مجله مهندسی مکانیک مدرس، مهر 1394، دوره 15، شماره 7، ص‌ص 1-12

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

ارتعاشات اجباری غیرخطی پوسته استوانه‌ای از جنس آلیاژ حافظه‌دار سوپرالاستیک تحت فشار داخلی متغییر با مکان و زمان

فریناز فروزش[1]، علی‌اصغر جعفری[2*]

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
* تهران، 19395-1999، ajafari@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 23 اسفند 1393
پذیرش: 29 فروردین 1394
ارائه در سایت: 28 اردیبهشت 1394

کلید واژگان:
ارتعاشات غیرخطی
پوسته استوانه‌ای
آلیاژ حافظه‌دار سوپرالاستیک
ماده غیرهمگن
روش تربیع دیفرانسیلی

چکیده

در این مقاله هدف بررسی ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای دو سر مفصل ساخته شده از ماده آلیاژ حافظه‌دار سوپرالاستیک، تحت فشار داخلی هارمونیک متغییر با مکان و زمان است. بدین منظور جهت استخراج معادلات حرکت سیستم از تئوری تغییرشکل کلاسیک پوسته دانل و اصل همیلتون استفاده شده و برای مدل‌سازی رفتار ماده سوپرالاستیک از مدل سه‌بعدی بوید- لاگوداس و الگوریتم عددی نگاشت برگشتی استفاده شده است. همچنین برای حل معادلات از روش عددی تربیع دیفرانسیلی و روش عددی زمانی نیومارک بهره گرفته شده است. علاوه‌براین، فرکانس‌های طبیعی پوسته برای حالت فاز آستنیت کامل به منظور مقایسه رفتار فرکانسی سیستم غیرخطی مورد مطالعه با حالت خطی آن (عدم انتقال فاز) در اطراف این فرکانس‌های طبیعی به‌دست آمده است. نمودارهای جابه‌جایی شعاعی برحسب موقعیت طولی نقاط و نیز نمودارهای جابه‌جایی شعاعی برحسب زمان و فرکانس نقطه بحرانی پوسته همراه با نمودارهای تغییر فاز آن‌ها براساس تغییر شدت دامنه فشار اعمالی، استخراج شده و اثر شدت بار بر جابه‌جایی، کسر حجمی مارتنزیت و خواص ماده نقاط پوسته مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج پاسخ فرکانسی سیستم مورد مطالعه در اطراف فرکانس‌های طبیعی حاصله، رفتار غیرخطی نرم‌شوندگی از خود نشان می‌دهند که این امر به‌واسطه کاهش استحکام ماده در هنگام تغییر فاز با اعمال تنش است. همچنین به‌منظور صحه‌گذاری روابط حاصله، نتایج جابه‌جایی نقطه بحرانی پوسته در حالت فاز آستنیت کامل با نتایج نمونه شبیه‌سازی‌شده در نرم‌افزار المان محدود آباکوس مقایسه شده که همگرایی خوبی میان نتایج مشاهده شده است.

Nonlinear Forced vibration of pseudoelastic shape memory alloy cylindrical shell subjected to the time and space dependant internal pressure

Farinaz Forouzesh, Ali Asghar Jafari*

Department of Mechanical Engineering, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.
* P.O.B. 19395-1999 Tehran, Iran, ajafari@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 14 March 2015
Accepted 18 April 2015
Available Online 18 May 2015

Keywords:
Nonlinear vibrations
Cylindrical shell
Pseudoelastic shape memory alloy
Non-homogeneous material
DQM

ABSTRACT

The objective of this paper is to analyze the nonlinear vibrations of simply supported pseudoelastic shape memory alloy (SMA) cylindrical shell under harmonic internal pressure based on Donnell-type classical deformation shell theory. The pressure is a function of time and space. The behavior of pseudoelastic SMA is simulated via the Boyd–Lagoudas constitutive model numerically implemented by the Convex Cutting Plane Mapping algorithm. The Hamilton's principle is employed to obtain the equations of motion. Differential Quadrature Method (DQM) and Newmark time integration scheme are applied to get the time and frequency responses of the cylinder. Also, the natural frequencies of the shell are obtained for the case of pure austenitic phase to compare the frequency response of the present nonlinear system (phase transformation–induced material nonlinearity) with the linear one around them. Results indicate that the strength of the material will decrease during the phase transformation. This fact is proved by the softening behavior observed in the frequency response of the system due to the phase transformation. Further, the pure austenitic phase shell is simulated in ABAQUS to verify the results. Good agreement is found between the two outcomes.

1- مقدمه

ویژگی‌های منحصر به فرد آلیاژهای حافظه‌دار[1]، توجه بسیاری از محققان را برای استفاده از چنین موادی در کاربردهای مختلف مانند کاهش ارتعاشات ناخواسته سیستم‌های مکانیکی و ... در طی چند دهه اخیر به خود جلب کرده

1- SMA

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

F. Forouzesh, A. Asghar Jafari, Nonlinear Forced vibration of pseudoelastic shape memory alloy cylindrical shell subjected to the time and space dependant internal pressure, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 7, pp. 1-12, 2015 (In Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.7.14.2]

است. آلیاژهای حافظه‌دار می‌توانند در بازه وسیعی از بخش‌های صنعتی مانند هوافضا، خودرو، بیومکانیک و نفت کاربرد داشته باشند [1].

ظرفیت بالای اتلاف انرژی به‌واسطه بروز رفتار هیسترزیس در حالت سوپرالاستیسیته و همچنین خواص ترمومکانیکی این مواد از جمله خواص مورد توجهی است که در کاهش ارتعاشات سیستم‌ها کاربرد دارد [2]. محققان بسیاری به مطالعه رفتار پیچیده دینامیکی سیستم‌های آلیاژ حافظه‌دار پرداخته‌اند که شامل رفتار ارتعاشات آزاد و اجباری میله‌ها، تیرها و ورق‌های کامپوزیتی تقویت‌شده با سیم‌های آلیاژ حافظه‌دار می‌شوند.

برای نمونه سیلکه [3] در سال 2002 به مطالعه ارتعاشات آزاد و اجباری سیستم یک درجه آزادی جرم صلب آویزان‌شده توسط لوله آلیاژ حافظه‌دار تحت بارگذاری پیچشی پرداخت. در این تحقیق از مدل اصلاح شده مولر- آخنباخ[1] برای بررسی رفتار آلیاژ حافظه‌دار در حالت شبه پلاستیسیته و سوپرالاستیسیته استفاده شده است. تحلیل ارتعاشات آزاد نشان می‌دهد که ماده در حالت شبه پلاستیسیته، میرایی بیشتری از خود نشان می‌دهد. هاشمی و خادم [4] در سال 2006، مدلی ریاضی براساس مدل آریکیو[2] ارائه کرده‌اند که عدم تقارن در کشش و فشار و نیز اثرات دما بر هیسترزیس ماده در شرایط سوپرالاستیسیته را در نظر می‌گیرد. ایشان همچنین به تحلیل رفتار دینامیکی یک تیر نیکل-تیتانیوم[3] با شرایط مرزی یک سر آزاد- یک‌سر گیردار و دو سر مفصل در ارتعاشات آزاد و ارتعاشات اجباری تحت بارهای ضربه‌ای و سیسنوسی پرداخته‌اند. ماکادو [2] در سال 2007، دینامیک غیرخطی یک دستگاه میراگر و عایق ارتعاشی را با استفاده از شبیه‌سازی عددی و تست‌های تجربی مورد بررسی قرار داده است. دستگاه مورد مطالعه شامل جرم متصل به بدنه با استفاده از سیم‌های آلیاژ حافظه‌دار است که تحت مجموعه‌ای از توابع شتاب پیوسته به فرم سینوسی قرار دارد. در این تحقیق برای مدل‌سازی رفتار المان‌های آلیاژ حافظه‌دار از مدل ترمومکانیکی پیشنهادشده توسط بوید و لاگوداس[4] استفاده شده است. جعفری و غیاثوند [5] در سال 2008 به ارائه پاسخ دینامیکی تیرهای آلیاژ حافظه‌دار تحت بار متمرکز متحرک پرداخته‌اند. در این تحقیق از مدل توسعه‌یافته آریکیو- مولر، معادلات لاگرانژ و تابع آزمون چندجمله‌ای که بیانگر تغییر شکل تیر است، استفاده شده است. زبیسیاک [6] در سال 2010 به ارائه فرمولاسیون یک مسئله مقدار مرزی اولیه برای تحلیل دینامیکی یک تیر اولر- برنولی ساخته‌شده از آلیاژ حافظه‌دار سوپرالاستیک پرداخته است. روش تفاضل محدود و روش رانج- کوتا[5] برای حل مسئله مذکور استفاده شده است. شیائو و همکارانش [7] در سال 2011 تأثیر آلیاژ حافظه‌دار بر رفتار ارتعاشات آزاد و کمانش ورق‌های کامپوزیتی چند لایه را با تغییر فاصله فیبرهای آلیاژ حافظه‌دار با استفاده از روش المان محدود مورد بررسی و مطالعه قرار دادند. نتایج حاصله از این تحقیق نشان می‌دهد که افزایش کسر حجمی آلیاژ حافظه‌دار منجر به کاهش جابه‌جایی‌های پس کمانش ورق و اصلاح فرکانس‌های طبیعی آن به‌طور چشمگیری می‌شود. ونگ و همکارانش [8] در سال 2012 به طراحی یک سیستم نوسانگر شامل جرم متمرکز متصل به انتهای میله آلیاژ حافظه‌دار پرداخته‌اند. در این بررسی به‌منظور تحلیل ارتعاشی سیستم، یک مدل غیرخطی دینامیکی و نیز یک روش حل عددی پربازده پیشنهاد شده است. نتایج نشان می‌دهند که در دماهای پایین، میله آلیاژ حافظه‌دار به‌صورت یک دمپر رفتار خواهد کرد. اسدی و همکارانش [9] در سال 2013 ارتعاشات با دامنه بالا و پس کمانش حرارتی تیرهای کامپوزیتی تقویت‌شده توسط فیبرهای آلیاژ حافظه‌دار با لایه چینی متقارن و غیرمتقارن را مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق از تئوری تیر اولر- برنولی و مدل تک‌بعدی برینسون جهت شبیه‌سازی رفتار آلیاژ حافظه‌دار استفاده شده و حل فرم بسته‌ای[6] برای تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی و پس کمانش حرارتی چنین تیرهایی ارائه شده است. اسدی و همکارانش [10] در سال 2013 ارتعاشات آزاد تیرهای کامپوزیتی تقویت شده توسط سیم‌های آلیاژ حافظه‌دار را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه نخست و مدل برینسون مورد بررسی قرار دادند. خلیلی و همکارانش [11] در سال 2013 به مطالعه پاسخ دینامیکی غیرخطی یک تیر ساندویچی با ورقه‌های سطحی آلیاژ حافظه‌دار در حالت سوپرالاستیک با استفاده از مدل برینسون و تئوری المان محدود مرتبه بالا پرداختند. خلیلی و همکارانش [12] در سال 2013 مدل المان محدود غیرخطی جدیدی را برای تحلیل دینامیکی ورق‌های چندلایه کامپوزیتی شامل فیبرهای آلیاژ حافظه‌دار ارائه کردند.

مطالعه تحقیقات گذشته در این زمینه نشان می‌دهد که با وجود نقش عمده سازه‌های پوسته‌ای و استفاده گسترده آن‌ها در سیستم‌های ارتعاشاتی، تاکنون تحقیقی در زمینه تحلیل ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای از جنس آلیاژهای حافظه‌دار صورت نگرفته است. از این‌رو در این مقاله برای نخستین بار و به‌صورت بنیادین به بررسی رفتار ارتعاشی پوسته‌های آلیاژ حافظه‌دار در حالت سوپرالاستیک تحت فشار داخلی متغییر با مکان و زمان پرداخته شده است. در واقع ارائه روشی مناسب و سریع برای تحلیل چنین پوسته‌هایی با درنظر گرفتن خاصیت غیرهمگن و مشاهده تأثیرات غیرخطی ماده هنگام ارتعاشات به‌واسطه تغییر فاز از جمله اهداف این پژوهش بوده است. برای این منظور از تئوری پوسته کلاسیک دانل و اصل همیلتون برای استخراج معادلات حاکم استفاده شده و رفتار آلیاژ حافظه‌دار توسط مدل سه‌بعدی بوید- لاگوداس مدل شده است. علاوه‌براین برای دستیابی به پاسخ‌های زمانی و فرکانسی پوسته از روش‌های عددی تربیع دیفرانسیلی[7]، روش زمانی نیومارک و الگوریتم برگشتی صفحه برنده محدب بهره گرفته شده است. در پایان برای صحه‌گذاری نتایج حاصله، به مدل‌سازی ارتعاشات اجباری و تحلیل فرکانسی پوسته در فاز آستنیت کامل در نرم‌افزار المان محدود آباکوس پرداخته شده است که تطابق خوبی میان نتایج مشاهده شد.

2- آلیاژهای حافظه‌دار

2-1- تعریف

آلیاژهای حافظه‌دار دسته‌ای از مواد هوشمند هستند که دارای دو فاز کریستالوگرافی دما بالا به نام فاز آستنیت و دما پایین به نام فاز مارتنزیت است. تغییر فاز مارتنزیت قابل برگشت از یک فاز به فاز دیگر در طی یک انتقال غیردفیوژنی رخ می‌دهد. این تغییر فاز در سیستم منجربه بروز دو اثر قابل توجه می‌شوند که عبارتند از: اثر حافظه شکلی و اثر سوپرالاستیسیته[8] [13]. انتقال فاز از آستنیت به مارتنزیت، انتقال فاز پیشرو و انتقال فاز از مارتنزیت به آستنیت، انتقال فاز پسرو نامیده می‌شود. متناظر با انتقال فازهایی که در ماده رخ می‌دهد، چهار دما به‌ازای شرایط تنش صفر وجود دارد که از ویژگی‌های ماده است. این چهار دما عبارتند از دمای شروع فاز

1- Muller–Achenbach
2- Auricchio model
3- NiTi
4- Boyd and Lagoudas
5-Runge–Kutta

6- closed-form
7- Differential Quadrature Method (DQM)
8- pseudoelasticity

آستنیت (A_s)، دمای پایان فاز آستنیت (A_f)، دمای شروع فاز مارتنزیت (M_s) و دمای پایان فاز مارتنزیت (M_f).

اثر سوپرالاستیسیته ناشی از اعمال تنش در یک دمای ثابت بالاتر از A_f است و اثر حافظه شکلی نتیجه تغییر فاز ناشی از تغییر دما است، که بیانگر قابلیت جسم در بازگشت به شکل اولیه خود با افزایش دماست [1]. در این مقاله تنها رفتار سوپرالاستیسیته ماده آلیاژ حافظه‌دار مورد مطالعه قرار گرفته است. شکل 1 نمایی از رفتار سوپرالاستیک ماده را در حالت بارگذاری و باربرداری نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود در اثر بارگذاری و باربرداری یک سیکل هیسترزیس در ماده به وجود می‌آید که سطح داخلی محصور به آن انرژی میراشده را نشان می‌دهد. مسیرهای پیموده شده در هنگام یک سیکل کامل بارگذاری- باربرداری بدین شرح است: 1)(A → B): مسیر بارگذاری الاستیک- فاز آستنیت خالص. 2)(B → C) : مسیر انتقال فاز پیشرو- ترکیبی از فاز آستنیت و مارتنزیت. 3)(C → D) : مسیر بارگذاری الاستیک- فاز مارتنزیت خالص. 4) (D → E) : مسیر باربرداری الاستیک- فاز مارتنزیت خالص. 5)(E → F) : مسیر انتقال فاز پسرو- ترکیبی از فاز آستنیت و مارتنزیت. 6)(F → A) : مسیر باربرداری الاستیک- فاز آستنیت خالص.

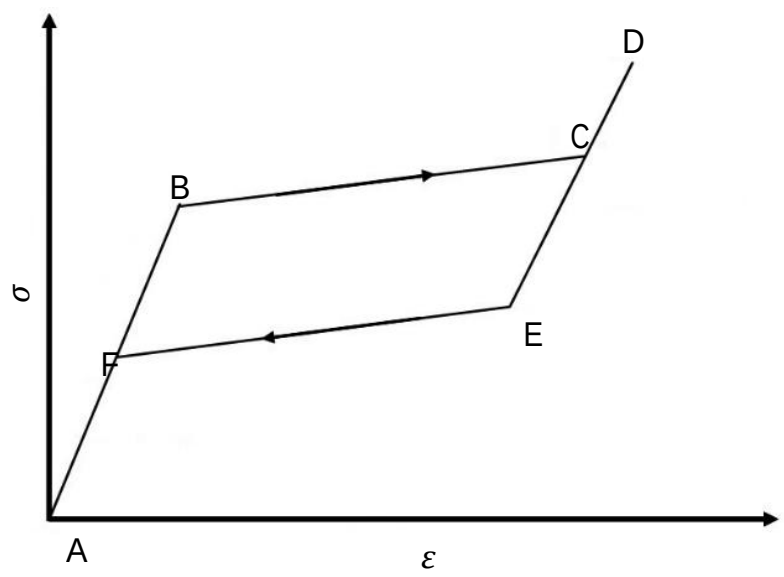
2-2- روابط حاکم

مدل ارائه‌شده توسط بوید و لاگوداس [1] برای آلیاژهای حافظه‌دار براساس انرژی آزاد گیبس است که تابعی از تانسور تنش (σ)، دما (T)، کسر حجمی مارتنزیت (ξ) و تانسور کرنش انتقال (ε^t) به‌صورت رابطه (1) است.

$$G(\sigma,T,\xi,\varepsilon^t) = -\frac{1}{2\rho}\sigma:S:\sigma - \frac{1}{\rho}\sigma:[\alpha(T-T_0)+\varepsilon^t] + c\left[(T-T_0) - T\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)\right] - s_0T + u_0 + \frac{1}{\rho}f(\xi) \quad (1)$$

که در آن T_0 دمای مرجع است. همچنین S، α، c، s_0، u_0 و ρ معرف پارامترهای ماده بوده که به‌ترتیب تانسور نرمی[1]، تانسور ضریب انبساط حرارتی، گرمای ویژه مؤثر، آنتروپی ویژه مؤثر در حالت مرجع، انرژی داخلی ویژه مؤثر در حالت مرجع و دانسیته هستند. پارامترهای ماده را می‌توان برحسب کسر حجمی مارتنزیت به‌صورت رابطه (2) بیان کرد.

$$\begin{aligned} S(\xi) &= S^A + \xi(S^M - S^A) = S^A + \xi\Delta S \\ \alpha(\xi) &= \alpha^A + \xi(\alpha^M - \alpha^A) = \alpha^A + \xi\Delta\alpha \\ c(\xi) &= c^A + \xi(c^M - c^A) = c^A + \xi\Delta c \\ s_0(\xi) &= s_0^A + \xi(s_0^M - s_0^A) = s_0^A + \xi\Delta s_0 \\ u_0(\xi) &= u_0^A + \xi(u_0^M - u_0^A) = u_0^A + \xi\Delta u_0 \end{aligned} \quad (2)$$



شکل 1 نمایی از رفتار سوپرالاستیک آلیاژ حافظه‌دار

که در آن بالانویس‌های A و M به‌ترتیب بیانگر خواص در فاز آستنیت کامل و فاز مارتنزیت کامل هستند و اپراتور Δ تغییرات مربوط به کمیت‌ها در دو فاز کامل را نشان می‌دهد. در فاز آستنیت کامل ($\xi = 0$)، در فاز مارتنزیت کامل ($\xi = 1$) و در انتقال پیشرو و پسرو ($0 \le \xi \le 1$) است.

تابع $f(\xi)$ تابع انتقال سخت‌شوندگی[2] است که برای در نظر گرفتن برهم‌کنش‌های بین دو فاز آستنیت و مارتنزیت و نیز برهم‌کنش‌های موجود در خود فاز مارتنزیت استفاده می‌شود. فرم چند جمله‌ای درجه دو این تابع به صورت رابطه (3) است.

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{\rho}{2}b^M\xi^2 + (\mu_1+\mu_2)\xi & \dot{\xi} > 0 \\ \frac{\rho}{2}b^A\xi^2 + (\mu_1-\mu_2)\xi & \dot{\xi} < 0 \end{cases} \quad (3)$$

که در آن علامت (.) بیانگر مشتق اول نسبت به زمان است. نخستین شرط ($\dot{\xi} > 0$) مربوط به انتقال فاز پیشرو (A → M) بوده و دومین شرط ($\dot{\xi} < 0$) مربوط به انتقال فاز پسرو (M → A) است. b^A، b^M، μ_1 و μ_2 پارامترهای مدل هستند که از رابطه (4) به‌دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} b^A &= -\Delta s_0(A_f - A_s), \quad b^M = -\Delta s_0(M_s - M_f), \\ \mu_1 &= \frac{1}{2}\rho\Delta s_0(M_s + A_f) - \rho\Delta u_0 \\ \mu_2 &= \frac{1}{4}\rho\Delta s_0(A_s - A_f - M_f + M_s) - \rho\Delta u_0 \end{aligned} \quad (4)$$

با ترکیب قانون اول و دوم ترمودینامیک با یکدیگر، نامساوی کلازیوس- پلانک به‌صورت رابطه (5) به‌دست می‌آید.

$$-\rho\dot{G} - \dot{\sigma}:\varepsilon - \rho s\dot{T} \ge 0 \quad (5)$$

که در آن s و ε به‌ترتیب آنتروپی و تانسور کرنش هستند. با جای‌گذاری مشتق زمانی انرژی آزاد گیبس حاصله از قانون زنجیری مشتق در رابطه (5)، نامساوی کلازیوس- پلانک به‌صورت رابطه (6) خواهد بود.

$$-\rho\left(\frac{\partial G}{\partial\sigma}:\dot{\sigma} + \frac{\partial G}{\partial T}:\dot{T} + \frac{\partial G}{\partial\xi}:\dot{\xi} + \frac{\partial G}{\partial\varepsilon^t}:\dot{\varepsilon}^t\right) - \dot{\sigma}:\varepsilon - \rho s\dot{T} \ge 0 \quad (6)$$

حال با ثابت در نظر گرفتن همه متغییرها به جز T، از آن‌جایی که تغییرات دما ($\dot{T}$) می‌تواند مثبت و یا منفی باشد، پس برای ارضای نامساوی بالا باید ضریب آن صفر شود. از این‌رو رابطه آنتروپی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید. به این ترتیب این بار تمامی متغییرها به‌جز (σ) را ثابت در نظر گرفته و برای ارضای نامساوی، ضریب آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم که در این صورت رابطه کرنش نیز به‌صورت رابطه (7) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned} s &= -\frac{\partial G}{\partial T} \\ \varepsilon &= -\rho\frac{\partial G}{\partial\sigma} \end{aligned} \quad (7)$$

در نهایت با استفاده از رابطه (1)، معادلات حاکم بر آنتروپی و تانسور کرنش به‌صورت رابطه (8) خواهد بود.

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{\rho}\sigma:\alpha + c\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + s_0 \\ \varepsilon &= S:\sigma + \alpha(T-T_0) + \varepsilon^t \end{aligned} \quad (8)$$

با جای‌گذاری روابط (7) در رابطه (6) و استفاده از رابطه (1)، نامساوی کلازیوس- پلانک به‌صورت رابطه (9) به‌دست می‌آید.

$$\sigma:\dot{\varepsilon}^t + \left(-\rho\frac{\partial G}{\partial\xi}\right)\dot{\xi} \ge 0 \quad (9)$$

ارتباط میان تغییرات زمانی کرنش انتقال و تغییرات زمانی کسر حجمی مارتنزیت توسط قانون جریان به‌صورت رابطه (10) بیان می‌شود.

1- compliance tensor

2- transformation hardening function

$$\dot{\varepsilon}^{t} = \Lambda\dot{\xi} \tag{10}$$

که در آن Λ، تانسور انتقال است و به‌صورت رابطه (11) تعریف می‌شود. این تانسور راستای کرنش انتقال را تعیین می‌کند.

$$\Lambda = \begin{cases} \frac{3}{2}H\frac{\acute{\sigma}}{\bar{\acute{\sigma}}} & \dot{\xi} > 0 \\ H\frac{\varepsilon^{t}}{\overline{\varepsilon^{t}}} & \dot{\xi} < 0 \end{cases} \tag{11}$$

که در آن H کمینه کرنش انتقال است. همچنین $\acute{\sigma}$، $\bar{\acute{\sigma}}$، ε^{t} و $\overline{\varepsilon^{t}}$ به‌ترتیب بیانگر تانسور تنش انحرافی، تنش مؤثر، کرنش انتقال موجود در نقطه برگشتی از مسیر انتقال فاز پسرو و کرنش انتقال مؤثر در این نقطه برگشتی هستند. $\acute{\sigma}$، $\bar{\acute{\sigma}}$ و $\overline{\varepsilon^{t}}$ از رابطه (12) به‌دست می‌آیند.

$$\acute{\sigma} = \sigma - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\sigma)\mathrm{I},\quad \bar{\acute{\sigma}} = \sqrt{\frac{3}{2}(\acute{\sigma}:\acute{\sigma})}$$
$$\overline{\varepsilon^{t}} = \sqrt{\frac{2}{3}(\varepsilon^{t}:\varepsilon^{t})} \tag{12}$$

که در آن I تانسور همانی است. با جای‌گذاری قانون جریان در رابطه (9)، نامساوی کلازیوس- پلانک به‌صورت رابطه (13) بازنویسی می‌شود.

$$\left(\sigma:\Lambda - \rho\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)\dot{\xi} = \Psi\dot{\xi} \geq 0 \tag{13}$$

که عبارت $\Psi\dot{\xi}$ پتانسیل میرایی انتقال[1] نامیده می‌شود. همچنین Ψ نیروی ترمودینامیکی کلی است و به‌صورت رابطه (14) تعریف می‌شود.

$$\Psi(\sigma,T,\xi) = \sigma:\Lambda + \frac{1}{2}\sigma:\Delta S:\sigma + \sigma:\Delta\alpha(T-T_0)$$
$$-\rho\Delta c\left[(T-T_0) - T\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)\right] + \rho\Delta s_0 T - \rho\Delta u_0 - \frac{\partial f}{\partial \xi} \tag{14}$$

انتقال فاز مارتنزیتی زمانی روی می‌دهد که نیروی ترمودینامیکی به مقداری بحرانی رسد. از آن‌جایی که نامساوی کلازیوس- پلانک برای هر دو مسیر انتقال فاز پیشرو و پسرو باید ارضا شود، در نتیجه Ψ برای انتقال فاز پیشرو ($\dot{\xi} > 0$)، کمیتی مثبت و برای انتقال فاز پسرو ($\dot{\xi} < 0$)، کمیتی منفی خواهد بود. مقدار بحرانی نیروی ترمودینامیکی برای مسیر پیشرو (Y) و برای مسیر پسرو ($-Y$) است. Y یکی از پارامترهای مدل است که بیانگر میزان میرایی داخلی ناشی از تغییرات میکروساختاری هنگام تغییر فاز بوده و در حالت انتخاب تابع انتقال سخت‌شوندگی از نوع چندجمله‌ای درجه دو، از رابطه (15) محاسبه می‌شود.

$$Y = \frac{1}{4}\rho\Delta s_0(M_s + M_f - A_f - A_s) \tag{15}$$

براین‌اساس، تابع انتقال (Φ) به صورت رابطه (16) تعریف می‌شود.

$$\Phi = \begin{cases} \Psi - Y & \dot{\xi} > 0, (A \to M) \\ -\Psi - Y & \dot{\xi} < 0, (M \to A) \end{cases} \tag{16}$$

بنابراین در خلال انتقال فاز پیشرو و پسرو، شرط ($\Phi = 0$) ارضا خواهد شد. علاوه‌براین هنگام بارگذاری ترموالاستیک آستنیت و مارتنزیت که در آن کسر حجمی مارتنزیت تغییر نمی‌کند، یعنی ($\dot{\xi} = 0$)، شرط ($\Phi < 0$) برقرار خواهد بود. به شرایط یادشده، شرایط کوهن- تاچر[2] گفته می‌شود. در واقع تابع انتقال برای حالت انتقال فاز پیشرو و پسرو دو سطح را نشان می‌دهد که مرزهای آن مربوط به حالت آستنیت کامل و مارتنزیت کامل است و در هنگام انتقال فاز، تنش و دما باید براین سطوح باقی بمانند. این شرط تحت عنوان شرط سازگاری[3] به‌صورت ($\dot{\Phi} = 0$) بیان می‌شود که با فرض رفتار مستقل از نرخ[4] آلیاژهای حافظه‌دار همخوانی دارد.

1- transformation dissipation potential
2- Kuhn-Tucker conditions
3- consistency condition

2-3-الگوریتم نگاشت برگشتی صفحه برنده محدب[5]

الگوریتم‌های نگاشت برگشتی جهت انتگرال‌گیری عددی معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مواد غیرالاستیک مستقل از نرخ توسعه یافته‌اند [1]. روش صفحه برنده محدب، یک الگوریتم نگاشت برگشتی است که براساس انتگرال‌گیری صریح معادلات دیفرانسیلی است و به محاسبه متغییرهایی مانند کسر حجمی مارتنزیت و تانسور کرنش انتقال برای یک میدان کرنش معلوم می‌پردازد. از جمله مزایای این روش می‌توان به سادگی و کاهش در محاسبات اشاره کرد. در این مقاله، برای انتگرال‌گیری عددی معادلات ترمومکانیکی حاکم بر مواد آلیاژ حافظه‌دار از این روش بهره گرفته شده است.

برای این منظور فرم دیفرانسیلی معادلات حاکم بر آلیاژ حافظه‌دار (رابطه (7-ب)) به‌صورت رابطه (17) نوشته می‌شود که در آن $\Delta T = T - T_0$.

$$d\varepsilon = \mathrm{d}(S:\sigma) + \mathrm{d}\alpha\Delta T + \alpha\mathrm{d}T + \mathrm{d}\varepsilon^{t} \tag{17}$$

با اعمال قانون جریان و رابطه (2)، رابطه (17) به صورت (18) بازنویسی می‌شود.

$$d\varepsilon = S:\mathrm{d}\sigma + \alpha\mathrm{d}T + (\Delta S:\sigma + \Delta\alpha\Delta T + \Lambda)\mathrm{d}\xi \tag{18}$$

براین‌اساس، فرم دیفرانسیلی تانسور تنش به‌صورت رابطه (19) خواهد بود.

$$d\sigma = S^{-1}:[d\varepsilon - \alpha\mathrm{d}T - (\Delta S:\sigma + \Delta\alpha\Delta T + \Lambda)\mathrm{d}\xi] \tag{19}$$

با مقایسه رابطه (19) با روابط (14 و 16)، رابطه (19) به‌صورت رابطه (20) بازنویسی می‌شود.

$$\mathrm{d}\sigma = S^{-1}:\left(\mathrm{d}\varepsilon - \alpha\mathrm{d}T - d\xi\begin{cases}\partial_\sigma\Phi & \dot{\xi} > 0\\ -\partial_\sigma\Phi & \dot{\xi} < 0\end{cases}\right) \tag{20}$$

که در آن $\partial_\sigma\Phi$ مشتق جزئی تابع انتقال نسبت به σ است. از سوی دیگر براساس شرط سازگاری رابطه (21).

$$\mathrm{d}\Phi = \partial_\sigma\Phi:\mathrm{d}\sigma + \partial_T\Phi:\mathrm{d}T + \partial_\xi\Phi:\mathrm{d}\xi = 0 \tag{21}$$

که در آن $\partial_T\Phi$ و $\partial_\xi\Phi$ به‌ترتیب مشتقات جزئی تابع انتقال نسبت به T و ξ هستند. با جای‌گذاری رابطه (20) در رابطه (21)، دیفرانسیل کسر حجمی مارتنزیت به‌صورت رابطه (22) به‌دست می‌آید.

$$\mathrm{d}\xi = \begin{cases} \dfrac{\partial_\sigma\Phi:S^{-1}:\mathrm{d}\varepsilon + (\partial_T\Phi - \partial_\sigma\Phi:S^{-1}:\alpha)\mathrm{d}T}{\partial_\sigma\Phi:S^{-1}:\partial_\sigma\Phi - \partial_\xi\Phi} & \dot{\xi} > 0 \\ \dfrac{\partial_\sigma\Phi:S^{-1}:\mathrm{d}\varepsilon + (\partial_T\Phi - \partial_\sigma\Phi:S^{-1}:\alpha)\mathrm{d}T}{-\partial_\sigma\Phi:S^{-1}:\partial_\sigma\Phi - \partial_\xi\Phi} & \dot{\xi} < 0 \end{cases} \tag{22}$$

الگوریتم نگاشت برگشتی صفحه برنده محدب دارای یک فرایند اصلاحی تکرارشونده است که در طی آن متغییرهای حالت داخلی (ξ,ε^{t}) می‌توانند در هر لحظه از بازه زمانی مورد بررسی به‌ازای یک دما و تانسور کرنش معلوم به‌دست آیند. برای این منظور در لحظه مورد نظر، متغییرهای حالت داخلی همگرا شده مربوط به زمان پیشین به‌عنوان حدس اولیه این متغییرها در زمان کنونی استفاده می‌شوند. اگر معیار ($\Phi \leq 0$) ارضا شود، مقادیر متغییرهای حالت داخلی در زمان حاضر با مقادیر حدس اولیه برابر خواهد بود در غیر این صورت یعنی زمانی که ($\Phi > 0$) باشد، باید تکرار صورت گیرد تا جایی که شرط ($\Phi \leq 0$) برقرار شود.

در این الگوریتم فرم نموی قانون جریان در بازه زمانی $[t_q, t_{q+1}]$ برای تکرار k ام به‌صورت رابطه (23) خواهد بود.

4- rate-independent
5- convex cutting plane return mapping

$$\Delta\varepsilon_{q+1}^{t(k)} = \Delta\xi_{q+1}^{(k)}\Lambda_{q+1}^{(k)} \tag{23}$$

با یادآوری این‌که دما و تانسور کرنش در لحظه مورد بررسی معلوم هستند، نمو تانسور تنش برای تکرار k ام مربوط به این بازه زمانی به‌صورت رابطه (24) نوشته می‌شود.

$$\Delta\sigma_{q+1}^{(k)} = -\Delta\xi_{q+1}^{(k)}\mathrm{S}_{q+1}^{-1(k)}:\left(\begin{cases}\partial_\sigma\Phi_{q+1}^{(k)} & \dot{\xi} > 0\\ -\partial_\sigma\Phi_{q+1}^{(k)} & \dot{\xi} < 0\end{cases}\right) \tag{24}$$

با خطی‌سازی تابع انتقال برای تکرار k ام با استفاده از روش تکرار نیوتن- رافسون و اعمال شرط صفر شدن تابع انتقال در انتهای فرایند تکرار، رابطه (25) را می‌توان نوشت.

$$\Phi_{q+1}^{(k)} + \partial_\sigma\Phi_{q+1}^{(k)}:\Delta\sigma_{q+1}^{(k)} + \partial_\xi\Phi_{q+1}^{(k)}:\Delta\xi_{q+1}^{(k)} = 0 \tag{25}$$

بنابراین با جای‌گذاری معادله (24) در معادله (25)، نمو کسر حجمی مارتنزیت به‌صورت رابطه (26) محاسبه می‌شود.

$$\Delta\xi_{q+1}^{(k)} = \begin{cases}\dfrac{\Phi_{q+1}^{(k)}}{\partial_\sigma\Phi_{q+1}^{(k)}:\mathrm{D}_{q+1}^{(k)}:\partial_\sigma\Phi_{q+1}^{(k)} - \partial_\xi\Phi_{q+1}^{(k)}} & \dot{\xi} > 0\\[2ex] \dfrac{-\Phi_{q+1}^{(k)}}{-\partial_\sigma\Phi_{q+1}^{(k)}:\mathrm{D}_{q+1}^{(k)}:\partial_\sigma\Phi_{q+1}^{(k)} - \partial_\xi\Phi_{q+1}^{(k)}} & \dot{\xi} < 0\end{cases} \tag{26}$$

که در آن $\mathrm{D} = \mathrm{S}^{-1}$ تانسور سفتی است. در نهایت برای بروز رسانی کرنش انتقال، کسر حجمی مارتنزیت و تانسور تنش از روابط (27) استفاده خواهد شد.

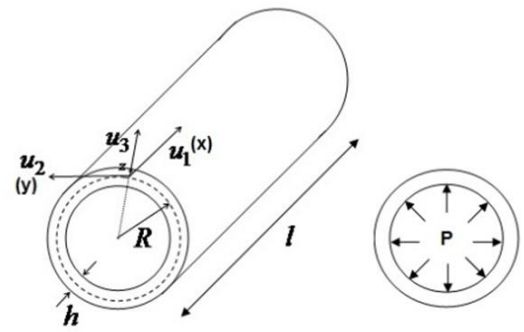
$$\begin{aligned}\varepsilon_{q+1}^{t(k+1)} &= \varepsilon_{q+1}^{t(k)} + \Delta\varepsilon_{q+1}^{t(k)}\\ \xi_{q+1}^{(k+1)} &= \xi_{q+1}^{(k)} + \Delta\xi_{q+1}^{(k)}\\ \sigma_{q+1}^{(k+1)} &= \sigma_{q+1}^{(k)} + \Delta\sigma_{q+1}^{(k)}\end{aligned} \tag{27}$$

3- تعریف مسئله

در این مقاله، ارتعاشات واداشته یک پوسته استوانه‌ای بلند از جنس آلیاژ حافظه‌دار با تکیه‌گاه‌های ساده تحت شرایط اولیه صفر و فشار هارمونیک داخلی که در طول پوسته تغییر می‌کند، مورد بررسی قرار گرفته است. پوسته نازک مورد مطالعه دارای شعاع متوسط R، ضخامت h و طول l مطابق شکل 2 است که شرایط $(h \ll R, h \ll l)$ و $(h/R \leq 1/20)$ را ارضا می‌کند. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، (x, y, z) بیانگر مختصات است که x و y به‌ترتیب در امتداد طول و محیط پوسته بر سطح میانی $(z = 0)$ هستند و $y = R\theta$، همچنین فشار داخلی به‌صورت رابطه (28) است.

$$P(t,x) = P_0P_x(x)P_t(t) = P_0\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)\sin(\omega t) \tag{28}$$

که در آن P_0 ضریب ثابت، $P_x(x)$ و $P_t(t)$ به‌ترتیب بخش مکانی و بخش زمانی تابع فشار هستند و در آن ω فرکانس زاویه‌ای است. رابطه فشار به‌گونه‌ای انتخاب شده است که نخست بخش زمانی آن به‌صورت هارمونیک باشد، زیرا به‌طور معمول در نخستین گام برای بررسی ارتعاشات اجباری، تحریک هارمونیک درنظر گرفته می‌شود؛ دوم فرم انتخابی تابع مکان نیز است تا فشارهای متفاوتی در نقاط مختلف در هر لحظه از زمان وارد شود.



شکل 2 پوسته استوانه‌ای همراه با پارامترهای هندسی

3-1-تئوری پوسته دانل[1]

مؤلفه‌های جابجایی هر نقطه (شکل 2 را ببینید) در تئوری کلاسیک تغییرشکل پوسته دانل به‌صورت رابطه (29) تعریف می‌شوند [14].

$$\begin{aligned}u_1(x,y,z,t) &= u(w,y,t) - z\frac{\partial w}{\partial x}\\ u_2(x,y,z,t) &= v(w,y,t) - z\frac{\partial w}{\partial y}\\ u_3(x,y,z,t) &= w(x,y,t)\end{aligned} \tag{29}$$

که در آن u، v و w به‌ترتیب جابجایی طولی، مماسی و شعاعی نقاط صفحه میانی پوسته هستند. روابط کرنش- جابجایی پوسته استوانه‌ای به قرار زیر هستند که زیر نویس‌های 1-3 به‌ترتیب معرف x، y و z هستند.

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R}\\ &2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}, \qquad \varepsilon_{33}\\ &\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0\end{aligned} \tag{30}$$

3-2-اصل همیلتون[2]

در این مقاله برای استخراج معادلات حرکت پوسته از اصل همیلتون [15] استفاده شده است که به‌صورت رابطه (31) بیان می‌شود.

$$\int_0^t(\delta K - \delta U - \delta V)\mathrm{d}t = 0 \tag{31}$$

و در آن δK، δU و δV به‌ترتیب تغییرات انرژی جنبشی، تغییرات انرژی کرنشی و تغییرات انرژی پتانسیل است.

تغییرات انرژی جنبشی به‌صورت رابطه (32) تعریف می‌شود.

$$\delta K = \iiint \rho\dot{u}_i\delta\dot{u}_i\mathrm{d}V, \quad i = 1,2,3 \tag{32}$$

که در آن dV حجم المانی از پوسته بوده و علامت (.) معرف مشتق اول کمیت‌ها نسبت به زمان است. با اعمال روابط (29) در رابطه (32)، رابطه (33) را خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}\delta K = \iint[&I_0(\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{v}\delta\dot{v} + \dot{w}\delta\dot{w})\\ &-I_1\left(\frac{\partial\dot{w}}{\partial x}\delta\dot{u} + \dot{u}\frac{\partial}{\partial x}\delta\dot{w} + \frac{\partial\dot{w}}{\partial y}\delta\dot{v} + \dot{v}\frac{\partial}{\partial y}\delta\dot{w}\right)\\ &+I_2\left(\frac{\partial\dot{w}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\delta\dot{w} + \frac{\partial\dot{w}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\delta\dot{w}\right)]\mathrm{d}A\end{aligned} \tag{33}$$

که در آن $(\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$ مساحت المانی از پوسته است و I_i ممان‌های اینرسی جرمی است که به‌صورت رابطه (34) تعریف می‌شوند.

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho(1, z, z^2)\mathrm{d}z \tag{34}$$

علاوه‌براین تغییرات انرژی کرنشی به‌صورت رابطه (35) است.

$$\delta U = \iiint\sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V = \iint\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}A, \tag{35}$$

که $i,j = 1,2,3$ و با استفاده از روابط (30)، به‌صورت رابطه (36) خواهد بود.

$$\begin{aligned}U = \iint[&N_{11}\,\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - M_{11}\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ &+N_{22}\left(\delta\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{R}\right)\\ &-M_{22}\delta\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + N_{12}\left(\delta\frac{\partial u}{\partial y} + \delta\frac{\partial v}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

1- Donnell shell theory
2- Hamilton's principle

$$-2M_{12}\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}]\mathrm{d}A \tag{36}$$

که در آن N_{ij} و M_{ij} به‌ترتیب مطابق شکل 3 نیروهای برآیند غشایی و ممان‌های خمشی برآیند هستند و به‌صورت روابط (37) تعریف می‌شوند.

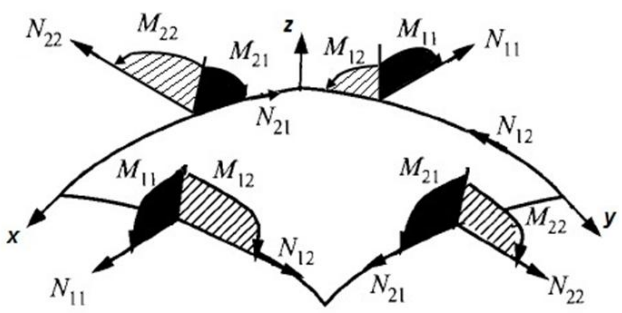
$$(N_{11},N_{22},N_{12}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12})\,\mathrm{d}z$$
$$(M_{11},M_{22},M_{12}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12})\,z\mathrm{d}z \tag{37}$$

همچنین تغییرات انرژی پتانسیل، مخالف و برابر تغییرات کار نیروهای خارجی (δW_{ext}) است که با رابطه (38) بیان می‌شود.

$$\begin{aligned}\delta V = -\delta W_{\mathrm{ext}} = &-\iint P(x,t)\delta w\mathrm{d}A\\ &-\oint_{\Gamma_2}^{d}(\widehat{N}_{11}\delta u+\widehat{N}_{12}\delta v-\widehat{M}_{11}\delta w_{,x}-\widehat{M}_{12}\delta w_{,y})\,\mathrm{d}y\\ &-\oint_{\Gamma_1}^{d}(\widehat{N}_{22}\delta v+\widehat{N}_{12}\delta u-\widehat{M}_{22}\delta w_{,y}-\widehat{M}_{12}\delta w_{,x})\,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{38}$$

و در آن انتگرال مرزی آخر ناشی از نیروها و ممان‌های اعمالی بر مرزهای پوسته (Γ_1,Γ_2) هستند که از شرایط مرزی تعیین می‌شوند. علامت (^) بر نیروها و ممان‌های برآیند بیانگر معلوم بودن مقادیر آن‌هاست. با جای‌گذاری روابط (33)، (36) و (38) در رابطه (31)، انتگرال‌گیری جملات، اعمال قضیه اساسی حساب تغییرات[1] [16] و استفاده از روابط حاکم بر مواد آلیاژ حافظه‌دار، معادلات حاکم بر پوسته آلیاژ حافظه‌دار مورد مطالعه به‌صورت روابط (39) به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}I_0\ddot{u}-\frac{I_1}{l}\ddot{w}_{,\eta} = &\frac{A_1h(1-\upsilon)}{l^2}\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}+\frac{A_1h(1-2\upsilon)}{2(2\pi R)^2}\frac{\partial^2u}{\partial\beta^2}\\ &+\frac{A_1h}{2l(2\pi R)}\frac{\partial^2v}{\partial\eta\partial\beta}+\frac{A_1h\upsilon}{Rl}\frac{\partial w}{\partial\eta}\\ &-A_1h\left[\frac{(1-\upsilon)}{l}\frac{\partial\varepsilon_{11}^{\mathrm{t}}}{\partial\eta}+\frac{\upsilon}{l}\frac{\partial\varepsilon_{22}^{\mathrm{t}}}{\partial\eta}+\frac{\upsilon}{l}\frac{\partial\varepsilon_{33}^{\mathrm{t}}}{\partial\eta}+\frac{(1-2\upsilon)}{2\pi R}\frac{\partial\varepsilon_{12}^{\mathrm{t}}}{\partial\beta}\right]\\ &+\frac{A_{1,\eta}h}{l}\left[\frac{(1-\upsilon)}{l}\frac{\partial u}{\partial\eta}+\upsilon\left(\frac{\partial v}{2\pi R\partial\beta}+\frac{w}{R}\right)\right]\\ &-\frac{A_{1,\eta}h}{l}[\alpha\Delta T(1+\upsilon)+(1-\upsilon)\varepsilon_{11}^{\mathrm{t}}+\upsilon\varepsilon_{22}^{\mathrm{t}}+\upsilon\varepsilon_{33}^{\mathrm{t}}]\\ &+\frac{A_{1,\beta}h}{2\pi R}\left[\frac{(1-2\upsilon)}{2}\left(\frac{\partial u}{2\pi R\partial\beta}+\frac{\partial v}{l\partial\eta}\right)-(1-2\upsilon)\varepsilon_{12}^{\mathrm{t}}\right]\\ I_0\ddot{v}-\frac{I_1}{2\pi R}\ddot{w}_{,\beta} = &\frac{A_1h(1-\upsilon)}{(2\pi R)^2}\frac{\partial^2v}{\partial\beta^2}+\frac{A_1h(1-2\upsilon)}{2l^2}\frac{\partial^2v}{\partial\eta^2}\\ &+\frac{A_1h}{2l(2\pi R)}\frac{\partial^2u}{\partial\eta\partial\beta}+\frac{A_1h(1-\upsilon)}{R(2\pi R)}\frac{\partial w}{\partial\beta}\\ &-A_1h\left[\frac{\upsilon}{2\pi R}\frac{\partial\varepsilon_{11}^{\mathrm{t}}}{\partial\beta}+\frac{(1-\upsilon)}{2\pi R}\frac{\partial\varepsilon_{22}^{\mathrm{t}}}{\partial\beta}\right]\\ &-A_1h\left[\frac{\upsilon}{2\pi R}\frac{\partial\varepsilon_{33}^{t}}{\partial\beta}+\frac{(1-2\upsilon)}{l}\frac{\partial\varepsilon_{12}^{t}}{\partial\eta}\right]\end{aligned}$$



شکل 3 المان پوسته همراه با برآیندهای نیروی غشایی و ممان‌های خمشی

1- fundamental lemma of variational calculus

$$\begin{aligned}&+\frac{A_{1,\beta}h}{2\pi R}\left[\frac{\upsilon}{l}\frac{\partial u}{\partial\eta}+(1-\upsilon)\left(\frac{\partial v}{2\pi R\partial\beta}+\frac{w}{R}\right)\right]\\ &-\frac{A_{1,\beta}h}{2\pi R}[\alpha\Delta T(1+\upsilon)+\upsilon\varepsilon_{11}^{t}+(1-\upsilon)\varepsilon_{22}^{t}+\upsilon\varepsilon_{33}^{t}]\\ &+\frac{A_{1,\eta}h}{l}\left[\frac{(1-2\upsilon)}{2}\left(\frac{\partial u}{2\pi R\partial\beta}+\frac{\partial v}{l\partial\eta}\right)-(1-2\upsilon)\varepsilon_{12}^{\mathrm{t}}\right]\\ I_0\ddot{w}+I_1\left(\frac{\ddot{u}_{,\eta}}{l}+\frac{\ddot{v}_{,\beta}}{2\pi R}\right)-I_2\left(\frac{\ddot{w}_{,\eta\eta}}{l^2}+\frac{\ddot{w}_{,\beta\beta}}{(2\pi R)^2}\right) = &\\ -\frac{A_1h^3(1-\upsilon)}{12}\left(\frac{\partial^4w}{l^4\partial\eta^4}+\frac{\partial^4w}{(2\pi R)^4\partial\beta^4}\right)&\\ -\frac{A_1h^3(1-\upsilon)}{12}\frac{2\partial^4w}{l^2(2\pi R)^2\partial\beta^2\partial\eta^2}&\\ -\frac{A_1h\upsilon}{Rl}\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{A_1h(1-\upsilon)}{R(2\pi R)}\frac{\partial v}{\partial\beta}-A_1h(1-\upsilon)\frac{w}{R^2}&\\ +\frac{A_1h(1+\upsilon)\alpha\Delta T}{R}+P(\eta,t)&\\ +\frac{A_1h}{R}[\upsilon\varepsilon_{11}^{\mathrm{t}}+(1-\upsilon)\varepsilon_{22}^{\mathrm{t}}+\upsilon\varepsilon_{33}^{\mathrm{t}}]&\\ +\frac{A_{1,\eta\eta}}{l^2}\left[\frac{(1-\upsilon)h^3}{12l^2}\frac{\partial^2w}{\partial\eta^2}+\frac{\upsilon h^3}{12(2\pi R)^2}\frac{\partial^2w}{\partial\beta^2}\right]&\\ -\frac{A_{1,\beta\beta}}{(2\pi R)^2}\left[\frac{\upsilon h^3}{12l^2}\frac{\partial^2w}{\partial\eta^2}+\frac{(1-\upsilon)h^3}{12(2\pi R)^2}\frac{\partial^2w}{\partial\beta^2}\right]&\\ -\frac{A_{1,\eta\beta}h^3(1-2\upsilon)}{6l^2(2\pi R)^2}\frac{\partial^2w}{\partial\eta\partial\beta}&\end{aligned} \tag{39}$$

که در آن $\eta=\frac{x}{l}$ و $\beta=\frac{y}{2\pi R}$ پارامترهای بی‌بعد هستند به‌گونه‌ای که ($0\le\eta,\beta\le 1$). علاوه‌براین $A_1=\frac{E(x,y,\xi)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}$ از کمیت‌های ماده بوده که E و υ به‌ترتیب مدول یانگ و نسبت پواسون است. همچنین $\varepsilon_{ij}^{\mathrm{t}}$ مؤلفه‌های تانسور کرنش انتقال است که ($i,j=1,2,3$). لازم به یاد است که در این بررسی، تمامی مؤلفه‌های کرنش انتقال تنها تابع x و y فرض شده‌اند. علاوه‌براین، تنها رفتار سوپرالاستیک ماده آلیاژ حافظه‌دار مورد مطالعه قرار گرفته است که از این‌رو $T>A_{\mathrm{f}}$ در نظر گرفته شده و $\Delta T=0$ است. شرایط مرزی پوسته نازک استوانه‌ای، به‌صورت تکیه‌گاه‌های ساده است که به‌صورت رابطه (40) بیان می‌شود.

$$u=v=w=M_{11}=0,\qquad at\ x=0,x=l \tag{40}$$

همچنین در این مقاله، به دلیل تقارن موجود در هندسه و شرایط بارگذاری مسئله، مشتقات جزئی تمامی جملات نسبت به y در نظر گرفته نشده است. همچنین از آن‌جایی که در تئوری دانل، جابه‌جایی‌های u و v بسیار کوچک هستند [14]؛ بنابراین تنها جابه‌جایی شعاعی پوسته مورد مطالعه قرار گرفته و اثرات دو جابه‌جایی دیگر در نظر گرفته نشده است.

از طرف دیگر فرکانس‌های طبیعی پوسته تنها در فاز آستنیت خالص (سیستم خطی) محاسبه شده که در ادامه برای صحه‌گذاری فرمولاسیون و نیز مطالعه پاسخ فرکانسی سیستم غیرخطی در اطراف آن‌ها استفاده شده است. در این حالت کسر حجمی مارتنزیت برابر صفر است؛ بنابراین تمامی مؤلفه‌های کرنش انتقال در معادلات حرکت حذف خواهند شد. با فرض هر دو حالت کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای [17] و با حذف فشار خارجی، فرم بی‌بعدنشده معادلات حرکت به‌صورت روابط (41) بوده که در آن $E=E^{\mathrm{A}}$ است.

$$\begin{aligned}I_0\ddot{u}-I_1\ddot{w}_{,x} = &\frac{Eh}{1-\upsilon^2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{1-\upsilon}{2}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)\\ &+\frac{Eh}{1-\upsilon^2}\left(\frac{1+\upsilon}{2}\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}+\frac{\upsilon}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

$$I_0\ddot{v} - I_1\ddot{w}_{,y} = \frac{Eh}{1-\upsilon^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\upsilon}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \frac{Eh}{1-\upsilon^2}\left(\frac{1+\upsilon}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$
$$I_0\ddot{w} + I_1\left(\ddot{u}_{,x} + \ddot{v}_{,y}\right) - I_2\left(\ddot{w}_{,xx} + \ddot{w}_{,yy}\right) = -\frac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}\right) - \frac{Eh}{1-\upsilon^2}\left(\frac{\upsilon}{R}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R^2} - \frac{A_1 h(1+\upsilon)\alpha\Delta T}{R}\right) \quad (41)$$

4- روش‌های عددی

در این مطالعه برای دستیابی به ارتعاشات شعاعی پوسته استوانه‌ای، دو روش عددی به‌کار برده شده است. روش تربیع دیفرانسیلی برای حل عددی معادلات حاکم بر حرکت از نظر مکانی استفاده شده است. این روش، روشی سریع و دقیق است که در آن دامنه مورد بررسی به تعداد نقاط کافی گسسته شده و معادلات دیفرانسیل به مجموعه‌ای از معادلات جبری برحسب مقادیر گسسته متغییرهای میدانی در آن نقاط تبدیل می‌شود [18]. علاوه‌براین، روش نیومارک[1] برای انتگرال‌گیری زمانی مسئله استفاده شده است [19،20]. در این روش، پاسخ در زمان مورد نظر به پاسخ در زمان پیشین مرتبط می‌شود.

نخستین گام در استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی، انتخاب یک شبکه مناسب از نقاط برای دامنه مورد نظر است که شامل N_x نقطه در امتداد x و N_y نقطه در امتداد y است. معمولاً از تعداد نقاط مساوی در هر جهت استفاده می‌شود یعنی $(N_x = N_y = N)$. سپس مشتق جزئی مرتبه rام نسبت به x و مشتق جزئی مرتبه sام نسبت به y تابع دلخواه $g(x,y)$ در نقطه‌ای از شبکه یادشده (x_i, y_j) به‌صورت روابط (42) بیان می‌شود [18].

$$\left.\frac{\partial^r g}{\partial x^r}\right|_{(x,y)=(x_i,y_j)} = \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik}^{(r)} g_{kj}$$
$$\left.\frac{\partial^s g}{\partial y^s}\right|_{(x,y)=(x_i,y_j)} = \sum_{k=1}^{N_y} C_{jk}^{(s)} g_{ik}$$
$$\left.\frac{\partial^{(r+s)} g}{\partial x^r \partial y^s}\right|_{(x,y)=(x_i,y_j)} = \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik}^{(r)} \sum_{l=1}^{N_y} C_{jl}^{(s)} g_{kl}$$
$$i = 1,\dots,N_x, j = 1,\dots,N_y \quad (42)$$

که در آن g_{ij} بیانگر $g(x_i, y_j)$ است. همچنین $B_{ik}^{(r)}$ و $C_{jk}^{(s)}$ به‌ترتیب ضرایب وزنی در امتداد x و y هستند که توابع آزمون[2] نامیده می‌شوند. لازم به ذکر است که دقت این روش به انتخاب ضرایب وزنی یادشده بستگی دارد [21]. در این بررسی، برای تابع جابه‌جایی شعاعی، توابع کرنش انتقال و پارامتر ماده A_1 از تابع آزمون چند جمله‌ای[3] که رایج‌ترین تابع است، استفاده شده که دارای صورت رابطه (43) است.

$$B_{ik}^{(1)} = \frac{\prod(x_i)}{(x_i - x_k)\prod(x_k)} \quad i,k = 1,\dots,N_x \;\&\; k \neq i$$
$$\prod(x_i) = \prod_{m=1, m\neq i}^{N_x} (x_i - x_m),$$
$$B_{ik}^{(r)} = r\left(B_{ii}^{(r-1)} B_{ik}^{(1)} - \frac{B_{ik}^{(r-1)}}{x_i - x_k}\right); \text{for } i,k = 1,\dots,N_x, \; k \neq i, 2 \leq r \leq N_x - 1$$
$$B_{ii}^{(r)} = -\sum_{m=1, m\neq i}^{N_x} B_{im}^{(r)}; \text{ for } i = 1,\dots,N_x, \; 1 \leq r \leq N_x - 1 \quad (43)$$

همچنین نقاط انتخابی با فاصله مساوی درنظر گرفته شده‌اند که در راستای x به‌صورت رابطه (44) خواهند بود.

$$x_i = \frac{i-1}{N_x - 1} l; \; i = 1,\dots,N_x \quad (44)$$

برای اعمال شرایط مرزی چندگانه، از تکنیکی تحت عنوان δ استفاده می‌شود [18]. در این تکنیک، تعداد نقاط کافی در نزدیکی نقاط مرزی با فواصل کوچک $\delta \cong 10^{-5}$ درنظر گرفته می‌شوند. سپس شرایط مرزی چندگانه بر نقاط مرزی و نقاط انتخابی در نزدیکی آن‌ها اعمال می‌شود. در تحقیق حاضر طبق رابطه (44)، دو شرط مرزی $(w = M_{11} = 0)$ برای جابه‌جایی شعاعی در نقاط مرزی انتهایی $(i = 1$ و $i = N_x)$ وجود دارد؛ بنابراین یک نقطه در نزدیکی هر یک از آن‌ها یعنی در $(i = 2)$ و $(i = N_x - 1)$ با فاصله δ درنظر گرفته شده است. براین اساس، نقاط انتخابی در راستای x به شرح رابطه (45) خواهند بود.

$$x_1 = 0, x_2 = \delta, x_{N-1} = l - \delta, x_N = l \quad 0 \leq x \leq l$$
$$x_i = \frac{i-1}{N_x - 1} l; \; i = 3,\dots,N_x - 2 \quad (45)$$

که به فرم بی‌بعد نیز می‌توان آن‌ها را نشان داد؛ بنابراین چهار نقطه ابتدایی و انتهایی بازه مورد نظر، برای اعمال شرایط مرزی و سایر نقاط برای اعمال معادله حاکم بر حرکت به‌کار برده می‌شوند.

با اعمال روش تربیع دیفرانسیلی در معادلات (39-40)، معادله ماتریسی (46) به‌دست می‌آید.

$$\mathrm{M}\ddot{\vec{\Delta}} + \mathrm{K}\vec{\Delta} = \vec{\mathrm{F}}_1 + \vec{\mathrm{F}}_2, \qquad \vec{\Delta}^{\mathrm{T}} = [\{\Delta_{\mathrm{b}}\}\{\Delta_{\mathrm{d}}\}] \quad (46)$$

که در آن $\vec{\Delta}$ بردار جابه‌جایی شعاعی همه نقاط شامل بردارهای $\vec{\Delta_{\mathrm{b}}}$ و $\vec{\Delta_{\mathrm{d}}}$ است که به‌ترتیب بردار جابه‌جایی مربوط به نقاط مرزی و بردار جابه‌جایی مربوط به سایر نقاط هستند. علامت $(\ddot{})$ بیانگر مشتق دوم نسبت به زمان است. همچنین M و K به‌ترتیب ماتریس‌های جرم و سختی هستند که تابع ξ بوده و هنگام تغییر فاز ماده عوض می‌شوند. $\vec{\mathrm{F}}_2$ بردار فشار داخلی و $\vec{\mathrm{F}}_1$ بردار ناشی از کرنش انتقال هستند.

برای انتگرال‌گیری زمانی معادله (46)، از روش نیومارک بهره گرفته شده است. در این روش، بردار جابه‌جایی $(\vec{\Delta}_{q+1})$، بردار سرعت $(\dot{\vec{\Delta}}_{q+1})$ و بردار شتاب $(\ddot{\vec{\Delta}}_{q+1})$ در زمان $(t_{q+1} = t_q + \Delta t)$ که در آن (t_q) زمان پیشین و (Δt) گام زمانی است، به‌صورت روابط (47) تخمین زده‌می‌شود [19].

$$\vec{\Delta}_{q+1} = \vec{\Delta}_q + \dot{\vec{\Delta}}_q \Delta t + \frac{1}{2}[(1-\gamma)\ddot{\vec{\Delta}}_q + \gamma\ddot{\vec{\Delta}}_{q+1}](\Delta t)^2$$
$$\dot{\vec{\Delta}}_{q+1} = \dot{\vec{\Delta}}_q + a_1\ddot{\vec{\Delta}}_q + a_2\ddot{\vec{\Delta}}_{q+1}$$
$$\ddot{\vec{\Delta}}_{q+1} = a_3\left(\vec{\Delta}_{q+1} - \vec{\Delta}_q\right) - a_4\dot{\vec{\Delta}}_q - a_5\ddot{\vec{\Delta}}_q \quad (47)$$

که زیرنویس q معرف گام زمانی q ام است به‌گونه‌ای که $(t_q = q\Delta t)$ و $(t_{q+1} = (q+1)\Delta t)$. همچنین γ پارامتری برای کنترل صحت و پایداری روش است که طبق [20] برابر 0/5 در نظر گرفته شده است. ضرایب a_i به صورت رابطه (48) تعریف می‌شوند.

$$a_1 = (1-\gamma)\Delta t, \qquad a_2 = \gamma\Delta t$$
$$a_3 = \frac{2}{\gamma(\Delta t)^2}, a_4 = \frac{2}{\gamma\Delta t}, a_5 = \frac{1-\gamma}{\gamma} \quad (48)$$

جای‌گذاری روابط (47) در رابطه (46)، منجر به رابطه (49) می‌شود.

$$\hat{\mathrm{K}}_{q+1}\vec{\Delta}_{q+1} = \hat{\vec{\mathrm{F}}}_{q,q+1} \quad (49)$$

که در آن رابطه (50):

1- Newmark method
2- Test function
3- polynomial

$$\widehat{\mathrm{K}}_{q+1} = a_3\mathrm{M}_{q+1} + \mathrm{K}_{q+1}$$
$$\widehat{\vec{\mathrm{F}}}_{q,q+1} = (\vec{\mathrm{F}}_1 + \vec{\mathrm{F}}_2)_{q+1} + \mathrm{M}_{q+1}(a_3\vec{\Delta}_q + a_4\dot{\vec{\Delta}}_q + a_5\ddot{\vec{\Delta}}_q) \qquad (50)$$

براساس رابطه (49)، بردار جابه‌جایی در هر لحظه از زمان با معلوم بودن بردارهای جابه‌جایی، سرعت و شتاب مربوط به زمان پیشین قابل محاسبه است. در حالت ارتعاشات اجباری برای محاسبه بردارهای جابه‌جایی، سرعت و شتاب پوسته در هر لحظه از زمان، از یک فرایند تکرارشونده استفاده شده است. در این فرایند تانسور کرنش انتقال و کسر حجمی مارتنزیت معلوم مربوط به زمان پیشین به‌عنوان حدس اولیه جهت محاسبه ماتریس‌های K ، M و بردار $\vec{\mathrm{F}}_1$ در زمان مورد نظر استفاده شده و بردار جابه‌جایی نخستین تکرار با استفاده از روش نیومارک به‌دست می‌آید. سپس تانسور کرنش متناظر با بردار جابه‌جایی حاصله با استفاده از روابط کرنش- جابه‌جایی محاسبه شده و براساس آن مقادیر جدید ξ و ε^{t} با به‌کارگیری روش عددی الگوریتم نگاشت برگشتی صفحه برنده محدب، محاسبه می‌شوند. حال با استفاده از مقادیر جدید ξ و ε^{t}، ماتریس‌های K و M و بردار $\vec{\mathrm{F}}_1$ به‌روز رسانی شده و با استفاده از آن‌ها بردار جابه‌جایی مربوط به دومین تکرار به‌دست می‌آید. چنان‌چه تفاوت بردار جابه‌جایی دومین تکرار و نخستین تکرار از مقدار تلرانس مشخصی مثلاً 10^{-7} کمتر باشد، فرایند تکرار متوقف شده و بردار جابه‌جایی حاصله به عنوان پاسخ نهایی در نظر گرفته می‌شود که براساس آن بردارهای سرعت و شتاب با استفاده از روش نیومارک محاسبه می‌گردند. در غیر این‌صورت فرایند تکرار تا زمانی ادامه می‌یابد که تفاضل جابه‌جایی‌ها از مقدار تلرانس در نظر گرفته شده کمتر شود.

همچنین برای محاسبه فرکانس‌های آزاد پوسته در فاز آستنیت خالص (سیستم خطی)، مؤلفه‌های جابه‌جایی به‌صورت رابطه (51) در نظر گرفته می‌شوند [22].

$$u = u_n(x)\cos(\lambda_n y)\, e^{i\Omega_n \mathrm{t}}, (n = 0,1,\dots)$$
$$v = v_n(x)\sin(\lambda_n y)\, e^{i\Omega_n \mathrm{t}}$$
$$w = w_n(x)\cos(\lambda_n y)\, e^{i\Omega_n \mathrm{t}} \qquad (51)$$

که در آن n تعداد مودهای محیطی بوده و $i^2 = -1$ و $\lambda_n = \frac{n}{R}$. همچنین Ω_n فرکانس زاویه‌ای طبیعی مود nام است. با جای‌گذاری روابط (51) در رابطه (41)، استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی و اعمال شرایط مرزی، رابطه (46) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود که در آن هر دو بردار $\vec{\mathrm{F}}_1$ و $\vec{\mathrm{F}}_2$ حذف شده‌اند و با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب فرکانس‌های طبیعی به‌دست می‌آیند.

$$[\mathrm{K} - \Omega_n^2\mathrm{M}]\vec{\Delta} = \{0\} \qquad (52)$$

که K و M حاصله در این حالت با K و M به‌دست آمده از روابط (39) متفاوت بوده و در خلال حل، بروز نمی‌شوند.

5- نتایج عددی و بحث

در این بخش، نتایج عددی پوسته نازک استوانه‌ای با ویژگی‌های هندسی $\left(\frac{R}{h} = 100, \frac{l}{R} = 20\right)$ ارائه شده است. در این بررسی از آلیاژ حافظه‌دار نیکل- تیتانیوم استفاده شده که خواص آن در جدول 1 ارائه شده است [1].

پوسته آلیاژ حافظه‌دار مورد مطالعه در ابتدا در فاز آستنیت کامل ($\xi = 0$) و بدون تنش بوده و در دمای 25 درجه سانتی‌گراد است که با توجه به خواص ماده بالاتر از A_{f} است. همچنین تمامی مؤلفه‌های کرنش ارائه شده برای صفحه میانی پوسته ($z = 0$) خواهند بود.

برای انتخاب تعداد نقاط مناسب بر پوسته در روش تربیع دیفرانسیلی، از تست همگرایی پاسخ‌ها استفاده شده است که براساس آن تعداد $N = 15$ در تحلیل ارتعاشات واداشته و تعداد $N = 30$ در بررسی فرکانس‌های طبیعی استفاده شده است. همچنین برای اطمینان از کد نوشته‌شده براساس الگوریتم نگاشت برگشتی صفحه محدب، نتایج تنش- کرنش مربوط به میله‌ای تحت بارگذاری محوری در حالت یک‌بعدی با استفاده از کد یادشده به‌دست آمده و با نتایج ارائه‌شده توسط ماکادو و لاگوداس [1] در دمای 328 کلوین مقایسه شده است. شکل 4 مقایسه‌ای از نمودار تنش- کرنش مربوط به دو حالت را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتیجه حاصله از کد یادشده با نتیجه مرجع ارائه‌شده کاملاً منطبق است.

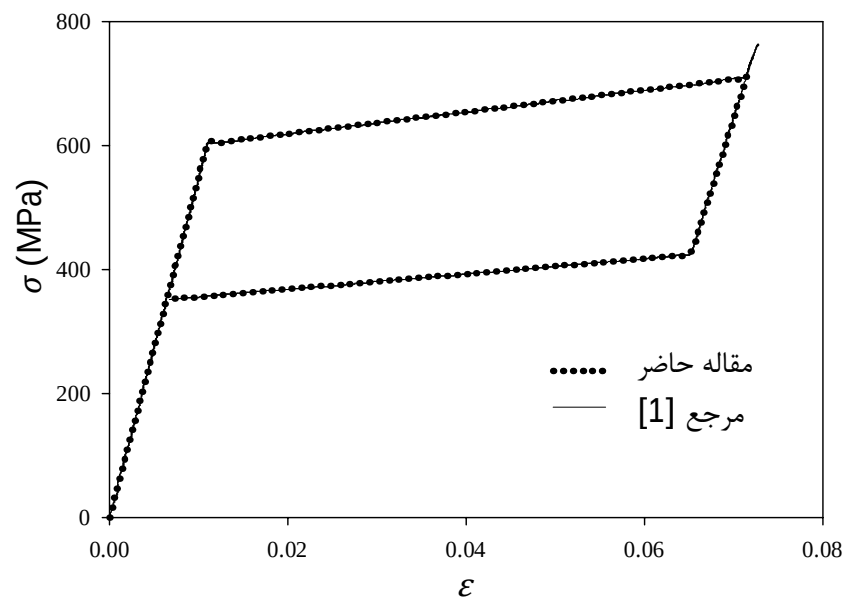
جدول 1 خواص ماده آلیاژ حافظه‌دار نیکل-تیتانیوم

خواص ماده (واحد)	مقدار [1]
H	0/056
A_{s}(K)	270
A_{f}(K)	280
M_{s}(K)	245
M_{f}(K)	230
υ	0/3
ρ(kgm^{-3})	6500
${}^{(*)}_{0}E^{\mathrm{A}}$(GPa)	55
${}^{(*)}_{0}E^{\mathrm{M}}$(GPa)	46
α(K^{-1})	22E-6
$c^{\mathrm{A}} = c^{\mathrm{M}} = \frac{-\rho\Delta s_0}{H}$ ($\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}}$)	7/4E6
Δc	0

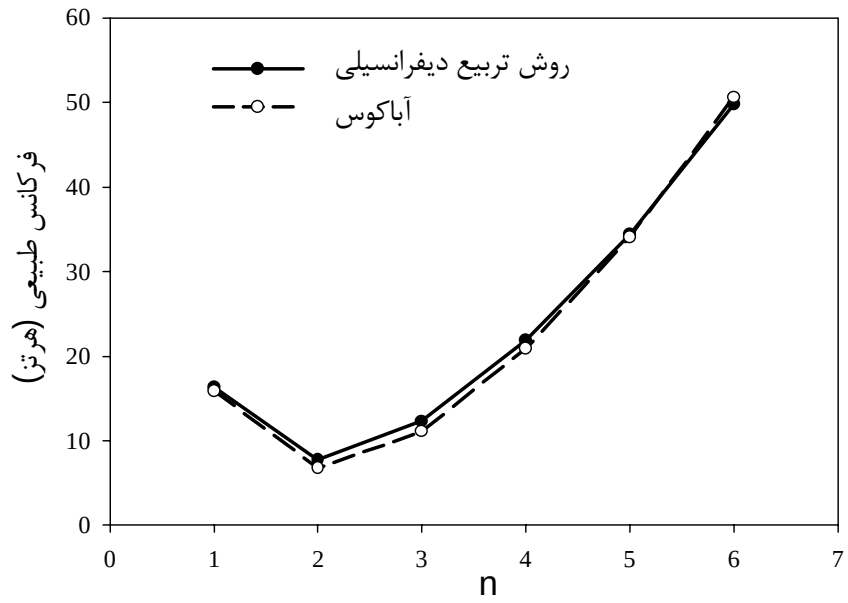
* بالانویس‌های A و M به‌ترتیب مربوط به فاز آستنیت و مارتنزیت است.

علاوه‌براین برای بررسی صحت فرمولاسیون به‌کار برده‌شده در تحلیل پوسته، مسئله مورد نظر در فاز آستنیت کامل توسط نرم‌افزار المان محدود آباکوس مدل‌سازی شده و نتایج فرکانس طبیعی و جابه‌جایی آن با نتایج حاصل از روش ارائه‌شده در مقاله حاضر مقایسه شده است. در تحلیل المان محدود از المان‌های پوسته استفاده شده است. شکل 5 فرکانس‌های طبیعی پوسته را در مود طولی نخست برحسب مود محیطی مربوط به حرکت شعاعی، برای دو روش یادشده نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج بسیار به یکدیگر نزدیک هستند که این امر صحت روش ارائه‌شده را به خوبی نشان می‌دهد.

همچنین شکل 6 نتایج مربوط به تنش- کرنش و جابه‌جایی شعاعی- زمان نقطه طولی میانی تحت فشار داخلی با دوره تناوب 0/072 ثانیه و

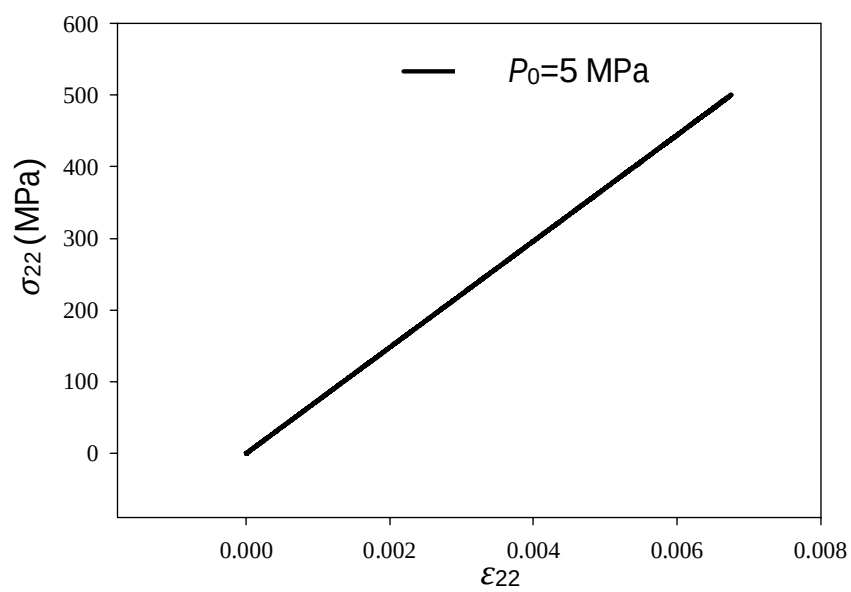


شکل 4 نمودار تنش- کرنش در حالت یک‌بعدی در دمای 328 کلوین

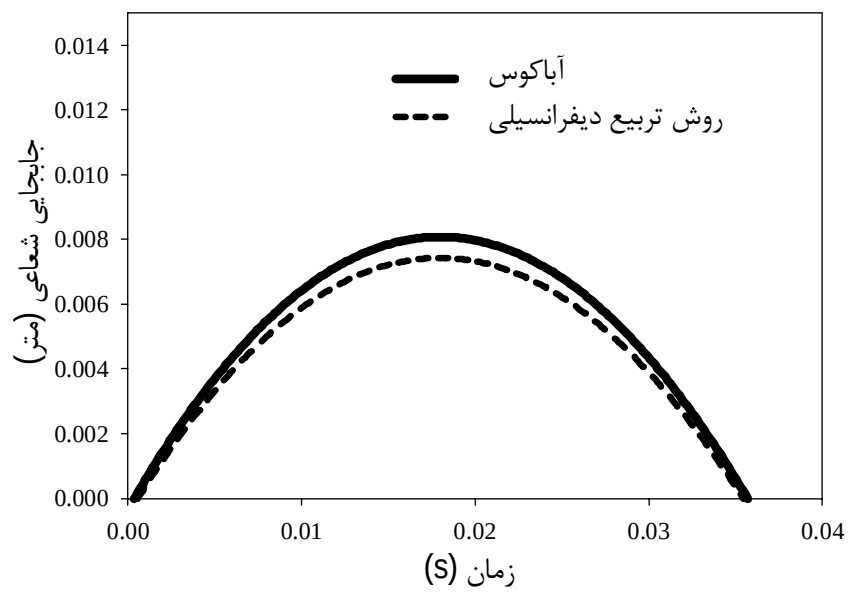


شکل 5 فرکانس‌های طبیعی پوسته در فاز آستنیت خالص در مود طولی اول

ضریب P_0 = 5 MPa را در یک نیم‌سیکل نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل 6-الف مشاهده می‌شود، شدت فشار داخلی انتخاب‌شده در حدی است که منجربه تغییر فاز در ماده نشده است و در نتیجه ماده همچنان در فاز آستنیت کامل است. علاوه‌براین شکل 6-ب مقایسه صورت گرفته بین نتایج جابه‌جایی حاصله از آباکوس و روش ارائه‌شده را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود به دلیل تفاوت در روش عددی به‌کار برده شده، تفاوت قابل قبولی بین نتایج وجود دارد. همچنین از جمله مزایای استفاده از روش تربیع



الف - نمودار تنش محیطی- کرنش محیطی

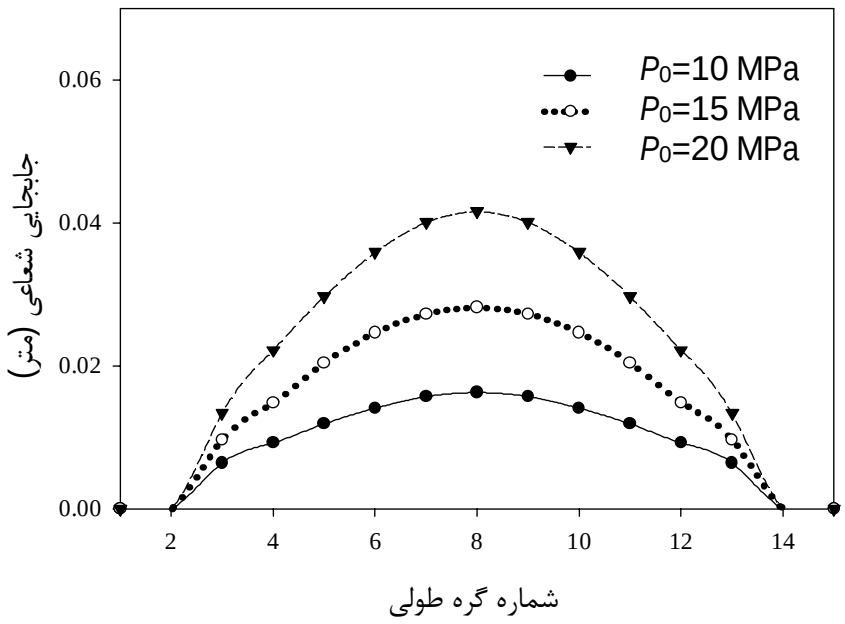


ب نمودار جابه‌جایی شعاعی- زمان

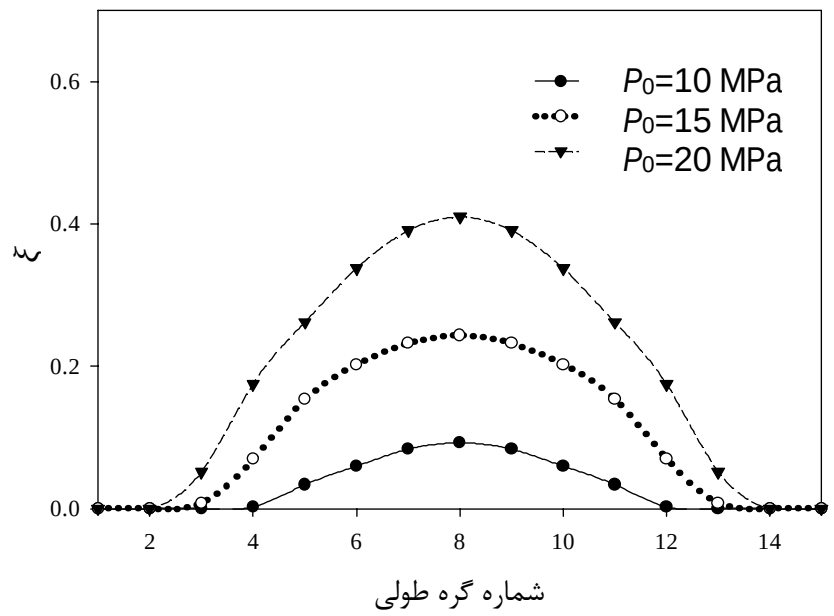
شکل 6 نمودارهای نقطه طولی میانی تحت فشار داخلی با دوره تناوب 0/072 ثانیه و ضریب P_0 = 5 MPa

دیفرانسیلی نسبت به روش المان محدود، کاهش زمان و هزینه حل و نیز استفاده از گره‌های بسیار کمتری بر قطعه خواهد بود.

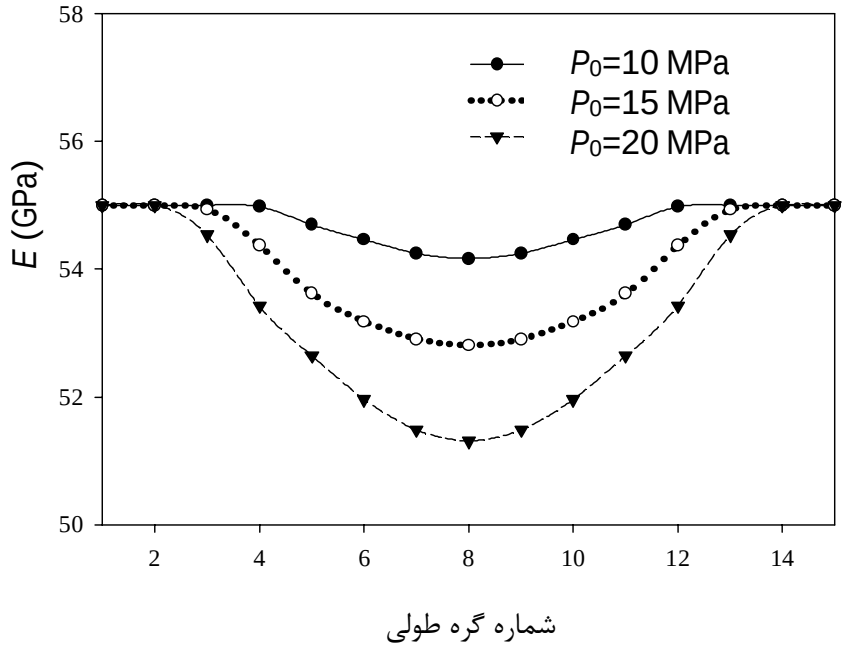
شکل 7-الف تا 7-ج به‌ترتیب نمودار جابه‌جایی شعاعی، کسر حجمی مارتنزیت و مدول یانگ نقاط طولی پوسته را در یک چهارم سیکل به‌ازای دوره تناوب 0/02 ثانیه و مقادیر مختلف P_0 نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود به دلیل اعمال فشار داخلی متغییر با مکان، جابه‌جایی نقاط



الف - نمودار جابجایی شعاعی- شماره گره طولی



ب - نمودار ξ - شماره گره طولی

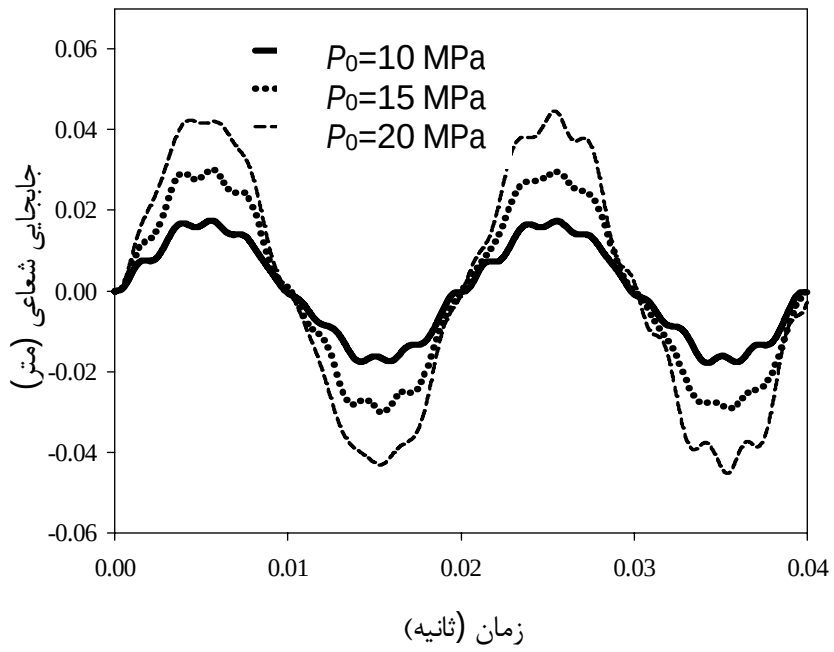


ج - نمودار مدول یانگ-شماره گره طولی

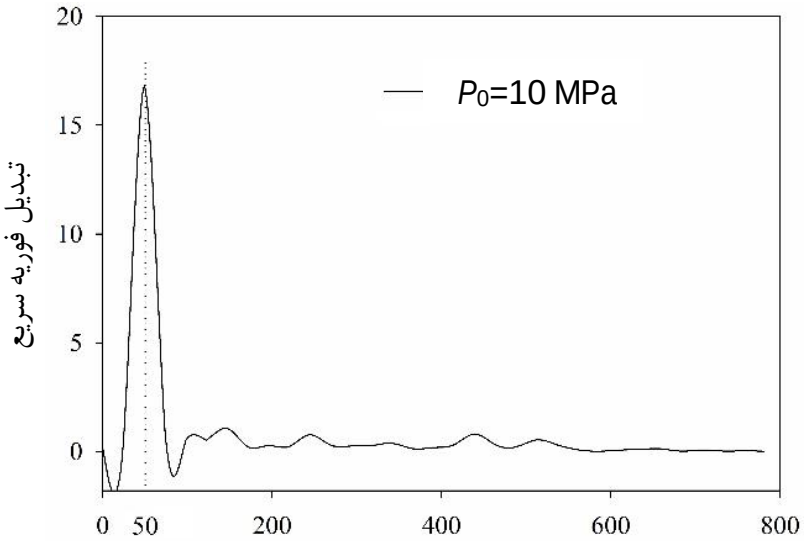
شکل 7 نمودارهای مربوط به نقاط طولی پوسته در یک چهارم سیکل به‌ازای دوره تناوب 0/02 ثانیه و مقادیر مختلف P_0

طولی با یکدیگر متفاوت بوده و بیشترین جابه‌جایی به‌ازای مقادیر مختلف P_0 در نقطه میانی پوسته اتفاق افتاده است. همچنین شدت بارهای داخلی به‌گونه‌ای بوده است که در بیشتر نقاط، تغییر فاز رخ داده و بیشترین تغییر فاز مربوط به نقطه میانی است که با افزایش P_0، کسر حجمی مارتنزیت افزایش یافته و در نتیجه ماده نرم‌تر می‌شود که این امر به خوبی در شکل 7-ج قابل مشاهده است. در واقع با افزایش کسر حجمی مارتنزیت در هر نقطه، مدول یانگ و یا به عبارتی استحکام ماده کاهش یافته و در نتیجه جابه‌جایی آن بیشتر می‌شود.

شکل 8-الف نمودار جابجایی شعاعی- زمان مربوط به نقطه میانی پوسته را به‌ازای دوره تناوب 0/02 ثانیه و مقادیر مختلف P_0 نشان می‌دهد. همچنین جهت مشاهده فرکانس پاسخ‌های زمانی یادشده، در شکل 8-ب برای نمونه تبدیل فوریه سریع[1] مربوط به یکی از این پاسخ‌های زمانی (نمودار مربوط به $P_0 = 10$ MPa) نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل 8-ب مشاهده می‌شود فرکانس جابه‌جایی شعاعی در این فشار با فرکانس تحریک یعنی 50 هرتز برابر شده است که برای سایر فشارها نیز براساس شکل 8-الف دارای همین مقدار است. علاوه‌براین در شکل 8-الف مشاهده می‌شود که



الف - نمودار جابه‌جایی شعاعی- زمان



ب - نمودار تبدیل فوریه سریع

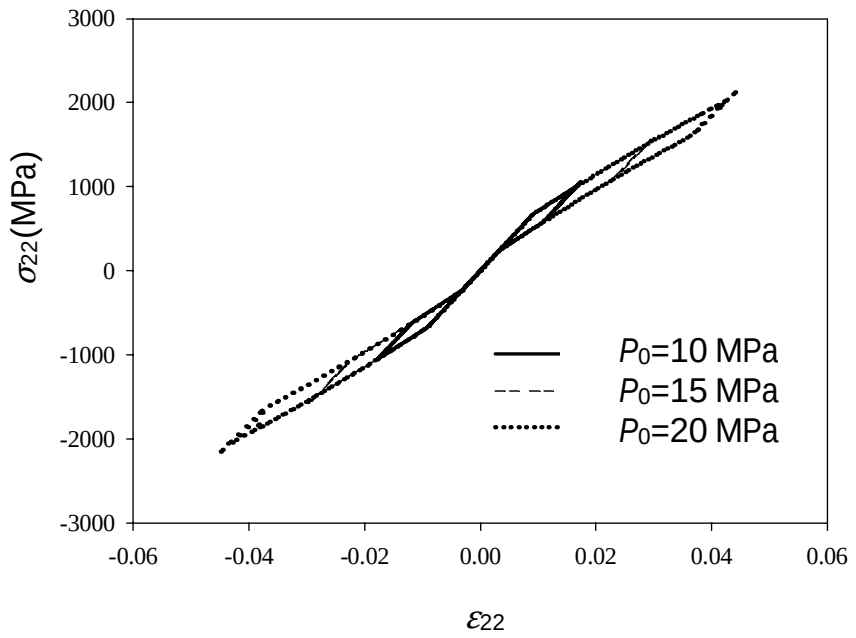
شکل 8 الف- نمودارجابه‌جایی شعاعی- زمان نقطه میانی پوسته به‌ازای دوره تناوب 0/02 ثانیه و مقادیر مختلف P_0 ب- نمودار تبدیل فوریه سریع مربوط به پاسخ زمانی در $P_0 = 10$ MPa

1- Fast Fourier Transform (FFT)

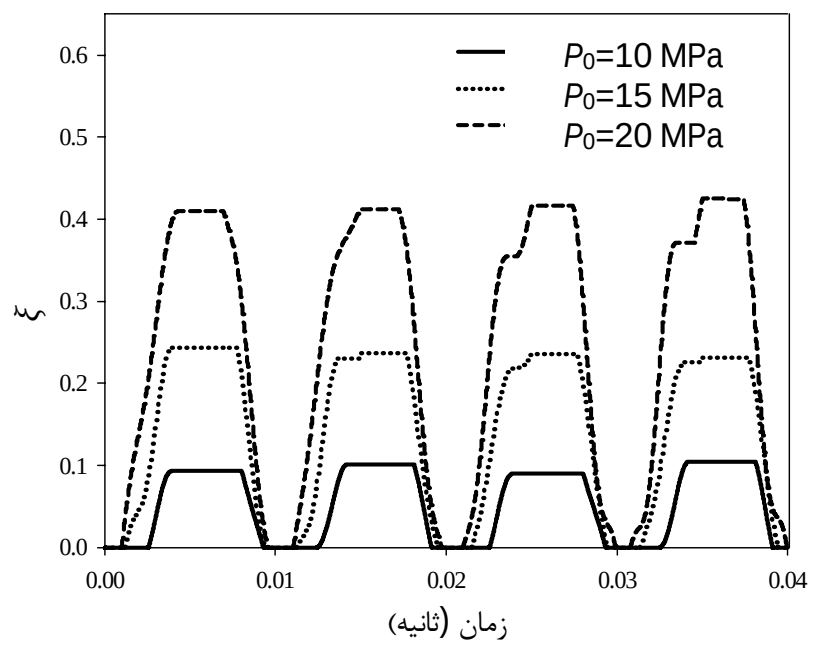
افزایش P_0 منجربه افزایش دامنه ارتعاش شده و همچنین حول پاسخ‌های هارمونیک به‌ویژه پاسخ مربوط به ضریب فشار $P_0 = 10$ MPa، اغتشاشاتی وجود دارد که در شکل 8-ب (که بیانگر تبدیل فوریه سریع مربوط به همین ضریب فشار است)، این اغتشاشات در اطراف فرکانس تحریک 50 هرتز به خوبی مشاهده می‌گردد.

شکل 9 و 10 به‌ترتیب نمودار تنش محیطی- کرنش محیطی و ξ- زمان مربوط به نقطه میانی پوسته را به‌ازای دوره تناوب 0/02 ثانیه و مقادیر مختلف P_0 نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل 9 مشاهده می‌شود، افزایش P_0 منجر به بزرگ‌تر شدن سیکل هیسترزیس و در نتیجه افزایش میرایی در ماده شده است. همچنین با توجه به شکل 10، افزایش شدت فشار داخلی همان‌طور که از پیش یاد شد منجر به افزایش ξ بیشینه و نرم‌تر شدن ماده می‌شود.

شکل 11 پاسخ فرکانسی سیستم مربوط به نقطه میانی پوسته در بازه فرکانسی 30 تا 50 هرتز را که شامل دو فرکانس طبیعی پوسته در فاز آستنیت خالص یعنی 34 و 49/7 هرتز است، نشان می‌دهد. همچنین در شکل 12، تغییرات ξ با فرکانس‌های متناظر مذکور ارائه شده است. همان‌طور که در شکل 11 مشاهده می‌شود، نقاط ماکزیمم در اطراف فرکانس‌های طبیعی پوسته آستنیت خالص، با افزایش P_0 افزایش یافته و به سمت چپ



شکل 9 نمودار تنش محیطی- کرنش محیطی نقطه میانی پوسته به‌ازای دوره تناوب 0/02 ثانیه و مقادیر مختلف P_0



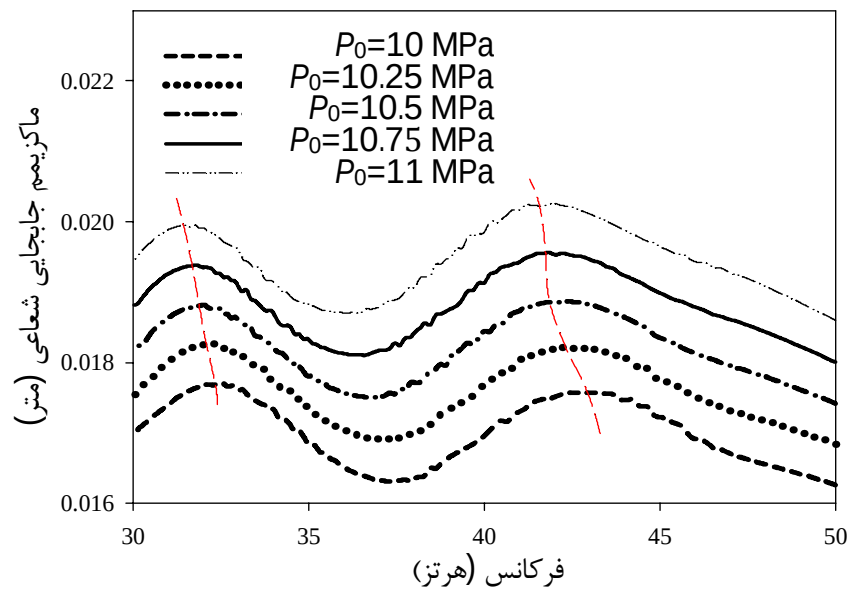
شکل 10 نمودار ξ- زمان نقطه میانی پوسته به‌ازای دوره تناوب 0/02 ثانیه و مقادیر مختلف P_0

جابه‌جا می‌شود و همچنین طبق شکل 12، ξ با افزایش P_0 افزایش می‌یابد. در واقع در سیستم یادشده، یک رفتار نرم‌شونده به واسطه تغییر فاز در ماده رخ داده است.

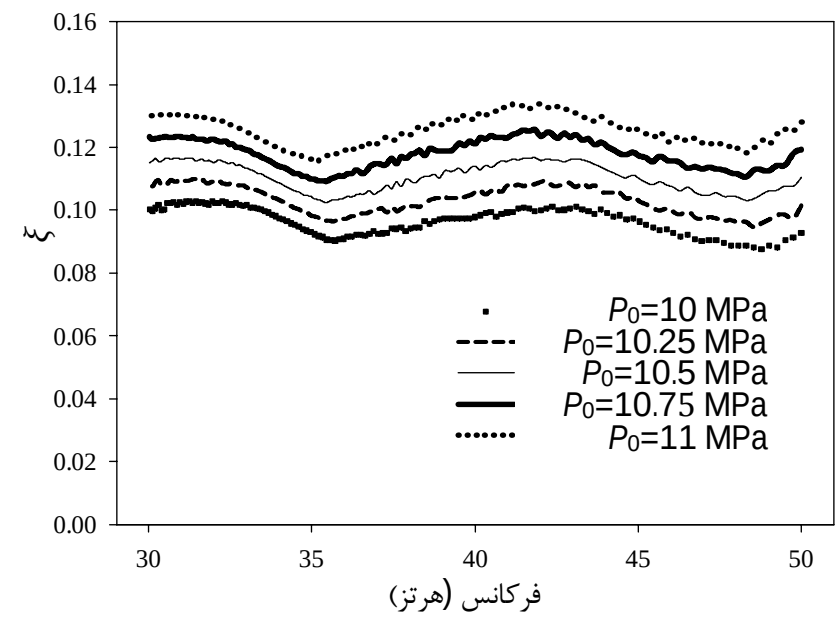
6- نتیجه‌گیری

در این مقاله تحلیل ارتعاشات واداشته شعاعی پوسته‌های استوانه‌ای از جنس آلیاژ حافظه‌دار با تکیه‌گاه‌های ساده تحت فشار داخلی هارمونیک وابسته به زمان و مکان مورد مطالعه قرار گرفت. برای این منظور شدت فشارهای داخلی متفاوتی به نقاط مختلف پوسته اعمال شد و تأثیر آن بر تغییر فاز و استحکام ماده و رفتار ارتعاشی سیستم، مورد بررسی قرار گرفت.

نتایج حاصله نشان می‌دهد که با اعمال فشار داخلی به اندازه کافی بزرگ در یک نقطه، انتقال فاز رخ می‌دهد که براین‌اساس کسر حجمی مارتنزیت مخالف صفر شده که با افزایش شدت بار، مقدار آن و در نتیجه سطح هیسترزیس و میرایی افزایش می‌یابد. این امر منجربه کاهش مدول یانگ و استحکام ماده شده و سبب افزایش دامنه ارتعاشات واداشته در آن نقطه می‌شود. از آن‌جایی که فشار داخلی تابعی از مکان است، توزیع کسر حجمی مارتنزیت و در نتیجه ویژگی‌های ماده هنگام ارتعاشات بر پوسته یکنواخت نبوده و ماده رفتار غیرهمگنی از خود نشان می‌دهد. در واقع نقاط با ξ بزرگ‌تر، رفتار نرم‌تری نسبت به سایر نقاط از خود نشان خواهند داد؛ بنابراین هنگامی که شدت فشار داخلی در نقاط به گونه‌ایی باشد که سبب تغییر فاز



شکل 11 پاسخ فرکانسی نقطه میانی پوسته به‌ازای مقادیر مختلف P_0



شکل 12 نمودار ξ- فرکانس نقطه میانی پوسته به‌ازای P_0های مختلف

در آن نقاط شود، در پاسخ فرکانسی ماده، رفتار نرم‌شوندگی مشاهده می‌شود به این صورت که نقاط رزونانس سیستم غیر خطی (با تغییر فاز) نسبت به سیستم خطی (بدون تغییر فاز و دارای فاز آستنیت خالص) دارای جابجایی به سمت چپ بوده و فرکانس آنها از فرکانس‌های طبیعی سیستم خطی کمتر است. نتایج نشان می‌دهند که فرمولاسیون و روش‌های حل عددی ارائه‌شده برای تحلیل پاسخ زمانی و فرکانسی پوسته‌های استوانه‌ای آلیاژ حافظه‌دار در این تحقیق، دارای صحت و سرعت بالایی بوده و به خوبی رفتار ارتعاشاتی چنین پوسته‌هایی را با درنظر گرفتن تأثیرات غیرخطی ماده ناشی از انتقال فاز هنگام حرکت، پیش‌بینی می‌کنند. از طرف دیگر فرمولاسیون به‌کار رفته به درستی رفتار غیرهمگن ماده به‌واسطه اعمال فشار داخلی متغییر با مکان را مدل‌سازی می‌کند.

7- فهرست علائم

dA	المان سطح (m^2)
A_f	دمای پایان آستنیت (K)
A_s	دمای شروع آستنیت (K)
b^A	پارامتر مدل
b^M	پارامتر مدل
B_{ik}	ضرایب وزنی در راستای طولی
c	گرمای ویژه (J/kg K)
C_{jk}	ضرایب وزنی در راستای محیطی
D	تانسور سفتی (Pa)
E	مدول یانگ (Pa)
$f(\xi)$	تابع انتقال سخت‌شوندگی
$\vec{F}_1$	بردار کرنش انتقال
$\vec{F}_2$	بردار فشار داخلی
G	انرژی آزاد گیبس (J)
H	ضخامت (m)
H	ماکزیمم کرنش انتقال
I	تانسور همانی
I_i	اینرسی‌های جرمی
K	ماتریس سختی
δK	انرژی جنبشی مجازی (J)
L	طول (m)
M	ماتریس جرم
M_{ij}	برایندهای ممان‌های خمشی
M_f	دمای پایان مارتنزیت (K)
M_s	دمای شروع مارتنزیت (K)
N	تعداد نقاط
N_{ij}	برایندهای نیروهای غشایی
N_y, N_x	تعداد نقاط در راستای x و y
P_0	ضریب ثابت فشار داخلی (Pa)
$P_t(t)$	تابع زمانی فشار داخلی (Pa)
$P_x(x)$	تابع مکانی فشار داخلی (Pa)
R	شعاع متوسط (m)
s و s_0	آنتروپی ویژه در حالت مبنا و آنتروپی ویژه (J/K)
S	تانسور نرمی

t	زمان (s)
T و T_0	دمای مبنا (K) و دما (K)
u	جابه‌جایی طولی (m)
u_0	انرژی داخلی ویژه در حالت مبنا
δU	انرژی کرنشی مجازی (J)
v	جابجایی محیطی (m)
dV	المان حجم (m^3)
δV	انرژی پتانسیل مجازی (J)
w	جابه‌جایی شعاعی (m)
W_{ext}	کار نیروهای خارجی (J)
(x, y, z)	مختصات

علایم یونانی

A	تانسور ضریب انبساط حرارتی (K^{-1})
β	پارامتر بی‌بعد محیطی
γ	پارامتر ثابت در روش نیومارک
Γ_i	مرزها
δ	فاصله کوچک (m)
Δ	نماد تغییرات
$\vec{\Delta}, \dot{\vec{\Delta}}, \ddot{\vec{\Delta}}$	بردارهای جابه‌جایی (m)، سرعت (m/s) و شتاب (m/s^2)
E	تانسور کرنش
ε^t	تانسور کرنش انتقال
$\overline{\varepsilon^t}$	کرنش انتقال مؤثر
η	پارامتر بی‌بعد طولی
θ	مختصه زاویه‌ای
Λ	تانسور انتقال
μ_1, μ_2	پارامترهای مدل
ξ	کسر حجمی مارتنزیت
ρ	دانسیته (kg/m^3)
Σ	تانسور تنش (Pa)
$\acute{\sigma}$	تانسور تنش انحرافی (Pa)
$\bar{\sigma}$	تنش مؤثر (Pa)
υ	نسبت پواسون
Y	پارامتر مدل
Φ	تابع انتقال
Ψ	نیروی ترمودینامیکی کلی
ω	فرکانس زاویه‌ای (rad/s)
Ω_n	فرکانس زاویه‌ای طبیعی (rad/s)
∂	مشتق جزئی

بالانویس‌ها

A	فاز آستنیت
k	شمارنده تکرار
M	فاز مارتنزیت
r	مرتبه مشتق جزئی نسبت به x
s	مرتبه مشتق جزئی نسبت به y

زیرنویس‌ها

f	پایان
q	شماره گام زمانی
s	شروع

8- مراجع

[1] D. C. Lagoudas, *Shape Memory Alloys Modeling and Engineering Applications,* USA, New York: Springer, 2008.
[2] L. G. Machado, *Shape memory alloys for vibration isolation and damping,* PHD Thesis, Aerospace Engineering, Texas A&M University, 2007.
[3] S. Seelecke, Modeling the dynamic behavior of shape memory alloys, *International Journal of Non-Linear Mechanics,* Vol. 37, pp. 1363–1374, 2002.
[4] S. M. T. Hashemi, S. E. Khadem, Modeling and analysis of the vibration behavior of a shape memory alloy beam, *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 48, No. 1, pp. 44-52, 2006.
[5] A. A. Jafari, H. Ghiasvand, Dynamic response of a pseudoelastic shape memory alloy beam to a moving load, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 316, No. 1-5, pp. 69-86, 2008.
[6] A. Zbiciak, Dynamic analysis of pseudoelastic SMA beam, *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 52, No. 1, pp. 56-64, 2010.
[7] L.-C. Shiau, S.-Y. Kuo, S.-Y. Chang, Free vibration of buckled SMA reinforced composite laminates, *Composite Structures,* Vol. 93, No. 11, pp. 2678-2684, 2011.
[8] L. Wang, R. V. N. Melnik, Nonlinear dynamics of shape memory alloy oscillators in tuning structural vibration frequencies, *Mechatronics,* Vol. 22, No. 8, pp. 1085-1096, 2012.
[9] H. Asadi, M. Bodaghi, M. Shakeri, M. M. Aghdam, An analytical approach for nonlinear vibration and thermal stability of shape memory alloy hybrid laminated composite beams, *European Journal of Mechanics-A/Solids,* Vol. 42, pp. 454-468, 2013
[10] H. Asadi, M. Bodaghi, M. Shakeri, M. Aghdam, On the free vibration of thermally pre/post-buckled shear deformable SMA hybrid composite beams, *Aerospace Science and Technology,* Vol. 31, No. 1, pp. 73-86, 2013.
[11] S. M. R. Khalili, M. Botshekanan Dehkordi, E. Carrera, M. Shariyat, Non-linear dynamic analysis of a sandwich beam with pseudoelastic SMA hybrid composite faces based on higher order finite element theory, *Composite Structures,* Vol. 96, pp. 243-255, 2013.
[12] S. M. R. Khalili, M. Botshekanan Dehkordi, E. Carrera, A nonlinear finite element model using a unified formulation for dynamic analysis of multilayer composite plate embedded with SMA wires, *Composite Structures,* Vol. 106, pp. 635-645, 2013.
[13] Y. Bellouard, Shape memory alloys for microsystems: A review from a material research perspective, *Materials Science and Engineering: A,* Vol. 481-482, pp. 582-589, 2008.
[14] M. Amabili, *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates,* USA, New York: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2008.
[15] J. N. Reddy, *mechanics of laminated composite plates and shells,* 2nd ed., USA: CRC PRESS, 1945.
[16] J. N. Reddy, *Energy principles and variational methods in applied mechanic,* USA: John Wiley & Sons 2002.
[17] J. N. Reddy, *Theory and Analysis of elastic Plates and Shells,* 2nd ed., USA: Taylor & Francis Group (CRC Press), 2007.
[18] C. W. Bert, M. Malik, Differential quadrature method in computational mechanics: A review, *Appl Mech Rev* Vol. 49, No. 1, pp. 1-28, 1996.
[19] J. N. Reddy, *An introduction to the finite element method, 3th ed.,* USA, New York: Mc Graw Hill, 2006.
[20] N. M. Newmark, F. Asce, A method ofcomputation for structural dynamics, *Journal of the engineering mechanics division* Vol. 85, pp. 67-94, 1959.
[21] C. W. Bert, M. Malik, Free Vibration Analysis of Thin Cylindrical Shells by the Differential Quadrature Method, *Journal of Pressure Vessel Technology Transactions of the ASME,* Vol. 118, pp. 1-12, 1996.
[22] A. Nosier, J. N. Reddy, Vibration and stability analyses of cross-ply lminated circular cylindrical shells, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 157, No. 1, pp. 139-l 59, 1992.