادله تعادل نیرو در فیبر  $n$  ام، رابطه (8) حاصل می شود.

$$E_f A_f \frac{d^2 u_n}{dx^2} + \frac{Gh}{d_0} (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) - \frac{2Gh}{d_0} (e_{n+1,n} + e_{n,n-1}) = 0 \quad (8)$$

با توجه به معادله (3)، رابطه (1) برای  $2 \leq n \leq N-1$  به صورت معادله (9) خلاصه می شود.

$$\frac{E_m A_m}{2} \left[ \frac{d^2 u_n}{dx^2} + \frac{d^2 u_{n-1}}{dx^2} - \frac{2}{3} \left( \frac{de_{n,n-1}^2}{dx^2} \right) \right] + \frac{4Gh}{d_0} (e_{n,n-1}) = 0 \quad (9)$$

### 3- بی بعد سازی معادلات

به منظور سهولت در حل معادلات بدست آمده، پارامترهای بدون بعد  $U_n$ ،  $e_{n,n-1}$ ،  $p_{n,n-1}^m$ ،  $S_{xy}$ ،  $SCF$ ،  $P_{n,n-1}^m$ ،  $\xi$ ،  $E_{n,n-1}$  و  $\psi$  به صورت روابط (10) تعریف می شوند:

$$x = \sqrt{\frac{E_f A_f d}{Gh}} \xi,$$

$$u_n = \sqrt{\frac{d}{E_f A_f Gh}} U_n,$$

$$u_{n,n-1}^m = \sqrt{\frac{d}{E_f A_f Gh}} U_{n,n-1}^m,$$

$$e_{n,n-1} = p \sqrt{\frac{d}{E_f A_f Gh}} E_{n,n-1}$$

$$p_{n,n-1}^m = p P_{n,n-1}^m,$$

$$p_n = p \cdot P_n,$$

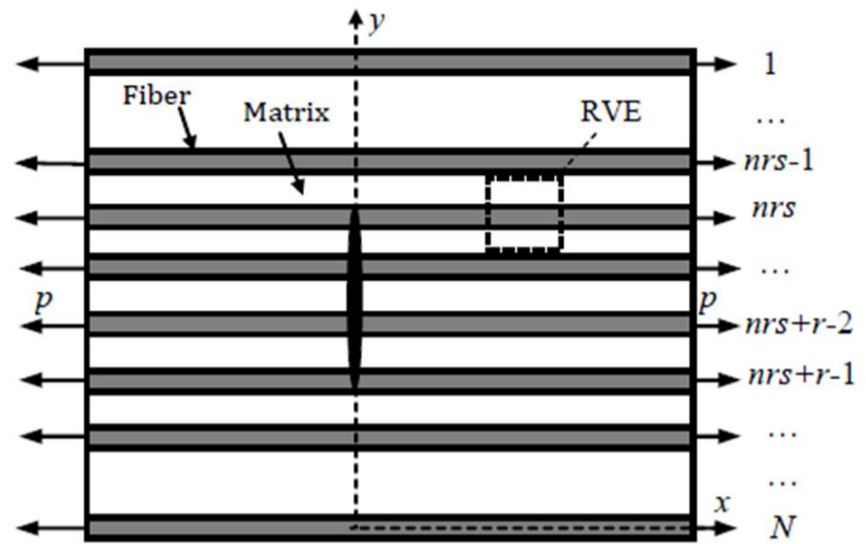


Figure 2 A 2D-unidirectional fiber composite model, containing non-symmetric transverse row of  $r$  fiber breaks

شکل 2 مدل دو بعدی تک لایه ماده مرکب شامل یک ترک عرضی نامتقارن

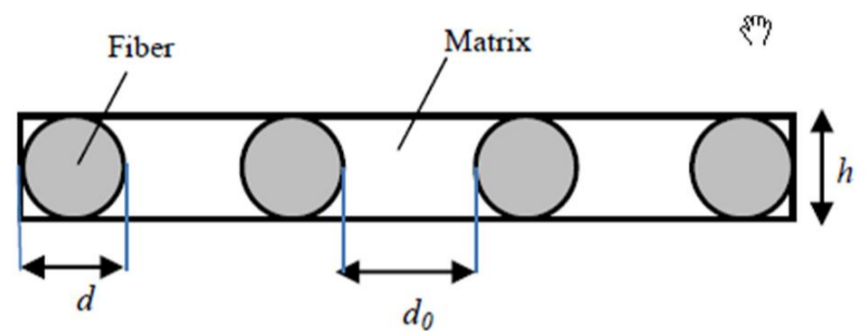


Figure 3 Lamina section with circular cross-section fibers

شکل 3 مقطع تک لایه ماده مرکب با الیاف دایره ای شکل.

به منظور محاسبه تنش های حاصل در تک لایه مرکبی که در آن الیاف به صورت دایره ای شکل هستند (شکل 3)، مقطع الیاف بصورت یک مستطیل  $d \times h$  منظور شده است. همچنین از تغییر شکل برشی در الیاف صرف نظر شده و پیوند بین الیاف و زمینه کامل در نظر گرفته شده است و الیاف و زمینه تا لحظه شکست دارای رفتار الاستیک خطی می باشند.

بر اساس شکل 4، معادله تعادل نیرو در زمینه زیر فیبر  $n$  ام به صورت معادله (1) است:

$$\frac{dp_{n,n-1}^m}{dx} + h(\Delta\tau_{xy})_{n,n-1} = 0 \quad (1)$$

کمیت  $(\Delta\tau_{xy})_{n,n-1}$  به صورت رابطه (2) نوشته می شود.

$$(\Delta\tau_{xy})_{n,n-1} = \int_{-\frac{d_0}{2}}^{\frac{d_0}{2}} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right)_{n,n-1} dy = \frac{4G}{d_0} (e_{n,n-1}) \quad (2)$$

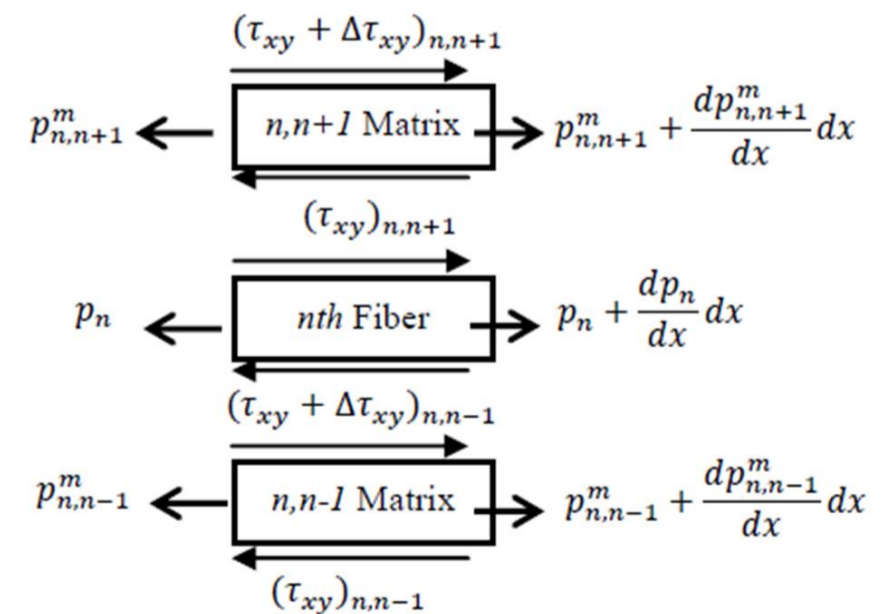
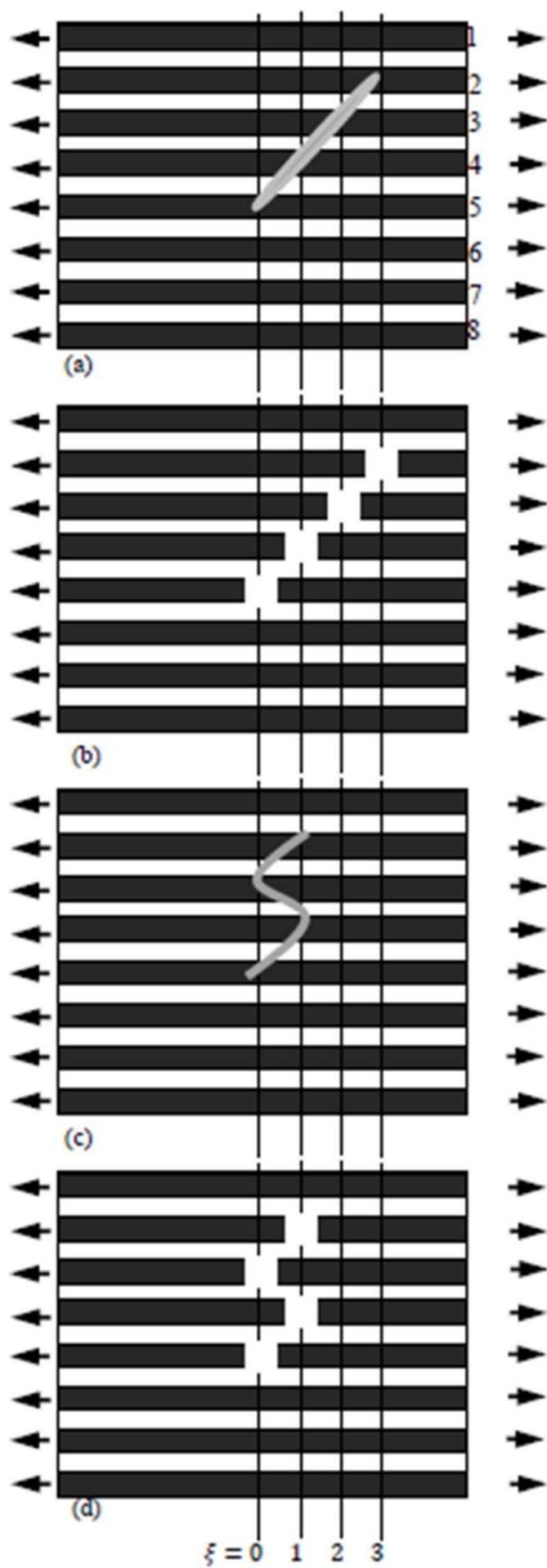


Figure 4 Force equilibrium of Representative Volume Element (RVE) shown in figure 1

شکل 4 تعادل نیروها در المان حجمی مشخص شده در شکل 1





**Figure 5** crack path geometry in a composite lamina, (a) Real angled crack, (b) Simplified angled crack [6], (c) Real Staggered crack, (d) Simplified Staggered crack [6]

شکل 5 هندسه مسیر ترک در یک ماده مرکب تک‌لایه، (a) ترک واقعی زاویه‌دار، (b) ترک زاویه‌دار ساده سازی شده [6]، (c) ترک واقعی دندانه‌ای، (d) ترک دندانه‌ای ساده سازی شده [6]

(مجاور فیبر شماره 2) محاسبه شده و سپس ضریب تمرکز تنش کل محاسبه می‌گردد. به طور مثال برای حالتی که تک‌لایه فقط شامل فیبر شکسته شماره 5 باشد، ضریب تمرکز تنش در فیبر شماره 1 در  $\xi = 3$  محاسبه می‌شود. به همین ترتیب برای فیبرهای شکسته شده شماره 4، 3 و 2، باید ضریب تمرکز تنش را در فیبر شماره 1 به ترتیب در  $\xi = 2$ ،  $\xi = 1$  و  $\xi = 0$  محاسبه و سپس روش برهم‌نهی را اعمال نمود.

شکل 5c و 5d به ترتیب مدل واقعی و مدل ساده شده آرایش شکست

$$SCF = (P_n)_{\max} = \frac{(p_n)_{\max}}{p}$$

$$\tau_{xy} = p \sqrt{\frac{d}{E_f A_f G h}} S_{xy}$$

$$\frac{1}{\eta} = \frac{V_m}{V_f} = \frac{d_0}{d} \quad (10)$$

همچنین با توجه به سطح مقطع فیبرها در شکل (3)، پارامتر  $\psi$  به صورت معادله (11) می‌باشد.

$$\psi = \frac{1}{2} \left( \frac{A_m E_m}{A_f E_f} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{d_0 E_m}{d E_f} \right) = \frac{1}{2\eta} \frac{E_m}{E_f} \quad (11)$$

که در آن  $V_m$  و  $V_f$  به ترتیب کسرهای حجمی فیبر و زمینه هستند.

با استفاده از پارامترهای بدون بعد (10) و (11)، معادلات تعادل به

صورت (12) تا (15) خواهند بود.

$$\frac{d^2 U_n}{d\xi^2} + \eta(-U_{n+1} - 6U_n - U_{n-1}) + 4\eta U_{n+1,n}^m + 4\eta U_{n+1,n}^m = 0 \quad 2 \leq n \leq N-1 \quad (12)$$

$$\frac{\psi}{3} \left( \frac{d^2 U_n}{d\xi^2} + \frac{d^2 U_{n-1}}{d\xi^2} + 4 \frac{d^2 U_{n,n-1}^m}{d\xi^2} \right) + 4\eta(U_n + U_{n-1} - 2U_{n,n-1}^m) = 0 \quad 2 \leq n \leq N-1 \quad (13)$$

$$\frac{d^2 U_n}{d\xi^2} + \eta(-3U_n - U_{n-1}) + 4\eta U_{n+1,n}^m = 0 \quad n = 1 \quad (14)$$

$$\frac{d^2 U_n}{d\xi^2} + \eta(-3U_n - U_{n-1}) + 4\eta U_{n,n-1}^m = 0 \quad n = N \quad (15)$$

معادلات بدون بعد (12) تا (15) شامل  $2N-1$  معادله و  $2N-1$  مجهول،

شامل جایابی الیاف و زمینه  $(U_{n,n-1}^m$  و  $U_n)$  می‌باشند که پس از اعمال

شرایط مرزی به دست می‌آیند.

معادلات و روابط اشاره شده در این بخش حالت کلی یک تک‌لایه با  $N$

فیبر و تعداد  $r$  فیبر شکسته هم راستا که از فیبر  $nrs$  ام شروع می‌شوند را

شامل می‌شد. برای بررسی تمرکز تنش در حالت بریدگی‌های الیاف نامتقارن

زاویه‌ای و دندانه‌ای، از روش برهم‌نهی استفاده می‌شود. در این روش برای

یک ماده مرکب با تعداد  $r$  فیبر شکسته، تأثیر هر فیبر شکسته به صورت مجزا

در نوک ترک محاسبه و ضریب تمرکز تنش کلی محاسبه می‌گردد. شکل 5،

روش برهم‌نهی برای تک‌لایه‌ای با تعداد  $r=4$ ،  $N=8$  و آرایش زاویه‌دار و

دندانه‌ای را نشان می‌دهد.

برای توضیح نحوه اعمال مدل شیرلگ اصلاح شده و روش برهم‌نهی،

تک‌لایه‌ای با تعداد 4 فیبر شکسته‌شده با دو آرایش شکست زاویه‌دار و

دندانه‌ای در نظر گرفته شده است. شکل 5a، حالت واقعی مسیر ترک

(شکست فیبر و زمینه) در یک تک‌لایه ماده مرکب و شکل 5b، مدل

ساده‌سازی شده آرایش شکست زاویه‌دار فیبرها را نشان می‌دهد [6]. برای

اینکه بتوان توزیع تنش در ماده مرکب شامل ترک‌های زاویه‌دار را با استفاده

از مدل شیرلگ به دست آورد، باید به تعداد فیبرهای شکسته‌شده، تک‌لایه با

تعداد یک فیبر شکسته در نظر گرفت و با روش برهم‌نهی ضریب تمرکز تنش

در اثر  $r$  فیبر شکسته را در نوک ترک محاسبه نمود. شکست فیبرها به صورت

اغراق آمیز و با استفاده از مربع‌های توخالی و عمود بر امتداد محور افقی نشان

داده شده است. در این مدل زمینه علاوه بر بار کششی، بار برشی را نیز تحمل

می‌نماید. 4 فیبر به ترتیب در  $\xi = 0, 1, 2, 3$  دچار شکست شده‌اند. بیشترین

ضریب تمرکز تنش در مجاورت نوک ترک یعنی مجاور فیبرهای شماره 5 و 2

اتفاق می‌افتد. برای محاسبه ضریب تمرکز تنش در نوک ترک، با استفاده از

روش برهم‌نهی تأثیر چهار فیبر شکسته شده تکی به طور مجزا در نوک ترک

### 5- نتایج و بحث

در این تحقیق با استفاده از مدل شیرلگ اصلاح شده به بررسی توزیع تنش در یک تک‌لایه ماده مرکب شامل ترک‌هایی با هندسه‌های مختلف پرداخته شده است. نتایج به دست آمده برای مواد مرکب بورون-اپوکسی ( $E_f=400$  GPa و  $E_m=3.45$  GPa)، شیشه-اپوکسی ( $E_f=70$  GPa،  $E_m=3.45$  GPa) و ماده مرکب با زمینه فلزی ( $E_f=400$  GPa،  $E_m=134$  GPa) مورد بررسی قرار گرفته است. علاوه بر هندسه ترک، تأثیر نسبت مدول الاستیسیته زمینه به الیاف ( $E_m/E_f$ ) و درصد حجمی زمینه به الیاف ( $V_m/V_f$ ) نیز بررسی می‌گردد.

#### 5-1- مدل اصلاح شده با الیاف شکسته هم‌راستا

در مرجع [7]، در یک تک لایه ماده مرکب با استفاده از مدل اصلاح شده و همچنین روش المان محدود و بر هم نهی که شامل تعدادی الیاف شکسته شده بصورت متقارن و هم‌راستا می‌باشد، به بررسی تمرکز تنش پرداخته شده است. در مرجع [7] برای نسبت‌های مختلف ( $\rho = E_m/E_f \times A_m/A_f$ ) و تعداد الیاف شکسته شده مختلف، حداکثر تمرکز تنش در نوک ترک محاسبه شده و کسر حجمی الیاف 50 درصد در نظر گرفته شده است. در تحقیق حاضر برای تک لایه ماده مرکب با آرایش نامتقارن شکست الیاف، با استفاده از مدل اصلاح شده، روش برهم‌نهی و همچنین استفاده از روش ماتریسی حل معادلات تفاضل دیفرانسیلی، نتایج به دست آمده برای بیشینه تمرکز تنش در نوک ترک ( $SCF$ ) در جدول (1) با مرجع [7] مقایسه شده است.

با توجه به جدول 1، تحلیل حاضر برای مدل اصلاح شده در ترک‌های هم-راستا و متقارن تطابق خوبی با نتایج مرجع [7] دارد به طوری که اختلاف در نتایج حداکثر 5 درصد خواهد بود. در شکل 6 نتایج تحلیل حاضر با مرجع [6] برای دو حالت مدل شیرلگ و اصلاح‌شده با هم مقایسه شده‌اند.

جدول 2 نتایج شکل 6 را به صورت خلاصه نشان می‌دهد. نتایج مدل شیرلگ حاضر با مرجع [6] حدود 2 درصد اختلاف دارد. با توجه به اینکه در مدل اصلاح شده زمینه نیز قابلیت تحمل بار کششی را دارد، بیشینه ضریب تمرکز تنش نسبت به شیرلگ اولیه حدود 13% کاهش را نشان می‌دهد.

**جدول 1** مقایسه حداکثر ضریب تمرکز تنش ( $SCF$ ) در ماده مرکب با متقارن با  $r=21$  و  $N=101$  در مدل حاضر با مرجع [7]

**Table 1** Comparison of maximum stress concentration factor of a unidirectional composite lamina containing symmetric fiber breaks with  $N=101$ ,  $r=21$  to ref. [7].

خطا	مرجع (7)	تحلیل حاضر	مدل تحلیل
0.7 %	4.18	4.21	شیرلگ
5 %	3.510	3.70	شیر لگ اصلاح شده $E_m=3.45, E_f=70$ GPa

**جدول 2** مقایسه حداکثر ضریب تمرکز تنش ( $SCF$ ) در تک لایه ماده مرکب با ترک متقارن در مدل حاضر با مرجع [6]

**Table 2** The maximum stress concentration factor ( $SCF$ ) of a unidirectional composite lamina containing symmetric fiber breaks compared to results in ref. [6].

خطا	مرجع (6)	تحلیل حاضر	مدل تحلیل
2 %	2.032	2.08	شیرلگ
-	تحلیل نشده است	1.84	شیر لگ اصلاح شده $E_m=3.45, E_f=70$ GPa

دندانه‌ای فیبرها را نشان می‌دهد [6]. فیبر شماره 3 و 5 در  $\xi = 0$  و فیبر شماره 2 و 4 در  $\xi = 1$  دچار شکست شده‌اند. بیشترین ضریب تمرکز تنش در مجاورت نوک ترک یعنی مجاور فیبرهای شماره 5 و 2 و به ترتیب در  $\xi = 0$  و  $\xi = 1$  اتفاق می‌افتد.

مطابق آنچه برای محاسبه ضریب تمرکز تنش در نوک ترک برای آرایش شکست فیبرهای زاویه‌دار عنوان شد، در اینجا نیز تأثیر تک‌تک فیبرها به طور مجزا در نوک ترک محاسبه شده و سپس روش بر هم نهی اعمال می‌شود. با توجه به اینکه ترک هم‌راستا نمی‌باشد، مطابق مرجع [6]، انتظار می‌رود که حداکثر ضریب تمرکز تنش در نوک ترک به دلیل کاهش اثر پوششی فیبرها<sup>1</sup> بر روی هم کاهش یابد که در بخش نتایج اشاره خواهد شد.

در تک لایه ماده مرکبی با  $N$  فیبر که تعداد الیاف شکسته شده آن برابر  $r$  است، شرایط مرزی در آن به ازای  $\xi = 0$ ، به صورت روابط (16) است.

$$\begin{aligned} U_n(0) &= 0 && \text{الیاف سالم} \\ P_n(0) &= 0 && \text{الیاف شکسته شده} \\ U_{n,n-1}^m(0) &= 0 && \text{زمینه های سالم} \\ P_{n,n-1}^m(0) &= 0 && \text{زمینه های بریده شده} \end{aligned} \quad (16)$$

#### 4- میدان‌های نیرو و تغییر مکان

شکل ماتریسی معادلات بدون بعد (12) الی (15) به صورت رابطه (17) می‌باشد.

$$\tilde{L}_1 \tilde{U}'' - \tilde{L}_2 \tilde{U} = \tilde{0} \quad (17)$$

که در آن  $\tilde{L}_1$  و  $\tilde{L}_2$ ، ماتریس‌های ضرایب می‌باشند.

جواب معادله (17) را می‌توان به شکل معادله (18) نوشت:

$$\tilde{U} = \tilde{R} e^{\lambda \xi} \quad (18)$$

که  $\tilde{R}$  و  $\tilde{U}$  بردارهایی از درجه  $2N-1$  هستند. از جایگزینی معادله (18) در معادله (17) رابطه (19) حاصل می‌شود.

$$(\tilde{L}_2 - \lambda^2 \tilde{L}_1) \tilde{R} = \tilde{0} \quad (19)$$

جواب قابل قبول معادله (19) به ازای مقادیر معینی از  $\lambda$  است که باعث صفر شدن دترمینان  $\tilde{L}_2 - \lambda^2 \tilde{L}_1$  می‌شود.

از آنجا که  $P_n|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 1$ ، لذا مقادیر مثبت  $\lambda_i$  قابل قبول نخواهند بود. عبارت  $\tilde{U}$  در این حالت به صورت معادله (20) می‌باشد.

$$\tilde{U} = C_1 \tilde{R}^1 e^{\lambda_1 \xi} + C_2 \tilde{R}^2 e^{\lambda_2 \xi} + \dots + C_{(2N-1)} \tilde{R}^{(2N-1)} e^{\lambda_{(2N-1)} \xi} \quad (20)$$

در رابطه (20)،  $\tilde{U}$  شامل جابجائی‌های الیاف و زمینه است. بعلاوه، کلیه مقادیر  $\lambda_i$  ها منفی بوده و  $\tilde{R}$  بردار مشخصه متناظر با ریشه  $\lambda_i$  است. با توجه به روابط فوق، جابجایی هر فیبر به صورت رابطه (21) نوشته می‌شود:

$$U_n = \xi + \sum_{i=1}^{2N-1} C_i R_{(2(nrs)-3)}^{(i)} e^{\lambda_i \xi} \quad (21)$$

با مشتق گیری معادله (21) نیروی عمودی بدون بعد در هر فیبر که همان ضریب تمرکز تنش است، به صورت رابطه (22) حاصل می‌شود.

$$SCF = P_n = 1 + \sum_{i=1}^{2N-1} C_i \lambda_i R_{(2(nrs)-3)}^{(i)} e^{\lambda_i \xi} \quad (22)$$

بر اساس شرایط مرزی،  $2N-1$  معادله برای تعیین  $2N-1$  ثابت مجهول (یعنی  $C_i$ ) بدست می‌آید.

1- Shielding effects

لایه‌ای با ترک دندانه‌ای پرداخته شده است. در این تحقیق با استفاده از مدل اصلاح شده به تحلیل تنش در همان تک‌لایه پرداخته می‌شود. مدل ساده‌سازی شده ترک دندانه‌ای در شکل 5d نشان داده شده است. در این ساده شده تعداد  $r$  فیبر بریده شده با آرایش دندانه‌ای قرار گرفته‌اند. در این مدل فیبرهای  $n1, n3, n5, \dots$  در موقعیت  $x=0$  و فیبرهای  $n2, n4, n6, \dots$  در موقعیت  $x=1$  قرار دارند. مقدار  $\xi = 1$  برای کسر حجمی فیبر 50 درصد و  $E_f/G_m = 100$  در مواد مرکب معادل حدود 10 برابر قطر فیبر می‌باشد. به طور مثال برای فیبر کربن با قطر 10 میکرومتر، این انحراف از مرکز ترک حدود 100 میکرومتر خواهد بود.

شکل 8 نمودار تمرکز تنش در نوک ترک برای آرایش بریدگی‌های الیاف دندانه‌ای و هم‌راستا در ماده مرکب شیشه-اپوکسی را نشان می‌دهد.

مطابق شکل 8، بیشینه تمرکز تنش در نوک ترک در مدل شیرلگ (هم‌راستا)، مدل اصلاح شده هم‌راستا و مدل اصلاح شده دندانه‌ای به ترتیب 2.08، 1.82 و 1.31 می‌باشد. بریدگی‌های الیاف با آرایش دندانه‌ای نسبت به آرایش ترک هم‌راستا 39 درصد کاهش حداکثر ضریب تمرکز تنش را نشان می‌دهد.

#### 4-5- مدل شیرلگ اصلاح شده - ترک زاویه‌دار

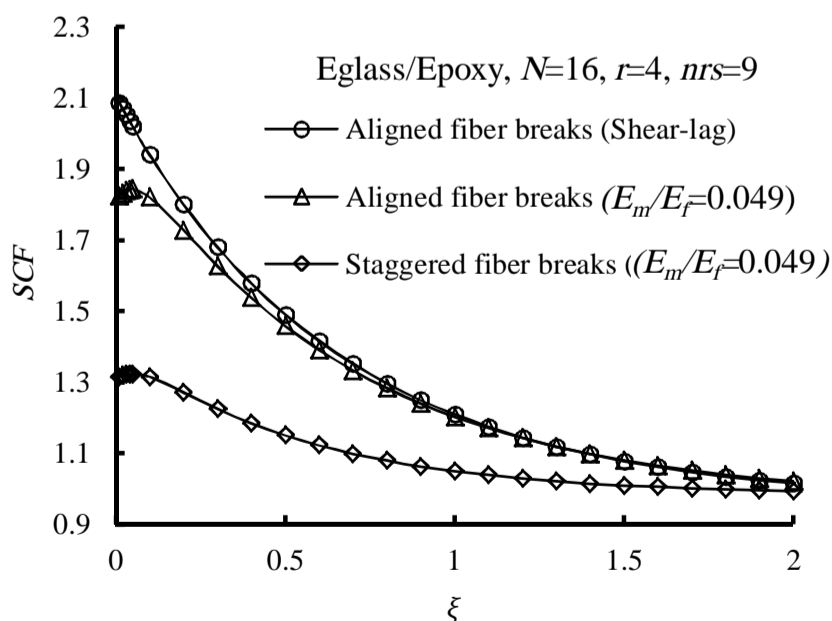
مدل ساده‌سازی شده ترک زاویه‌دار در شکل 5b نشان داده شده است. در مدل ساده شده تعداد  $r$  فیبر شکسته شده با آرایش دندانه‌ای قرار گرفته‌اند. الیاف  $n1, n2, n3, \dots, n_r$  در موقعیت  $x=0, 1, 2, 3, \dots$  قرار دارند.

شکل 9 نمودار تمرکز تنش در نوک ترک برای آرایش بریدگی‌های الیاف زاویه‌دار و هم‌راستا در ماده مرکب شیشه-اپوکسی را نشان می‌دهد.

مطابق شکل 9، بیشینه تمرکز تنش در نوک ترک در مدل شیرلگ (هم‌راستا)، مدل اصلاح شده هم‌راستا و مدل اصلاح شده زاویه‌دار به ترتیب 2.08، 1.82 و 1.27 می‌باشد. بریدگی‌های الیاف با آرایش زاویه‌دار نسبت به آرایش ترک هم‌راستا 43% کاهش بیشینه ضریب تمرکز تنش را نشان می‌دهد.

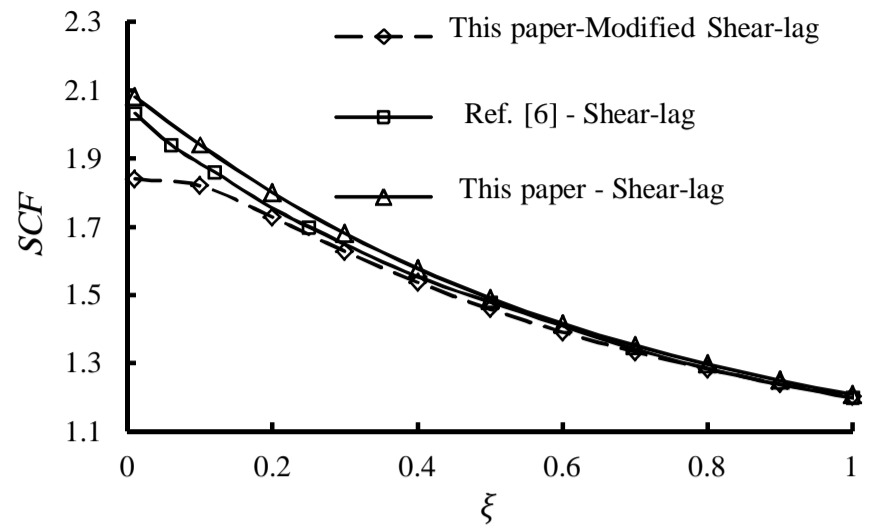
#### 5-5- مقایسه آرایش‌های مختلف ترک - مدل اصلاح شده

در شکل 10 نمودار توزیع تمرکز تنش برای سه نوع آرایش متفاوت شکست



**Figure 8** The stress concentration factor diagram in a lamina with aligned and staggered crack geometry compared to shear-lag model ( $V_f=50\%$ )

شکل 8 مقایسه تمرکز تنش در اولین فیبر سالم برای ترک‌های هم‌راستا و دندانه‌ای (مدل اصلاح شده) و هم‌راستا (شیرلگ) با  $V_f = 50\%$



**Figure 6** A comparison of  $SCF$  in this paper with ref. [6] for glass/epoxy lamina containing aligned crack ( $N=16, r=4, V_f=50\%$ )  
شکل 6 مقایسه نتایج تحلیل حاضر با مرجع [6] برای آرایش ترک هم‌راستا با  $N=16$ ،  $r=4$  و ماده مرکب شیشه-اپوکسی و  $V_f = 50\%$

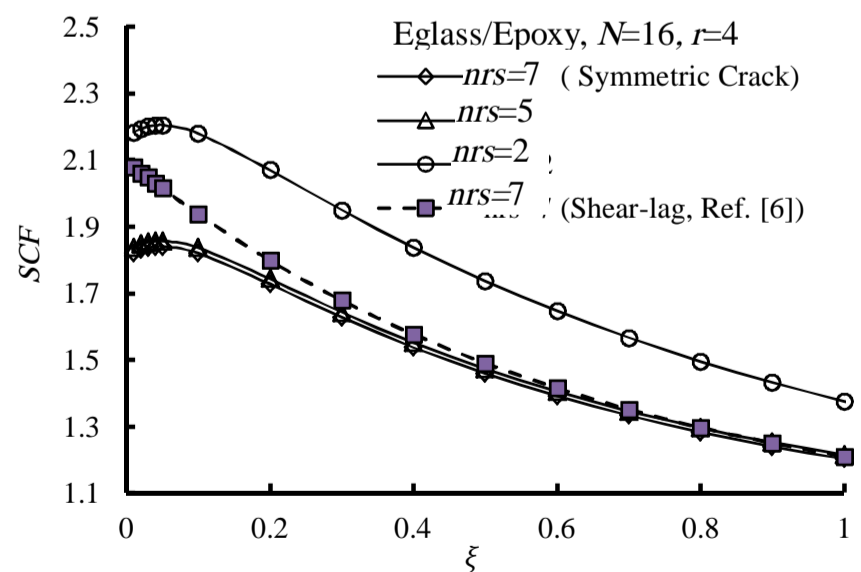
#### 2-5- مدل اصلاح شده - تأثیر خروج از مرکزیت ترک

تک‌لایه مورد نظر این تحقیق شامل تعداد  $N$  فیبر و  $r$  فیبر شکسته، با یک ترک هم‌راستا و دارای خروج از مرکزیت در راستای محور  $y$  بوده که شماره اولین فیبر پاره شده آن  $nrs$  می‌باشد. در مقالات متعددی با روش‌های تحلیلی مختلف به بررسی حالت متقارن این مسئله پرداخته شده است. به عبارتی در همه این مقالات  $nrs=(N-r)/2$  شکل 7 تأثیر موقعیت شروع بریدگی الیاف از بالای تک‌لایه بر حداکثر تمرکز تنش در نوک ترک را نشان می‌دهد.

خروج از مرکزیت ترک تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر حداکثر ضریب تمرکز تنش در نوک ترک دارد. بطوری که برای  $N=16$  و  $r=4$  برای مقادیر  $nrs=2, 5, 7$  حداکثر ضریب تمرکز تنش به ترتیب 2.2، 1.86 و 1.84 خواهد بود. قابل توجه است که برای  $nrs=7$  مقدار ضریب تمرکز تنش 17% کاهش را نسبت به  $nrs=2$  نشان می‌دهد. همچنین حداکثر ضریب تمرکز تنش در مدل اصلاح شده برای ماده مرکب شیشه-اپوکسی و  $nrs=7$  نسبت به مدل شیرلگ حدود 13% کاهش را نشان می‌دهد.

#### 3-5- مدل شیرلگ اصلاح شده - ترک دندانه‌ای

در مرجع [6] با استفاده از مدل شیرلگ اولیه، به بررسی تمرکز تنش در تک



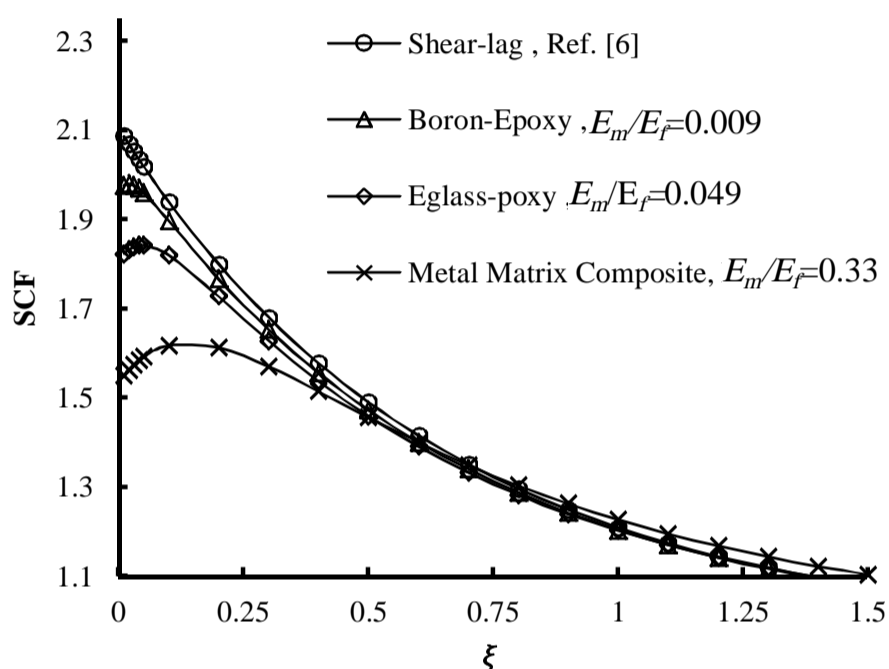
**Figure 7** The effect of crack eccentricity on the maximum  $SCF$  for modified shear-lag model (glass/epoxy,  $V_f=50\%$ )

شکل 7 تأثیر خروج از مرکزیت ترک بر تمرکز تنش در نوک ترک برای مدل اصلاح شده ماده مرکب شیشه-اپوکسی و  $V_f = 50\%$

تمرکز تنش در مواد مرکب می‌باشد. در شکل 11 برای یک تک‌لایه ماده مرکب با  $N=16$  و  $r=4$ ,  $nrs=9$  (مشابه مرجع [6]) و ترک همراستا با استفاده از مدل شیرلگ اصلاح شده تأثیر نسبت مدول الاستیک زمینه به الیاف  $(E_m/E_f)$  نشان داده شده است.

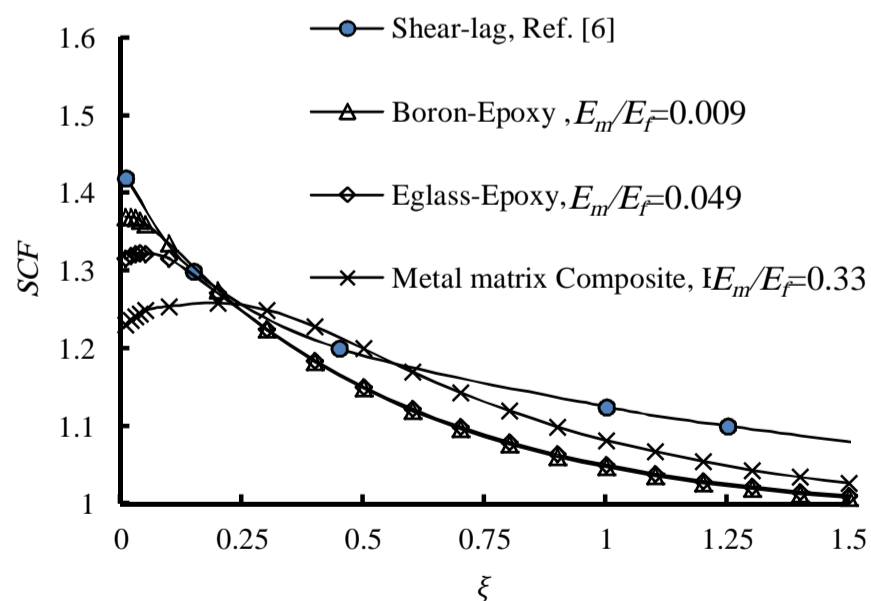
با افزایش نسبت  $E_m/E_f$  حداکثر ضریب تمرکز تنش در نوک ترک به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. به طوریکه کاهش بیشینه ضریب تمرکز تنش برای ماده مرکب با زمینه فلزی  $(E_m/E_f = 0.33)$  نسبت به مدل اولیه شیرلگ حدود 30% می‌باشد. نکته قابل توجه این است که هنگامی که نسبت مدول الاستیک زمینه به الیاف به سمت صفر میل نماید، نتایج با مرجع [6] منطبق می‌شود.

شکل 12 نمودار تمرکز تنش در نوک ترک برای آرایش بریدگی‌های الیاف دندان‌های در سه نوع ماده مرکب نشان می‌دهد.



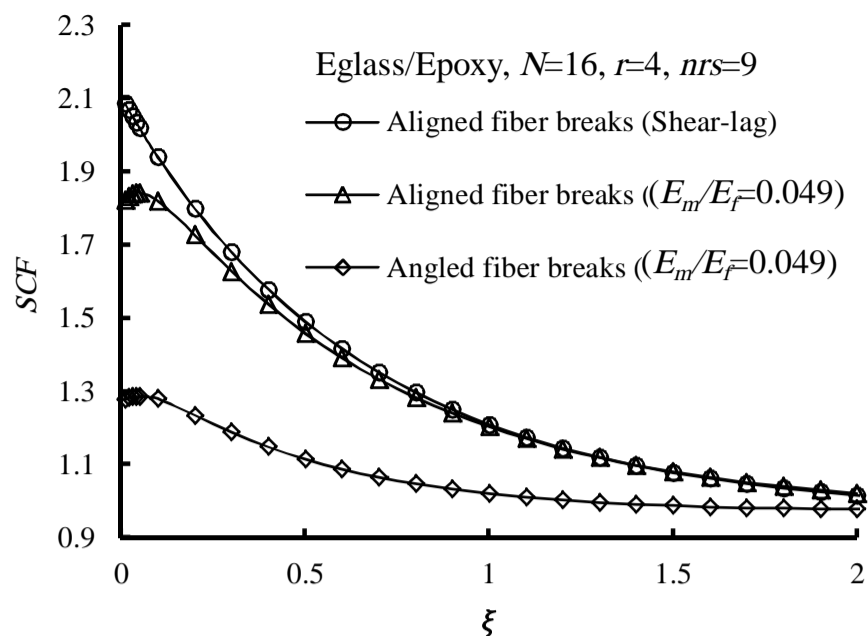
**Figure 11** The effect of the matrix-to-fiber elastic modulus ratio on stress concentration factor diagram in a composite lamina with aligned fiber breaks for  $N=16$ ,  $r=4$ ,  $nrs=9$ ,  $V_f=50\%$

شکل 11 تأثیر نسبت مدول الاستیک زمینه به الیاف بر تمرکز تنش در تک لایه ماده مرکب برای حالت ترک همراستا  $N=16$ ,  $r=4$ ,  $nrs=9$  و  $V_f = 50\%$



**Figure 12** The effect of the matrix-to-fiber elastic modulus ratio on stress concentration factor diagram in a composite lamina with staggered fiber breaks for  $N=16$ ,  $r=4$ ,  $nrs=9$ ,  $V_f=50\%$

شکل 12 تأثیر نسبت مدول الاستیک زمینه به الیاف بر تمرکز تنش در تک لایه ماده مرکب برای ترک‌های دندان‌های و  $N=16$ ,  $r=4$ ,  $nrs=9$  و  $V_f = 50\%$



**Figure 9** The stress concentration factor diagram in a lamina with aligned and angled crack geometry compared to shear-lag model

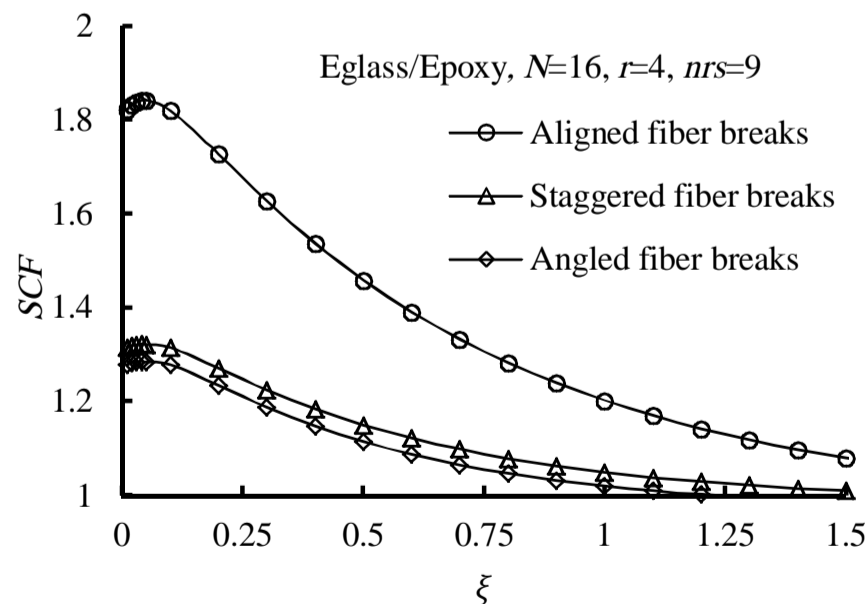
شکل 9 تمرکز تنش در اولین فیبر سالم نوک ترک برای حالت‌های ترک همراستا و زاویه‌دار (مدل اصلاح شده) و همراستا (شیرلگ)  $N=16$ ,  $r=4$ ,  $nrs=9$

الیاف (همراستا، دندان‌های و زاویه‌دار) برای ماده مرکب شیشه-اپوکسی با  $N=16$  و  $r=4$ ,  $nrs=9$  نشان داده شده است. همانگونه که از شکل 10 مشخص است، حداکثر ضریب تمرکز تنش در نوک ترک برای حالت همراستا، دندان‌های و زاویه‌دار به ترتیب 1.82، 1.31 و 1.27 می‌باشد.

بیشترین ضریب تمرکز تنش در حالت ترک همراستا و کمترین مقدار آن در حالت آرایش زاویه‌ای می‌باشد. در ترک‌های ناهمراستا خروج شکستگی‌های الیاف از مرکز تقارن عمودی تک لایه، تأثیرات پوششی الیاف بر روی هم کم شده و باعث کاهش ضریب تمرکز تنش می‌گردد. این کاهش اثر پوششی، برای حالت بریدگی‌های زاویه‌دار به دلیل دورتر شدن الیاف از هم کاهش بیشتری از خود نشان می‌دهد. به طوریکه در حالت دندان‌دار و زاویه‌دار نسبت به حالت همراستا به ترتیب کاهش 39% و 43% را نشان می‌دهد.

### 6-5- مدل شیرلگ اصلاح شده - تأثیر نسبت مدول الاستیک زمینه به الیاف

نسبت مدول الاستیک زمینه به الیاف یکی از پارامترهای تأثیرگذار بر روی



**Figure 10** The stress concentration factor diagram in a composite lamina with aligned, staggered and angled crack geometry in modified shear-lag model ( $V_f=50\%$ )

شکل 10 تمرکز تنش در اولین فیبر سالم نوک ترک برای حالت‌های مختلف در مدل اصلاح شده و  $V_f = 50\%$



حدکثر ضریب تمرکز تنش برای آرایش دندانه‌ای و زاویه‌دار به ترتیب 39% و 43% کاهش پیدا می‌کند. مدل اولیه شیر لگ در پیش‌بینی دقیق توزیع تنش در مواد مرکب ضعیف بوده و نتایج مدل حاضر نشان داد که مدل اولیه شیر لگ در صورتی نتایج قابل قبولی ارائه می‌کند که نسبت مدول الاستیک زمینه به الیاف به سمت صفر میل نماید. افزایش نسبت مدول الاستیک زمینه به الیاف  $(E_m/E_f)$  و نسبت کسر حجمی زمینه به الیاف  $(V_m/V_f)$  باعث کاهش حداکثر ضریب تمرکز تنش می‌گردد.

### 7- فهرست علائم

A	سطح مقطع کل یک تک لایه ماده مرکب
$A_f$	سطح مقطع الیاف در تک لایه ماده مرکب
$A_m$	سطح مقطع زمینه در تک لایه ماده مرکب
$C_i$	ضریب معادله (21)
d	قطر هر یک از الیاف دایره‌ای شکل
$d_o$	فاصله‌ی بین الیاف
$E_f$	مدول الاستیسیته‌ی الیاف
$E_m$	مدول الاستیسیته‌ی زمینه
G	مدول برشی زمینه
h	ضخامت تک لایه
$K_r$	ضریب تمرکز تنش در مراجع [3,2]
$\tilde{L}_1, \tilde{L}_2$	ماتریس‌های معادله (17)
N	تعداد کل فیبرهای تک لایه
n	شماره مشخصه هر فیبر
nrs	شماره اولین الیاف پاره شده از بالای تک لایه
p	بار عمودی اعمال شده بر تک لایه
$p_n, P_n$	نیروی کششی و پارامتر بدون بعد آن در الیاف nام
$p_{n,n-1}^m, P_{n,n-1}^m$	بار کششی و پارامتر بدون بعد در زمینه $n, n-1$
$\bar{R}$	بردار ویژه
r	تعداد فیبرهای شکسته شده
$S_{xy}$	تنش برشی بدون بعد در زمینه
SCF	ضریب تمرکز تنش در الیاف
$u_n, U_n$	جابجایی و جابجایی بدون بعد در الیاف
$u_{n,n-1}, U_{n,n-1}$	جابجایی و جابجایی بدون بعد در زمینه $n, n-1$
$u_{n,n-1}^m, U_{n,n-1}^m$	جابجایی و جابجایی بدون بعد در مرکز لایه زمینه
$V_f, V_m$	کسرهای حجمی الیاف و زمینه
v	تغییر مکان عرضی زمینه
x	مختصه طولی در امتداد جهت الیاف
y	مختصه طولی در امتداد عرض تک لایه
علائم یونانی	
$\eta$	نسبت کسر حجمی فیبر به ماتریس
$\lambda_i$	مقادیر ویژه
$\xi$	مختصه طولی بدون بعد در امتداد الیاف
$\tau_{n,n-1}$	تنش برشی در لایه ماتریس $n, n-1$
$\psi$	پارامتر بدون بعد در معادله (11)

### 8- مراجع

- [1] J. M. Hedgepeth, Stress concentration in a filamentary structure, NASA TN D-882, 1961.

مدل حاضر برای نسبت‌های مختلف مدول الاستیک زمینه به الیاف نتایج مختلفی را نشان می‌دهد. بیشینه تمرکز تنش در نوک ترک برای ماده مرکب بورن-اپوکسی، شیشه اپوکسی و ماده مرکب با زمینه فلزی نسبت مدل شیر لگ به ترتیب 5%، 9% و 18% کاهش را نشان می‌دهد. با کاهش نسبت مدول الاستیک زمینه به الیاف نتایج با مرجع [6] تطابق خوبی نشان می‌دهد.

### 7-5- مدل شیر لگ اصلاح شده - تأثیر درصد حجمی الیاف و زمینه

در شکل 13 برای یک تک‌لایه ماده مرکب از جنس شیشه/اپوکسی با  $nrs=9$  در شکل 13 و  $r=4$  و  $N=16$  (مشابه مرجع [6]) و ترک همراستا با استفاده از مدل شیر لگ اصلاح شده تأثیر نسبت کسر حجمی زمینه به الیاف  $(V_m/V_f)$ ، نشان داده شده است. با افزایش کسر حجمی زمینه به الیاف از 0.5 تا 3، حداکثر ضریب تمرکز تنش حدود 19% کاهش می‌یابد. این به این معناست که با افزایش این نسبت، زمینه سهم بیشتری از انتقال بار و برش را تحمل کرده و از شکست الیاف و زمینه به طور قابل ملاحظه‌ای جلوگیری می‌نماید.

### 6- نتیجه گیری

در این تحقیق با بررسی توزیع تنش در یک تک‌لایه ماده مرکب با آرایش‌های شکستگی الیاف مختلف با استفاده از مدل شیر لگ اصلاح شده نتایج زیر حاصل شد:

عدم تقارن ترک تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر توزیع تنش در مواد مرکب دارد. هر چه ترک در راستای عرض صفحه به لبه نزدیک شود، برای حفظ تعادل، الیاف باقی‌مانده کمتری بار ناشی از الیاف شکسته را انتقال می‌دهند و تنش بیشتری در نوک ترک اعمال می‌شود. آرایش ترک زاویه‌ای و دندانه‌ای نسبت به ترک همراستا، به دلیل کاهش اثر پوششی الیاف بر روی هم، باعث کاهش ضریب تمرکز تنش می‌شود که این کاهش برای ترک زاویه‌دار بیشتر از دندانه‌ای است. با استفاده از مدل اصلاح شده شیر لگ و روش بر هم نهی، برای یک تک‌لایه ماده مرکب با آرایش شکستگی الیاف مختلف نتایج نشان داد که برای ماده مرکب شیشه-اپوکسی با تعداد 16 فیبر و 4 عدد فیبر شکسته شده که شروع شکستگی الیاف از فیبر شماره نهم ( $nrs=9$ ) می‌باشد،

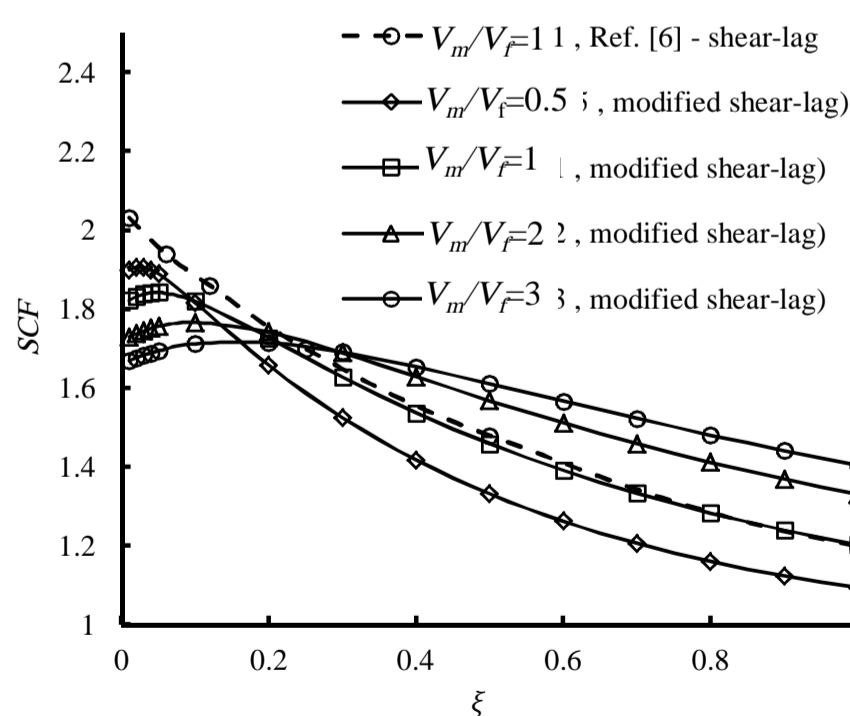


Figure 13 The effect of the matrix-to-fiber volume fraction ratio on stress concentration factor diagram in a composite lamina with aligned fiber breaks for  $N=16, r=4, nrs=9$

شکل 13 تأثیر نسبت کسر حجمی زمینه به الیاف بر تمرکز تنش برای حالت ترک همراستا  $N=16, r=4, nrs=9$



- 4333-4361, 1999
- [9] V. D. Heuvel, P. W. Peijs, R. J. Young, Failure phenomena in two-dimensional multi-fiber microcomposites. Part 4: a raman spectroscopic study on the influence of the matrix yield stress on stress concentrations, *Journal of Composites: Part A*, Vol. 31, pp. 165-171, 2000.
- [10] Z. Xiaa, T. Okabe, W.A. Curtina, Shear-lag versus finite element models for stress transfer in fiber-reinforced composites, *Composites Science and Technology*, Vol. 62, No. 9, pp. 1141-1149, 2002
- [11] G. Anagnostopoulos, J. Parthenios, A. G. Andreopoulos, C. Galiotis, An experimental and theoretical study of the stress transfer problem in fibrous composites, *Acta Materialia*, Vol. 53, No. 15, pp. 4173-4183, 2005.
- [12] M. Shishesaz, M. Maleki, The effect of fiber shape and spacing on stress distribution in a composite monolayer with an internal crack, *Amirkabir journal*, Vol. 42, No. 3, pp. 21-28, 2006 (in Persian فارسی)
- [13] G.A. Narin, Polar shear-lag analysis of a composite of concentric cylinders with longitudinal cracks: Application to internal checking in wood, *Composites: Part A*, Vol. 41, No. 7, pp. 850-858, 2010
- [14] R. D. Kriz, Influence of ply cracks on fracture strength of graphite/epoxy laminates at 76 K., *ASTM STP 836*, American Society for Testing and Materials, pp. 250-2658, 1984
- [2] J. M. Hedgepeth and P. Van Dyke, Local stress concentrations in imperfect filamentary composite materials, *Journal of Composite Materials*, Vol. 1, No. 3, pp. 294-309, 1967.
- [3] J. M. Hedgepeth, P. Van Dyke, Stress concentrations from single-filament failures in composite materials, *Textile Research Journal*, Vol. 39, No. 5, pp. 618-626, 1969.
- [4] J. N. Rossetoss, M. Shishesaz, Stress concentration in fiber composite sheets including matrix extension, *Journal Applied Mechanics*, Vol. 54, No. 3, pp. 723-724, 1987.
- [5] A. M. Sastry, S. L. Phoenix, Load redistribution near non-aligned fiber breaks in a two-dimensional unidirectional composite using break influence superposition, *Journal of Materials Science*, Vol. 12, No. 12, pp. 1596-1599, 1993
- [6] A. M. Sastry, S. L. Phoenix, Shielding and magnification of loads in elastic unidirectional composites, *SAMPE Journal*, Vol. 30, No. 4, pp. 61-67, 1994
- [7] I. J. Beyerlein, C. M. Landis, Shear-lag model for failure simulations of unidirectional fiber composites including matrix stiffness, *Mechanics of Materials*, Vol. 31, No. 5, pp. 331-350, 1999
- [8] C. M. Landis, R. M. McMeeking, Stress concentrations in composites with interface sliding, matrix stiffness and uneven fiber spacing using shear-lag theory, *International journal of Solids and Structures*, Vol. 36, No. 28, pp.