



ارائه مدلی تئوری برای بررسی پاسخ آلیاژ آلومینیوم 6061 در بارگذاری با نرخ کرنش بالا

احسان اعتمادی¹، جمال زمانی^{2*}، مرتضی جعفرزاده³

1- دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

3- مربی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار

*تهران، کدپستی 19395-1999، zamani@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 01 بهمن 1392

پذیرش: 23 بهمن 1392

ارائه در سایت: 16 مهر 1393

کلید واژگان:

موج شوک

تغییر شکل پلاستیک

آلومینیوم 6061

آنتروپی

چکیده

در این تحقیق، با لحاظ کردن پارامترهای موثر بر تنش جریان برشی و بر اساس دیدگاه ریزساختاری و استفاده از تئوری نابعی، یک مدل تئوری برای بررسی پاسخ بارگذاری موج شوک پایدار بر روی فلزات FCC، ارائه شده است. این تحقیق با ارائه روابط بنیادی برای موج شوک، به یک رابطه نهایی شامل تنش برشی و کشیدگی پلاستیک دست یافته است. با حل تحلیلی این رابطه، نمودار تنش برشی بر حسب تغییر شکل موثر پلاستیک، رسم شده است. روابط بنیادی ارائه شده، با فرض کرنش یک بعدی و تنها برای بارگذاری موج شوک ارائه شده است. مهمترین نوآوری این تحقیق، استفاده از قانون بقای انرژی با در نظر گرفتن نرخ تولید آنتروپی در اثر بارگذاری موج شوک در ماده می باشد. تولید آنتروپی ناشی از ایجاد، انیل شدن و حرکت نابعیها می باشد. اثرات سرعت موج شوک، کشیدگی کل و تنش اعمالی بر حسب کشیدگی پلاستیک، مورد بررسی قرار گرفته شده است. همچنین به بررسی ساختار موج شوک، در اثر بارگذاریهای مختلف پرداخته شده است. بارگذاری اعمالی برای ایجاد موج شوک حداکثر 25 GPa است. صحت سنجی روابط و نمودارها، از طریق مقایسه نتایج با مدل‌های تئوری آزمایش‌های تجربی موجود در مراجع دیگر بر روی آلیاژ آلومینیوم 6061، صورت پذیرفته است. توافق خوبی بین نتایج تجربی و مدل ارائه شده وجود دارد.

Theoretical model to investigate response of aluminum 6061 alloy under high strain rate loading

Ehsan Etemadi¹, Jamal Zamani^{1*}, Morteza Jafarzadeh²

1- Department of Mechanical Engineering, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

2- Department of Mathematical Science, Ferdowsi University, Mashhad, Iran

*P.O.B. 19395-1999, Tehran, Iran, zamani@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 21 January 2014
Accepted 12 February 2014
Available Online 08 October 2014

Keywords:
Shock Wave
Plastic Deformation
Aluminum 6061
Entropy

ABSTRACT

This paper presented a theoretical model to investigate steady plastic shock wave on FCC metals. The method included shear flow stress according to effective parameters and based on microstructure and dynamics of dislocation method. The aim of this paper was to achieve final relation between shear stress and plastic stretch with presenting constitutive equations for shock loading. Then, Shear flow stress to effective plastic strain was plotted with solving final relation between shear flow stress and plastic stretch. Presented constitutive equations were based on loading under one dimensional strain and were validated just for shock loadings. The main innovation of this investigation included using from energy constitutive law with considering entropy generation rate. Entropy generation rate expressed as dislocation generation, dislocation annihilation and dislocation glide. Also, the effect of shock velocity, total stretch and input stress according to plastic stretch were investigated. Furthermore, shock structure was investigated according to different input stresses. Maximum input stress was 25 GPa. Relations and diagrams were verified with published experimental works on Al 6061 alloy. Good agreement was found between presented model and experimental works.

1- مقدمه

با سرعت‌های خیلی بالا وسازه‌های مقاوم در برابر موج شوک دارد [1]. این کاربردها نیازمند داشتن آگاهی از چگونگی تغییر شکل فلزات از دیدگاه میکروسکوپی می‌باشد. داشتن درک درست از رفتار فلزات مستلزم یک شناخت بنیادی از رفتار ماده در معرض بارگذاریهای موج شوک می‌باشد. هدف از توسعه مدل‌های بنیادی، توصیف تنش جریان بر حسب پارامترهای موثر، مانند کرنش و نرخ کرنش پلاستیک می‌باشد. تنش جریان از طریق انجام

بررسی رفتار فلزات در نرخ کرنش‌های بالا، کاربردهای مهندسی فراوانی در زمینه‌های شکل دهی فلزات، ماشینکاری با سرعت بالا و همچنین توسعه سازه‌های مقاوم در برابر ضربه با سرعت بالا دارد [1]. همچنین بررسی پاسخ فلزات در اثر موج شوک که سبب ایجاد بیشترین نرخ کرنش می‌شود، کاربردهای فراوانی در زمینه بررسی پدیده زلزله در اثر برخورد لایه‌های زمین

Please cite this article using:

E. Etemadi, J. Zamani, M. Jafarzadeh, Theoretical model to investigate response of aluminum 6061 alloy under high strain rate loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 13, pp. 153-162, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

E. Etemadi, J. Zamani, M. Jafarzadeh, Theoretical model to investigate response of aluminum 6061 alloy under high strain rate loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 13, pp. 153-162, 2015 (In Persian)

مولیناری و راویچندران[16]، تحقیق کلیفتون بر روی امواج گذرای موج شوک را، به امواج پایدار شوک⁴ پلاستیک تعمیم داده‌اند. بنا به تعریف در موج شوک پایدار، پیشانی موج شوک با سرعت و شکل ثابت انتشار پیدا می‌کند. آنها از اثرات نرخ تولید آنتروپی صرفنظر کرده‌اند.

آرمسترانگ و همکاران[17,18]، در دو مقاله به بررسی تنش جریان بر حسب نرخ کرنش، بدون در نظر گرفتن سینماتیک موج شوک پرداخته‌اند. اما ماهیت موج شوک با سایر بارگذاریها متفاوت می‌باشد. چراکه حل بارگذاری موج شوک، با فرض کرنش یک بعدی به جای تنش یک بعدی صورت می‌گیرد[15]. آستین و مک داول[19] نیز به بررسی پاسخ بارگذاری موج شوک بر روی بلورهای فلزی FCC پرداخته‌اند. مهمترین نوآوری آنها تقسیم بندی نابعاییها به نابعاییهای متحرک و غیرمتحرک می‌باشد.

با توجه به بررسی مدل‌های فیزیکی که تا کنونتوسط محققین بر روی اثرات بارگذاری موج شوک بر روی ساختارهای گوناگون فلزات انجام شده است، لزوم ارائه مدلی که بیانگر ویژگیها و پارامترهای موثر بر تنش جریان باشد، احساس می‌شود.

با این پیش‌زمینه، این تحقیق با لحاظ کردن تاثیر پارامترهای موثر بر تنش جریان و بر اساس تئوری نابعاییها، یک حل فیزیکی مناسب برای بارگذاری موج شوک که سبب ایجاد تغییر شکل پلاستیک در فلزات می‌شود، ارائه کرده است. این معادلات با در نظر گرفتن سینماتیک موج شوک و بر خلاف کار آرمسترانگ و همکاران[17,18]، با فرض کرنش یک بعدی ارائه شده است.

این تحقیق به بررسی تئوری پاسخ فلزات FCC در برابر بارگذاری موج شوک و توسعه روش تئوری کلیفتون[15] و مولیناری و راویچندران[16] با استفاده از قانون بقای انرژی، پرداخته است. مهمترین نوآوری این تحقیق، در نظر گرفتن نرخ تولید آنتروپی است که در نرخ کرنشهای بالا، حائز اهمیت و غیر قابل چشم‌پوشی می‌باشد. نرخ آنتروپی تولید شده، ناشی از تولید، بازیابی و لغزش نابعاییها می‌باشد. همچنین بر خلاف روش تئوری کلیفتون[15] و مولیناری و راویچندران[16]، معادلات ارائه شده در این تحقیق، بر اساس کرنشهای پلاستیک بزرگ، توسعه یافته است.

برای حل اثر بارگذاری موج شوک بر فلزات FCC، تنها یک ورودی مورد نیاز است. این ورودی می‌توان تنش اعمالی در راستای انتشار موج شوک، کشیدگی کل و یا سرعت موج شوک باشد. در این تحقیق، ورودی مساله، تنش اعمالی با حداکثر دامنه 25 GPa می‌باشد. این تنش اعمالی قادر به ایجاد امواج الاستیک و پلاستیک در فلز می‌باشد. آستین و مک‌داول[19] نشان داده‌اند که برای موج شوک در دامنه فشاری بین 50 GPa تا 100 که به آن موج شوک قوی می‌گویند، از اثرات مولفه‌های انحرافی تنش⁵ در مقابل اثرات فشار هیدروستاتیک صرفنظر می‌شود. در دامنه فشاری حداکثر 25 تا 30 که به آن موج شوک ضعیف می‌گویند، پاسخ ماده به مولفه‌های انحرافی تنش اهمیت پیدا می‌کند. این دامنه موج شوک، قادر به ایجاد نرخ کرنش بین 10^4 1/s تا 10^8 1/s در ماده می‌باشد.

2- آنالیز تغییر شکل موج شوک

هنگامیکه فلزی تحت بارگذاری موج شوک قرار می‌گیرد، دو موج فشاری الاستیک و پلاستیک در آن انتشار پیدا می‌کند. در اثر بارگذاری موج شوک،

آزمایشهای تجربی و یا بررسی معادلات بنیادی فیزیکی¹، به منظور بررسی اثر موج شوک بر روی تغییر شکل پلاستیک فلزات، صورت می‌پذیرد[2].

کارهای تجربی صورت گرفته شده برای بررسی پاسخ ماده در اثر بارگذاری موج شوک، محدود به چندین تکنیک تجربی مثل ضربه ورق و لیزر با شدت بالا می‌باشد. کارهای تجربی صورت گرفته با ضربه ورق، توسط گروه تحقیقی کلیفتون و همکارانش صورت گرفته است. آنها ضربه ورق فشاری - برشی² را برای اندازه گیری تنش جریان در فلزاتی مانند آلومینیوم[3] و مس[4 و 5] در نرخ کرنشهای بین 10^5 1/s تا 10^6 1/s انجام داده‌اند. تنش برشی و نرخ کرنش برشی از طریق اندازه گیری سرعت ذرات در انتهای سطح آزاد هدف، صورت می‌پذیرد.

میرز و همکاران[6]، تنش جریان را در فلز مس با استفاده از ایجاد موج شوک توسط لیزر بدست آورده‌اند. نرخ کرنش بدست آمده در این آزمایش 10^7 1/s می‌باشد. اشتنبرگ و همکاران [7] مدلی تجربی ارائه کرده‌اند که تنش جریان تابعی بر حسب دما و فشار می‌باشد. در این کار فرض شده است که همه فرآیندهای میکروساختاری در بالاتر از نرخ کرنش 10^5 1/s اشباع شده‌اند و نرخ کرنش در بالاتر از این محدوده تاثیری بر تغییر شکل پلاستیک نخواهد گذاشت. همچنین در این کار تنش جریان مستقل از نرخ کرنش می‌باشد. این فرضیات، در تحقیقات بعدی مورد تردید جدی قرار گرفت.

والاس[8]، پروفایل تنش برشی در پیشانی موج شوک برای آلیاژ آلومینیوم 6061 را به روش تجربی و از طریق اندازه‌گیری پروفایل سرعت سطح آزاد، محاسبه کرده است. در این تحقیق، تغییرات نرخ کرنش در دامنه بین 10^4 تا 10^7 1/s تغییر پیدا می‌کند. سویگل و گریدی[9]، به بررسی رابطه تنش هوگونیوت و نرخ کرنش برای فلزات مختلف FCC و BCC پرداخته‌اند و تنش را طبق یک رابطه توانی به نرخ کرنش مربوط ساخته‌اند.

لازم به ذکر است که محققین داخلی نیز به بررسی اثر نرخ کرنش، در مواد و سازه‌های مختلف پرداخته‌اند. شکرالهی و همکاران[10] با استفاده از آزمایش میله هاپکینسون و با در نظر گرفتن نرخ کرنش در دو حالت ثابت و متغیر، به تعیین معادلات بنیادی در فلزات پرداخته‌اند. همچنین نقدآبادی و همکاران[11] به مطالعه عددی و تجربی تاثیر شکل موج منتشر شده در میله ورودی در آزمایش میله هاپکینسون پرداخته‌اند. رحمانی و فعلی[12] به بررسی تئوری تنش فشاری در مواد با استفاده از آزمایش ضربه تیلور پرداخته‌اند. لیاقت و همکاران[13] با روش عددی به بررسی رفتار بتن در نرخ کرنش‌های نسبتاً بالا پرداخته‌اند. زمانی و همکاران[14] به مطالعه بارگذاری دینامیکی بر روی ورق‌های دایروی پرداخته‌اند.

مدلهای بنیادی فیزیکی و تئوری کمی برای بررسی تاثیر موج شوک بر روی تغییر شکل فلزات با ساختارهای بلوری گوناگون صورت پذیرفته است و تحقیقات و مطالعه بر روی این زمینه جای پیشرفت فراوانی دارد. معادلات بنیادی فیزیکی بر اساس روابط ترمودینامیکی و تئوری لغزش و دینامیک نابعایی صورت می‌پذیرد.

کار اصلی و ابتدایی در بررسی تئوری موجهای الاستیک- ویسکو پلاستیک توسط کلیفتون[15]، صورت پذیرفته است. کلیفتون یک تئوری تقریبی برای بررسی امواج گذرای³ الاستیک- پلاستیک که ایجاد کرنشهای خیلی کوچک در ماده می‌کنند، ارائه کرده است. این تحقیق، با فرض آنتروپی برگشت‌پذیر صورت پذیرفته است.

1- Physical Constitutive Equation
2- Pressure-Shear Plate Impact
3- Transient Shock wave

4- Steady Shock Wave
5- Deviatoric stress

تانسور گرادیان تغییرشکل کل، الاستیک و پلاستیک با فرض کرنش تک محوره به صورت روابط (6-الف) تا (6-ج) بیان می‌شود:

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-الف)$$

$$F^e = \begin{bmatrix} \lambda_1^e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^e & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^e \end{bmatrix} \quad (6-ب)$$

$$F^p = \begin{bmatrix} \lambda_1^p & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^p \end{bmatrix} \quad (6-ج)$$

که λ_1^e و λ_2^e کشیدگی‌های الاستیک، λ_1^p و λ_2^p کشیدگی‌های پلاستیک و در نهایت λ_1 کشیدگی نهایی می‌باشند. با فرض غیر قابل تراکم بودن ناحیه پلاستیک:

$$\lambda_1^p (\lambda_2^p)^2 = 1 \quad (7)$$

در نتیجه:

$$\lambda_2^p = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^p}} \quad (8)$$

همچنین می‌توان کشیدگی‌های الاستیک و پلاستیک را طبق روابط (9) و (10) به یکدیگر مربوط ساخت:

$$\lambda_1^e = \frac{\lambda_1}{\lambda_1^p} \quad (9)$$

$$\lambda_2^e = (\lambda_1^p)^{1/2} \quad (10)$$

در نتیجه طبق روابط (8) تا (10)، کشیدگی‌های λ_1^e ، λ_2^e و همینطور λ_2^p را می‌توان برحسب λ_1 و λ_1^p بیان نمود. این روابط در بخش 2-2-3 مورد استفاده قرار گرفته‌است.

2-2- روابط کشیدگی و کرنش

برای بیان رابطه کلی بین کشیدگی و کرنش، در حالت کلی و در مختصات لاگرانژی می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) + \frac{\partial U_k}{\partial X_i} \frac{\partial U_k}{\partial X_j} \right] \quad (11)$$

که U_i بردار تغییر شکل در راستای i می‌باشد. برای تغییرشکل در جهت X_1 ، کرنش در راستای انتشار موج شوک به صورت رابطه (12) بیان می‌شود:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial U_1}{\partial X_1} + 1/2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_1} \right)^2 \quad (12)$$

همچنین:

$$\lambda_1 = \frac{\partial x_1}{\partial X_1} = \frac{\partial U_1}{\partial X_1} + 1 \quad (13)$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial U_1}{\partial X_1} = \lambda_1 - 1 \quad (14)$$

با جایگذاری مقدار $\frac{\partial U_1}{\partial X_1}$ در معادله (12)، رابطه بین کرنش و کشیدگی به صورت رابطه (15) به یکدیگر مربوط می‌شوند:

$$\varepsilon_1 = 1/2 [(\lambda_1)^2 - 1] \quad (15)$$

برای کرنشهای خیلی کوچک، رابطه (15) به صورت رابطه (16) بیان می‌شود [10,11]:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial U_1}{\partial X_1} = \lambda_1 - 1 \quad (16)$$

ابتدا موج الاستیک، ماده را تا حد الاستیک هوگونویوت¹ فشرده می‌کند. در اثر این موج، تغییرشکل الاستیک در فلز به وجود آمده و هیچ تغییرشکل پلاستیکی به وجود نمی‌آید. در این تحقیق اثر پیشانی موج الاستیک بر فلز با (+) نمایش داده شده‌است. پیشانی موج الاستیک با موج پلاستیکی دنبال می‌شود که فلز را به حالت تغییر شکل نهایی پلاستیک می‌رساند. انتقال از حالت (+) به حالت نهایی، توسط یک لایه نازک (پیشانی موج شوک) روی می‌دهد که سبب تغییر شکل پلاستیک ناگهانی در ماده می‌شود.

1-2- کشیدگی

شکل 1 نشان‌دهنده تجزیه تغییر شکل یک جسم به دو مولفه الاستیک و پلاستیک می‌باشد. برای آنالیز تغییر شکل نشان داده شده در شکل 1، می‌توان نوشت [15]:

$$x = x(X, t) \quad (1)$$

که X موقعیت کنونی² ذره در لحظه t است و X موقعیت ابتدایی³ آن بر اساس مختصات لاگرانژی می‌باشد. موقعیت میانی⁴ ذره X در لحظه t به صورت رابطه (2) بیان می‌شود:

$$\hat{X} = \hat{X}(X, t) \quad (2)$$

موقعیت کنونی X را می‌توان برحسب تابعی از موقعیت میانی به صورت رابطه (3) بیان نمود

$$x = \hat{x}(\hat{X}, t) \quad (3)$$

تانسور گرادیان تغییرشکل برحسب روابط (1) تا (3) بر حسب F ، F^e و F^p بیان شود. همچنین، المانهای خطی در سه ساختار ابتدایی، میانی و نهایی به صورت روابط (4-الف) تا (4-ج) بیان می‌شود:

$$dx = F dX \quad (4-الف)$$

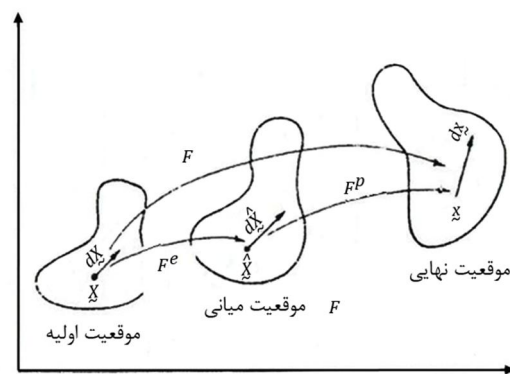
$$dx = F^p d\hat{X} \quad (4-ب)$$

$$d\hat{X} = F^e dX \quad (4-ج)$$

که F ، F^e و F^p به ترتیب کشیدگی‌های کل، کشیدگی‌های الاستیک و کشیدگی‌های پلاستیک می‌باشند. با ترکیب سه معادله (4)، تانسور گرادیان تغییرشکل F به صورت رابطه (5) بیان می‌شود:

$$F = F^p F^e \quad (5)$$

در نتیجه، گرادیان تغییر شکل کل ایجاد شده برابر حاصلضرب گرادیان تغییر شکل الاستیک در پلاستیک می‌باشد. با فرض انتشار موج در راستای X_1 ،



شکل 1- شماییک تجزیه تغییرشکل کل [15]

- 1- Huguenot Elastic Limit
- 2- Current Configuration
- 3- Initial Configuration
- 4- Intermediate Configuration

که برای موج شوک پایدار، رابطه سازگاری به صورت رابطه (30) بیان می‌شود:

$$\frac{\partial v_1}{\partial Z} = -C \frac{\partial \lambda_1}{\partial Z} \quad (30)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (28)، تنش اعمالی بر حسب سرعت ذرات بدست می‌آید:

$$\sigma_1 = -\rho_0 C (v - v^+) + \sigma_1^+ \quad (31)$$

که σ_1^+ و v^+ به ترتیب تنش و سرعت حد الاستیک در راستای انتشار موج شوک می‌باشد. همچنین با انتگرال‌گیری از رابطه (30)، سرعت حرکت ذرات بر حسب کشیدگی کل بدست می‌آید:

$$v_1 = -C(\lambda_1 - \lambda_1^+) + v_1^+ \quad (32)$$

با ترکیب روابط (31) و (32)، می‌توان تنش را بر حسب کشیدگی کل به صورت رابطه (33) بیان نمود:

$$\sigma_1 = \rho_0 C^2 (\lambda_1 - \lambda_1^+) + \sigma_1^+ \quad (33)$$

که λ_1^+ کشیدگی حدالاستیک می‌باشد. از طرفی طبق رابطه هوگونویوت، رابطه بین سرعت موج شوک و سرعت ذرات، به صورت رابطه (34) می‌باشد:

$$v_1 = m_1 C + m_2 \quad (34)$$

با ترکیب دو رابطه (32) و (34)، سرعت موج شوک از طریق رابطه (35) به λ_1 مربوط می‌شود:

$$C = \frac{m_1 v_1^+ + m_2}{(1+m_1)(\lambda_1 - \lambda_1^+)} \quad (35)$$

2-3- قانون بقای انرژی

تغییرات زمانی قانون بقای انرژی به صورت رابطه (36) بیان می‌شود:

$$\frac{1}{\rho_0} \dot{W}_{in} = \dot{U} - \dot{W}_{diss} = \dot{U} - T\dot{S} \quad (36)$$

که ρ_0 چگالی ماده، \dot{W}_{in} نرخ کار مکانیکی یا به عبارتی دیگر نرخ انرژی ورودی توسط بارگذاری موج شوک، \dot{U} نرخ افزایش انرژی داخلی در واحد جرم و \dot{Q} گرمای تولید شده در اثر انتشار موج شوک می‌باشد. گرمای تولیدشده بر حسب نرخ تولید آنتروپی برگشت ناپذیر $T\dot{S}$ تعریف می‌شود. معادله (36) معادله اساسی در این تحقیق به شمار می‌رود. در بخشهای 2-3-1 تا 2-3-3، به بررسی جداگانه هرکدام از پارامترهای \dot{W}_{in} ، \dot{U} و $T\dot{S}$ بر حسب پارامترهای مورد نیاز، پرداخته شده است. هدف از بیان بخشهای بعدی، پیدا کردن رابطه بین λ_1 و λ_1^p ، رابطه λ_1 و λ_1^p و در نهایت λ_1^p بر حسب دو پارامتر τ و λ_1^p می‌باشد. همچنین با بدست آوردن مقادیر در انتها نیز به آراء مقادیر λ_1^p ، مقادیر τ که هدف نهایی این تحقیق می‌باشد، بدست آمده است.

2-3-1- نرخ کار مکانیکی

نرخ زمانی کار مکانیکی را می‌توان به صورت رابطه (37) بیان کرد:

$$\dot{W}_{in} = \sigma_i \dot{\epsilon}_i = \sigma_i \dot{\epsilon}_i^e + \sigma_i \dot{\epsilon}_i^p = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1^e + \sigma_1 \dot{\epsilon}_1^p + 2\sigma_2 \dot{\epsilon}_2^e + 2\sigma_2 \dot{\epsilon}_2^p \quad (37)$$

با توجه به روابط (21) تا (24)، رابطه (37) به معادله (38) قابل تبدیل است:

$$\dot{W}_{in} = \sigma_1 \frac{\dot{\lambda}_1 \lambda_1^p - \dot{\lambda}_1^p \lambda_1}{(\lambda_1^p)^2} + \sigma_1 \dot{\lambda}_1^p \lambda_1^p + \sigma_2 \frac{\dot{\lambda}_1^p}{\sqrt{\lambda_1^p}} - \sigma_2 \frac{\dot{\lambda}_1^p}{(\lambda_1^p)^2} \quad (38)$$

همچنین بیشترین تنش برشی طبق رابطه (39) بدست می‌آید:

رابطه (16) در هردو تحقیق صورت گرفته توسط کلیفتون [15] و مولیناری و رابوچندران [16]، مورد استفاده قرار گرفته شده است. در این تحقیق فرض می‌شود که ماده تحت تاثیر کرنش الاستیک کوچک قرار می‌گیرد. در نتیجه کرنشهای الاستیک را با توجه به روابط (9) و (10)، می‌توان به صورت روابط (17) و (18) و بر حسب λ_1 و λ_1^p بیان نمود:

$$\epsilon_1^e = \lambda_1^e - 1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1^p} - 1 \quad (17)$$

$$\epsilon_2^e = \lambda_2^e - 1 = \sqrt{\lambda_1^p} - 1 \quad (18)$$

همینطور در این تحقیق، با توجه به ماهیت موج شوک، رابطه بین کرنش پلاستیک و کشیدگی پلاستیک به صورت روابط (19) و (20) بیان می‌شود:

$$\epsilon_1^p = 1/2[(\lambda_1^p)^2 - 1] \quad (19)$$

$$\epsilon_2^p = 1/2[(\lambda_2^p)^2 - 1] = 1/2\left[\frac{1}{\lambda_1^p} - 1\right] \quad (20)$$

با مشتق‌گیری نسبت به زمان از روابط (17) تا (20)، رابطه بین نرخ کرنشهای الاستیک و پلاستیک در راستای انتشار موج شوک و عمود بر آن، بر حسب $\dot{\lambda}_1$ و $\dot{\lambda}_1^p$ بدست می‌آیند:

$$\dot{\epsilon}_1^e = \frac{\dot{\lambda}_1 \lambda_1^p - \dot{\lambda}_1^p \lambda_1}{(\lambda_1^p)^2} \quad (21)$$

$$\dot{\epsilon}_1^p = \dot{\lambda}_1^p \lambda_1^p \quad (22)$$

$$\dot{\epsilon}_2^e = \frac{\dot{\lambda}_1^p}{2\sqrt{\lambda_1^p}} \quad (23)$$

$$\dot{\epsilon}_2^p = \frac{-\dot{\lambda}_1^p}{2(\lambda_1^p)^2} \quad (24)$$

روابط (21) تا (24)، در بخش 2-2-3 مورد استفاده قرار گرفته‌است.

3- معادلات بنیادی

3-1- آنالیز موج شوک

فرم لاگرانژی معادله بقای ممنتوم خطی به صورت رابطه (25) بیان می‌شود:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial X} = \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} \quad (25)$$

ρ_0 چگالی ماده، v_1 سرعت ذرات و σ_1 مولفه تنش در راستای انتشار موج شوک می‌باشد. تانسور تنش برای انتشار موج شوک به صورت رابطه (26) بیان می‌شود:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (26)$$

لازم به ذکر است که در انتشار موج شوک در راستای 1، دو راستای 2 و 3 نقش معادل و یکسانی دارند، در نتیجه $\sigma_2 = \sigma_3$ می‌باشد. در این تحقیق، فرض بر آن است که انتشار موج به صورت پایدار می‌باشد. در نتیجه می‌توان با فرض پایدار بودن موج شوک، دو متغیر X و t در معادله 25 را، بر حسب متغیر Z بیان نمود:

$$U(X, t) = U(Z) \quad \text{که } Z = X - Ct \quad (27)$$

که C سرعت انتشار موج شوک می‌باشد. حال با فرض موج شوک پایدار، رابطه 25 به صورت رابطه 28 بیان می‌شود:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial Z} = -\rho_0 C \frac{\partial v_1}{\partial Z} \quad (28)$$

معادله سازگاری نیز به صورت رابطه (29) تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial v_1}{\partial X} = \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} \quad (29)$$

با حل رابطه (46):

$$\varepsilon_1^e = f(\varepsilon_2^e) = f\left(\sqrt{\lambda_1^p} - 1\right) = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4A_2G}}{2A_2} \quad (48)$$

با قراردادن مقدار ε_2^e برحسب کرنش پلاستیک (رابطه 18) و جایگذاری آن در روابط (47) و (48)، ε_1^e بر حسب λ_1^p بدست می‌آید. حال با توجه به رابطه 17، رابطه جدیدی به صورت رابطه (49) بدست می‌آید که λ_1 را برحسب λ_1^p بیان می‌کند:

$$\lambda_1 = \lambda_1^p \left(1 + f\left(\sqrt{\lambda_1^p} - 1\right)\right) \quad (49)$$

با فرض $X = \varepsilon_2^e = \sqrt{\lambda_1^p} - 1$ ، رابطه (49) به صورت رابطه (50) نوشته می‌شود:

$$\lambda_1 = g(X) = (X + 1)^2 (1 + f(X)) \quad (50)$$

با مشتق گرفتن از رابطه (50) نسبت به زمان، رابطه بین $\dot{\lambda}_1$ با $\dot{\lambda}_1^p$ بدست می‌آید:

$$\dot{\lambda}_1 = 2\dot{X}(X + 1)(1 + f(X)) + \dot{X}(X + 1)^2 f'(X) \quad (51)$$

که:

$$\dot{X} = \frac{\dot{\lambda}_1^p}{2\sqrt{\lambda_1^p}} \quad (52)$$

همچنین با مشتق گرفتن از رابطه (48) خواهیم داشت:

$$\dot{f}(X, S) = \frac{-\dot{B}}{2A_2} + \frac{B\dot{B} - 2A_2\dot{G}}{2A_2\sqrt{B^2 - 4A_2G}} \quad (53)$$

و نیز با مشتق گیری از رابطه (47-الف) و (47-ب) معادلات (54-الف) و (54-ب) به دست می‌آیند:

$$\dot{B} = (12a_4 + 4a_5)\dot{X} - 4C^2\dot{X}(1 + X)^4 \quad (54-الف)$$

$$\dot{G} = (4a_2 + 2a_3)\dot{X} + 2\left(\frac{12a_4 + 5a_5}{a_6}\right)\dot{X}X$$

$$+ \left(2C^2\lambda_1^+ - \frac{\sigma_1^+}{\rho_0}\right)\dot{X} - 4C^2\dot{X}(1 + X)^3 \quad (54-ب)$$

با جایگذاری روابط (52) تا (54) در رابطه (51)، $\dot{\lambda}_1$ به صورت تابعی از $\dot{\lambda}_1^p$ بدست می‌آید. نرخ زمانی انرژی داخلی با مشتق گرفتن از رابطه (44) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{U} = & a_1\dot{J}_1 + 2a_2J_1\dot{J}_1 + a_3\dot{J}_2 + 3a_4J_1\dot{J}_1^2 + a_5J_1\dot{J}_2 \\ & + a_5J_2\dot{J}_1 + a_6\dot{J}_3 = a_1(\dot{\varepsilon}_1^e + 2\dot{\varepsilon}_2^e) \\ & + 2a_2(\dot{\varepsilon}_1^e + 2\dot{\varepsilon}_2^e)(\varepsilon_1^e + 2\varepsilon_2^e) \\ & + a_3(2\varepsilon_1^e\dot{\varepsilon}_2^e + 2\dot{\varepsilon}_1^e\varepsilon_2^e + 2\varepsilon_2^e\dot{\varepsilon}_2^e) \\ & + 3a_4(\dot{\varepsilon}_1^e + 2\dot{\varepsilon}_2^e)(\varepsilon_1^e + 2\varepsilon_2^e)^2 \\ & + a_5(\dot{\varepsilon}_1^e + 2\dot{\varepsilon}_2^e)(2\varepsilon_1^e\varepsilon_2^e + (\varepsilon_2^e)^2) \\ & + a_5(2\varepsilon_1^e\dot{\varepsilon}_2^e + 2\dot{\varepsilon}_2^e\varepsilon_1^e + 2\varepsilon_2^e\dot{\varepsilon}_2^e)(\varepsilon_1^e + 2\varepsilon_2^e) \\ & + a_6(\dot{\varepsilon}_1^e(\varepsilon_2^e)^2 + 2\varepsilon_1^e\dot{\varepsilon}_2^e\varepsilon_2^e) \end{aligned} \quad (55)$$

با جایگذاری روابط (21) و (23) در رابطه (55)، \dot{U} برحسب λ_1^p ، $\dot{\lambda}_1^p$ ، λ_1 بدست می‌آید. طبق رابطه 50، λ_1 بر حسب λ_1^p و طبق رابطه (51) $\dot{\lambda}_1$ بر حسب $\dot{\lambda}_1^p$ بدست می‌آید. در نتیجه در حالت نهایی، همانطور که از رابطه (41) مشخص است، $\dot{U} = f(\lambda_1^p, \dot{\lambda}_1^p)$ می‌باشد. در بخش 3-2-3 درباره رابطه λ_1^p و τ بحث شده است.

3-2-3- نرخ تولید آنتروپی

نرخ تولید آنتروپی پارامتر مهم و تاثیرگذاری در نرخ کرنش‌های بالا و به خصوص در هنگام انتشار موج شوک می‌باشد. در تحقیق صورت گرفته توسط کلیفتون [15]، فرض بر استفاده از قانون اول ترمودینامیک بر اساس فرآیند آنتروپی برگشت پذیر می‌باشد، همچنین در تحقیق صورت پذیرفته توسط

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (39)$$

در نتیجه:

$$\sigma_2 = \sigma_1 - 2\tau \quad (40)$$

با جایگذاری رابطه (33)، (35) و (40) در معادله 38، نرخ کار مکانیکی از معادله رابطه (41)، بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{in} = & \left(\rho_0 \left(\frac{m_1 v_1^+ + m_2}{(1+m_1)(\lambda_1 - \lambda_1^+)}\right)^2 (\lambda_1 - \lambda_1^+) + \sigma_1^+\right) \frac{\lambda_1 \lambda_1^p - \lambda_1^p \lambda_1}{(\lambda_1^p)^2} + \\ & \left(\rho_0 \left(\frac{m_1 v_1^+ + m_2}{(1+m_1)(\lambda_1 - \lambda_1^+)}\right)^2 (\lambda_1 - \lambda_1^+) + \sigma_1^+\right) \dot{\lambda}_1^p \lambda_1^p + \\ & \left(\rho_0 \left(\frac{m_1 v_1^+ + m_2}{(1+m_1)(\lambda_1 - \lambda_1^+)}\right)^2 (\lambda_1 - \lambda_1^+) + \sigma_1^+ - 2\tau\right) \frac{\dot{\lambda}_1^p}{\sqrt{\lambda_1^p}} - \\ & \left(\rho_0 \left(\frac{m_1 v_1^+ + m_2}{(1+m_1)(\lambda_1 - \lambda_1^+)}\right)^2 (\lambda_1 - \lambda_1^+) + \sigma_1^+ - 2\tau\right) \frac{\dot{\lambda}_1^p}{(\lambda_1^p)^2} \end{aligned} \quad (41)$$

همانطور که از رابطه (41) مشخص است، $\dot{W}_{in} = f(\lambda_1, \lambda_1^p, \dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_1^p, \tau)$ می‌باشد. در بخش 3-2-3 و 4-2-3 نشان داده شده است که λ_1 و $\dot{\lambda}_1^p$ تابعی بر حسب λ_1^p و τ می‌باشند.

3-2-2- نرخ انرژی داخلی

در این بخش، رابطه بین λ_1 برحسب λ_1^p محاسبه شده است. به این منظور، انرژی داخلی بر حسب کرنش الاستیک بسط داده شده است. کلیفتون، انرژی داخلی را بر حسب کرنش الاستیک درجه 3، به صورت رابطه (42) بسط داده است [15]:

$$U = a_0 + a_1 J_1 + a_2 J_1^2 + a_3 J_2 + a_4 J_1^3 + a_5 J_1 J_2 + a_6 J_3 \quad (42)$$

که:

$$J_1 = \varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e \quad (43-الف)$$

$$J_2 = \varepsilon_1^e \varepsilon_2^e + \varepsilon_2^e \varepsilon_3^e + \varepsilon_3^e \varepsilon_1^e \quad (43-ب)$$

$$J_3 = \varepsilon_1^e \varepsilon_2^e \varepsilon_3^e \quad (43-ج)$$

که $a_0 = 0$ و ثابت a_1 تا a_6 از طریق انجام آزمایش‌های مافوق صوت بدست می‌آیند. لازم به ذکر است که $\varepsilon_2^e = \varepsilon_3^e$ با جایگذاری روابط (43) در رابطه (42):

$$\begin{aligned} U = & a_0 + a_1(\varepsilon_1^e + 2\varepsilon_2^e) \\ & + a_2(\varepsilon_1^e + 2\varepsilon_2^e)^2 + a_3(2\varepsilon_1^e\varepsilon_2^e + (\varepsilon_2^e)^2) \\ & + a_4(\varepsilon_1^e + 2\varepsilon_2^e)^3 \\ & + a_5(\varepsilon_1^e + 2\varepsilon_2^e)(2\varepsilon_1^e\varepsilon_2^e + (\varepsilon_2^e)^2) \\ & + a_6(\varepsilon_1^e(\varepsilon_2^e)^2) \end{aligned} \quad (44)$$

همچنین تنش بر حسب کرنش الاستیک، به صورت رابطه (45) تعریف می‌شود [15]:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = & \rho_0 \{ a_1 + 2a_2(\varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e) + a_3(\varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e) \\ & + 3a_4(\varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e)^2 \\ & + a_5[(\varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e)(\varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e) \\ & + (\varepsilon_1^e\varepsilon_2^e + \varepsilon_2^e\varepsilon_3^e + \varepsilon_3^e\varepsilon_1^e)] \\ & + a_6\varepsilon_2^e\varepsilon_3^e \} \end{aligned} \quad (45)$$

با جایگذاری $\varepsilon_3^e = \varepsilon_2^e$ و مرتب کردن جملات بر حسب ضرایب ε_1^e و مساوی قرار دادن دو رابطه (33) و (45)، معادله درجه دو ε_1^e بر حسب ε_2^e بدست می‌آید:

$$A_2\varepsilon_1^{e2} + B\varepsilon_1^e + G - C^2\lambda_1 + C^2\lambda_1^+ + \frac{\sigma_1^+}{\rho_0} = 0 \quad (46)$$

که:

$$B = 2a_2 + (12a_4 + 4a_5)\varepsilon_2^e - C^2(1 + \varepsilon_2^e)^4 \quad (47-الف)$$

$$\begin{aligned} G = & (4a_2 + 2a_3)\varepsilon_2^e + (12a_4 + 5a_5 + a_6)\varepsilon_2^{e2} \\ & + \left(C^2\lambda_1^+ - \frac{\sigma_1^+}{\rho_0} - C^2(1 + \varepsilon_2^e)^4\right) \end{aligned} \quad (47-ب)$$

τ^* تنش وابسته به انرژی حرارتی می‌باشد. آستین و مک داوول [19] نشان داده‌اند که هر چه تنش اعمالی بیشتر شود، اثرات τ^* کمتر می‌شود. در این تحقیق، با انتخاب تنشهای اعمالی بزرگ ($\sigma_1 \geq 6/5 \text{ GPa}$) از اثرات τ^* مقابل τ ، صرفنظر شده است. در نتیجه:

$$\tau_G = \tau \quad (67)$$

همچنین τ_G به صورت رابطه (68) تعریف می‌شود:

$$\tau_G = \tau_a + \tau_d \quad (68)$$

که τ_d تنش برشی ویسکوزیته و τ_a تنش برشی مستقل از حرارت بوده که بر حسب رابطه تجربی (69) بیان می‌شود [15]:

$$\tau_a = \tau_{a_0} \left[1 + \frac{\gamma^p}{\gamma_0} \right] \quad (69)$$

که τ_{a_0} ، γ_0 و n ثابت هستند. با قراردادن روابط (64) تا (69) در رابطه (63)، رابطه نهایی نرخ تولید آنتروپی بر حسب تنش برشی، کرنش برشی، نرخ کرنش برشی و دمای اولیه (که در این تحقیق ثابت در نظر گرفته شده است) به صورت رابطه (70) بیان می‌شود:

$$\dot{S} = \frac{1}{T} \left[\frac{\tau \dot{\gamma}}{2} + E \alpha_{nn} \rho_m \dot{\gamma} \right] \quad (70)$$

نرخ کشیدگی پلاستیک از طریق رابطه (71) با نرخ کرنش برشی ارتباط پیدا می‌کند:

$$\dot{\gamma} = -\frac{3\lambda_1^p}{2\lambda_1^p} \quad (71)$$

با انتگرال گرفتن از معادله (71)، رابطه بین کشیدگی پلاستیک و کرنش برشی بدست می‌آید:

$$\gamma^p = \int \dot{\gamma} dt = -\frac{3}{2} \ln(\lambda_1^p) \quad (72)$$

$\dot{\gamma}$ را می‌توان به صورت رابطه (73) بیان کرد:

$$\dot{\gamma} = b \rho_m v \quad (73)$$

چگالی حرکت نابجاییها (ρ_m) طبق رابطه تجربی رابطه (74) بیان می‌شود [10]:

$$\rho_m = \rho_{m0} \left[1 + \left(\frac{\alpha_b \gamma^p}{b \rho_{t_0}} \right) \exp(-\alpha_t \alpha_b \gamma^p) \right] \quad (74)$$

که ρ_{m0} و ρ_{t_0} ، α_t ، α_b ثابت ماده می‌باشند. v سرعت حرکت نابجاییها طبق رابطه توانی معادله (75) با تنش برشی ارتباط دارد [9,16]:

$$v = c_1 \left(\frac{\tau - \tau_a}{T_1^*} \right)^M \quad (75)$$

که c_1 ، T_1^* و M ثوابت ماده می‌باشند. این ثوابت برای ساختارهای بلوری گوناگون، متفاوت می‌باشند. حال با جایگذاری روابط (72)، (74) و (75) در رابطه (73)، نرخ کرنش برشی از طریق رابطه 75 بدست می‌آید:

$$\dot{\gamma} = b \rho_{m_0} c_1 \left(1 + \frac{-3}{2} \frac{\alpha_b \ln \lambda_1^p}{b \rho_{t_0}} \right) \times \exp\left(-\frac{3}{2} (\alpha_b \alpha_t \ln \lambda_1^p)\right) \left(\frac{\tau - \tau_{a_0} \left(1 + \frac{-3}{2} \frac{\ln(\lambda_1^p)}{\gamma_0} \right)^{\frac{1}{n}}}{T_1^*} \right)^M \quad (76)$$

با توجه به رابطه (76)، می‌توان نرخ کرنش برشی را بر حسب تنش برشی و کشیدگی پلاستیک بیان نمود. مهمترین نتیجه‌ای که می‌توان از رابطه 75 گرفت، آن است که نرخ کرنش برشی به ازاء مقادیر مختلف کشیدگی پلاستیک تغییرات زیادی پیدا می‌کند. در نتیجه در معادلات بنیادی که برای نرخ کرنشهای مختلف صورت می‌پذیرد، محققین مختلف فرض می‌کنند که نرخ کرنش در فرآیند تغییر شکل پلاستیک ثابت می‌باشد و نرخ کرنش را به

مولیناری و راویچندران [16]، از اثرات نرخ تولید آنتروپی صرفنظر شده است. اما فرض آنتروپی برگشت‌پذیر، فرض ایده آلی است و در اثر موج شوک آنتروپی تولید می‌شود که نرخ تولید آنتروپی قابل صرفنظر کردن نمی‌باشد [15].

بر اساس تئوری ترمودینامیکی غیر قابل برگشت، نرخ تولید آنتروپی بر واحد حجم را می‌توان به صورت رابطه (56) تعریف کرد [20]:

$$\dot{S} = J_1 X_1 + J_2 X_2 + J_3 X_3 \quad (56)$$

که $J_1 X_1$ بیانگر تولید نابجاییها، $J_2 X_2$ بیانگر بازیابی دینامیکی و $J_3 X_3$ بیانگر لغزش نابجاییها می‌باشد.

شار کلی J_1 نشانگر نرخ تولید نابجایی میانگین در واحد حجم به صورت رابطه (57) تعریف می‌شود:

$$J_1 = \frac{d\rho^+}{dt} \quad (57)$$

که $d\rho^+$ طول نابجایی تولید شده بر واحد حجم است که در زمان ورودی dt ایجاد می‌گردد. نیرو برای تولید نابجاییها یا آنیل شدن مطابق رابطه (58) تعریف می‌شود:

$$X_i = \frac{E}{T} \quad (58)$$

که $i=1$ مربوط به تولید نابجاییها و $i=2$ مربوط به آنیل شدن آنها می‌باشد. E انرژی پتانسیل نابجایی بر واحد طول می‌باشد. مقدار E در اکثر تحقیقات از رابطه (59) بدست می‌آید [21]:

$$E = \frac{\mu b^2}{2} \quad (59)$$

که μ مدول برشی و b بردار برگرز می‌باشد. J_2 نرخ آنیل شدن میانگین نابجایی در واحد حجم است که از رابطه (60) بدست می‌آید:

$$J_2 = \frac{d\rho^-}{dt} \quad (60)$$

و در آن $d\rho^-$ طول نابجایی بر واحد حجم آنیل شده در بازه زمانی dt می‌باشد. J_3 شار کلی متناسب با لغزش نابجاییها است و به صورت رابطه (61) تعریف می‌شود:

$$J_3 = \rho_m v \quad (61)$$

که ρ_m بیانگر نابجاییهای متحرک می‌باشد. همینطور X_3 نیروی کلی برای لغزش نابجاییها است که به صورت رابطه (62) بیان می‌شود:

$$X_3 = \frac{(\tau - \tau_G) b}{T} \quad (62)$$

که τ تنش جریان برشی و τ_G تنش اصطکاکی برای لغزش نابجاییها می‌باشد. با وارد کردن روابط (57) تا (62) در معادله (55) نرخ تولید آنتروپی به صورت رابطه (63) بدست می‌آید:

$$\dot{S} = \frac{1}{T} \left[(\tau - \tau_G) \dot{\gamma} + E \frac{d\rho^+}{dt} + E \frac{d\rho^-}{dt} \right] \quad (63)$$

نرخ تولید نابجاییها بر طبق رابطه (64) بدست می‌آید:

$$\frac{d\rho^+}{dt} = \frac{\tau_G \dot{\gamma}}{2E} \quad (64)$$

نرخ آنیل شدن نابجاییها نیز از رابطه (65) بدست می‌آید [14]:

$$\frac{d\rho^-}{dt} = \alpha_{nn} \rho_m \dot{\gamma} \quad (65)$$

که α_{nn} ثابت می‌باشد. تنش برشی نیز بر اساس معادله (66) تعریف می‌شود:

$$\tau = \tau_G + \tau^* \quad (66)$$



نمودار 1 توصیف خلاصه روابط

جدول 1 ثوابت برای آلیاژ آلومینیوم 6061

$\rho_0 = 2703 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\mu = 27.7\text{GPa}$	$T = 295 \text{ K}$
$a_1 = 0, a_2 = 20.28 \times 10^6 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$	$a_3 = 157.7 \times 10^6 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$	
$a_4 = -66.4 \times 10^6 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$	$a_5 = 157.7 \times 10^6 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$	
$M = 2, c_1 = 0.168, T_1^* = 1.6 \times 10^6 \text{ Pa}$		
$\tau_{a0} = 120 \text{ MPa}, \gamma_0 = 0.52, n = 1.55$		
$b = 0.286 \times 10^{-9} \text{ m}$		
$\rho_{m0} = 0.818 \times 10^{13} \text{ m}^{-2}$		
$\rho_{t0} = 0.818 \times 10^{13} \text{ m}^{-2}$		
$\alpha_b = 3.5 \times 10^5 \text{ m}^{-1}$		
$\alpha_t = 0, \alpha_{nn} = 0.5$		

میزان تغییرات λ_1 در حالتی که فلز به حد الاستیک خود می‌رسد، از 0/99578 آغاز شده و تا 0/8171 برای تنش 25 GPa ادامه پیدا می‌کند. همچنین، میزان تغییرات λ_1^p از 1 تا 0/88692 می‌باشد.

عنوان یک متغیر مستقل در نظر می‌گیرند. اما در بارگذاری موج شوک و برای تنش‌های اعمالی بزرگ، نرخ کرنش پارامتری وابسته به تنش و کرنش پلاستیک می‌باشد و نمی‌توان آن را به عنوان پارامتری مستقل در نظر گرفت. با در نظر گرفتن رابطه (70)، λ_1^p را می‌توان طبق رابطه (77) بر حسب تنش برشی و کشیدگی پلاستیک توصیف نمود:

$$\lambda_1^p = -\frac{2}{3}\lambda_1^p \dot{\gamma} = -\frac{2}{3}\lambda_1^p b \rho_{m0} c_1 \times \left(1 + \frac{-3}{2} \alpha_b \ln \lambda_1^p\right) \times \exp\left(\frac{-3}{2} (\alpha_b \alpha_t \ln \lambda_1^p)\right) \left(\frac{\tau - \tau_{a0} \left(1 + \frac{-3 \ln(\lambda_1^p)}{\gamma_0}\right)^{\frac{1}{n}}}{T_1^*}\right)^M \quad (77)$$

3-3- نمودار روند تحلیل مساله

به طور خلاصه از آنچه بیان شد، هدف از ارائه روابط، رسیدن به رابطه نهایی، متشکل از تنش برشی و کشیدگی پلاستیک می‌باشد. این رابطه، رابطه نرخ زمانی قانون بقای انرژی می‌باشد (رابطه 36) که از سه مولفه نرخ زمانی کار مکانیکی، نرخ زمانی انرژی داخلی و نرخ زمانی تولید آنتروپی تشکیل شده است. رابطه نهایی نرخ زمانی کار مکانیکی، رابطه 41 می‌باشد که بر حسب $\lambda_1, \lambda_1^p, \dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_1^p, \tau$ تعریف می‌شود. نرخ زمانی تغییرات انرژی داخلی از رابطه نهایی 55 بدست می‌آید که بر حسب $\lambda_1, \lambda_1^p, \dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_1^p$ می‌باشد. طبق رابطه 49، λ_1 به λ_1^p مربوط می‌شود. همچنین، طبق رابطه 51، $\dot{\lambda}_1$ با $\dot{\lambda}_1^p$ مربوط می‌شود. در نهایت نیز، طبق رابطه 76، $\dot{\lambda}_1^p$ با λ_1^p و τ مربوط می‌شود. در نتیجه، نرخ زمانی کار مکانیکی و انرژی داخلی، بر حسب λ_1^p و τ بیان شده‌اند. نرخ زمانی تولید آنتروپی نیز طبق رابطه 70 بر حسب $\tau, \dot{\gamma}$ و γ بیان شده‌اند. در نتیجه، نرخ زمانی تولید آنتروپی نیز بر حسب λ_1^p و τ بیان شده‌اند. در نهایت نیز با جایگذاری نرخ زمانی کار مکانیکی، انرژی داخلی و تولید آنتروپی که بر حسب λ_1^p و τ بیان شده‌اند، در رابطه نرخ زمانی قانون بقای انرژی (رابطه 36)، τ چند جمله‌ای از درجه دو بر حسب λ_1^p به دست می‌آید. آنچه گفته شد به صورت خلاصه در نمودار 1 نشان داده شده است. با حل این معادله، مقادیر τ به ازاء کشیدگی‌های مختلف که ناشی از تنش‌های اعمالی مختلف می‌باشد، بدست آمده است. این نتایج در بخش 2-4 نشان داده شده است.

4- نتایج و بحث

4-1- کشیدگی، سرعت موج شوک و سرعت ذرات

در این بخش تحلیل پاسخ موج شوک پایدار پلاستیک بر روی آلیاژ آلومینیوم 6061 صورت می‌گیرد. انتخاب این آلیاژ FCC به این دلیل است که ضرایب و ثوابت آن موجود است و همچنین این آلیاژ کاربردهای فراوانی در زمینه صنعت خودروسازی و هواپیماسازی دارد. ثوابت این فلز در جدول 1 بیان شده است. ثوابت جدول 1 به جز c_1 ، T_1^* و M که از مرجع [9] استخراج شده‌اند، از مرجع [15] استخراج شده است.

شکل 2 بیانگر نمودار تغییرات کشیدگی پلاستیک در راستای انتشار موج شوک (λ_1^p) بر حسب کشیدگی کل (λ_1) بر اساس رابطه 49 می‌باشد. همچنین نتایج کشیدگی کل با نتایج تئوری و تجربی موجود مقایسه شده است. توافق خوبی بین نتایج ارائه شده با نتایج این تحقیق وجود دارد.

نیز از رابطه 35 بدست آمده است. سرعت حد الاستیک برابر $27/2$ m/s می-باشد (جدول 1). توافق خوبی بین نتایج تجربی و مدل ارائه شده وجود دارد. شکل 5 بیانگر نمودار بین تغییرات تنش اعمالی در راستای انتشار موج شوک (σ_1) بر حسب کشیدگی کل (λ_1) و مقایسه آن با نتایج تجربی موجود می-باشد. رابطه 33 بیانگر ارتباط بین σ_1 با λ_1 می-باشد. توافق خوبی بین نتایج ارائه شده با نتایج این تحقیق وجود دارد. مقدار تنش در حد الاستیک برابر $0/473$ GPa می-باشد.

خط رابلی که در شکل 5-6 مشاهده می-شود، حالت ابتدایی ماده را به حالت نهایی با شیب ثابت $-\rho_0 C^2$ متصل می-کند. مقدار سرعت موج شوک برای تنش اعمالی 25 GPa برابر $7133/86$ m/s می-باشد. همانطور که مشاهده می-شود، اختلاف بین دو نمودار در شکل 5 مقدار قابل توجهی می-باشد. این اختلاف، ناشی از انرژی تلف شده می-باشد.

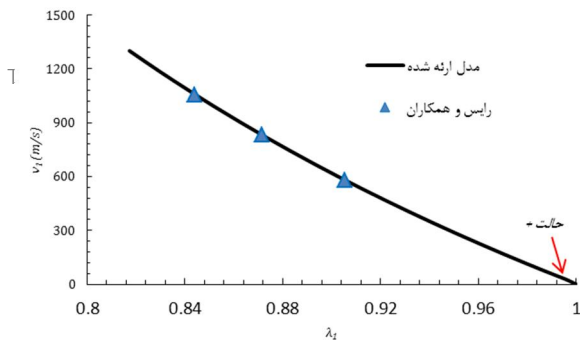
2-4- تنش برشی

با توجه به آنچه در بخش 3-3 بیان شده است، به ازاء تنش اعمالی مختلف در راستای انتشار موج شوک ($\sigma_1 = 15, 12, 8/9, 6/5$ GPa) نمودار تنش برشی بر حسب کرنش پلاستیک معادل ترسیم می-شود (شکل 6).

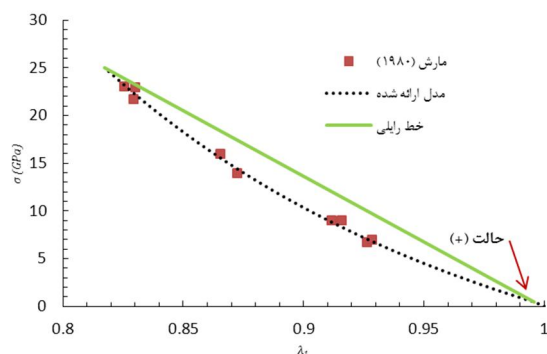
کرنش پلاستیک معادل از رابطه (78) بدست می-آید:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{eff}}^p &= \frac{\sqrt{2}}{3} [(\epsilon_1^p - \epsilon_2^p)^2 + (\epsilon_1^p - \epsilon_3^p)^2 + (\epsilon_2^p - \epsilon_3^p)^2]^{1/2} \\ &= \frac{2}{3} (\epsilon_1^p - \epsilon_2^p) \end{aligned} \quad (78)$$

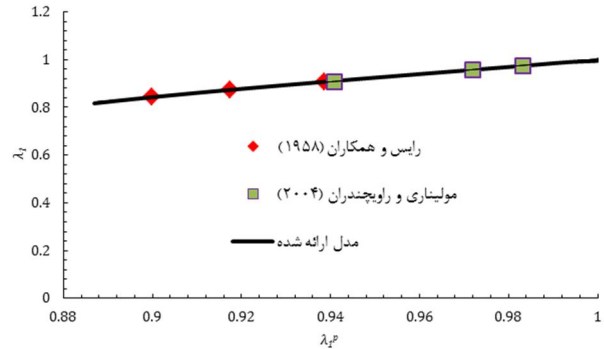
که ϵ_1^p و ϵ_2^p ، طبق روابط (19) و (20) بر حسب λ_1^p بیان شده‌اند. دلیل استفاده از کرنش پلاستیک معادل به جای کشیدگی پلاستیک آنست که در کار تجربی انجام شده توسط والاس، تنش برشی بر حسب کرنش موثر



شکل 4 نمودار سرعت ذرات بر حسب کشیدگی کل و مقایسه نتایج با کار تجربی رایس [22]



شکل 5 نمودار تنش اعمالی در راستای انتشار موج شوک بر حسب کشیدگی کل و مقایسه نتایج با کار تجربی مارش [23]



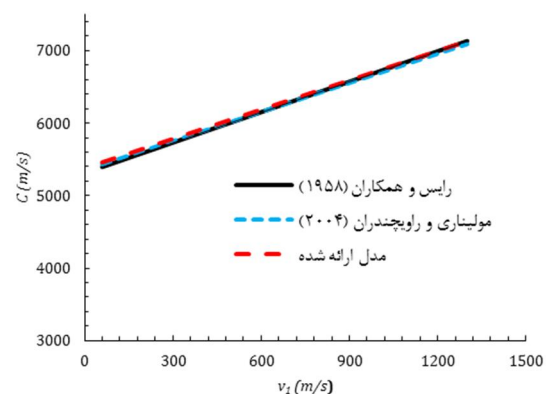
شکل 6 تغییرات کشیدگی کل بر حسب کشیدگی پلاستیک در راستای انتشار موج شوک و مقایسه نتایج با کار تجربی رایس و همکاران [22] و تئوری مولیناری و راویچندران [16]

رابطه بین سرعت موج شوک و سرعت ذرات، یک رابطه خطی می-باشد [2]. محققین مختلف دو ثابت مورد نیاز برای توصیف رابطه بین سرعت موج شوک و سرعت ذرات را از طریق انجام آزمایشهای تجربی و بررسی تئوری بدست آورده‌اند. جدول 2 نشان دهنده این ثوابت برای کارهای تئوری و تجربی مختلف می-باشد [9, 16, 22]. در این تحقیق، برای بررسی رابطه 35، از ضرایب مرجع [9] استفاده شده است. شکل 3 بیانگر نمودار سرعت موج شوک (C) بر حسب سرعت ذرات (v_1) برای مدل ارائه شده و مقایسه نتایج با مراجع [16, 22] می-باشد. شکل 3 بیانگر آن است که نمودارها به طور تقریبی بر هم منطبق می-باشند. در این تحقیق و برای ادامه کار، بر اساس کار تجربی سویگل و گریدی، ضرایب $m1$ و $m2$ که به ترتیب برابر $1/337$ و 5353 m/s می-باشند، انتخاب شده‌اند.

شکل 4 بیانگر رابطه بین سرعت ذرات (v_1) بر حسب کشیدگی کل (λ_1) و مقایسه نتایج با نتایج تجربی می-باشد. سرعت موج شوک (C) بر حسب λ_1

جدول 2 ضرایب سرعت موج شوک بر حسب سرعت ذرات برای مدل‌های مختلف

	$m2$	$m1$	
	5353	1/337	[9]
	5320	1/437	[16]
	5312	1/401	[22]



شکل 3 نمودار سرعت موج شوک بر حسب سرعت ذرات برای مدل ارائه شده، (ضرایب سرعت هوگونیوت شوک از مرجع [9]، استخراج شده است). کار تجربی رایس و همکاران [22] و روش تئوری مولیناری و راویچندران [16]

3-4- ساختار موج شوک

رابطه 71 را می‌توان به صورت رابطه 79 بیان نمود:

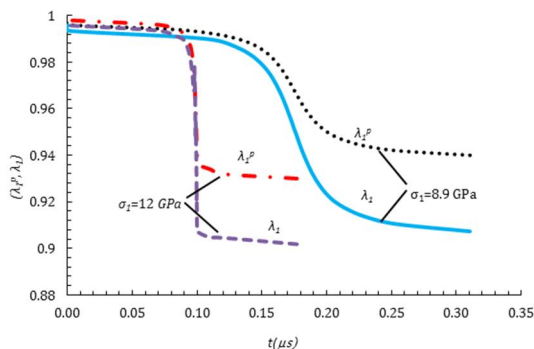
$$-\frac{3d\lambda_1^p}{2\gamma\lambda_1^p} = dt \quad (79)$$

ساختار موج شوک را با انتگرال گیری از رابطه (79) می‌توان بدست آورد. شکل 7 بیانگر تاریخچه زمانی کشیدگی‌های پلاستیک و کل برای دو تنش اعمالی 8/9 و 12 GPa می‌باشد. زمان صفر زمانی است که موج پلاستیک به مکان X مورد نظر در راستای ضخامت ماده رسیده باشد. به دلیل آنکه موج شوک پایدار است، شکل موج در تمام راستای ضخامت، یکسان می‌باشد. آنچه از شکل 7 مشخص است با مقایسه بین دو تنش اعمالی، با افزایش تنش اعمالی، زمان رسیدن پیشانی موج پلاستیک کاهش پیدا می‌کند. همچنین زمان خیزش موج شوک با افزایش تنش اعمالی کاهش پیدا می‌کند. در نتیجه پیشانی موج شوک با افزایش تنش اعمالی، صافتر می‌شود.

5- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، با در نظر گرفتن پارامترهای موثر بر تنش جریان برشی و بر اساس تئوری نابجاییها، یک مدل تئوری برای بررسی پاسخ بارگذاری موج شوک پایدار بر روی فلزات FCC، ارائه شده است. همچنین، با استفاده از قانون بقای انرژی، به بررسی پاسخ بلورهای فلزی FCC در اثر بارگذاری موج شوک، پرداخته شده است. اثرات آنتروپی که در نرخ کرنشهای بالا اهمیت فراوانی پیدا می‌کنند، در این معادلات وارد شده‌اند. در معادله نهایی، تنش برشی، چندجمله‌ای از درجه دو بر حسب کشیدگی پلاستیک می‌باشد که از حل این چندجمله‌ای مقادیر تنش برش بر حسب تغییر شکل موثر پلاستیک بدست آمده است.

نرخ کرنش به عنوان پارامتری وابسته به تنش و کرنش در نظر گرفته شده است. در تحقیقات صورت پذیرفته برای بارگذاریهای مختلف، نرخ کرنش پارامتری مستقل فرض می‌شود، اما در بارگذاری موج شوک، به دلیل تغییرات گسترده نرخ کرنش نسبت به کرنش پلاستیک، این فرض صحیح نمی‌باشد. نمودارهای کشیدگی، سرعت موج شوک و تنش اعمالی، بر حسب کشیدگی پلاستیک رسم شده و نتایج با کارهای تجربی مقایسه شده‌اند. توافق خوبی بین نتایج، مشاهده شده است. نشان داده شده که در یک تنش اعمالی مشخص، تنش برشی با افزایش تغییر شکل پلاستیک، ابتدا به دلیل افزایش نیروی درگ، افزایش چشمگیری پیدا کرده و به یک مقدار بیشینه می‌رسد. سپس به دلیل آرامش نابجاییها، مقدار تنش برشی به صورت قابل ملاحظه‌ای کاهش پیدا می‌کند.



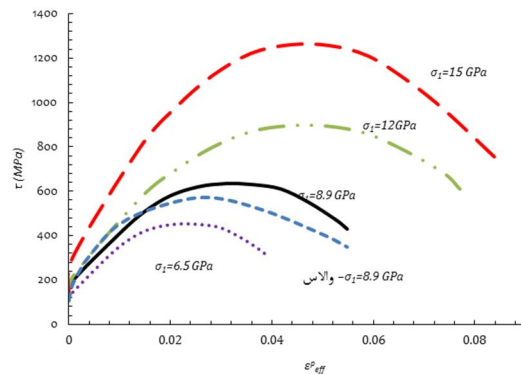
شکل 7 تاریخچه زمانی کشیدگی پلاستیک و کشیدگی کل برای 8/9 و 12 GPa.

پلاستیک بیان شده است. در این تحقیق نیز برای $\sigma_1 = 8/9$ GPa تنش برشی بر حسب کرنش پلاستیک معادل رسم شده و با کار صورت گرفته توسط والاس مقایسه می‌شود.

همانطور که در شکل مشاهده می‌شود در ابتدا، تنش برشی به صورت چشمگیری افزایش پیدا کرده و به یک مقدار بیشینه می‌رسد و سپس افت پیدا می‌کند. افزایش تنش برشی ناشی از نیروی درگی است که باعث افزایش چشمگیر سرعت حرکت نابجاییها می‌شود. آستین و مک داوول [19] افت تنش برشی با افزایش کرنش موثر پلاستیک را ناشی از آرامش نابجاییها¹ دانسته‌اند که به سبب ایجاد و حرکت نابجاییهای جدید و تداخل آنها با نابجاییهای در حال حرکت، به وقوع می‌پیوندد.

با مقایسه $\sigma_1 = 8/9$ GPa برای مدل ارائه شده و کار تجربی، توافق خوبی بین نتایج وجود دارد. بیشینه تنش برشی در کار ارائه شده 624 MPa و در کار تجربی 572 MPa می‌باشد. درصد خطا برای بیشترین مقدار تنش برشی بین مدل ارائه شده و کار تجربی % 8/55 می‌باشد. همچنین جدول 3 بیانگر بیشینه مقدار تنش برشی در شکل 6 و مقایسه نتایج با کار تئوری صورت گرفته شده توسط آستین و مک داوول [19] برای تنشهای اعمالی 8/9 GPa و 12 و 15 GPa می‌باشد.

همچنین جدول 3 بیانگر نسبت افزایش بیشترین مقدار تنش برشی به تنش برشی در حد الاستیک (τ/τ^+) می‌باشد ($\tau^+ = 157$ MPa). همانطور که از جدول 3 مشخص است، با افزایش تنش اعمالی که منجر به افزایش نرخ کرنش برشی می‌شود، این نسبت به طور چشمگیری افزایش پیدا می‌کند. نسبت افزایش تنش دینامیکی به استاتیکی برای معادله بنیادی جانسون کوک [24] برای آلیاژ آلومینیوم 6061 در نرخ کرنش 1/15 و 1/20 برابری و همچنین برای معادله بنیادی فیزیکی [25]، در نرخ کرنش 1/1500 برابر 1/20 می‌باشد. در نتیجه، نسبت افزایش تنش در مدل ارائه شده بیشتر از مدل‌های تجربی و فیزیکی ذکر شده می‌باشد.



شکل 6 نمودار تنش برشی مدل ارائه شده بر حسب کرنش موثر پلاستیک برای بارگذاریهای مختلف و مقایسه $\sigma_1 = 8/9$ GPa با کار تجربی والاس [8]

جدول 3 مقایسه بیشترین مقدار تنش برشی با روش تئوری آستین و مک داوول

σ_1 (GPa)	مدل حاضر	[19]	درصد خطا (%)	τ/τ^+
8/9	624	592	5/10	3/95
12	893	864	2/70	5/70
15	1249	1193	4/50	7/95

- [11] H. Shokrollahi, M. Sedighi, M. Khandaei, *Constant and Variable Assuming Strain Rate Methods for Identification of Constitutive Model of Metals Using Hopkinson Pressure Bar Test*, Vol. 12, No. 2, pp. 1-10, 2011. (In Persian)
- [12] R. Naghdabadi, M.J. Ashrafi, S. Sohrabpour, *Experimental and Numerical Study of Parameters Shaping the Incident Pulse in Split Hopkinson Pressure Bar Test*, Aerospace Mechanics Journal, Vol. 6, No. 4, pp. 71-80, 2011. (In Persian)
- [13] G. H. Liaghat, M. T. Ahmadi, P. Pirali, *Numerical Analysis and Presentation of a Combined Structural Model for the Concrete Affected by a Relatively High Strain Rate Loading*, Journal of Energetic Materials, Vol. 5, No.2, pp.43-58, 2011. (In Persian)
- [14] J. Zamani, H. Motamed al shariati, A. K. Ghamsari, A. Sheikhi Koohsar, *Investigation of Strain Rate in Circular Plates under Dynamic Loading by Introducing Dynamic to Static Collapse Pressure Ratio*, Journal of Energetic Materials, Vol.5, No.2, pp.73-94, 2011. (In Persian)
- [15] R.J. Clifton, On the analysis of elastic/visco-plastic waves of finite uniaxial strain, in: J.J. Burke, V. Weiss, *Shock Waves and the Mechanical Properties of Solids*, Syracuse University Press, Syracuse, NY, pp. 73-116, 1970.
- [16] A. Molinari, G. Ravichandran, *Fundamental structure of steady plastic shock waves in metals*, Journal of Applied Physics, Vol. 95, Issue 4, pp.1718-1732, 2004.
- [17] R.W. Armstrong, W. Arnold, F.J. Zerilli, *Dislocation mechanics of shock-induced plasticity*, Metall. Mater. Trans. A, Vol. 38A, Issue 11, pp. 2605-2610, 2007.
- [18] R.W. Armstrong, W. Arnold, F.J. Zerilli, *Dislocation mechanics of copper and iron in high rate deformation tests*. Journal of Applied Physics, Vol. 105, Issue 2, pp. 1-7, 2009.
- [19] A.D Austin, D.L. McDowell, *A dislocation-based constitutive model for viscoplastic deformation of fcc metals at very high strain rates*, International Journal of Plasticity, Vol. 27, No. 1, pp. 1-24, 2011.
- [20] M. Huang, E.J. Rivera-Diaz-del-Castillo Pedro, O. Bouaziz, S. van der Zwaag, *A constitutive model for high strain rate deformation in FCC metals based on irreversible thermodynamics*, Mechanics of Materials, Vol. 41, Issue 9, pp.982-988, 2009.
- [21] E.I. Poliak, J.J. Jonas, *A one-parameter approach to determining the critical conditions for the initiation of dynamic recrystallization*, Acta Mater, Vol. 44, Issue 1, pp. 127-136, 1986.
- [22] M. H. Rice, R. G. McQueen, J. M. Walsh, in *Solid State Physics*, edited by F. Seitz and D. Turnbull Academic, San Diego, Vol. 6, pp. 1-10, 1958.
- [23] S.P. Marsh, *LASL Shock Hugoniot Data*, University of California Press, Berkeley, CA, 1980.
- [24] D. Zhu, B. Mobasher, P.E. Asce, S.D. Rajan, P. Peralta, *Characterization of Dynamic Tensile Testing Using Aluminum Alloy 6061-T6 at Intermediate Strain Rates*, J. Eng. Mech., Vol.137, Issue 10, pp.669-679, 2011.
- [25] B. Banerjee, A.S. Bhawalker, *An extended mechanical threshold stress plasticity model: Modeling 6061-t6 aluminum alloy*, Journal of Mechanics of Materials And Structures, Vol. 3, Issue 3, pp. 391-424, 2008.

ساختار موج شوک نیز مورد بررسی قرار گرفته است. نشان داده شده است که با افزایش تنش اعمالی، خیزش موج شوک سریعتر و در بازه زمانی کوتاه-تری، اتفاق افتاده است. همچنین پیشانی موج شوک، با افزایش تنش اعمالی، صاف تر شده است.

6- تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از زحمات سرکار خانم مهندس اسدوندی، سرپرست آزمایشگاه شکل دهی نوین، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، به خاطر پیگیری‌های فراوان برای ارائه این تحقیق، قدردانی می‌کنند.

7- مراجع

- [1] J.E. Field, S.M. Walley, W.G. Proud, H.T. Goldrein, S.R. Siviour, *Review of experimental techniques for high rate deformation and shock studies*, International Journal of Impact Engineering, Vol. 30, Issue 7, pp. 725-775, 2004.
- [2] M.A. Meyers, *Dynamic behavior of Materials*. 1st ed. Wiley; 1994.
- [3] S.E. Grunschel, *Pressure-Shear Plate Impact Experiments on High-Purity Aluminum at Temperatures Approaching Melt*, PhD Thesis, Brown University, Rhode Island, 2009.
- [4] W. Tong, R.J. Clifton, S. Huang, *Pressure-shear impact investigation of strain rate history effects in oxygen-free high-conductivity copper*, Journal of Mechanics Physics Solids, Vol. 40, Issue 6, pp. 1251-1294, 1992.
- [5] K.J. Frutschy, R.J. Clifton, *High-temperature pressure-shear plate impact experiments on OFHC copper*, Journal of Mechanics Physics Solids, Vol. 46, Issue 10, pp.1723-1743, 1998.
- [6] M.A. Meyers, F. Gregori, B.K. Kad, M.S. Schneider, D.H. Kalantar, B.A. Remington, G. Ravichandran, T. Boehly, *Laser-Induced Shock Compression of Monocrystalline Copper*, Acta Materialia, Vol. 51, No. 3, pp.1211-1218, 2003.
- [7] D.J. Steinberg, S.G. Cochran, M.W. Guinan, *A constitutive model for metals applicable at high-strain rate*, Journal of Applied Physics, Vol. 51, Issue 3, pp. 1498-1504, 1980.
- [8] D.C. Wallace, *Flow process of weak shock waves*, Physics Review B, Vol. 22, issue dated 15 August 1980, pp. 1487-1494, 1980.
- [9] J.W. Swegle, D.E. Grady, *Shock viscosity and the prediction of shock rise times*, Journal of Applied Physics, Vol. 58, Issue 2, pp. 692-701, 1985.
- [10] S. Feli, S. S. Jafari, *Analytical investigation of perforation of aluminum-foam sandwich panels under ballistic impact*, Modares Mechanical Engineering, Vol. 13, No. 6, pp 52-59, 2013. (In Persian)