ماهنامه علمى پژوهشى



دانگار تریت مرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل ناپایداری دینامیکی و استاتیکی پولین نانوتیرهای نیمهمتاثر با استفاده از تئوری تنش مزدوج اصلاحشده

امینرضا نقرہآبادی^{1*}، امیر حقپرست²

1 - دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز

* اهواز، صندوق پستى noghrehabadi@scu.ac.ir، 6135743337

اطلاعات مقاله	چکیدہ
مقاله پژوهشی کامل دریافت: 05 مرداد 1395 پذیرش: 03 مهر 1395 ارائه در سایت: 05 آبان 1395	در این مقاله ناپایداری استاتیکی و دینامیکی یک مدل جامع از یک نانوتیر یکسر گیردار تحت تأثیر جریان مستقیم اعمالی و ناگهانی با استفاده از تئوری غیرکلاسیک تنش مزدوج اصلاحشده در حضور اثرات تنش سطحی بررسی شده است. قسمتی از نانوتیرک تحت تأثیر نیروهای الکترواستاتیک و نیروی مویینگی قرار دارد. نانوتیرک براساس تئوری اویلر-برنولی مدلسازی و معادله حرکت آن با استفاده از اصل همیلتون
کلید واژگان:	بهدست آمده است. معادلات حاکم بر نانوتیرک با استفاده از متغیرهای بی بعد مناسب به حالت بی بعد انتقال یافته و با استفاده از روش اجزا محدود
نانوتير	حل شدند. نتایج بهدستآمده از حل اجزا محدود با نتایج پژوهشهای پیشین مقایسه گردید و تطابق خوبی مشاهده شد. در ادامه، پارامترهای پایه
پولين	برای طراحی مهندسی در مقیاس نانو همانند خیز بحرانی انتهای تیر و ولتاژ پولین در دو حالت استاتیکی و دینامیکی بررسی گردید. نتایج نشان
تئوری تنش مزدوج نانو تیرک نیمەمتاثر	میدهد که در حالت دینامیکی، با افزایش ولتاژ، تیرک قبل از پدیده پولین و سقوط بر روی پایه، دارای حالت نوسانی با دامنه بزرگ است. همچنین مشاهده شد که کوچکتر شدن طول الکترود زیرلایه (افزایش تأثیر نیمهمتاثر بودن)، افزایش اثر میدان لبه، اثر اندازه و اثر تنش سطحی و یا کاهش نیروی موئینگی باعث افزایش ولتاژ نهایی پولین میشوند.

Dynamic and static pull-in instability analysis of partially affected nanocantilevers using modified couple stress theory

Aminreza Noghrehabadi^{*}, Amir Haghparast

Department of Mechanical Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran * P.O.B. 6135743337, Ahvaz, Iran, noghrehabadi@scu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION	ABSTRACT
Original Research Paper Received 26 July 2016 Accepted 24 September 2016 Available Online 26 October 2016	In this paper, the modified couple stress theory is used to study static and dynamic pull-in instability of a general model of a nano-cantilever under a sudden applied DC voltage in the presence of the surface effects. A partial part of the nano-cantilever is subject to the electrostatic and capillary forces. Euler- Bernoulli theory is used to model the beam and the equation of motion is derived by using Hamilton's
Keywords: Nano-beam Pull-in Couple stress theory partially affected nano beam	principle. The governing equations are transformed into a non-dimensional form and then solved using finite element method (FEM). The results, obtained using FEM are compared with the data available in the literature and found in good agreement. Basic parameters for engineering design at the nanoscale, such as deflection and pull-in voltage have been calculated for both of the dynamic and static modes. The results of dynamic analysis of the beam show that as the voltage increases, the beam goes into an oscillating mode with large amplitudes just before pull-in phenomenon occurs and the beam collapses into the substrate (fixed electrode). Moreover, it is found that a decrease in the length of the fixed electrode (increase of the partially affecting parameter), the increase of the fringing field effect, the size effect and the surface effect increases the pull-in voltage of the nano-cantilever beam.

پیداکرده است. از این سیستمها بهطور گسترده در ابزارهایی مانند سنسورهای حساس وزن [1]، کلیدها [2]، انبرکها [3]، رلهها [4] و غیره استفاده می شود. مزیت استفاده از این ابزارها در پیشرفت دقیق تر و سریع تر سیستمهای مکانیکی و الکترونیکی به همراه مصرف کمتر و ساختار ساده تر می باشد. نانوعملگرها در سیستمهای نانوالکترومکانیکی از دو الکترود ساخته شده اند که یکی از آنها متحرک و انعطاف پذیر و دیگری ثابت است و

1- مقدمه

پیشرفتهای فراوان در نانوتکنولوژی منجر به رشد سریع ابزارهای صنعتی در ابعاد میکرو و نانو شده است. سیستمهای میکرو/نانو الکترومکانیکی¹ به عنوان یک فناوری جدید در شاخههای مختلف مانند مکانیک، حرارت، شیمیایی، نور و اپتیک، مغناطیس، سیستمهای الکتریکی و غیره کاربردهای بسیار متنوعی

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

A. Noghrehabadi, A. Haghparast, Dynamic and static pull-in instability analysis of partially affected nano-cantilevers using modified couple stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 11, pp. 81-91, 2016 (in Persian)

¹ Micro/Nano ElctroMechanical Systems

الکترود متحرک در بالای الکترود زیرلایه معلق است. اعمال اختلاف ولتاژ بین دو الکترود باعث تغییر شکل الکترود متحرک و انحراف آن بهسوی الکترود زیرلایه میشود. زمانی که ولتاژ بین دو الکترود از مقدار خاصی بیشتر شود، سیستم دچار ناپایداری شده و تماس بین دو الکترود به وجود میآید. این پدیده، ناپایداری پولین¹ و ولتاژ متناظر با آن ولتاژ پولین² نامیده میشوند.

پیش از توسعه سیستمهای نانوالکترومکانیکی، اغلب این سیستمها اجزایی در ابعاد میکرو داشتند که سیستمهای میکروالکترومکانیکی نامیده می شدند. در چندین دهه گذشته، تحقیقات بسیاری پیرامون ساختارهای با ابعاد میکرو انجام شده است. باترا و همکاران [5] ارتعاش میکروتیرهای در حوزه الکتریکی را مورد بررسی قرار دادند و تغییرات فرکانس مبنا در برابر بریان مستقیم³ اعمالی را تفسیر کردند. رمضانی و همکاران [6] با استفاده از روشهای عددی و تحلیلی به بررسی ناپایداریهای استاتیکی نانوتیرهای یکسرگیردار تحت تأثیر نیروی الکترواستاتیک و نیروی بینمولکولی کاسیمیر پرداختند. احمدیان و همکاران [7] رفتار استاتیکی و ناپایداری پولین میکروتیرهای دوسرگیردار تحت نیروی الکترواستاتیک و اثر میدان لبه را

یکی از تفاوتهای کار کردن در مقیاس نانو در مقایسه با مقیاس میکرو و بزرگتر، نقض شدن نسبی فرض پیوستگی ماده می باشد. درمجموع دو نوع تئوری کلی برای بررسی ناپایداری میکروکلیدها و نانوکلیدها استفاده می گردد. تئوری اول تئوری کلاسیک است که در آن ماده به صورت یک محیط پیوسته درنظر گرفته شده است. در این تئوری، پیوستگی محیط مادی فرض اساسی میباشد؛ بهنحویکه در هر جز هرچند حجم کنترل کوچکی انتخاب شود باز هم ماده بهصورت پيوسته وجود دارد. مدل كلاسيك به دليل سادگی معادلات همواره مورد استقبال بوده اما با توجه به این نکته که در مقیاس نانو شرط پیوستگی محیط ماده نقض شده و مواد به صورت ساختار اتمى وجود دارند، تئورىهاى كلاسيك محيط پيوسته توانايى توضيح بسيارى از پدیدهها را ندارند. نظریههای کلاسیک به علت در نظر نگرفتن طولهای درونی مواد دقت خود را از دست میدهند. نتایج حاصل از تئوریهای کلاسیک برای تیرهای در ابعاد نانو اختلاف زیادی با نتایج تجربی داشتند. این اختلاف باعث شد که محققان تئوریهای جدیدی را ابداع کنند که در آنها برخلاف حالت كلاسيك تنش تنها تابعي از نيروى وارده نيست. ازاينرو محققان برای بررسی و تحلیل رفتار مکانیکی مواد در مقیاس نانو به کمک معرفی ثابتهای جدید برای ماده مانند پارامتر مقیاس طول ماده، تئوریهای غیرکلاسیک از جمله تئوری تنش مزدوج⁴ [8] و تنش مزدوج اصلاحشده⁵ (MCST) [9] را ارائه کردند. پارامتر مقیاس طول ماده (طول داخلی) یک خاصیت از ماده است که به جنس ماده بستگی دارد و به وسیله آزمایشهای تجربی محاسبه می گردد. تئوریهای غیرکلاسیک بیان میکنند که بر اثر اعمال نیرو به ماده، علاوه بر تنش، ممان نیز در ماده به وجود می آید و باید در معادلات تعادل ذرات یا اجزا در نظر گرفتهشوند. رهاییفرد و همكاران [10] با استفاده از تئورى تنش مزدوج اصلاحشده، رفتار استاتيكي میکروتیر یکسرگیردار را در نظر گرفتند و نشان دادند که تئوری تنش مزدوج می تواند دلیل فاصله میان نتایج تجربی و تئوری کلاسیک را توضیح دهد. طادیبنی و همکاران [11] ناپایداری پولین استاتیکی یک نانوتیر یکسر

گیردار تحت نیروهای الکترواستاتیک و بینمولکولی را با استفاده از تئوری غیرکلاسیک مورد مطالعه قرار دادند.

نیروی مویینگی⁶ بین دو الکترود، اغلب زمانی رخ میدهد که پلی از مایع بین آنها شکل گیرد. نیروی مویینگی میتواند حاصل یک حجم مایع باشد که در طی عمل شستوشو و خشککردن زیر تیر (الکترود متحرک) به دام افتاده است [12]. مایع به دام افتاده در زیر تیر، نیروی قوی مویینگی را به وجود میآورد که تیر را به سمت بستر (الکترود زیرلایه پایینی) میکشد. در صورت وجود نیروی مویینگی در کلیدهای میکرو و نانو، بررسی این موضوع بر روی تغییر پایداری کلید بسیار مهم و ضروری میباشد، زیرا این نیرو میتواند 10 تا 100 برابر بزرگ تر از نیروی الکترواستاتیک شود [12]. اگر نیروی مویینگی به اندازه کافی بزرگ باشد، ساختار سقوط خواهد کرد و به بستر میچسبد [12]. مسترانگلو و اچسو [13] اولین نفراتی بودند که نیروی مویینگی در زیر یک میکروساختار الکترومکانیکی را تحلیل و پایداری آن را مورد بررسی قرار دادند.

از آنجایی که نسبت بین سطح به حجم ساختارهای با ابعاد نانو بسیار بزرگ است، اثرات سطحی⁷ بر رفتار پولین نانوکلیدها حائز اهمیت هستند. اثرات سطحی را میتوان به دو دسته تنش سطحی باقیمانده و اثرات الاسیسیته سطحی تقسیم نمود. تنش سطحی باقیمانده و اثرات الاسیسیته سطحی با استفاده از مدل الاستیک سطحی معرفیشده توسط گرتین و مورداخ [14] و معادله یانگ-لاپلاس تعمیمیافته در مدلسازی مکانیک پیوسته ترکیب میشوند. مدل الاستیک سطحی و معادله یانگ-لاپلاس تعمیمیافته بهطور گسترده در بررسی اثرات سطحی بر پاسخهای مکانیکی نانوساختارها بهطور نمونه نانوتیرها [15] مورد استفاده قرار گرفتهاند. اخیرا محققین ناپایداری پولین نانوکلیدها را با در نظر گرفتن اثرات سطحی بررسی کرده و پی بردند که اثرات سطحی تأثیر بسزایی در ناپایداری پولین نانوتیرها دارند [17،1].

باید به این نکته توجه نمود درصورتی که نرخ تغییر ولتاژ قابل صرفنظر کردن باشد، اینرسی اثری بر رفتار سیستم نخواهد داشت. به این شرایط، ناپایداری پولین استاتیکی⁸ اطلاق میشود. در مقابل، زمانی که ولتاژ بهطور ناگهانی اعمال شود و یا نرخ تغییر ولتاژ قابل توجه باشد، اینرسی تأثیر مهمی بر رفتار سیستم داشته و ناپایداری متناظر با این شرایط، پولین دینامیکی⁹ خوانده میشود. تحقیقات بسیاری در مورد رفتار دینامیکی و پولین دینامیکی میکروتیرهای تحت تحریک الکتریکی انجامشده است. چاترجی و پوهیت [18] پولین غیرخطی استاتیکی و دینامیکی میکروتیرهای یکسردرگیر را مورد بررسی قرار دادند. مقیمیزند و همکاران [19] در تحقیقی به بررسی اثرات ناپایداریهای پولین استاتیکی و دینامیکی میکروتیرهای یکسرگردار و رهاییفرد و همکاران [21.2] رفتار دینامیکی میکروتیرهای یکسرگیردار رهاییفرد و همکاران [21.2] رفتار دینامیکی میکروتیرهای یکسرگیردار تحت تأثیر نیروی الکترواستاتیک مبنی را بر تئوری تنش مزدوج بررسی و رهاییفرد از با نتایج تئوری کلاسیک مقایسه نمودند.

برای یک نانوتیر یکسرگیردار با طول بسیار بلند، در نظر گرفتن ناپایداریهای دینامیکی بسیار حائز اهمیت است. وانگ و همکاران [22] با توسعه یک مدل تیر یکسرگیردار در حضور اثرات تنش سطحی و نیروی الکترواستاتیک به بررسی اثر جابهجایی و تغییر طول الکترود زیرلایه برای

¹ Pull-in Instability ² Pull-in Voltage

³ DC Voltage

⁴ Couple Stress Theory

⁵ Modified Couple Stress Theory

⁶ Capillary Force ⁷ Surface Effects

⁸ Static Pull-in Instability

⁹ Dynamic Pull-in Instability

مهندسی مکانیک مدرس، بهمن 1395، دورہ 16، شمارہ 11

حالت استاتیکی پرداختند. هایامیزو و همکاران [23] بهمنظور بهینهسازی عملکرد و ساختار یک نانوتیوب کربنی، به بررسی مکان مختلف برای الکترود زیرلایه پرداختند. آنها با بررسی سه مدل متفاوت، به مدلی اقتصادی و در مقياس كوچكتر دست يافتند.

با بررسی پژوهشهای پیشین در زمینه نانوکلیدها ملاحظه می شود که تاکنون عملکرد کلیدهای الکترومکانیکی در حضور نیروی مویینگی و در حالتی که الکترود زیرلایه کوتاه میباشد و انحراف تیر در طی زمان تغییر می کند با استفاده از تئوری غیر کلاسیک مورد بحث قرار نگرفته است. لذا در مطالعه حاضر، نانوکلیدهای نانوالکترومکانیکی مدلسازی شده و تأثیر اندازه الکترود زیرلایه، نیروهای مویینگی و اثر تنش سطحی بر تغییر شکل و ناپایداری آنها بررسی خواهد شد.

2- مدلسازی و به دست آوردن معادلات حاکم 1-2- توصيف مدل

در این بخش معادلات حاکم بر تغییر شکل و ناپایداری استاتیکی و دینامیکی نانوتیرک ارائه خواهد شد. شکل 1 نمای شماتیک نانوکلید مورد بررسی در پژوهش حاضر را نشان میدهد. الکترود نشان دادهشده در شکل 1 در پژوهشهای [22] و [23] به صورت یک تیر یکسر گیردار ساخته شده است. در این نوع نانوکلیدها که بسیار جدید هستند، طول الکترود زیرلایه کمتر از الكترود متحرك بوده و به همين دليل بهعنوان نانوكليد نيمهمتاثر شناخته می شوند. همان طور که ذکر شد، در نانوساختارهای نیمه متاثر، الکترود زیر لایه كوتاهتر از الكترود متحرك مىباشد و كوتاه بودن الكترود زيرلايه باعث می شود، الکترود متحرک (نانوتیر) به صورت کامل در گیر نباشد. در این نانوتیر، h الکترود متحرک بر روی یک صفحه ثابت معلق و دارای طول L، ضخامت hيهناىbو فاصله اوليه برابر با g_0 مىباشد. نيروى الكترواستاتيك 1 به سبب bولتاژ اعمالی V بهمثابه موئینگی الکترود متحرک را بهسوی پایه منحرف میکند. نانوتیر در نظر گرفتهشده، ایزوتروپیک²و دارای ضریب مدول یانگ³ ، چگالی ho، مساحت مقطع عرضی $^4 A$ و ممان اینرسی 5 برابر با I است. E

در همه پژوهشهای ذکر شده در ادبیات تحقیق بهجز پژوهشهای [22] و [23] فرض کردهاند که تمامی تیرک در مقابل الکترود قرار دارد و نیروی الکتریکی بر تمام سطح تیرک اثر میکند. ولی در عمل و در کاربرد نانوکلیدهای نیمهمتاثر فقط قسمتی از تیر (الکترود متحرک) که در ارتباط با قسمت الكترود ورودى (الكترود زيرلايه) قرار دارد با نيروى الكتريكي تحريك می گردد [23،22]. برای یک تصحیح درست و مدلسازی که مبتنی بر واقعیت باشد، لازم است که نیمهمتاثر بودن تیرک متحرک در نظر گرفته شود. در مدلسازی پژوهش حاضر، از یک طول تا طول دیگر تیرک (همان قسمتی از الکترود متحرک که در ارتباط با الکترود زیرلایه است) تحت بارگذاری قرار خواهد گرفت و در بقیه تیر این نیروها حذف میشوند.

با توجه به شکل 1 محاسبهی نیروها باید به گونهای باشد که فقط در همان قسمتی از طول تیر که در ارتباط با الکترود زیرلایه قرار دارد، نیروها بر تير اعمال مىشوند و در بقيه طول تيرك نيروها صفر شوند. در اين مدل مکان و طول الکترود زیرلایه بهوسیله تابع پلهای هویساید⁶ (H**(x)** کنترل میشود. تابع پلهای هویساید H(x) یا تابع پلهای یکه تابعی ناپیوسته و چند

است. $H(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$ (1)

تابع هویساید برای تیر یکسر گیردار نیمهمتاثر بهصورت زیر تعریف مىشود:

$$H(x) = H(x - D_1) - H(x - L + D_2)$$
(2)

 D_2 که در اینجا D_1 فاصله بین انتهای چپ الکترود زیرلایه و کلید و فاصله بین انتهای سمت راست الکترود زیرلایه و کلید را نشان میدهند. تابع هویساید برای این مدل به گونهای تعریف می شود که فقط در بازهی بابر با صفر شود. با $D_1 \leq x \leq L - D_2$ برابر با مفر شود. با $(D_1 \leq x \leq L - D_2)$ ضرب این تابع در نیروهای الکترواستاتیک و موئینگی و ...، فقط در فاصلهای که واقعا بر تیر اثر می گذارند مدنظر قرار گرفته شده و در بقیه فواصل برابر با صفر هستند.

2-2- مبانى تئورى تنش مزدوج اصلاح شده

در سال 2003 لام و همکاران [24] با اصلاح تئوری کلاسیک تنش مزدوج، تئوری تنش مزدوج اصلاحشده را معرفی کردند. آنها علاوه بر معادلات تعادلي كلاسيك نيروها و گشتاور نيروها، معادله گشتاور زوج نيروها را نيز در نظر گرفتند. در این نظریه فقط قسمتهای متقارن گرادیان جابجایی و چرخشی در انرژی پتانسیل کرنشی مشارکت دارند. در نظر گرفتن گرادیان چرخش در انرژی پتانسیل کرنشی باعث به وجود آمدن ثابت جدیدی به نام اندازه طول ماده می شود که دارای بعد طول می باشد. بر اساس تئوری تنش مزدوج اصلاحشده انرژی کرنشی برای ماده الاستیک خطی ناشی از میدان جابجایی در حجم ۷، هم وابسته به تانسور کرنش و هم وابسته به مشتق دوم تغییر مکان است که به صورت زیر ارائه می شود [24]:

 $U = \frac{1}{2} \int_{V} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) d\mathbf{V}, \quad (i, j = 1, 2, 3)$ (3) در رابطه فوق σ_{ij} ، ε_{ij} ، σ_{ij} به ترتیب نشان دهنده تانسور تنش، در رابطه فوق

تانسور کرنش، جزء منحرفشده تانسور تنش مزدوج⁷ و تانسور انحنا⁸ (قسمت

متقارن گرادیان چرخش) میباشند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\sigma_{ii} = \lambda tr(\varepsilon_{ii})\delta_{ii} + 2u\varepsilon_{ii}$$
(4)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \lim_{n \to \infty} \left[\varepsilon_{ij} \right] \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[u_{i,i} + u_{j,i} \right] \end{aligned} \tag{5}$$

$$m_{ij} = \mathbf{2}l^2 \mu \chi_{ij} \tag{6}$$

$$\chi_{ii} = \frac{1}{2} \left[\theta_{i,i} + \theta_{i,i} \right] \tag{7}$$

 $\chi_{ij} = \frac{1}{2} \left[\theta_{ij} + \theta_{j,i} \right]$ (1) که در روابط فوق *۸*، *µ*، **()** و δ_{ij} به ترتیب ثابت اول لام⁹، مدول برشی، تریس ماتریس¹⁰ و دلتای کرونکر¹¹ میباشند. *I* پارامتر اندازه طول و خاصیتی از ماده میباشد که در مقایسه با ابعاد کوچک است و تأثیر آن زمانی اهمیت مییابد که ابعاد جسم در مقیاس میکرو و نانو باشد. u_i و $heta_i$ مؤلفههای بردار

جابجایی و چرخشی هستند که رابطه آنها بهصورت زیر است [24]:

$$\theta_i = \frac{1}{2} \operatorname{curl}(u_i) \tag{8}$$

مربع پارامتر اندازه طول که در رابطه (6) بیان شده، متناسب با نسبت مدول انحنا به مدول برشی است [25]، ازاینرو خصوصیتی است که اثر تنش مزدوج را اندازه گیری می کند [26]. پارامتر اندازه طول با استفاده از روشهای

Electroestatic Force Isotropic

Young Modulus

Cross Section Area

Cross Section Inertia Moment

⁶ Heaviside Function

Deviatoric Part of Couple Stress Tensor

⁸ Curvature Tensor

⁹ Lame's Constant Trace

¹¹ Kronocker Delta



Fig 1 schematic of a half-effect cantilever nanoswitch

22....

شکل 1 نمای شماتیک نانوتیر یکسر گیردار نیمهمتاثر

آزمایشگاهی همچون آزمایش پیچش و خمش به دست میآید [27].

3-2- انرژی کرنشی

انرژی کرنشی کل برای مدل تیر اویلر -برنولی بهصورت زیر است:

(9) لا Total = U_{Bending} + U_{stretching}
 (9) که Bending و U_{stretching} به ترتیب انرژیهای ذخیرهشده در تیر به U_{stretching} محوری و کرنش خمشی هستند. با توجه به سیستم مختصاتی منحل شکل 1 که محور x بر راستای الکترود متحرک پیش از تغییر شکل منطبق است و محور Z، راستای تقارن را نشان میدهد، مؤلفههای جابجایی بر اساس مدل تیر اویلر-برنولی به صورت زیر نشان داده میشود [28]:

$$u = -z\psi(x,t), v = 0, w = w(x,t)$$
(10)

$$\sum_{k=1}^{\infty} v e^{k} e^{k$$

$$\psi = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \tag{11}$$

با در نظر گرفتن جابجاییهای کوچک و با استفاده از روابط (5)، (10) و (11) برای تنش صفحهای (تیر کمپهنا) و کرنش صفحهای (تیر پهن)، مؤلفههای تانسور کرنش به ترتیب به صورت زیر هستند:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial u}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{yy} = vz \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{zz} = vz \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \mathbf{0}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{v}{1 - v} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = \mathbf{0}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \mathbf{0}$$
(12)

با استفاده از روابط (8)، (10) و (11) بردار چرخشی در سه راستای *y ،x* و z حاصل میشود.

$$\theta_{y} = -\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}$$

$$\theta_{x} = \theta_{z} = \mathbf{0}$$
(13)

$$\chi_{xy} = \chi_{yx} = -\frac{1}{2} \frac{\sigma''(\chi, t)}{\partial x^2}$$

$$\chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz} = \chi_{yz} = \chi_{zx} = \mathbf{0}$$
(14)

و با جایگذاری رابطه (12) در رابطه (4) مؤلفههای تنش بهصورت زیر محاسبه میشوند:

$$\sigma_{xx} = -Ez \frac{\sigma^{-w}}{\partial z^2}, \sigma_{xy} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \mathbf{0}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{-E}{(1-v^2)} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \sigma_{yy} = \frac{-E}{(1-v^2)} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \mathbf{0}$$

$$(15)$$

$$\sum_{x \to v} \psi_{xy} = \psi_{yz} = \sigma_{zx} = \mathbf{0}$$

$$(15)$$

$$\sum_{x \to v} \psi_{xy} = \psi_{xy} = \psi_{xy} = \psi_{xy} = \psi_{xy}$$

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)}$$
$$u = \frac{E}{2(1+v)}$$
(16)

برای تیرهای باریک با نسبت طول به عرض بزرگ، اثر پواسون کوچک است و می توان از آن صرفنظر کرد. همان گونه که در رابطه (15) نشان دادهشده، σ_{xx} برای هر دو حالت تنش صفحهای (تیر کم پهنا) و کرنش صفحهای (تیر پهن) به صورت زیر است:

$$\sigma_{xx} = -\tilde{E}\left(z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{17}$$

که $ar{E}$ به ترتیب برای تنش صفحهای و کرنش صفحهای نشاندهنده مدول الاسیسیته (E) و مدول صفحهای ((*V*² – ا)/2) میباشد. بهطور مشابه، با جایگذاری رابطه (14) در رابطه (6) رابطه زیر به دست میآید:

$$\begin{split} m_{xy} &= -\mu l^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ m_{xx} &= m_{yy} = m_{zz} = m_{yz} = m_{zx} = \mathbf{0} \tag{18} \\ \text{IN:} \quad \text{IV:} \quad \text{IN:} \quad \text{IN$$

$$U_{\text{Bending}} = \frac{1}{2} \int_0^L M_x \frac{\partial^2 w(\mathbf{x}, t)}{\partial x^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^L Y_{xy} \frac{\partial^2 w(\mathbf{x}, t)}{\partial x^2} dx$$
(19)

$$M_x = \int \sigma_{xx} z dA$$

$$Y_{xy} = \int m_{xy} dA$$
(20)

انرژی کرنش برای لایه سطحی را میتوان بهصورت زیر نوشت:
$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \oint_{\partial A} (\tau_{ij} \varepsilon_{ij}) dA$$
 (21)

علاوه بر این، رابطه خطی تکبعدی بین تنش سطحی
$$\sigma_s$$
 و کرنش
محوری xz بهصورت زیر دادهشده است:

¹ Poisson Ratio ² Resultant Moment

³ Couple Moment

$$T_{\rm K} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho \left(\frac{\partial w(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \right)^2 dA dx$$

$$= \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left(\frac{\partial w(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \right)^2 dx \qquad (31)$$

$$\sum h A = h = h = h$$

میباشند. کار مجازی ناشی از اثرات استهلاک به صورت زیر بیان می شود

$$:= c \int c W = \partial w(x,t) + c \int c dx = c \int c d$$

$$W_{d} = \int_{0}^{L} \int_{A}^{w} c_{d} \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} dw dx$$
(32)

$$\sum_{b} C_{d} = C_{d} C_{d}$$

2-6- معادله حاکم سیستم و بیبعدسازی حال برای به دست آوردن معادله حاکم سیستم، با به کار گیری اصل همیلتون توسعه دادهشده،

$$\delta \int_0^t (T_{\rm K} - W_{\rm d} - U_{\rm Total} + W_{\rm ext}) dt = \mathbf{0}$$
(33)

که δ نشانگر نماد تغییرات است. با استفاده از روابط (19)، (26)، (27)، (31)، (32) و (33)، معادله حاکم دینامیکی حرکت نانوتیر بهصورت زیر است:

$$\begin{aligned} (EI_{eff} + \mu Al^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ + c_d \frac{\partial w}{\partial t} - 2\tau_0 b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q_{ext} \end{aligned}$$
(34)

رابطه (34) نشان میدهد که صلبیت خمشی تیر شامل دو بخش است، بخش El_{eff} بهعنوان صلبیت خمشی تئوری کلاسیک و بخش µAl² که مربوط به تئوری تنش مزدوج اصلاحشده، میباشد.

پارامتر l در این قسمت، باعث در نظر گرفته شدن خصوصیات ساختار با ابعاد میکرو و نانو در مدل جدید میشود و توضیح اثر اندازه را ممکن می سازد. بدیهی است که اگر $\mathbf{0} = l$ باشد از اثر ابعاد میکرو/نانو صرفنظر شده و رابطه (34) تعریفشده برای مدل جدید به مدل کلاسیک تیر اویلر-برنولی تبدیل میشود [38]:

$$EI_{\rm eff} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_d \frac{\partial w}{\partial t} - 2\tau_0 b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q_{\rm ext}$$
(35)

$$\hat{c}_{\rm eff} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_d \frac{\partial w}{\partial t} - 2\tau_0 b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q_{\rm ext}$$

$$w(\mathbf{0}, t) = \frac{\partial w(\mathbf{0}, t)}{\partial x} = \mathbf{0}$$

$$EI_{\text{eff}} \frac{\partial^2 w(\mathbf{1}, t)}{\partial x^2} = \mathbf{0}$$

$$EI_{\text{eff}} \frac{\partial^3 w(\mathbf{1}, t)}{\partial x^3} - 2\tau_0 b \frac{\partial w}{\partial x} = \mathbf{0}$$

$$\sum EI_{\text{eff}} (= EI + E_{\text{s}} I_{\text{s}})$$
(36)
$$\sum EI_{\text{eff}} (= EI + E_{\text{s}} I_{\text{s}})$$

الاسيسيته سطح است [39].

به منظور ساده سازی محاسبات پارامتری، معادله حاکم و شرایط مرزی را می توان به حالت بی بعد تبدیل کرد. ایجاد پارامترهای بی بعد باعث ایجاد مفاهیم جدید و توضیح بهتر پدیده های فیزیکی می شود. از متغیرهای بی بعد $\frac{W}{r} = W = \frac{X}{r}$ و پارامترهای زیر جهت بی بعد سازی بهره برده می شود:

$$\beta = \frac{\varepsilon_0 b V^2 L^4}{2g_0^3 E l_{\text{eff}}}, \quad \gamma_{\text{fr}} = 0.65 \frac{g_0}{b}, \quad \eta = \frac{2\tau_0 b L^4}{E l_{\text{eff}}}$$

$$\gamma_{\text{ca}} = \frac{2\gamma_{\text{LA}} b L^4 cos \theta_c}{E l_{\text{eff}} g_0^2}, \quad T = t \sqrt{\frac{E l_{\text{eff}}}{\rho A L^4}}, \quad \hat{c} = \frac{c_d L^2}{\sqrt{E l_{\text{eff}}} (\rho A)},$$

$$H' = H(x/L) = H\left(\frac{x}{L} - \frac{D_2}{L}\right) - H\left(\frac{x}{L} - \mathbf{1} + \frac{D_2}{L}\right),$$

$$d_1 = \frac{D_1}{L}, \quad d_2 = \frac{D_2}{L}$$
(37)

که پارامترهای β ، $\gamma_{\rm fr}$ ، β ، β ، β ، β ، η ، δ ، d_2 ، d_1 ، H' ، $\gamma_{\rm ca}$ ، $\gamma_{\rm fr}$ ، β متناظر با پارامترهای بی بعد ولتاژ، میدان لبه، نیروی موئینگی، تابع هویساید بیعد، پارامتر بی بعد فاصله بین انتهای چپ الکترود زیرلایه و کلید، اثر اندازه، انرژی بی بعد فاصله بین انتهای راست الکترود زیرلایه و کلید، اثر اندازه، انرژی سطحی، زمان و استهلاک میباشند. همچنین پارامتر بی بعد فرکانس اصلی

 $\sigma_s = \tau_0 + E_s \varepsilon_x$

که $\tau_0 \, s \, c_{2} \, r_{0}$ تنش پسماند سطحی در راستای محور $x_{0} \, s \, z_{0}$ مدول یانگ سطح است. بنا بر معادله یانگ-لاپلاس، پرش تنش در عرض هر سطح وابسته به انحنای سطح میباشد و به صورت زیر نمایش داده می شود: ($\sigma_{1,2}^{+} - \sigma_{2,2}^{-})n_{1}n_{1} = \tau_{-n}^{2}\kappa_{n}e$ (23)

 $\langle \sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^- \rangle n_i n_j = \tau^s_{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}$ (23) که n_i نشاندهنده مؤلفههای بردار واحد عمود سطح است. ازاینرو، بار

عمودی معادل (
$$q(x)$$
 ناشی از تنش سطحی به صورت زیر است [30]:
 $q = H_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ (24)

H_s یک پارامتر ثابت است که با در نظر گرفتن تنش پسماند سطحی و مقطع عرضی نانوتیر اندازهگیری میشود و برای نانوتیر با مقطع مستطیلی برابر است با [30]:

$$H_s = \mathbf{2}\tau_0 b \tag{25}$$

با در نظر گرفتن روابط فوق و مؤلفههای سطحی که توسط تئوری پیوسته گرتین و مورداخ [32،31] پیشنهادشده بودند، انرژی کرنشی لایه سطحی با در نظر گرفتن تنش پسماند و الاسیسیته سطح به دست می آید.

$$U_{\text{Stretching}} = \frac{1}{2} \left[EI\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + 2\tau_0 b\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] dx \qquad (26)$$
$$I_s = \int z^2 dA \quad (26)$$

2-4- کار نیروهای خارجی

(22)

با در نظر گرفتن نیروهای خارجی در واحد طول تیر، کار انجامشده توسط نیروهای خارجی اعمالی (q**(x,t)** که با W_{ext} نشان داده میشود، بهصورت زیر است:

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_0^L q_{\text{ext}}(x, t) \delta w(x, t) dx$$
(27)

در این تحقیق نیروهای خارجی شامل نیروهای الکترواستاتیک و موئینگی میشوند. با در نظر گرفتن تیر نیمهمتاثر:

$$q_{\text{ext}} = H(\mathbf{x})(q_{\text{elec}} + q_{\text{capillary}})$$
(28)

با در نظر گرفتن ضریب اثر میدان لبه، نیروی الکترواستاتیک در واحد طول نانوتیر بهصورت زیر است [33]:

$$q_{\text{elec}} = \frac{\varepsilon_0 b V^2}{2(g_0 - w)} \left(1 + 0.65 \frac{(g_0 - w)}{b} \right)$$
(29)

که V ولتاژ خارجی $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ c}^2$ ضریب خلأ، V ولتاژ خارجی اعمالی، g_0 فاصله اولیه بین دو الکترود زیرلایه و متحرک و w انحراف تیر است.

تحت عمل نیروی مویینگی، انحرافهای میکرو و نانو تیر فاصله یرا تغییر میدهد که باعث میشود بزرگی نیروی مویینگی تغییر کند و این باعث انحراف بیشتر تیر میشود. این روند ادامه مییابد تا زمانی که تعادل بین تیر و نیروی مویینگی برقرار شود [34]. نیروی موئینگی اعمالی بر نانوتیر زاویهای برابر با σ با بردار واحد عمود بر سطح سیال دارد؛ بنابراین، با در نظر گرفتن تحقیق لگتنبرگ و همکاران [35]، نیروی موئینگی در واحد طول تیر به صورت زیر محاسبه می شود [36]:

$$q_{\text{capillary}} = \frac{2\gamma_{\text{LA}}b\cos\theta_c}{(g_0 - w)}$$
(30)

که $\gamma_{
m LA}$ تنش سطحی مایع-هوا و $heta_c$ زاویه تماس بین مایع و سطح جامد میباشد.

2-5- انرژی جنبشی و اتلاف استهلاکی

انرژی جنبشی نانوتیر به صورت زیر نوشته می شود [37]:

85

نانوتير arOmega بهصورت زير است [40]:

$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{\rho A L^4}{E I_{\text{eff}}}} \tag{38}$$

که ۵ فرکانس طبیعی سیستم میباشد. با استفاده از پارامترهای بیبعد رابطه (37) در رابطه (34)، معادله حاکم بیبعد نانوکلید یکسرگیردار نیمهمتاثر برای حالت دینامیکی بهصورت زیر درمیآید:

$$(1 + \delta) \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} + \hat{c} \frac{\partial W}{\partial T} - \eta \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = H' \left(\frac{\beta}{(1-W)^2} + \frac{\gamma_{\rm fr}\beta}{(1-W)} + \frac{\gamma_{\rm ca}}{(1-W)} \right)$$
(39)

در معادلات بالا، اندیس n برای نیروی واندروالس 3 و برای نیروی کاسیمیر 4 است بنابراین، شرایط مرزی بیبعد با جایگذاری پارامترهای بیبعد در رابطه (36) به دست میآید:

$$\mathcal{N}(\mathbf{0}, t) = \frac{\partial W(\mathbf{0}, t)}{\partial x} = \mathbf{0}$$

(1 + δ) $\frac{\partial^2 W(\mathbf{1}, t)}{\partial x^2} = \mathbf{0}$
(1 + δ) $\frac{\partial^3 W(\mathbf{1}, t)}{\partial x^3} - \eta \frac{\partial W(\mathbf{1}, t)}{\partial x} = \mathbf{0}$ (40)

بهمنظور به دست آوردن معادله حاکم برای حالت استاتیکی، عبارات وابسته به زمان حذف می شوند.

3- روش حل و اعتبار سنجی

1-3- روش حل

دسته معادلات دیفرانسیل جزئی، یعنی روابط (39) و (41) و شرایط مرزی متناظر یعنی رابطه (40) از طریق روش اجزا محدود حل شدهاند. بدین منظور معادلات یادشده در شکل ضعیف فرمول بندی و سپس با استفاده از روش گالرکین حل شدهاند. جزئیات روش حل در [41] ذکر شده و برای اختصار از تکرار آن در اینجا صرفنظر می گردد.

2-3- اعتبار سنجى

3-2-1- استاتیکی- تیر کامل

شکل 2 رابطه بین پارامتر ولتاژ بیبعد و انحراف نهایی بدون بعد بدون در نظر گرفتن نیروهای بینمولکولی و موئینگی و اثر اندازه را نشان میدهد. این شکل نشان میدهد که وجود اثر لبه بهطور محسوسی بر انحراف نهایی بدون بعد و ولتاژ پولین استاتیکی تیرک تأثیر دارد. همچنین در این شکل مشاهده میشود که نتایج بهدستآمده در پژوهش حاضر تطابق خوبی با نتایج رمضانی و همکاران [6] و مقیمیزند و همکاران [19] دارد.

3-2-2- استاتیکی-تیر نیمهمتاثر

در شکل 3 نتایج بهدست آمده برای تیر یکسر گیردار نیمهمتاثر با نتایج پژوهش وانگ و همکاران [22] مقایسه شده است. در این شکل مشاهده می شود، در نبود نیروی موئینگی، افزایش ولتاژ باعث کاهش فاصله بین دو الکترود و درنهایت پدیده پولین می شود. همچنین تطابق خوبی بین نتایج بهدست آمده در پژوهش حاضر و نتایج گزارش شده در [22] وجود دارد.

3-2-3- ديناميكي-تير كامل

در شکل 4 نتایج بهدست آمده با نتایج حل تحلیلی رهایی فرد و همکاران [20] مقایسه شده است. در [20] از روش گالرکین برای محاسبه ناپایداری نانوتیرک استفاده شده است. در این شکل انحراف بی بعد دینامیکی نانوتیر



Fig 2 Effect of fringing field parameter on dimensionless pull-in Voltage and deflection ignoring Capillary force and size effect $(\delta = \mathbf{0}, \eta = \mathbf{0}, \gamma_{ca} = \mathbf{0}, d_1 = d_2 = \mathbf{0})$

شکل 2 تأثیر اثر پارامتر میدان لبه بر پارامتر بدون بعد ولتاژ و انحراف نهایی نانوتیر یکسرگیردار و بدون در نظر گرفتن نیروی موئینگی و اثر اندازه (δ = 0,η = 0,γ_{ca} = 0,d₁ = d₂ = 0)

برای ولتاژها و ضریب استهلاک متفاوت نسبت به زمان بهدست آمده است. نسبتهای $b/g_0 = 5$ و h/l = 3 فرض شدهاند. همان طور که مشاهده می شود، نتایج تطابق خوبی در مقادیر کم ولتاژهای اعمالی دارند.

زمانی که تیر دچار انحراف زیادی می شود، نیروی الکترواستاتیک در بسط تیلور استفاده شده در روش تحلیلی رهایی فرد و همکاران [20] ناچیز می شود؛ بنابراین، تقریب استفاده شده در مطالعه [20] می تواند دلیل اختلاف اندک میان نتایج حاضر و نتایج مرجع [20] با شد.

شكل 5 انحراف نهايى بىبعد نوک تيرک را نسبت به ولتاژ اعمالى براى h/l = 5 و $b/g_0 = 5$ ارزيابى مىكند. نتايج بهدستآمده با نتايج تحليلى ديناميكى رهايىفرد و همكاران [20] و نتايج [10] مقايسه شدهاند.



Fig 3 Relation Between dimensionless pull-in voltage and deflection parameters for a cantilever

 $(\delta = 0, \eta = 0, \gamma_{ca} = 0, d_1 = 0.3, d_2 = 0.3)$ شکل 3 رابطه بین پارامتر ولتاژ و انحراف نهایی بی بعد تیر یکسرگیردار $(\delta = 0, \eta = 0, \gamma_{ca} = 0, d_1 = 0.3, d_2 = 0.3)$



Fig 4 Relation between dimensionless pull-in voltage and deflection parameters for a cantilever ($\delta = 0, \eta = 0, \gamma_{ca} = 0, d_1 = d_2 = 0$) شکل 4 رابطه بین پارامتر ولتاژ نهایی بیبعد تیر یکسرگیردار و زمان برای ولتاژهای اعمالی و ضرایب استهلاک متفاوت

 $(\delta = 0, \eta = 0, \gamma_{ca} = 0, d_1 = d_2 = 0)$



Fig 5 Relation Between dimensionless pull-in voltage and deflection parameters for a cantilever

 $(\delta = 0, \eta = 0, \gamma_{ca} = 0, h/l = 5, b/g_0 = 5, d_1 = d_2 = 0)$ شکل 5 رابطه بین پارامتر ولتاژ و انحراف نهایی بیبعد تیر یکسرگیردار $(\delta = 0, \eta = 0, \gamma_{ca} = 0, h/l = 5, b/g_0 = 5, d_1 = d_2 = 0)$

همان طور که مشاهده می شود نتایج پژوهش حاضر سازگاری مناسبی با نتایج پژوهش های پیشین دارند. همان طور که ذکر شد اختلاف ناچیز بین نتایج [20] و تحقیق حاضر به علت استفاده از تقریب بسط تیلور در محاسبه نیروی الکترواستاتیک در مقاله مرجع است، زیرا که به طور معمول در حل، تمامی عبارات سری تیلور در نظر گرفته نشده و این باعث به وجود آمدن خطایی اندک در جواب نهایی می شود. بنابراین روش استفاده حاضر از دقت بالایی برخوردار می باشد.

4- تحليل ناپايدارى

بهمنظور بررسی ناپایداری نانومحرک، رابطه (34) با روش اجزا محدود حلشده و اثرات پارامترهای مختلف نسبت به یکدیگر بررسی می شود. برای

مقادیر متفاوت از پارامترهای β ، β و γ_{ca} و γ_{fc} انحراف نهایی پولین دینامیکی نانوتیر با حل رابطه (39) و برای پولین استاتیکی با حل رابطه (41) و در نظر گرفتن $\infty \leftarrow du$ (1)/d $\beta \rightarrow \infty$ به دست میآیند. ابعاد و مشخصات فیزیکی نانوکلید یکسر گیردار که از جنس سیلیکون میباشد، در جدول 1 ارائهشده است.

در مدل تیر مدنظر در این پژوهش تأثیر پارامترهای بیبعد میدان اثر لبه، اثر اندازه، موقعیت و طول الکترود زیرلایه، نیروهای الکترواستاتیک و مویینگی بر ناپایداری نانوکلید موردمطالعه قرار می گیرد.

4-1- اثر ميدان لبه

شکل 6 تأثیر اثر میدان لبه بر پارامترهای بی بعد ولتاژ و نیروی مویینگی نهایی برای حالت دینامیکی را در غیاب اثر اندازه ($\delta = 0$) نشان می دهند. از شکل 6 نتیجه می شود که در حالت دینامیکی میکرو/نانوکلیدها در مقادیر یکسان نیروی مویینگی و اثر میدان لبه در ولتاژهای کمتری به ناپایداری می سند و با افزایش پارامتر نیروی مویینگی، نسبت $\beta_{\rm PI}$ استاتیکی به $\beta_{\rm PID}$ دینامیکی افزایش می یابد.



Fig 6 Effect of fringing field effect on dimensionless pull-in voltage and capillary force parameters in static and dynamic modes ($\delta = 0, \eta = 0$): (a) $d_1 = d_2 = 0$, (b) $d_1 = 0, d_2 = 0.2$ شکل 6 تأثیر اثر میدان لبه بر پارامترهای بی بعد ولتاژ و مویینگی نهایی در دو حالت استاتیکی و دینامیکی ($\eta = 0, \eta = 0$): ($\delta = 0, \eta = 0$) $d_1 = 0, d_2 = 0.2$ (b)

جدول 1 ابعاد و مشخصات فیزیکی نانو کلید سیلیکونی **Table 1** Dimensions and physical properties of silicon nano-switch

F F F F F F F F F F F F F F F F F F F		
پارامتر	مقدار	
طول (1)	350 (μm)	
فاصله اوليه دو الكترود (g_0)	3 (µm)	
ضخامت(h)	1 (μm)	
عرض الكترود (b)	50 (μm)	
مدول یانگ (E)	169 (GPa)	
نسبت پواسون(٧)	0.33	

همچنین در نانوکلید یکسر گیردار با کوتاه شدن طول الکترود زیرلایه از سمتی که سر آزاد تیر قرار دارد (غیر صفر بودن d_2 و یا زیادتر شدن مقدار آن) مقدار نهایی پارامترهای بیبعد ولتاژ و مویینگی افزایش مییابد. بنا بر شکل 6، افزایش پارامتر اثر میدان لبه باعث میشود تا پارامتر ولتاژ نهایی کاهش یابد. در واقع با افزایش این پارامتر یک نیروی خارجی اضافه به کلید وارد میشود و مقدار نیروی لازم برای رسیدن به ناپایداری را کاهش میدهد.



Fig 7 Variation of pull-in voltage parameter against pull-in capillary force parameter for different values of size effect parameter $(y_{\rm fr} = 0, \eta = 0)$: (a) $d_1 = d_2 = 0$, (b) $d_1 = 0, d_2 = 0.2$ $(m \sim 10^{-1} {\rm gm})$; (a) $(m \sim 10^{-1} {\rm gm})$, (b) $(m \sim 10^{-1} {\rm gm})$, (c) $(m \sim 10^{-1} {\rm gm$

، d_1 = d_2 = **0** (a) :($\gamma_{\rm fr}$ = **0**, η = **0**) متفاوت پارامتر اثر اندازه d_1 = **0**, d_2 = **0.2** (b)

از دیدگاه دیگر فاصلهی بین دو الکترود و پهنتر شدن تیر باعث کاهش نسبت g₀/b و کاهش اثر میدان لبه میشود و بدین سبب پارامتر ولتاژ نهایی کلید افزایش مییابد.

4-2- اثر اندازه

شکل 7 تأثیر اثر اندازه بر پارامترهای بیبعد ولتاژ و نیروی مویینگی نهایی برای حالت دینامیکی را در غیاب نیروهای بینمولکولی نشان میدهد.

در شکل 7 مشاهده می شود که برای میکروتیر یکسرگیردار با افزایش اثر اندازه، مقادیر نهایی پارامترهای ولتاژ و مویینگی افزایش می یابد و این اثر در صورت کوتاه شدن الکترود زیرلایه نیز باقی خواهد ماند. با مقایسه شکلهای 7a و 7b می توان دریافت که در میکروکلیدهای یکسر گیردار تأثیر پارامتر اندازه بر پارامتر ولتاژ نهایی برای کلید با الکترود زیرلایه کوتاه بیشتر از کلید با الکترود زیرلایه با طول کامل می باشد.از شکلهای 7 می توان نتیجه گرفت که در صورت افزایش پارامتر اثر اندازه، به نیروی بیشتری جهت انحراف نانوتیر نیاز است، لذا افزایش آن سختی نانوکلید را افزایش می دهد.



Fig 8 Variation of pull-in deflection during time for different values of: (a) Dimensionless Voltage parameter ,(b) Dimensionless Capillary force parameter ($\gamma_{\rm fr} = 0, \delta = 0, d_1 = 0.2, d_2 = 0.2$)

شکل 8 تغییرات پارامتر انحراف حداکثر و نهایی تیر در طی زمان برای مقادیر متفاوت پارامترهای بیبعد: (a) ولتاژ نهایی (نیروی الکترواستاتیک)، (b) نیروی مویینگی (y_{fr} = 0, δ = 0, d₁ = 0.2, d₂ = 0.2)

بهعبارتدیگر نیروی جاذبهای که از طرف نیروهای الکترواستاتیک و مویینگی باید به نانوتیر وارد شود تا تیر حرکت کند افزایش یافتهاست. این بدین معنی است که تئوری تنش مزدوج اصلاحشده، میکرو/نانوتیر را سختتر از تئوری کلاسیک ارزیابی میکند. لذا در نظر گرفتن پارامتر اثر اندازه در طراحی و تحلیل میکرو/نانوکلیدها بسیار حائز اهمیت است و همچنین این نتیجه، لزوم استفاده از تئوریهای غیرکلاسیک مانند تئوری تنش مزدوج اصلاحشده در بررسی دقیقتر پارامترهای نانوکلیدهای نیمهمتاثر را نشان میدهد.

4-3- اثر نیروی الکترواستاتیک و مویینگی

در شکلهای 8a و 8b به ترتیب ناپایداری دینامیکی نانوتیر یکسرگیردار نیمهمتاثر در صورت وجود تحریک ناشی از نیروهای الکترواستاتیک و موئینگی بررسیشده است.

در هر شکل اثرات تنها یک نیرو بررسی شده و از اثرات دیگر نیروها صرفنظر شده است. شکلهای مذکور انحراف نهایی تیر در طی زمان برای پارامترهای بی بعد و متفاوت نیروهای الکترواستاتیک و مویینگی را نشان می دهند. با توجه به شکلهای 8 زمانی که نیروها بین دو تیر از مقدار پولین دینامیکی بیشتر شود، روند خصوصیت پاسخ تیر به این نیروها در طی زمان تغییر می کند. این نمودارها نشان می دهند که دامنه ار تعاشات با افزایش نیروها، بیشتر می شود. در نتیجه ی بیشتر شدن هر کدام از پارامترها از مقدار پولین دینامیکی آنها، معادله حرکت تیر پایداری خود را از دست می دهد و تغییری جزئی در مقدار نیروها باعث این ناپایداری مود. قابل ذکر است که پیش از رسیدن به مقادیر پولین پارامترها، تیر رفتار حرکتی متناوبی دارد و می کند. با توجه به شکلهای 8، در صورت تحریک میکرو/نانوتیر یکسر گیردار نیمهمتاثر مقادیر پولین بارامترهای بی بعد نیروهای الکترواستاتیک و می کند. با توجه به شکلهای 8، در صورت تحریک میکرو/نانوتیر یکسر گیردار نیمهمتاثر مقادیر پولین بارامترهای بی بعد نیروهای الکترواستاتیک و

4-4- اثر سطحی

شكل 9 اثر تغيير پارامتر بىبعد اثر تنش سطحى بر پارامتر بىبعد ولتاژ پولين



Fig 9 Variation of pull-in Voltage against surface effect parameter for static and dynamic modes ($\gamma_{\rm fr} = 0, \delta = 0, d_1 = 0.2, d_2 = 0.2$) $m \geq 0, \delta = 0, d_1 = 0.2, d_2 = 0.2$) $m \geq 0, \delta = 0, d_1 = 0.2, d_2 = 0.2$) $(\gamma_{\rm fr} = 0, \delta = 0, d_1 = 0.2, d_2 = 0.2)$

را در غیاب نیروهای بینمولکولی و نیروی مویینگی را برای دو حالت استاتیکی و دینامیکی نشان میدهد.

همانطور که مشاهده میشود افزایش در مقدار تنش سطحی منجر به افزایش مقادیر ولتاژ پولین (پارامتر بیبعد نیروی الکترواستاتیک) در هر دو حالت استاتیکی و دینامیکی میشود. در مقادیر برابر تنش سطحی در حالت استاتیکی نسبت دینامیکی، نیروی بیشتری جهت رسیدن به پولین نیاز است. علاوه براین، با افزایش تنش سطحی، نسبت پولین استاتیکی به پولین دینامیکی افزایش میباید.

4-5- اثر كوتاه شدن الكترود زيرلايه

در شکل 10 تغییرات پارامتر بی بعد فرکانس اصلی نانوتیر نسبت به پارامتر بی بعد ولتاژ، برای دو نمونه تیر با الکترود زیرلایه با طول کامل $(d_1 = d_2 = 0, d_2 = 0.2)$ و نیمهمتاثر ($d_1 = 0, d_2 = 0.2$) نشان داده شده است.

همان گونه که در شکل 10 دیده می شود، با افزایش ولتاژ میان دو الکترود، فرکانس اصلی نانوتیر به طور مداوم کاهش و نرخ کاهش تا رسیدن به ولتاژ پولین افزایش می یابد. همچنین با افزایش مقدار پارامتر 2_b و نیمه متاثر شدن نانوتیر، برای مقادیر یکسان از پارامتر بی بعد ولتاژ، فرکانس اصلی افزایش می یابد. علاوه بر این از شکل 10 می توان نتیجه گرفت که با ناپایدار شدن نانوتیر فرکانس اصلی نانوتیر نیمه متاثر بیشتر از نانوتیر با طول الکترود زیرلایه کامل می شود.

5-جمع بندی و نتیجه گیری

در این پژوهش از تئوری تنش مزدوج اصلاحشده بهمنظور به دست آوردن مدلی جامع برای بررسی ناپایداریهای استاتیکی و دینامیکی پولین میکرو/نانوکلیدهای یکسرگیردار، استفاده شده است. در این مدل اثرات نیروهای الکترواستاتیک، موئینگی، اثر تنش سطحی، ضریب استهلاک، اثر میدان لبه، اثر اندازه و مکان و طول الکترود زیرلایه در نظر گرفته شده اند و نتایج بر اساس رفتار آنها نسبت به یکدیگر به دست آمده اند. برای حل معادلات از روش حل عددی اجزا محدود استفاده گردید. نتایج مهم پژوهش



Fig 10 Variation of fundamental frequency against Dimensionless voltage parameter for different values of d_2 and $(\gamma_{\rm fr} = 0, \delta = 0.5, \eta = 0, d_1 = 0)$

شکل 10 تغییرات فرکانس اصلی نانوتیر نسبت به پارامتر بیبعد ولتاژ برای مقادیر متفاوت d_2 و $d_1 = 0, \delta = 0.5, \eta = 0, d_1 = 0$

حاضر را می توان به صورت زیر خلاصه نمود:

- افزایش اثر میدان لبه باعث کاهش ولتاژ پولین $eta_{
 m PI}$ می شود. لذا برای مقادیر بزرگ اثر میدان لبه، میبایست این اثر در روابط در نظر گرفته شود. تأثیر تغییر اندازه پارامتر میدان لبه بر نرخ تغییر پارامترهای $eta_{
 m PI}$ و $\gamma_{
 m ca_PI}$ برای نانوتیر نيمهمتاثر بيشتر از نانوتير با الكترود با طول كامل است.
- در حالت دینامیکی، میکرو/نانوکلیدها در مقادیر یکسان نیروی مویینگی و اثر میدان لبه در ولتاژهای کمتری نسبت به حالت استاتیکی به ناپایداری میرسند و با افزایش پارامتر نيروى مويينگى، نسبت ولتاژ پولين استاتيكى $eta_{
 m PI}$ به ولتاژ پولین دینامیکی $eta_{ ext{PID}}$ افزایش مییابد.
- با کوتاه شدن طول الکترود زیرلایه در میکرو/نانوکلید یکسر گیردار از سمتی که سر آزاد تیر قرار دارد، مقدار نهایی پارامترهای بیبعد ولتاژ پولین و اثر مویینگی افزایش مے یابند.
- برای نانوتیر یکسرگیردار، با افزایش اثر اندازه، مقادیر نهایی پارامترهای ولتاژ و مویینگی افزایش مییابد و این مساله برای نانوتیرهای نیمهمتاثر نیز صادق است.
- مقدار نیروی الکترواستاتیک و مویینگی به پارامتر اثر اندازه وابسته است و با افزایش پارامتر اثر اندازه مقادیر نیروهای الکترواستاتیک و مویینگی بحرانی افزایش می یابد. همچنین در نانوتیرهای نیمهمتاثر، تأثیر تغییر مقدار پارامتر اثر اندازه بر پارامتر ولتاژ پولین، بیشتر از نانوتیرها با الکترود زیرلایه كامل مىباشد.
- تئوری تنش مزدوج اصلاحشده، میکرو/نانوتیر را سختتر از تئوری کلاسیک ارزیابی میکند. لذا در صورت افزایش پارامتر اثر اندازه، به نیروی بیشتری جهت انحراف تیر نیاز است و سختی کلید را افزایش میدهد.
- در حالت دینامیکی پیش از رسیدن تیرک به وضعیت پولین، تیر رفتار حرکتی متناوبی دارد. دامنه ارتعاشات تیر با افزایش نيروهاى بين دو الكترود تا پيش از پديده پولين، بيشتر می شود. در صورت بیشتر شدن نیروهای بین دو الکترود از مقدار پولین دینامیکی، معادله حرکت تیر پایداری خود را از دست میدهد و سیستم ازنظر دینامیکی ناپایدار میشود.
- افزایش در مقدار تنش سطحی منجر به افزایش مقادیر ولتاژ پولین (پارامتر بیبعد نیروی الکترواستاتیک) در هر دو حالت استاتیکی و دینامیکی میشود.
- در مقادیر برابر تنش سطحی در حالت دینامیکی نسبت به حالت استاتیکی، نیروی بیشتری جهت رسیدن به پولین نیاز است. علاوه براین، با افزایش تنش سطحی، نسبت پولین استاتیکی به پولین دینامیکی افزایش میباید.
- با افزایش ولتاژ میان دو الکترود، فرکانس اصلی نانوتیر بهطور مداوم کاهش و نرخ کاهش تا رسیدن به ولتاژ پولین افزایش مییابد. همچنین با افزایش مقدار پارامتر d_2 و نیمهمتاثر شدن نانوتیر، برای مقادیر یکسان از پارامتر بیبعد ولتاژ، فرکانس اصلی افزایش مییابد. با ناپایدار شدن نانوتیر

فركانس اصلى نانوتير نيمهمتاثر بيشتر از نانوتير با طول الكترود زيرلايه كامل مي شود.

6- فهرست علائم		
سطح مقطع تير ((µm) ²)	A	
پهنای تیر (µ m)²)	b	
سرعت نور (ms ⁻¹)	C	
ضريب استهلاک	C _d	
پارامتر بیبعد استهلاک	ĉ	
فاصله بین انتهای الکترود زیرلایه و کلید (m)	$D_1 D_2$	
فاصله بیبعد بین انتهای الکترود زیرلایه و کلید	$d_1 d_2$	
مدول الاسيسيته يانگ (GPa)	Ε	
فاصله اوليه بين الكترود و پايه (2(µ m))	g_0	
تابع پلەاى ھويسايد	H (x)	
تابع بیبعد پلهای هویساید	H	
ضخامت تیر (2 (µm))	h	
ممان اینرسی سطح (* m)	1	
طول تير (((µ m))	L	
پارامتر مفیاس طول ایکار	l M	
ممان دل	<i>M</i> _{<i>x</i>}	
جر متحرف سده بانسور نیس مردوج	m _{ij}	
مولفه بردار واحد عمود بر سطح نه مه ما ده د ت (Nm ⁻¹)		
اليروي وارده بر نير 🗸 🗤 🗤	Ч Т	
پرامبر ب <u>ی</u> بت ریس تربیب ماتریب	tr(.)	
لريس به ريس	11	
ولتار اعمالی بین بابه و الکترود	v	
کار نیروها	W	
کار ناشی از استهلاک	Wd	
انحراف تير (2(µ m))	W	
ممان مزدوج	Y_{xy}	
	۔ علائم يونانى	
مدول برشی	μ	
چگالی (kgm ⁻³)	ρ	
ثابت اول لام	λ	
تانسور تنش	σ_{ij}	
تنش سطحی	σ_{s}	
تانسور کرنش	ε_{ij}	
کرنش محوری	\mathcal{E}_{χ}	
زاویه چرخش حول محور <i>y</i>	$\psi(x,t)$	
تانسور انحنا	Xij	
تابع دلتای کرونکر	δ_{ij}	
اثر اندازه	δ	
ضريب خلأ (c ² N ⁻¹ m ⁻²)	\mathcal{E}_0	

ضريب پواسون تنش سطحی مایع-هوا υ

 $\gamma_{\rm LA}$

Vol. 35, No. 2, pp. 941-951, 2011.

- [18] S. Chaterjee, G. A. Pohit, large deflection model for the pull-in analysis of electrostatically actuated microcantilever beams, Journal of Sound Viberations, Vol. 322, No. 4-5, pp. 969-986, 2009.
- [19] M. Moghimi Zand, M. T. Ahmadian, B. Rashidian, Dynamic pull-in instability of electrostatically actuated beams incorporating casimir and van der waals force, Journal of Mechanical Engineering Science: Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Vol. 224, No. 9, pp. 2037-2047, 2010.
- [20] M. Rahaeifard, M. T. Ahmadian, K. Firoozbakhsh, Size-dependent dynamic behavior of microcantilevers under suddenly applied DC voltage, Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 228, No. 5, pp. 1-11, 2013.
- [21] M. Moghimi Zand, Analytic study of nonlinear dynamics in electrostaticallyactuated microbeams considering Timoshenko theory, ISME: Annual International Mechanical Engineering Conference, Tehran, Iran, May 12-14, فارسی in Persian (فارسی)
- [22] K.F. Wang, B. L. Wang, A general model for nano-cantilever switches with consideration of surface effect and nonlinear curvature, Pysica E, Vol. 66, No. 29, pp. 197-208, 2015.
- [23] Y. Hayamizu, t. Yamada, K. Mizuno, R. C. Davis, D. N. Futaba, M. Yumura, K. Hata, Integrated three-dimensional microelectromechanical devices from processable carbon nanotube wafers, nature nanotechnology, Vol. 3, No. 5, pp. 289-299, 2008.
- [24] F. Yang, A.C.M. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, International Journal of Solids and Structures, Vol. 39, No. 10, pp. 2731–2743, 2009.
- [25] W.D. Nix, H. Gao, Indentation size effects in crystalline materials: a low for strain gradient plasticity, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 46, No. 3, pp. 411-425, 1998.
- [26] R. D. Mindlin, H. F. Tiersten, Effects of couple-stresses in linear elasticity, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 11, No. 1, pp. 415-448, 1962.
- [27] M. Asghari, M. Rahaeifard, M.H. Kahrobaiyan, M. T. Ahmadian, The modified couple stress functionally graded Timoshenko beam formulation, Materials & Design, Vol. 32, No. 3, pp. 1435-1443, 2011.
- [28] S. K. Park, X. L. Gao, Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory, Journal of Micromechanics and Microengineering, Vol. 16, No. 11, pp. 2355-2359, 2006.
- [29] S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, Theory of Elasticity, Third edition, pp. 409-413, McGraw-Hill, New York, 1970.
- [30] J. He, C. M. Lilley, Surface effects on the persistence length of nanowires and nanotubes, Nano Letters, Vol. 8, No. 5, pp. 1798-1803, 2008.
- [31]M. E. Gurtin, A. I. Murdoch, A continuum theory of elastic material surfaces, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 57, No. 4, pp. 291-323, 1975
- [32] M. E. Gurtin, A. Murdoch, Surface stress in solids, International Journal of Solids and Structures, Vol. 14, No. 6, pp. 431-440, 1987.
- [33] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, Third edition, pp. 25-42, Wiley, New York, 1998.
- [34] A. S. Rollier, B. Legrand, D. Collard, L. Buchaillot, The stability and pull-in voltage of electrostatic parallel-plate actuators in liquid solutions, Journal of Micromechanics and Microengineering, Vol. 16, No. 4, pp. 794-801, 2006.
- [35] R. Legtenberg, H. A. C. Tilmans, J. Elders, M. Elwenspoek, Stiction of surface micromachined structures after rinsing and drying : model and investigation of adhesion mechanisms, Sensors Actuators Physics, Vol. 43, No. 1-3, pp. 230-238, 1994.
- [36] E. Yazdanpanahi, A. R. Noghrehabadi, M. Ghalambaz, Balance dielectric layer for micro electrostatic switches in the presence of capillary effect, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 74, No. 7, pp. 83-90, 2013.
- [37] M. Keivani, M. Mardaneh, A. Koochi, M. Rezaei, M. Abadyan, On the dynamic instability of nano wire-fabricated electromechanical Actuators in the Casimir regime : Coupled effects of surface energy and size dependency, Physica E, Vol. 76, No. 8, pp. 60-69, 2016.
- [38] S.K. Park, X.L. Gao, Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory, Journal of Micromechanics and Microengineering, Vol. 16, No. 11, pp. 2355-2359, 2006.
- [39] A. Farrokhabadi, A. Mohebshahedin, R. Rach, J. S. Duan, An improved model for the cantilever NEMS actuator including the surface energy, fringing field and Casimir effects, Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, Vol. 75, No. 30, pp. 202-209, 2016. [40] M. Rahaeifard, M. T. Ahmadian, K. Firoozbakhsh, Vibration analysis of
- electrostatically actuated nonlinear microbridges based on the modified couple stress theory, Applied Mathematical Modelling, Vol. 39, No. 21, pp. 6694-6704.
- [41] J. N. Reddy, An Introduction to the Finite Element Method, Third edition, pp. 233-248, McGraw-Hill, New York, 1993.

$ heta_c$	زاویه تماس بین مایع و سطح جامد
$\gamma_{ m fr}$	پارامتر بیبعد میدان لبه
γ_{ca}	پارامتر بیبعد نیروی مویینگی
η	پارامتر بیبعد انرژی سطحی
Ω	پارامتر بیبعد فرکانس اصلی
ω	فركانس طبيعي نانوتير
زيرنويسها	
Bending	خمشى
capillary	مويينگى
Elec	الكترواستاتيك
Ext	خارجى
Stretching	كششى
Total	كل

7- مراجع

- [1] H. Xie, J. Vitard, S. Haliyo, S. Régnier, High-sensitivity mass and position detection of micro-objects adhered to microcantilevers, Journal of Micro-Nano Mechatronics, Vol. 4, No. 1-2, pp. 17-25, 2008.
- G. M. Rebeiz, J. B. Muldavin, RF MEMS switches and switch circuits, IEEE
- Microwave Magazine, Vol. 2, No. 4, pp. 59–71, 2001. S. Akita, Y. Nakayama, S. Mizooka, Y. Takano, T. Okawa, Y. Miyatake, S. Yamanaka, M. Tsuji, T. Nosaka, Nanotweezers consisting of carbon [3] nanotubes operating in an atomic force microscope, Applied Physics Letters, Vol. 79, No. 11, pp. 1691-1693, 2001.
- W. P. Taylor, M. G. Allen, C. R. Dauwalter, Fully integrated magnetically actuated micromachined relays, Journal of Microelectromechanical Systems, Vol. 7, No. 2, pp. 181-191, 1998.
- R., Batra, M. Porfiri, D. Spinello, Vibrations of narrow microbeams predeformed by an electric field, Journal of Sound and Vibration, Vol. 309, No. 98, pp. 600-612, 2008
- A. Ramezani, A. Alasty, J. Akbari, Analytical investigation and numerical verification of Casimir effect on electrostatic nano-cantilevers, Microsystem Technologies, Vol. 14, No. 2, pp. 145-157, 2008.
- M.T. Ahmadian, M. Mojahedi, A. Barari, R. Firoozbakhsh, Characterization of static behavior of a nonlinear doubly clamped microbeam under electrostatic actuation and detection, ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering, San Diego, CA, USA, November 15-21, 2013.
- U. B. C. O. Ejike The plane circular crack problem in the linearized couplestress theory, International Journal of Engineering Science, Vol. 7, No. 9, pp. 947-961, 1969
- F. Yang, A. C. M. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, International Journal of Solids and Structures, Vol. 39, No. 10, pp. 2731–2743, 2002.
 [10] M. Rahaeifard, M. H. Kahrobaiyan, M. Asghari, Static pull-in analysis of
- microcantilevers based on the modified couple stress theory, Sensors and Actuators A, Vol. 171, No. 2, pp. 370-374, 2011.
- [11] Y. Tadi Beni, I. Karimipour, Static pull-in instability analysis of beam type NEMS under molecular force using strain gradient theory, Modares Mechanical Engineering, Vol. 12, No. 3, pp. 37-49, 2012. (in Persian فارسى)
- [12] H. M. Ouakad, M. I. Younis, Modeling and simulations of collapse instabilities of microbeams due to capillary forces, Mathematical Problems
- [13] C. H. Mastrangelo, C. H. Hsu, Mechanical stability and adhesion of microstructures under capillary forces: I. Basic theory, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 2, No. 1, pp. 33–44. 1993.
- [14]M. E. Gurtin, A. I. Murdoch, A continuum theory of elastic material surfaces, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 57, No. 4, pp. 291-323,
- [15] J. He, C. M. Lilley, Surface effect on the elastic behavior of static bending nanowires, Nano Letters, Vol. 8, No. 7, pp. 1798-1802, 2008.
- [16] K.F. Wang, B.L. Wang, Influence of surface energy on the non-linear pull-in instability of nano-switches, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 59, No. 9, pp. 69-75, 2014.
- [17] Y. Fu, J. Zhang, Size-dependent pull-in phenomena in electrically actuated nano beams incorporating surface energies, Applied Mathematical Modelling,