مجله مهندسی مکانیک مدرس، اسفند 1393، دوره 14، شماره 12، ص‌ص 122-132

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل ارتعاش آزاد پوستهٔ مخروطی ناقص تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی مستقر بر بستر الاستیک

سعید جعفری مهرآبادی[1*]، میلاد جلیلیان راد[2]، احسان ضرونی[2]

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، اراک

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، اراک

* اراک، صندوق پستی 567/38135، s-jafari@iau-arak.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 16 آذر 1392
پذیرش: 25 بهمن 1392
ارائه در سایت: 12 مهر 1393

کلید واژگان:
ارتعاش آزاد
پوستهٔ مخروطی
نانولوله‌های کربنی تک جداره
روش ریتز
بستر الاستیک

چکیده

در این تحقیق رفتار ارتعاشی پوستهٔ مخروطی ناقص تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک جداره با توزیع یکنواخت (UD) و مستقر بر بستر الاستیک (پسترناک)، براساس تئوری مرتبه اول تغییر برشی مورد بررسی قرار گرفته است. به‌منظور تاثیر خواص مکانیکی نانولوله‌ها بر سازهٔ مذکور از قانون مخلوط‌ها استفاده شده است. برای فرمول‌بندی مسئله در ابتدا براساس میدان تغییر مکان در تئوری مرتبه اول و با استفاده از روابط کرنش تغییر مکان، مولفه های کرنش در مختصات منحنی‌الخط نوشته شده و پس از ساده سازی در مختصات مخروطی و با استفاده از قوانین هوک تنش‌ها محاسبه شده‌اند. در مرحلهٔ بعد با تشکیل تابع انرژی پتانسیل کل سیستم و با درنظر گرفتن توابع مناسب برای تغییر مکان-ها با توجه به شرایط مرزی پوسته، با اعمال روش ریتز، فرکانس‌های پوستهٔ مخروطی تقویت شده به‌دست آمده‌اند. در پایان اثر کسر حجمی نانولوله‌های کربنی، نسبت ضخامت به شعاع مخروط، ثابت‌های بستر الاستیک و پارامترهای دیگر بر روی فرکانس‌های طبیعی سازه مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. همچنین صحت نتایج با دیگر مقالات موجود در این زمینه مقایسه و از نحوهٔ حل مسئله اطمینان کافی حاصل شده است.

Free vibration analysis of nanotube-reinforced composite truncated conical shell resting on elastic foundation

Saeed Jafari Mehrabadi[1*], Milad Jalilian Rad[2], Ehsan Zarouni[2]

1- Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University Arak Branch, Arak, Iran.
2- Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University Arak Branch, Arak, Iran.
*P. O. B. 567/38135 Arak, Iran, s-jafari@iau-arak.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 07 December 2013
Accepted 14 February 2014
Available Online 04 October 2014

Keywords:
Free Vibration
Conical Shell
Single Wall Carbon Nanotube
Ritz Method
Elastic Foundation

ABSTRACT

In this paper, Free Vibration analysis of truncated conical shell Reinforced with single-walled carbon nanotubes for Uniformly Distribution (UD), resting on Pasternak elastic foundation, based on the first order shear deformation plate theory is investigated. The rule of mixture is used to effect of the properties of nanotubes in the mentioned structure. Based on the displacement field according to the first order shear deformation theory, after determining the strain components in the curvilinear coordinates and simplifying derived relation, we compute the strain components in conical coordinate. Then, the stress components are derived by the Hook's law. In the next stage, by computing the total potential energy of system by regarding the effect of Pasternak elastic foundation and regarding the suitable functions for displacements, by applying the Ritz method the natural frequency of system have been derived. At the end, the effect of volume fraction of nanotubes, ratio of thickness to radius of cone, elastic constants and other parameters, on the natural frequency of structure have been investigated. Also, it can be observe close agreements between present results and other papers.

1- مقدمه

ساختارهای پوسته‌ای مخروطی به میزان قابل توجهی در کاربردهای مهندسی و صنعتی از جمله صنایع هوافضا، پتروشیمی، مکانیکی، نظامی، کشتی‌سازی و غیره استفاده می‌شوند. بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری این سازه‌ها به‌منظور بهبود خواص ارتعاشی و مکانیکی آن‌ها در طراحی‌های دینامیکی از اهمیت بالایی برخوردار است. مواد کامپوزیتی به‌دلیل وزن پایین نسبت به موادی چون فولاد و آلومینیم و همچنین خواص مکانیکی قابل توجهی که دارند در موارد بسیاری مورد استفاده قرار می‌گیرند. امروزه مواد مرکب پیشرفته باعث پیشرفت‌های چشم‌گیری در علوم مختلف شده است. مواد تابعی مدرج و مواد مرکب لایه‌ای از جمله این مواد هستند که در بخش-های مختلف صنایع پیشرفته مورد استفاده قرار می‌گیرند. از این رو تحقیقات گسترده در زمینهٔ خواص مادی و مکانیکی این مواد انجام شده است[1-4]. یکی دیگر از فناوری‌های جدید در زمینهٔ ساخت مواد فناوری نانو می‌باشد. اخیرا نانو فناوری در بسیاری از علوم از جمله علوم مهندسی توجه محققان را برانگیخته است. آزمایش‌ها نشان داده است که نانو لوله‌های کربنی (CNTs) [1] از خواص فوق العاده‌ای نسبت به دیگر الیاف‌های تقویتی برخوردارند. از لحاظ

1- Carbon Nanotubes

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

S. Jafari Mehrabadi, M. Jalilian Rad, E. Zarouni, Free vibration analysis of nanotube-reinforced composite truncated conical shell resting on elastic foundation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 12, pp. 122-132, 2014 (In Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.12.6.7]

مقاومت کششی و ضریب کشسانی، این مواد یکی از محکم‌ترین موادی هستند که تا کنون شناخته شده اند[5]. بنابراین انتظار می‌رود که استفاده از نانو لوله‌های کربنی به‌عنوان الیاف تقویتی در زمینه‌ای پلیمری باعث بهبود خواص این کامپوزیت‌های نسبت به نوع تقویت شده با سایر الیاف‌ها گردد. برخی مطالعات در ضمینهٔ بررسی خواص مادی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی انجام شده است که نشان می‌دهد تقویت سازه‌های کامپوزیتی با نانو لوله‌های کربنی حتی با کسر جرمی کم (2 تا 5 درصد)، به میزان قابل توجهی خواص مکانیکی، حرارتی و الکتریکی آن‌ها را ارتقا می‌دهد[6-11]. جوشی و یوپادیای[12] انتقال بار در مواد مرکب تقویت شده با نانولوله‌های کربنی چند جداره، تحت بارهای کششی و فشاری را با استفاده از مدل مکانیک محیط پیوسته مورد مطالعه قرار داده‌اند در این تحقیق از روش اجزا محدود استفاده شده است. آن‌ها تأثیر نانولوله‌های کربنی تک‌جداره و چندجداره را در ارتقأ خواص مکانیک مواد کامپوزیتی مورد بررسی قرار داده‌اند. ودنیچاروا و ژانگ[13]، خمش خالص و کمانش تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی تک‌جداره را مورد بررسی قرار دادند. وویت و ادلی[14] رفتار تنش و خیز تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی را بررسی کردند. آن‌ها دریافتند که سختی این تیرها با به‌کارگیری کسر حجمی پایینی از نانو لوله‌ها با توزیع یکنواخت به میزان چشمگیری افزایش می‌یابد. یاس و حشمتی[15] خواص ارتعاشی تیرهای نانو کامپوزیتی تابعی مدرج را تحت بار متحرک مورد بررسی قرار داده‌اند. تیر درنظر گرفته شده در این تحقیق با نانو لوله‌های کربنی تک جداره با جهت‌گیری تصادفی تقویت شده‌اند. به‌منظور مدل‌سازی خواص مادی تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانو از مدل موری-تاناکا استفاده شده است. آن‌ها تاثیر جهت‌گیری نانولوله‌ها، توزیع مواد، سرعت بار متحرک و شرایط مرزی مختلف را روی خواص ارتعاشی تیر مورد نظر، مورد بررسی قرار داده‌اند. یاس و صمدی[16] ارتعاشات آزاد و کمانش تیر تیموشنکوی کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی روی بستر الاستیک را مورد مطالعه قرار داده‌اند. نانولوله‌ها با توزیع یکنواخت و همچنین تابعی مدرج در راستای ضخامت فرض شده‌اند. از قانون مخلوط‌ها برای توصیف خواص مادی مؤثر استفاده شده است. با درنظر گرفتن شرایط مرزی گوناگون معادلات پایداری و حرکت تیر به کمک اصل هامیلتون به‌دست آمده و از روش مربع سازی مشتق تعمیم‌یافته[1] حل شده‌اند. اثرات کسر حجمی و نحوهٔ توزیع نانولوله‌ها، پارامترهای سختی بستر الاستیک و شرایط مرزی گوناگون بر روی فرکانس‌های طبیعی و بار بحرانی کمانش تیر مورد بررسی قرار گرفته است.

آیری و همکارانش[17،18] در تحقیقی به‌بررسی ارتعاش آزاد پوسته‌های مخروطی پرداختند. لیسا[19] ارتعاشات پوسته‌های مخروطی را با شرایط مرزی مختلف و براساس تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک مورد بررسی قرار داده است. سیوادس و گانسن[20-22] ارتعاش پوسته‌های مخروطی با ضخامت متغیر را با استفاده روش المان محدود نیمه تحلیلی مورد بررسی قرار داده اند. هوا[23]، در تحقیقی، به‌بررسی اثرات شرایط مرزی و خواص اورتروپیک روی فرکانس‌های طبیعی ارتعاش آزاد پوستهٔ مخروطی ناقص دوار پرداخت. در این تحقیق از روش گالرکین[2] برای حل معادلات حرکت استفاده شده است. لی و همکارانش[24] به محاسبهٔ فرکانس‌های طبیعی و پاسخ‌های ارتعاش اجباری پوسته مخروطی پرداخته‌اند. با استفاده از اصل همیلتون و روش ریلی-ریتز[3] معادلات حرکت به‌دست آمده‌اند. فرکانس‌های طبیعی پوستهٔ مخروطی با حل مسئله مقادیر ویژه معادلات حرکت به‌دست آمده و پاسخ‌های پایدار ارتعاش اجباری با حل معادلات حرکت به‌دست می‌آیند. تورنابنه[25] به‌بررسی ارتعاش آزاد پوسته‌های مخروطی و استوانه‌ای از جنس مواد تابعی مدرج پرداخته است. در مقاله مذکور از نوعی ماده تابعی استفاده شده که ترکیبی از فلز و سرامیک می‌باشد. معادلات حرکت سیستم به‌وسیله روش مربع‌سازی مشتق تعمیم یافته حل شده‌اند. صوفیه و همکارانش[26] به تحلیل ارتعاش آزاد و پایداری پوسته‌های مخروطی ارتوتروپیک غیرهمگن با لبه‌های گیردار در معرض فشارهای خارجی یکنواخت پرداختند و فرکانس‌های طبیعی اصلی و معادلات حاکم را روش گالرکین حل نمودند. صوفیه[27] همچنین ارتعاشات غیرخطی (با دامنهٔ ارتعاش بالا) پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی ناقص غیرهمگن را مورد بررسی قرار داده است. در تحقیق خواص مادی پوستهٔ مخروطی طبق یک رابطه توانی در راستای ضخامت آن تغییر می‌کند. ستوده و همکارانش[28] ارتعاشات آزاد و پاسخ دینامیکی پوسته‌های مخروطی از جنس مواد تابعی مدرج با ضخامت غیر یکنواخت و تحت بارگذاری ضربه‌ای را مورد بررسی قرار داده‌اند. خواص مواد به‌صورت تابعی مدرج در راستای ضخامت با استفاده از قانون توزیع توانی مخلوط‌ها تغییر می‌کند. برای حل معادلات از روش مربع سازی مشتق تعمیم‌یافته استفاده شده است.

ژاو و لیو[29] به‌بررسی ارتعاش آزاد پنل‌های پوستهٔ مخروطی ساخته شده از مواد تابعی با استفاده از روش بدون مش یا المان آزاد ریتز[4] پرداخته‌اند. از تئوری مرتبه اول برشی برای کرنش‌ها استفاده شده است و توابع ذره‌ای را جهت پیوند توابع هارمونیک جهت تقریب میدان جابه‌جایی دوبعدی استفاده کرده‌اند. فرض کرده‌اند که خواص مواد پنل‌های مخروطی در جهت ضخامت به‌طور پیوسته براساس قانون توانی توزیع کسر حجمی مواد تشکیل دهنده متغیر باشد. شن[30،31] در تحقیقی، به‌بررسی پس کمانش پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک جداره[5] در معرض بار جانبی یا فشار هیدرواستاتیک در محیط حرارتی پرداخته است. نتایج نشان داده است که توزیع تابعی خطی نانولوله‌های کربنی تقویتی باعث افزایش فشار کمانشی و همچنین مقاومت پس کمانشی پوسته مخروطی تحت بار خارجی فشاری می‌شود. مرادی دستجردی و همکارانش[32] تحلیل دینامیکی پوسته‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک‌جداره در معرض بارهای ضربه‌ای را مورد مطالعه قرار داده اند. آن‌ها ارتعاش آزاد و انتشار موج تنش را بررسی کردند. در این تحقیق توزیع‌های مختلفی برای نانولوله‌ها درنظر گرفته شده است و خواص مادی پوسته با استفاده از مدل‌های میکرومکانیکی تخمین زده شده است. یاس و همکارانش[33] خواص ارتعاشی پانل‌های استوانه‌ای تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی تک‌جداره را با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی مورد مطالعه قرار داده‌اند. برای پیش‌بینی خواص مادی نانو کامپوزیت از قانون اصلاح شدهٔ مخلوط‌ها استفاده شده است. با درنظر گرفتن شرایط مرزی ساده معادلات حرکت با استفاده از روش مربع سازی مشتق تعمیم‌یافته حل شده و فرکانس‌های طبیعی پوسته به‌دست آمده‌اند. شن و ژیانگ[34] ارتعاشات غیرخطی پانل‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی در محیط حرارتی مطالعه نموده‌اند. در این تحقیق از تئوری مرتبه بالای برشی استفاده شده است. ملک‌زاده و

1- Generalized Differential Quadrature (GDQ)
2- Galerkin Method
3- Rayleigh–Ritz Method
4- Element-Free kp-Ritz Method
5- Single-walled Carbon Nanotubes

همکارانش[35] در تحقیقی، ارتعاش آزاد پوسته مخروطی ناقص دورانی از جنس ماده تابعی مدرج را با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی پوسته‌ها مورد بررسی قرار دادند و معادلات حاصل را از روش مربع سازی مشتق تعمیم‌یافته حل نمودند. فتوحی و همکارانش[36] در تحقیقی به‌بررسی تاثیرات بستر الاستیک بر روی مشخصه های ارتعاشی نانو مخروط ها پرداخته است. در این تحقیق از روش گالرکین برای حل معادلات حرکت نانو مخروط استفاده شده است و همچنین مدل پاسترناک برای مدل‌سازی بستر الاستیک استفاده شده است. فیروز آبادی و همکارانش[38،37] خواص ارتعاشی و پایداری نانومخروط‌ها را براساس یک تئوری غیرمحلی پوسته‌ها مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیقات معادلات پایداری و حرکت با استفاده از روش گالرکین حل شده و فرکانس‌های طبیعی و بار بحرانی به‌دست آمده‌اند.

در این مقاله ارتعاش آزاد پوستهٔ مخروطی ناقص تقویت شده با نانولوله-های کربنی تک‌جداره با توزیع یکنواخت و مستقر بر بستر الاستیک، براساس تئوری مرتبه اول برشی مورد بررسی قرار گرفته است. جهت اعمال خواص مکانیکی نانولوله‌ها از قانون مخلوط‌ها استفاده شده است. با تشکیل فانکشنال انرژی و از روش ریتز و اعمال شرایط مرزی ساده و حل مسئله مقادیر ویژه فرکانس‌های پوسته‌ی مخروطی به‌دست آمده‌اند. در پایان اثر کسر حجمی نانولوله‌های کربنی تقویتی، نسبت ضخامت به شعاع مخروط، ثابت‌های بستر الاستیک و پارامترهای دیگر بر روی فرکانس‌های طبیعی ارتعاش مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. صحت نتایج با دیگر مقالات موجود مقایسه و دقت مناسبی بین نتایج این تحقیق و دیگر مقالات برقرار است.

2- خواص پوستهٔ مخروطی نانوکامپوزیت

در این تحقیق پوستهٔ مخروطی ناقص با نانولوله‌های کربنی با توزیعی یکنواخت در راستای مختصات x تقویت شده است و دارای زمینه‌ای پلیمری باشد. در مدل میکرومکانیکی، می‌توان خواص مادی را با استفاده از مدل موری-تاناکا[1][39] یا قانون اصلاح شدهٔ مخلوط‌ها[2][26] تخمین زد. مدل موری-تاناکا قابل کاربرد برای ذرات نانو می‌باشد[39،30،15] و قانون مخلوط-ها برای پیش‌بینی تمامی خواص مادی سازه، ساده و مناسب می‌باشد. در این مقاله به‌دلیل تطابق نتایج حاصل از دو روش فوق، از قانون مخلوط‌ها استفاده شده است. براساس قانون اصلاح شدهٔ مخلوط‌ها مدول یانگ و مدول برشی موثر مطابق روابط (1-3) بیان می‌شوند[41]

$$E_{11} = \eta_1 V_{CN} E_{11}^{CN} + V_m E^m \tag{1}$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{CN}}{E_{22}^{CN}} + \frac{V_m}{E^m} \tag{2}$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{CN}}{G_{12}^{CN}} + \frac{V_m}{G^m} \tag{3}$$

که E_{11}^{CN}، E_{22}^{CN} و G_{12}^{CN} به‌ترتیب مدول‌های یانگ و برشی نانولولهٔ کربنی می‌باشد، E^m و G^m خواص متناظر مربوط به زمینه می‌باشند. η_j $(j = 1,2,3)$ پارامتر کارایی نانولوله کربنی می باشد، این پارامتر به این دلیل که انتقال بار بین ماتریس و نانولوله به‌صورت کامل صورت نمی‌گیرد[39،30]، در معادلات (1-3) وارد می‌شود. مقدار آن با تطابق مدول‌های الاستیسیته به‌دست آمده از نتایج شبیه‌سازی دینامیک مولکولی و قانون مخلوط‌ها تعیین می‌شود[30]. همچنین V_{CN} و V_m کسرهای حجمی نانولولهٔ کربنی و زمینه می‌باشند که رابطهٔ $V_{CN} + V_m = 1$ را نیز ارضا می‌نماید.

کسر حجمی V_{CN} را به‌صورت رابطهٔ (4) فرض می‌شود:

$$V_{CN} = w(z) V_{CN}^* \tag{4}$$

که طبق رابطه (5):

$$V^*_{CN} = \frac{w_{CN}}{w_{CN} + (\frac{\rho_{CN}}{\rho_m}) - (\frac{\rho_{CN}}{\rho_m}) w_{CN}} \tag{5}$$

که w_{CN} کسر جرمی نانولوله می‌باشد. برای حالت توزیع یکنواخت نانولوله‌ها مقدار $w(z)$ برابر واحد بوده و در نتیجه $V_{CN} = V_{CN}^*$ می‌باشد. نسبت پواسون و دانسیته جرمی را می‌توان به‌صورت روابط (6،7) محاسبه کرد:

$$\nu_{12} = V_{CN} \times \nu_{12}^{CN} + V_m \nu^m$$
$$\nu_{21} = \frac{E_{22}}{E_{11}} \nu_{12} \tag{6}$$

$$\rho = V_{CN} \times \rho^{CN} + V_m \rho^m \tag{7}$$

3- مدل‌سازی مسئله

پوستهٔ مخروطی ناقصی را مطابق شکل 1 درنظر می‌گیریم. که در آن x راستای یال مخروط و θ در راستای محیط و z در راستای ضخامت پوسته می‌باشد.

که در آن جابه‌جایی‌های (u,v,w) به‌ترتیب در راستای (x,y,z) می-باشند.

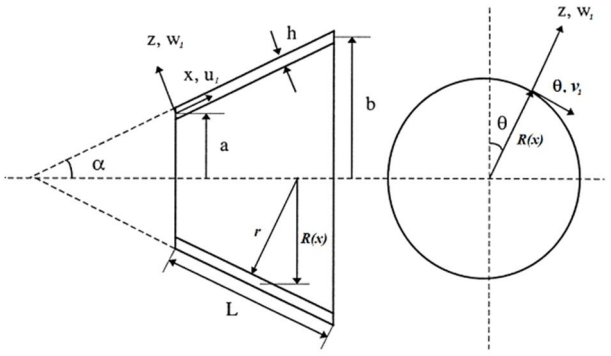
با توجه به شکل 1 پارامترهای لامه[3] و شعاع‌های انحنای[4] پوستهٔ مخروطی ناقص به‌صورت روابط (9-11) تعریف می‌گردند[42].

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = a + x\sin\alpha \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} r = \dfrac{R(x)}{\cos\alpha} \\ R(x) = a + x\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow r = \frac{a + x\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\begin{cases} R_1 = \infty \\ R_2 = r = \dfrac{a + x\sin\alpha}{\cos\alpha} \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = x \\ \alpha_2 = \theta \\ \alpha_3 = z \end{cases} \tag{11}$$



شکل 1 برشی از پوستهٔ مخروطی ناقص با دستگاه مختصات منحنی الخط

1- Mori Tanaka
2- Extended rule of mixture

3 -Lame parameters
4- Radii of curvature

روابط کرنش-تغییر مکان براساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به‌دست آمده‌اند. در این تئوری فرض قابل صرف نظر بودن از کرنش‌های برشی جانبی ε_{xz}، $\varepsilon_{\theta z}$ و اینرسی دورانی دیگر معتبر نمی‌باشد و این تفاوت اصلی تئوری مرتبه اول تغییر شکل با تئوری کلاسیک پوسته‌ها می‌باشد. در واقع در این تئوری نتایج از دقت بیشتری برخوردار می‌باشند.

روابط میدان تغییرمکان در مختصات منحنی‌الخط مطابق رابطهٔ (12) تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} U_1 = u_1(\alpha_1,\alpha_2) + \alpha_3 \phi_1(\alpha_1,\alpha_2) \\ U_2 = u_2(\alpha_1,\alpha_2) + \alpha_3 \phi_2(\alpha_1,\alpha_2) \\ U_3 = u_3(\alpha_1,\alpha_2) \end{cases} \tag{12}$$

همچنین روابط کرنش-جابه‌جایی برای هر نقطه دلخواه به فاصله α_3 از سطح میانی به صورت رابطهٔ (13) بیان می‌گردد [43].

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{A_1(1+\frac{\alpha_3}{R_1})}\left(\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{U_2}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + U_3\frac{A_1}{R_1}\right)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{A_2(1+\frac{\alpha_3}{R_2})}\left(\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2} + \frac{U_1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + U_3\frac{A_2}{R_2}\right)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{A_1(1+\frac{\alpha_3}{R_1})}{A_2(1+\frac{\alpha_3}{R_2})}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{U_1}{A_1(1+\frac{\alpha_3}{R_1})}\right) + \frac{A_2(1+\frac{\alpha_3}{R_2})}{A_1(1+\frac{\alpha_3}{R_1})}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{U_2}{A_2(1+\frac{\alpha_3}{R_2})}\right)$$

$$\varepsilon_{13} = A_1(1+\frac{\alpha_3}{R_1})\frac{\partial}{\partial \alpha_3}\left(\frac{U_1}{A_1(1+\frac{\alpha_3}{R_1})}\right) + \frac{1}{A_1(1+\frac{\alpha_3}{R_1})}\frac{\partial U_3}{\partial \alpha_1}$$

$$\varepsilon_{23} = A_2(1+\frac{\alpha_3}{R_2})\frac{\partial}{\partial \alpha_3}\left(\frac{U_2}{A_2(1+\frac{\alpha_3}{R_2})}\right) + \frac{1}{A_2(1+\frac{\alpha_3}{R_2})}\frac{\partial U_3}{\partial \alpha_2} \tag{13}$$

حال با جایگذاری روابط (9-11) در روابط (13،12) روابط میدان تغییرمکان و روابط کرنش-تغییرمکان برای پوستهٔ مخروطی به‌صورت روابط (14،15) در می‌آیند.

$$\begin{cases} U = u_1(x,\theta) + z\,\phi(x,\theta) \\ V = v_1(x,\theta) + z\,\psi(x,\theta) \\ W = w_1(x,\theta) \end{cases} \tag{14}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + z\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{a+x\sin\alpha}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + z\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \sin\alpha(u_1 + z\phi) + w_1\cos\alpha\right)$$

$$\varepsilon_{x\theta} = \frac{1}{a+x\sin\alpha}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + z\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + z\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \frac{(v_1 + z\psi)\sin\alpha}{a+x\sin\alpha}$$

$$\varepsilon_{xz} = \phi + \frac{\partial w_1}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \psi + \frac{1}{a+x\sin\alpha}\frac{\partial w_1}{\partial \theta} \tag{15}$$

روابط کرنش-تغییرمکان حاکم بر پوستهٔ مخروطی را می‌توان به فرم ماتریسی مطابق رابطهٔ (16) نوشت.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{\theta\theta} \\ \varepsilon^0_{x\theta} \end{Bmatrix} + z\begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{\theta\theta} \\ k_{x\theta} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{xz} \\ \varepsilon^0_{\theta z} \end{Bmatrix} \tag{16}$$

که با جایگذاری روابط مقادیر کرنش‌ها بر حسب جابجایی از رابطهٔ (15) رابطهٔ (16) به صورت رابطهٔ (17) نوشته می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{1}{a+x\sin\alpha}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + u_1\sin\alpha + w_1\cos\alpha\right) \\ \frac{1}{a+x\sin\alpha}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta} - v_1\sin\alpha\right) + \frac{\partial v_1}{\partial x} \end{Bmatrix} + z\begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{1}{a+x\sin\alpha}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \phi\sin\alpha\right) \\ \frac{1}{a+x\sin\alpha}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \psi\sin\alpha\right) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi + \frac{\partial w_1}{\partial x} \\ \psi + \frac{1}{a+x\sin\alpha}\frac{\partial w_1}{\partial \theta} \end{Bmatrix} \tag{17}$$

روابط تنش-کرنش برای مواد ارتوتروپیک مطابق رابطهٔ (18) می‌باشد

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \tag{18}$$

که در آن

$$Q_{22} = \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = G_{12}$$

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \tag{19}$$

روابط $\nu_{12},\nu_{21},E_{11},E_{22},G_{12}$ از روابط اصلاح شدهٔ مخلوط‌ها مطابق روابط (1-3) و (6) محاسبه می‌شوند.

پوستهٔ مخروطی مورد مطالعه در این تحقیق مطابق شکل 2 با بستر الاستیک از نوع دو پارامتری (وینکلر-پاسترناک) احاطه شده است و تأثیر ثابت‌های بستر الاستیک بر روی فرکانس‌های طبیعی پوستهٔ مخروطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. به این منظور از مدل پسترناک استفاده شده است[44]. به این منظور نیروی‌های عکس‌العمل که از سوی بستر الاستیک در جهت ضخامت پوستهٔ مخروطی به آن وارد می‌گردد مطابق رابطهٔ (20) فرمول‌بندی

گردیده است

$$q = k_w w - k_p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) \tag{20}$$

که در آن ثابت سختی بستر kw (N/m3) و ثابت برشی آن kp (N/m) می‌باشد. همچنین $\varphi = \theta \sin\alpha$ و w تغییرمکان صفحهٔ میانی در راستای ضخامت می‌باشد.

4- به‌دست آوردن فرکانس‌های سیستم از روش ریتز

به‌منظور تعیین فرکانس‌های طبیعی پوستهٔ مخروطی ناقص از روش ریتز استفاده است. روش ریتز از روش‌های حل عددی است که براساس روش تغییرات[1] معمولاً برای حل مسائل مقدار مرزی مختلف مکانیک استفاده می‌شود. مزیت اصلی این روش این است که توابع حدس فقط کافی است شرایط مرزی مسئله را ارضا نماید، به همین دلیل در بسیاری از موارد به‌کار می‌رود.

پوستهٔ مخروطی ناقص در این مقاله با تکیه‌گاه ساده در دو سر مخروط درنظر گرفته شده است. شرایط مرزی ساده S-S در دو انتهای پوستهٔ مخروطی به‌صورت رابطهٔ (21) بیان می‌شوند:

$$v_1 = 0, w_1 = 0, N_x = 0, M_x = 0 \quad \text{at} \quad x = 0, L \tag{21}$$

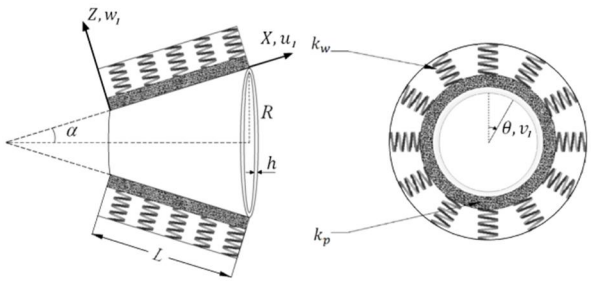
توابع جابه‌جایی نیز مطابق رابطهٔ (22) درنظر گرفته شده است که شرایط مرزی مسئله را ارضا می‌نمایند[23].

$$\begin{aligned}
u &= a_1 \cos(\frac{m\pi x}{L})\cos(n\theta + \omega t)\\
v &= a_2 \sin(\frac{m\pi x}{L})\sin(n\theta + \omega t)\\
w &= a_3 \sin(\frac{m\pi x}{L})\cos(n\theta + \omega t)\\
\phi &= a_4 \cos(\frac{m\pi x}{L})\cos(n\theta + \omega t)\\
\psi &= a_5 \sin(\frac{m\pi x}{L})\sin(n\theta + \omega t)
\end{aligned} \tag{22}$$

که در آن n و m به‌ترتیب اعداد موج محیطی و طولی، و ω نیز فرکانس ارتعاش پوسته برحسب هرتز (Hz) هستند.

برای پوستهٔ مخروطی انرژی‌های پتانسیل، کار خارجی و انرژی جنبشی به‌صورت رابطهٔ (23) می‌باشد :

$$U = \iint\left\{\int_{h/2}^{h/2}\left[\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{x\theta}\varepsilon_{x\theta} + \sigma_{xz}\varepsilon_{xz} + \sigma_{\theta z}\varepsilon_{\theta z}\right]dz\right\} A_1 A_2\, dx\, d\theta\, dz \tag{23}$$



شکل 2 نمای شماتیک از پوستهٔ مخروطی ناقص بر بستر الاستیک

1- Variational method

با جایگذاری روابط (16،9) در معادلهٔ (23)، معادله (24) را داریم:

$$U = \iint\{\int_{h/2}^{h/2}\left[\sigma_{xx}\left(\varepsilon_{xx}^0 + zk_{xx}\right) + \sigma_{\theta\theta}\left(\varepsilon_{\theta\theta}^0 + zk_{\theta\theta}\right) + \sigma_{x\theta}\left(\varepsilon_{x\theta}^0 + zk_{x\theta}\right) + \sigma_{xz}\,\varepsilon_{xz}^0 + \sigma_{\theta z}\,\varepsilon_{\theta z}^0\right]dz\}(a + x\sin\alpha)\,d\theta dx \tag{24}$$

نیرو و ممان‌های منتجه به‌صورت رابطهٔ (25) تعریف می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} N_x & M_x \\ N_\theta & M_\theta \\ N_{x\theta} & M_{x\theta}\end{bmatrix} = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{bmatrix}\sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & z\end{bmatrix}dz$$

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_\theta\end{bmatrix} = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{bmatrix}\sigma_{xz} \\ \sigma_{\theta z}\end{bmatrix}dz$$

$$I = \int_{-h/2}^{h/2}\rho\, dz \tag{25}$$

با انتگرال گیری در راستای ضخامت پوستهٔ مخروطی و جایگذاری مقادیر نیرو و ممان‌های منتجه از رابطهٔ (25)، رابطه (26) به‌دست می‌آید:

$$U = \iint\left[N_x\varepsilon_{xx}^0 + M_x k_{xx} + N_\theta\varepsilon_{\theta\theta}^0 + M_\theta k_{\theta\theta} + N_{x\theta}\varepsilon_{x\theta}^0 + M_{x\theta}k_{x\theta} + Q_x\,\varepsilon_{xz}^0 + Q_\theta\,\varepsilon_{\theta z}^0\right](a + x\sin\alpha)\,dxd\theta \tag{26}$$

با جایگذاری مقادیر و کرنش‌ها از رابطهٔ (17) انرژی پتانسیل به‌صورت رابطهٔ (27) نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned}
U = \iint\Bigg[&N_x(\frac{\partial u_1}{\partial x}) + M_x(\frac{\partial \phi}{\partial x}) + N_\theta\Big(\frac{1}{a + x\sin\alpha}(\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + u_1\sin\alpha\\
&+ w_1\cos\alpha)\Big) + M_\theta\left(\frac{1}{a + x\sin\alpha}(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \phi\sin\alpha)\right) + N_{x\theta}\\
&\left(\frac{1}{a + x\sin\alpha}(\frac{\partial u_1}{\partial \theta} - v_1\sin\alpha) + \frac{\partial v_1}{\partial x}\right) + M_{x\theta}\left(\frac{1}{a + x\sin\alpha}\right.\\
&\left.(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \psi\sin\alpha) + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + Q_x(\phi + \frac{\partial w_1}{\partial x}) + Q_\theta\Big(\psi\\
&+ \frac{1}{a + x\sin\alpha}\frac{\partial w_1}{\partial \theta}\Big)\Bigg](a + x\sin\alpha)\,dxd\theta
\end{aligned} \tag{27}$$

انرژی جنبشی نیز به‌صورت رابطهٔ (28) تعریف می‌شود

$$K = \frac{1}{2}\iint\int_{h/2}^{h/2}\rho\left[\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2\right]A_1 A_2\, dxd\theta dz \tag{28}$$

با انتگرال‌گیری در راستای ضخامت و جایگذاری از روابط (25،9) انرژی جنبشی مطابق رابطهٔ (29) نوشته می‌شود

$$K = \iint I\left[\dot{u}\,\delta\dot{u} + \dot{v}\,\delta\dot{v} + \dot{w}\,\delta\dot{w}\right](a + x\sin\alpha)\,d\theta dx \tag{29}$$

انرژی کرنشی نیز به‌صورت رابطهٔ (30) تعریف می‌شود:

$$V = \iint qw\,(a + x\sin\alpha)\,d\theta dx \tag{30}$$

که نیروی حاصل از برهم کنش پوستهٔ مخروطی و بستر الاستیک می‌باشد. با جایگذاری q از رابطهٔ (20) انرژی کرنشی به‌صورت رابطهٔ (31) در می‌آید

$$V=\iint\left[k_w w-k_p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right]$$

$$w\,(a+x\sin\alpha)d\theta dx \qquad (31)$$

تابعی انرژی برحسب انرژی‌های پتانسیل، کرنشی و جنبشی به‌صورت رابطهٔ (32) بیان می‌شود:

$$\Pi=U+V-K \qquad (32)$$

با حذف مولفه‌های هارمونیک و جایگذاری توابع جابه‌جایی در معادله (32) ماکزیمم فانکشنال انرژی مطابق رابطهٔ (33) بیان می‌شود:

$$\hat{\Pi}=U_{\max}+V_{\max}-K_{\max} \qquad (33)$$

با کمینه کردن فانکشنال معادله بالا نسبت به ضرایب به‌دست می‌آید. طبق رابطه (34) داریم:

$$\frac{\partial\hat{\Pi}}{\partial a_i}=0 \qquad i=1,2,3,4,5 \qquad (34)$$

که منجر به معادله مقدار ویژه به‌صورت رابطهٔ (35) می‌شود:

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15}\\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25}\\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35}\\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45}\\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\\ a_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad (35)$$

برای به‌دست آوردن فرکانس طبیعی سیستم کافی است دترمینان ماتریس ضرایب مساوی صفر قرار داده شود. طبق رابطه (36) داریم:

$$\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15}\\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25}\\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35}\\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45}\\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55}\end{vmatrix}=0 \qquad (36)$$

مولفه‌های s_{ij} ماتریس ضرایب در معادلهٔ (36) در پیوست آمده است.

5- بحث و نتایج

در این تحقیق پوسته‌های کامپوزیتی مخروطی ناقص با زمینه پلی متیل- متاکریلت (PMMA)[1] که با نانولوله‌های کربنی تک‌جداره (10،10) به‌صورت یکنواخت در راستای یال مخروط تقویت شده‌اند، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. که زوج مرتب (10،10) مولفه‌های بردار کایرال[2] نانولوله هستند و نوع نانولوله‌های تک جداره را مشخص می‌کند[45]. ابتدا به‌بررسی خواص مادی پلیمر مورد نظر و نانولوله‌های کربنی تک‌جداره (10،10) پرداخته شده است.

خواص مادی نانولوله که وابسته به ابعاد نانولوله و دما می‌باشند از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی به‌دست آمده‌اند[30]. نتایج نمونه در جدول 1 ارائه شده است. خواص مادی پلیمر زمینه که از جنس پلی متیل- متاکریلت در دمای (K) 300 به‌صورت $\nu^m=0.34$، $\rho^m=$ (gcm-3) 1.15، $E^m=2.5$ (GPa)، $G^m=0.933$ (GPa) فرض شده است. مهم‌ترین مسئله در به‌کارگیری قانون اصلاح شدهٔ مخلوط‌ها برای کامپوزیت‌های تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی[3] تعیین پارامتر کارایی نانولوله کربنی $\eta_j\ (j=1,2,3)$ است. این پارامتر را می‌توان از تطبیق نتایج تئوری به‌دست آمده براساس قانون اصلاح شدهٔ مخلوط‌ها با نتایج به‌دست آمده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی تخمین زد. به این ترتیب که پارامترهای کارایی نانولوله با تطبیق مدول یانگ E_{11} و E_{22} و مدول برشی G_{12} کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی به‌دست آمده از قانون توسعه‌یافته مخلوط‌ها با مقادیر به‌دست آمده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی به‌دست آمده‌اند. این مقادیر در حالت خاص در جدول 2 آمده است[30].

به‌منظور بررسی صحت نتایج تحقیق انجام شده، نتایج به‌دست آمده برای فرکانس‌های طبیعی پوستهٔ مخروطی ناقص با تکیه‌گاه ساده، ایزوتروپیک و از جنس آلومینیم با درنظر گرفتن خواص مادی و ابعاد هندسی $\nu=0.3$، $E=$ 70 (GPa)، G=26.9 (GPa)، $\rho=$ 2710 (kgm-3)، h=0.004 (m)، b=0.4(m) با نتایج مقاله هوا[23] مقایسه شده است. این نتایج در جدول 3 قابل مشاهده است. اعداد n و m به‌ترتیب اعداد موج در راستای محیط و یال مخروط است. فرکانس بی‌بعد به‌صورت $\Omega=\omega.b\sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$ تعریف شده است. که در آن ω فرکانس پایه برحسب هرتز (Hz)، ν ضریب پواسون، E مدول یانگ، G مدول برشی، ρ چگالی، h ضخامت پوسته، a شعاع کوچک مخروط، b شعاع بزرگ مخروط و L طول یال مخروط می‌باشد. از جدول 3 می‌توان مشاهده نمود که نتایج به‌دست آمده در تحقیق ارائه شده با نتایج موجود در مقالات گذشته مطابقت دارد. البته مقداری اختلاف میان نتایج ارائه شده در تحقیق حاضر با نتایج مرجع [23] مشاهده می‌شود که دلیل آن اختلاف در تئوری‌های استفاده شده برای توصیف میدان تغییر مکان پوسته است. نتایج ارائه شده در مرجع [23] براساس تئوری تخمین اولیه لاو[4] (تئوری کلاسیک)

جدول 1 خواص مادی وابسته به دما نانو لوله کربنی تک جداره (10،10)

دما (K)	E_{11}^{CN} (TPa)	E_{22}^{CN} (TPa)	G_{12}^{CN} (TPa)	α_{11}^{CN} (10^{-6}/k)	α_{22}^{CN} (10^{-6}/k)
300	5/6466	7/0800	1/9445	3/4584	5/1682
500	5/5308	7/0800	1/9643	4/5361	5/0189
700	5/4744	6/8641	1/9644	4/6677	4/8943

$$\left(L=9.26\,\text{nm},\ R=0.68\,\text{nm},\ h=0.068\,\text{nm},\ \nu_{12}^{CN}=0.175\right)$$

جدول 2 مقایسه مدول‌های یانگ برای کامپوزیت‌های PMMA/CNT

V_{CN}^*	دینامیک مولکولی		قانون مخلوط‌ها				
	E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	η_1	η_2	η_3
0/12	94/6	2/9	94/78	2/9	0/137	1/022	0/715
0/17	138/9	4/9	138/68	4/9	0/142	1/626	1/138
0/28	224/2	5/5	224/50	5/5	0/141	1/585	1/109

1- Poly Methyl Methacrylate
2 -Chiral Vector
3- CNTRCs
4 -Love first-approximation theory

است که در این تئوری از تغییر شکل‌های برشی صرف نظر می‌شود، ولی در مقاله حاضر از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، که دقیق‌تر و به واقعیت نزدیک‌تر است، استفاده شده است.

در جدول 4 تغییرات فرکانس بی‌بعد Ω پوستهٔ مخروطی ناقص با درنظر گرفتن شرایط مرزی ساده برای زوایای راس مختلف و خواص مادی و ابعاد هندسی $\nu = 0.3$، E= 70 (GPa)، G=26.9 (GPa)، ρ = 2710 (kgm^{-3})، h=0.004 (m)، b=0.4 (m)، $L = 0.1/\sin\alpha$ و n=1 به‌ازای عدد موج‌های در راستای یال مخروط (m) مختلف به‌دست آمده و مشاهده می‌شود که در تمام زوایای به‌ازای m=1 فرکانس‌های بی‌بعد پوستهٔ مخروطی حداقل مقدار را دارد. از شکل‌های 3 تا 5 می‌توان دریافت که با افزایش زاویه راس مخروط α فرکانس بی‌بعد Ω افزایش می‌یابد، همچنین با بزرگتر شدن زاویهٔ راس مخروط میزان وابستگی فرکانس بی‌بعد Ω به عدد موج n کاهش می‌یابد یعنی دیگر با تغییر n شدت تغییرات Ω زیاد نیست. علاوه‌بر این از شکل‌های 3 تا 5 مشاهده می‌گردد که مقدار حداقل فرکانس بی‌بعد بسته به زاویهٔ راس مخروط تغییر کرده است. بدین ترتیب که در زوایای راس 15°، 30°، 45° و 60° حداقل فرکانس بی‌بعد به‌ترتیب مربوط به اعداد موج محیطی 6، 7، 6 و 5 می‌باشد.

به‌منظور بررسی صحت نتایج به‌دست آمده برای پوستهٔ تقویت شده با نانولوله‌های کربنی نتایج حاصل با نتایج به‌دست آمده در مرجع [46] مقایسه شده است. نتایج حاصل از مرجع [46] حاکی از آن است تقویت یک سازه با نانولوله‌های کربنی تک‌جداره فرکانس‌های طبیعی ارتعاش آن را تا 500% افزایش می‌دهد. بخشی از نتایج به‌دست آمده در این تحقیق در جدول 5 آمده است که می‌توان نتایج زیر از آن استخراج نمود:

جدول 3 فرکانس بی‌بعد $\Omega = \omega b\sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$ برای پوستهٔ مخروطی ناقص با تکیه گاه ساده ($L.\sin\alpha = 0.1$, $a = b - L\sin\alpha$ ،m=1)

n		$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
2	هوا[22]	0/8420	0/7655	0/6348
	تحقیق حاضر	0/843117	0/766729	0/637436
3	هوا[22]	0/7376	0/7212	0/6238
	تحقیق حاضر	0/744890	0/727617	0/631664
4	هوا [22]	0/6362	0/6739	0/6145
	تحقیق حاضر	0/651349	0/687627	0/629497
5	هوا [22]	0/5528	0/6323	0/6111
	تحقیق حاضر	0/579622	0/655668	0/634844
6	هوا[22]	0/4950	0/6035	0/6171
	تحقیق حاضر	0/536970	0/638403	0/650742

- تقویت یک سازه با نانولوله‌های کربنی هرچند با درصد حجمی بسیار کم (0/25%) می‌تواند به میزان چشم‌گیری فرکانس ارتعاش آن را افزایش دهد.
- با افزایش کسر حجمی نانو لوله‌های تقویتی فرکانس به میزان بیشتری افزایش می‌یابد.
- میزان افزایش فرکانس ارتعاش در اثر تقویت با نانولوله‌های کربنی به عدد موج (n) نیز بستگی دارد.
- بسته به کسر حجمی نانولوله‌ها حداقل فرکانس ممکن است به‌ازای مقادیر مختلف عدد موج n (مود ارتعاش) رخ دهد.

جدول 4 فرکانس بی بعد $\Omega = \omega b\sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$ برای پوستهٔ مخروطی ناقص با تکیه گاه ساده به‌ازای مقادیر مختلف عدد موج در راستای یال مخروط m

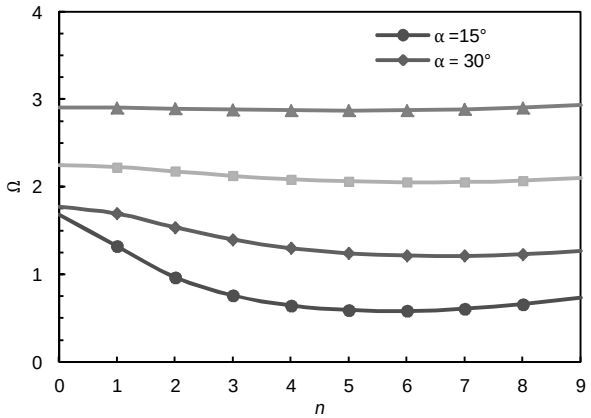
($L.\sin\alpha = 0.1$, $a = b - L\sin\alpha$ ،n=1 ,و از جنس آلومینیم)

m	α =30°	α =45°	α =60°
1	0/920818	0/794965	0/642763
2	1/04562	1/19388	1/46797
3	1/39250	2/17442	3/07978
4	2/04087	3/66191	5/34530
5	2/96342	5/58496	8/19612
6	4/12578	7/90120	11/5759

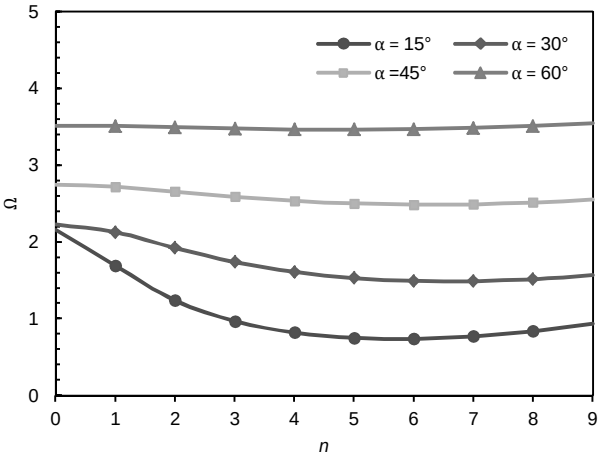
جدول 5 تغییرات فرکانس سازهٔ تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک‌جداره برحسب مقادیر مختلف کسر حجمی نانولوله‌ها

N	کسر حجمی نانولوله			
	0/25%	2%	5%	10%
1	28/04%	150/9%	265/81%	385/94%
2	6/77%	44/63%	85/15%	131/64%
3	17/34%	31/06%	39/37%	50/96%
4	12/26%	32/80%	42/90%	54/42%
5	6/79%	75/26%	119/72%	142/36%

تغییرات به صورت درصدی نسبت به حالت بدون نانولولهٔ تقویتی داده شده است.



شکل 3 تغییرات فرکانس بی بعد $\Omega = \omega b\sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$ برای پوستهٔ مخروطی ناقص با تکیه گاه ساده تقویت شده با SWCNT با کسر حجمی 12% بر حسب n

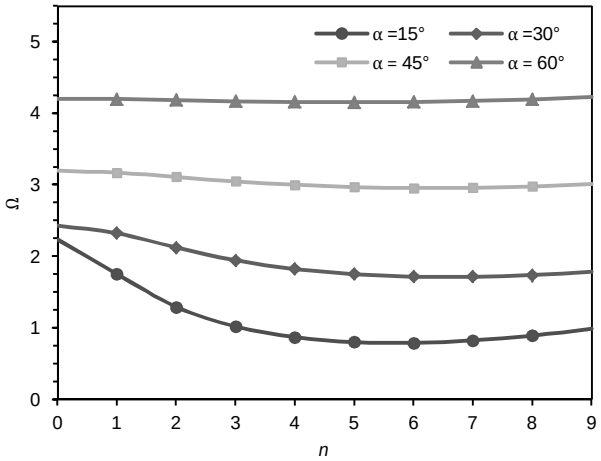


شکل 4 تغییرات فرکانس بی‌بعد $\Omega = \omega b\sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$ برای پوستهٔ مخروطی ناقص با تکیه گاه ساده تقویت شده با SWCNT با کسر حجمی 17% برحسب n

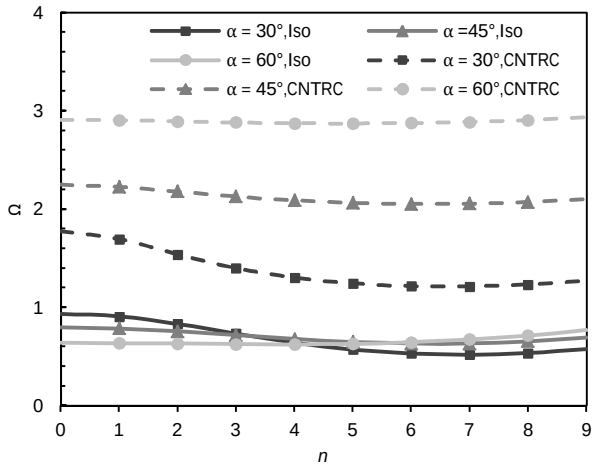
دریافت که هر چه زاویهٔ راس مخروط α افزایش می‌یابد تاثیر نانولوله‌های کربنی تقویتی بر روی افزایش فرکانس‌های بی‌بعد Ω بیشتر می‌شود. به‌عنوان مثال برای $\alpha = 15^o$ فرکانس بی‌بعد Ω ، بسته به عدد موج محیطی n، 165% تا 182%، برای $\alpha = 30^o$ 189% تا 234%، برای $\alpha = 45^o$، 282% تا 325%. برای $\alpha = 60^o$، 400% تا 456% افزایش یافته است. که این نتایج با نتایج حاصل در مرجع [46] کاملاً همخوانی دارد. در هر یک از زوایای راس مخروط مقدار فرکانس حداقل در مقدار متفاوتی از n رخ می‌دهد، از طرفی با بزرگتر شدن زاویهٔ راس مخروط میزان وابستگی فرکانس بی‌بعد Ω به عدد موج n کاهش می‌یابد یعنی دیگر با تغییر n شدت تغییرات Ω زیاد نیست و نمودار به‌صورت خطی تقریباً افقی در می‌آید. به‌عنوان مثال منحنی مربوط زاویه 30° با افزایش n به‌سمت پایین متمایل می‌شود ولی منحنی مربوط به زاویه 60° درجه تقریباً افقی و بدون تغییر است. به همین دلیل منحنی‌های حالت ایزوتروپیک یکدیگر را در 5 و 4 =n قطع می‌کنند.

در شکل‌های 7 و 8 به‌ترتیب تأثیر کسر حجمی‌های مختلف از نانولولهٔ کربنی تقویتی بر روی افزایش فرکانس‌های بی‌بعد پوستهٔ مخروطی با زاویه رأس 15° و 30° نشان داده شده است. همان‌طور که به وضوح مشاهده می‌شود با تقویت پوستهٔ مخروطی با نانولوله‌ها حتی با کسر حجمی پایین 12% فرکانس‌های پوستهٔ مورد نظر افزایش یافته است و سختی آن بیشتر شده است. شکل 7 همچنین نشان می‌دهد که به‌طور میانگین افزایش فرکانس بی‌بعد پوستهٔ مخروطی مورد نظر در اثر تقویت با نانو لوله‌های کربنی برای کسر حجمی 12٪، 17 % و 28% به ترتیب 170%، 220% و 240% بوده است. می‌توان مشاهده نمود که اختلاف چندانی میان فرکانس‌های بی‌بعد برای کسر حجمی 28% و 17% وجود ندارد، ولی این اختلاف بین دو کسر حجمی 17% و 12% بیشتر است. البته با افزایش زاویهٔ راس مخروط این شرایط دیگر برقرار نیست به‌عنوان مثال در شکل 8 اختلاف میان فرکانس‌های بی‌بعد با کسر حجمی 28% و 17% بیشتر شده است. در شکل 8 مشاهده می‌گردد که افزایش فرکانس بی‌بعد پوستهٔ مورد نظر به طور میانگین برای کسر حجمی 12%، 17% و 28% به‌ترتیب 220%، 260% و 300% نسبت به حالت بدون نانولولهٔ تقویتی افزایش یافته است.

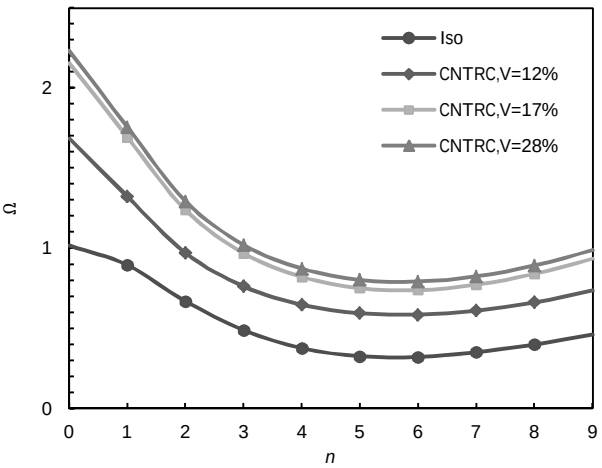
در شکل 9 اثرات نسبت ضخامت به شعاع سر بزرگ پوستهٔ مخروطی نشان داده شده است. در این نمودار مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت ضخامت به شعاع مخروط مقدار فرکانس بی‌بعد Ω افزایش می‌یابد. همچنین می‌توان مشاهده نمود که با افزایش زاویهٔ رأس مخروط، مقدار فرکانس بی‌بعد با شیب بیشتری افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر می‌توان گفت که تأثیر افزایش نسبت ضخامت به شعاع مخروط بر روی افزایش فرکانس‌های پوستهٔ مخروطی با افزایش زاویهٔ رأس افزایش می‌یابد.



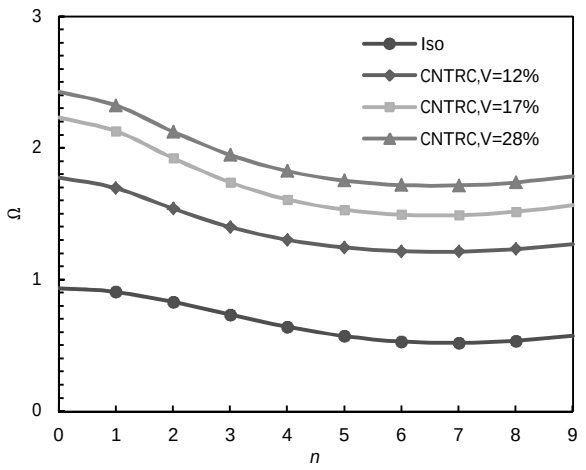
شکل 5 تغییرات فرکانس بی‌بعد $\Omega = \omega b\sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$ برای پوستهٔ مخروطی ناقص با تکیه‌گاه ساده تقویت شده با SWCNT با کسر حجمی 28% برحسب n



شکل 6 مقایسه فرکانس بی‌بعد $\Omega = \omega b\sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$ برای پوستهٔ مخروطی ناقص با تکیه‌گاه ساده ایزوتروپیک و تقویت شده با SWCNT با کسر حجمی 12% برحسب n



شکل 7 تغییرات فرکانس بی‌بعد $\Omega = \omega b\sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$ برای پوستهٔ مخروطی ناقص با زاویه راس α =15° با تکیه‌گاه ساده ایزوتروپیک و تقویت شده با نانولوله کربنی با کسر حجمی‌های مختلف



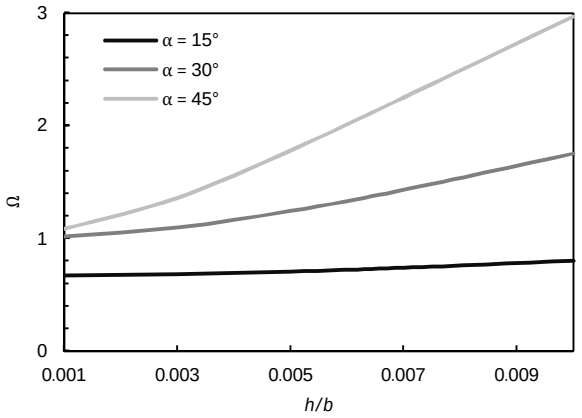
شکل 8 تغییرات فرکانس بی‌بعد $\Omega=\omega b\sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$ برای پوستهٔ مخروطی ناقص با زاویه راس $\alpha=30°$ با تکیه‌گاه ساده ایزوتروپیک و تقویت شده با نانولوله با کسر حجمی‌های مختلف

در جدول 6 تاثیرات بستر الاستیک بر روی فرکانس‌های طبیعی ارتعاش پوستهٔ مخروطی ناقص ایزوتروپیک از جنس آلومینیم و همچنین پوستهٔ کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی با تکیه‌گاه ساده مورد بررسی قرار گرفته است. در این جدول شانزده حالت برای سختی‌های بستر الاستیک درنظر گرفته شده است، به این صورت که چهار حالت برای سختی بستر وینکلر با مقادیر 0، 10^6، 2×10^6، 4×10^6 درنظر گرفته شده است و برای هر کدام از این حالات نیز چهار حالت برای سختی بستر پاسترناک با مقادیر 0، 10^6، $2/5\times10^6$، 5×10^6 درنظر گرفته شده است. مشاهده می‌گردد که احاطه نمودن پوستهٔ مورد نظر با بستر الاستیک باعث افزایش مقادیر فرکانس‌های طبیعی ارتعاش آن می‌گردد. با افزایش سختی های بستر الاستیک وینکلر و پاسترناک فرکانس‌های بی‌بعد سیستم افزایش می‌یابد. همچنین با توجه به جدول 6 می‌توان گفت که تاثیر سختی‌های بستر وینکلر و پاسترناک بر روی افزایش فرکانس‌های بی‌بعد طبیعی پوستهٔ مخروطی یکسان است.

6- نتیجه‌گیری

در این تحقیق ارتعاش آزاد پوستهٔ مخروطی ناقص تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک‌جداره با توزیع یکنواخت و مستقر بر بستر الاستیک، براساس تئوری مرتبه اول برشی مورد بررسی قرار گرفته است. جهت اعمال خواص مکانیکی نانولوله‌ها از قانون مخلوط‌ها استفاده شده است. از روش ریتز و اعمال شرایط مرزی ساده، فرکانس‌های پوستهٔ مخروطی ناقص به‌دست آمده‌اند.

نتایج به‌دست آمده از این تحقیق نشان می‌دهد که با تقویت پوستهٔ مخروطی با نانولوله‌های کربنی می‌توان سختی آن را را به میزان دلخواهی افزایش داد. در واقع با تغییر کسر حجمی نانولوله‌های استفاده شده، فرکانس‌های ارتعاش آن را به میزان دلخواه تغییر داد. تأثیر نانولوله‌ها در افزایش فرکانس پوسته با افزایش زاویهٔ رأس مخروط افزایش می‌یابد. افزایش نسبت ضخامت به شعاع سر بزرگ پوسته باعث افزایش فرکانس‌های ارتعاش آن می‌گردد و تأثیر این عامل در افزایش فرکانس‌ها با افزایش زاویهٔ رأس مخروط افزایش می‌یابد. همچنین احاطه نمودن پوستهٔ مورد نظر با بستر الاستیک باعث افزایش مقادیر فرکانس‌های طبیعی ارتعاش آن می‌گردد.



شکل 9 تغییرات فرکانس بی‌بعد $\Omega=\omega b\sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$ برای پوستهٔ مخروطی ناقص با تکیه‌گاه ساده تقویت شده با نانولوله کربنی با کسر حجمی 28% با تغییر نسبت h/b برای زوایای راس مخروط مختلف (n=5)

جدول 6 تغییرات فرکانس بی‌بعد $\Omega=\omega b\sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$ برای پوستهٔ مخروطی ناقص با تکیه گاه ساده به‌ازای تغییرات سختی بستر الاستیک

K_w (N/m^3)	K_p (N/m)	پوستهٔ تقویت شده با نانولولهٔ کربنی با کسر حجمی 12%، $(n,m=1)$		پوستهٔ ایزوتروپیک از جنس آلومینیم، $(n,m)=(2,1)$	
		α =30°	α =45°	α =30°	α =45°
0	0	1/69684	2/22735	0/84317	0/76629
	10^6	1/80034	2/33541	0/88526	0/80226
	$2/5\times10^6$	1/82417	2/37625	0/90578	0/82601
	5×10^6	1/85236	2/41315	0/93077	0/83277
10^6	0	1/79309	2/31812	0/89788	0/82449
	10^6	1/83526	2/40214	0/92871	0/85022
	$2/5\times10^6$	1/85218	2/45635	0/94566	0/86110
	5×10^6	1/88615	2/50541	0/97021	0/88011
2×10^6	0	1/84129	2/43502	0/94003	0/86144
	10^6	1/87624	2/51025	0/98113	0/88028
	$2/5\times10^6$	1/89805	2/57821	1/01210	0/89217
	5×10^6	1/93742	2/63653	1/04473	0/91576
4×10^6	0	1/90521	2/56298	1/02783	0/90645
	10^6	1/96552	2/67539	1/07677	0/94788
	$2/5\times10^6$	2/03217	2/75445	1/10303	0/97397
	5×10^6	2/11256	2/81148	1/15480	1/01130

7- پیوست

$$s_{11}=\frac{\rho h\omega^2 l}{2}-\frac{1}{8\pi R^2 l}\Big(4\pi^3 A_{11} aR^2-4l^2 A_{12} R\alpha\cos^2\alpha-2l^3 A_{22}\pi \sin\alpha\cos^2\alpha-4l^2 A_{22} a\pi\cos\alpha^2+2\pi^3 A_{11} R^2 l\sin\alpha+4A_{66} n^2 a l^2\pi +4l^2 A_{12} R\pi+4l^2 A_{22} a\pi+2l^3 A_{22}\sin\alpha\pi+2l^3 A_{66} n^2\sin\alpha\pi\Big)$$

$$s_{12}=-\frac{1}{8\pi R^2 l}\Big(-2A_{12} n\sin\alpha l^2 R\pi^2+2l^3 A_{66} n\cos\alpha^2-4\pi^2 A_{66} nalR +2l^3 A_{22} n\cos\alpha^2-4\pi^2 A_{12} nalR-2A_{66} n\sin\alpha l^2 R\pi^2-2l^3 A_{22} n-2l^3 A_{66} n\Big)$$

$$s_{13}=-\frac{1}{8\pi R^2 l}\Big(-4\pi^2 A_{12}\cos\alpha alR-2A_{12}\cos\alpha\sin\alpha l^2 R\pi^2 +2l^3 A_{22}\cos\alpha^3-2l^3 A_{22}\cos\alpha\Big)$$

$$s_{14}=0,\quad s_{15}=0$$

$$s_{21}=-\frac{1}{8\pi R^2 l}\Big(-2A_{12} n l^2 R\pi^2\sin\alpha+2l^3 A_{66} n\cos^2\alpha-4\pi^2 A_{66} nalR+2l^3 A_{22} n\cos^2\alpha-4\pi^2 A_{12} nalR-2A_{66} n l^2 R\pi^2 \sin\alpha-2l^3 A_{22} n-2l^3 A_{66} n\Big)$$

$$s_{22}=\frac{\rho h\omega^2 l}{96}\big(48a+24l\sin\alpha\big)-\frac{1}{8\pi R l}\Big(4\pi^3 A_{66} aR^2+2l^3 A_{22} n^2 \sin\alpha\pi-4l^2 A_{66} R\pi\cos^2\alpha-2l^3 A_{66}\pi\sin\alpha\cos^2\alpha-4l^2 A_{66} a \cos^2\alpha\pi+2\pi^3 A_{66}\sin\alpha R^2 l+4A_{22} n^2 a l^2\pi+4l^2 A_{66} R\pi +4l^2 A_{66} a\pi+2A_{66} l^3\sin\alpha\pi\Big)$$

$$s_{23}=-\frac{1}{8\pi R l}\Big(2l^3 A_{22} n\cos\alpha\sin\alpha\pi+4A_{22} n\cos\alpha a l^2\pi\Big)$$

$$s_{24}=0,\ s_{25}=0$$

$$s_{31}=-\frac{1}{8\pi R^2 l}\Big(-4\pi^2 A_{12} alR\cos\alpha-2A_{12} l^2 R\pi^2\cos\alpha\sin\alpha+2l^3 A_{22} \cos^3\alpha-2l^3 A_{22}\cos\alpha\Big)$$

$$s_{32}=-\frac{1}{8\pi R^2 l}\Big(2l^3 A_{22} n\cos\alpha\pi\sin\alpha+4A_{22} nal^2\pi\cos\alpha\Big)$$

$$s_{33}=\frac{\rho h\omega^2 l}{96}\big(48a+24l\sin\alpha\big)-\frac{1}{8\pi R^2 l}\Big(4\pi^3 A_{55} aR^2+2\pi^3 A_{55} R^2 l\sin\alpha+4l^2 A_{22} a\pi\cos\alpha^2+4A_{44} n^2 a l^2\pi+2l^3 A_{22}\pi \sin\alpha\cos\alpha^2+2l^3 A_{44} n^2\pi\sin\alpha\Big)-\frac{\omega^2}{4l}\Big(2k_p\pi a\sin 2\pi -2k_p\pi^2 a-2k_w l^2-k_p\pi^2 l\sin\alpha\Big)$$

$$s_{34}=-\frac{1}{8\pi R^2 l}\Big(2A_{55} l^2 R^2\pi^2\sin\alpha+4\pi^2 A_{55} alR^2\Big)$$

$$s_{35}=-\frac{1}{8\pi R^2 l}\Big(-2l^3 A_{44} nR\pi\sin\alpha-4A_{44} nal^2 R\pi\Big)$$

$$s_{41}=0,\ s_{42}=0$$

$$s_{43}=-\frac{1}{8\pi R^2 l}\Big(2A_{55} l^2 R^2\pi^2\sin\alpha+4\pi^2 A_{55} alR^2\Big)$$

$$s_{44}=\frac{\rho h\omega^2 l}{96}\big(2lh^2\sin\alpha+4h^2 a\big)-\frac{1}{8\pi R^2 l}\Big(4\pi^3 C_{11} aR^2+4A_{55} alR^2\pi-4l^2 C_{12} R\pi\cos^2\alpha-2l^3 C_{22}\pi\sin\alpha\cos^2\alpha-4l^2 C_{22} a\pi\cos^2\alpha+2\pi^3 C_{11} R^2 l\sin\alpha+4C_{66} n^2 a l^2\pi+4l^2 C_{12} R\pi +4l^2 C_{22} a\pi+2l^3 C_{22}\pi\sin\alpha+2l^3 A_{55} R^2\pi\sin\alpha+2l^3 C_{66} n^2\pi\sin\alpha\Big)$$

$$s_{45}=-\frac{1}{8\pi R^2 l}\Big(-2C_{66} nl^2 R\pi^2\sin\alpha-2C_{12} nl^2 R\pi^2\sin\alpha +2l^3 C_{66} n\cos^2\alpha+2l^3 C_{22} n\cos^2\alpha-4\pi^2 C_{66} nalR -4\pi^2 C_{12} nalR-2l^3 C_{66} n-2l^3 C_{22} n\Big)$$

$$s_{51}=0,\ s_{52}=0$$

$$s_{53}=-\frac{1}{8\pi R^2 l}\Big(-2l^3 A_{44} nR\pi\sin\alpha-4A_{44} nal^2 R\pi\Big)$$

$$s_{54}=-\frac{1}{8\pi R^2 l}\Big(2l^3 C_{66} n\cos^2\alpha-2C_{66} nl^2 R\pi^2\sin\alpha-2C_{12} nl^2 R\pi^2\sin\alpha+2l^3 C_{22} n\cos^2\alpha-4\pi^2 C_{66} nalR-4\pi^2 C_{12} nalR-2l^3 C_{66} n-2l^3 C_{22} n\Big)$$

$$s_{55}=\frac{\rho h\omega^2 l}{96}\big(2lh^2\sin\alpha+4h^2 a\big)-\frac{1}{8\pi R^2 l}\Big(4\pi^3 C_{66} aR^2 +2l^3 C_{22} n^2\pi\sin\alpha-4l^2 C_{66} R\pi\cos^2\alpha-2l^3 C_{66}\pi \sin\alpha\cos^2\alpha-4l^2 C_{66} a\pi\cos\alpha^2+2\pi^3 C_{66}\sin\alpha R^2 l +4A_{44} a l^2 R^2\pi+4C_{22} n^2 a l^2\pi+4l^2 C_{66} R\pi +4l^2 C_{66} a\pi+2C_{66} l^3\pi\sin\alpha+2l^3 A_{44} R^2\pi\sin\alpha\Big)$$

که در آن A_{ij} ، B_{ij} و C_{ij} طبق رابطهٔ زیر تعریف شده‌اند.

$$\{A_{ij}\quad B_{ij}\quad C_{ij}\}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}\{1\quad z\quad z^2\}dz$$

8- مراجع

[1] M. J. Ebrahimi, M. M. Najafizadeh, Free vibration of two-dimensional functionally graded circular cylindrical shells on elastic foundation, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 13, No. 5, pp. 27-38, 2013. (In Persian)

[2] Sh. Hosseini-Hashemi, K. Khorami, Analysis of free vibrations of moderately thick cylindrical shells made of functionally graded materials using differential quadrature method, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 11, No. 2, pp. 93-106, 2011. (In Persian)

[3] K. Daneshjou, R. Madoliat, M. Talebitooti, Three-dimensional vibration analysis and critical speed of rotating orthogonally stiffened laminated cylindrical shells under axial load and pressure, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 12, No. 6, pp. 80-94, 2012. (In Persian)

[4] A. Arjangpay, R. Ansari, M. Darvizah, Vibration analysis of a FGM cylindrical shell using MLPG Method , *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 13, No. 3, pp. 93-101, 2012. (In Persian)

[5] C. H. Sun, F. Li, H. M. Cheng, G. Q. Lu, Axial Young's modulus prediction of single-walled carbon nanotube arrays with diameters from nanometer to meter Scales, *Applied Physics Letters*, Vol. 87, pp. 193101-3, 2005.

[6] R. Zhu, E. Pan, A. K. Roy, Molecular dynamics study of the stress–strain behavior of carbon-nanotube reinforced Epon 862 composites, *Material Science Engineering A,* Vol. 447, No. 1-2, pp. 51-7, 2007.

[7] J. D. Fidelus, E. Wiesel, F. H. Gojny, K. Schulte, H. D. Wagner, Thermo-mechanical properties of randomly oriented carbon/epoxy nanocomposites, *Composites Part A,* Vol. 36, No. 11, pp. 1555-61, 2005.

[8] M. Griebel, J. Hamaekers, Molecular dynamics simulations of the elastic moduli of polymer–carbon nanotube composites, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 193, No. 17-20, pp. 1773-88, 2004.

[9] Y. S. Song, J. R. Youn, Modeling of effective elastic properties for polymer based carbon nanotube composites, *Polymer,* Vol. 47, No. 5, pp. 1741-8, 2006.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.12.6.7]

[28] X. Zhao, K. M. Liewa, Free vibration analysis of functionally graded conical shell panels by a meshless method, *composite structures,* Vol. 93, No. 2, pp. 649-664, 2011.

[29] H. Shen Shen, Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, Part I: Axially-loaded shells, *Composite Structures,* Vol. 93, No. 8, pp. 2096–2108, 2011.

[30] H. Shen Shen, Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, Part II: Pressure-loaded shells, *Composite Structures,* Vol. 93, No. 10, pp. 2496–2503, 2011.

[32] R. Moradi-Dastjerdi, M. Foroutan, A. Pourasghar, Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite cylindrical reinforced by carbon nanotube by a mesh-free method, *Materials & Design,* Vol. 44, No. 1, pp. 256-266, 2013.

[33] M. H. Yas, A. Pourasghar, S. Kamarian, M. Heshmati, Three-dimensional free vibration of functionally graded nanocomposite cylindrical panels reinforced by carbon nanotube, *Materials & Design,* Vol. 49, No. 1, pp. 583-590, 2013.

[34] H. Shen, Y. Xiang, Nonlinear vibration of nanotube reinforced composite cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments, *Composite Structures,* Vol. 111, pp. 291-300, 2014.

[35] P. Malekzadeh, A. R. Fiouz, M. Sobhrouyan, Three-dimensional free vibration of functionally graded truncated conical shells subjected to thermal environment, *International Journal of Pressure Vessels and Piping,* Vol. 89, No. 1, pp. 210-221, 2012.

[36] M. M. Fotouhi, R. D. Firouz-Abadi, H. Haddadpour. Free vibration analysis of nanocones embedded in an elastic medium using a nonlocal continuum shell model, *International Journal of Engineering Science,* Vol. 64, No. 1, pp. 14-22, 2013.

[37] R. D. Firouz Abadi, M. M. Fotouhi, H. Haddadpour, Stability analysis of nanocones under external pressure and axial compression using nonlocal shell model*, Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, Vol. 44, No. 9, pp. 1832-1837, 2012.*

[38] R. D. Firouz-Abadi M. M. Fotouhi, H. Haddadpour, Free vibration analysis of nanocones using a nonlocal continuum model*, Physics Letters A,* Vol. 375, No. 41, pp. 3593-3598, 2011.

[39] G. D. Seidel, D. C. Lagoudas, Micromechanical analysis of the effective elastic properties of carbon nanotube reinforced composites, *Mechanics of Materials,* Vol. 38, No. 8-10, pp. 884–907, 2006.

[40] V. Anumandla, R. F. Gibson, A comprehensive closed form micromechanics model for estimating the elastic modulus of nanotube-reinforced composites, *Composites Part A,* Vol. 37, No. 12, pp. 2178–85, 2006.

[41] H. Shen Shen, Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates in thermal environments, *Composite Structures,* Vol. 91, No. 1, pp. 9-19, 2009.

[42] M. E. Fares , Y. G. Youssif, A. E. Alamir, Design and control optimization of composite laminated truncated conical shells for minimum dynamic response including transverse shear deformation, *Composite Structures,* Vol. 64, No. 2, pp. 139–150, 2004.

[43] W. Soedel, *Vibrations of Shells and Plates,* Marcel Dekker Inc., New York, 1981.

[44] A. H. Sofiyev, N. Kuruoglu, Natural frequency of laminated orthotropic shells with different boundary conditions and resting on the Pasternak type elastic foundation, *Composites: Part B,* Vol. 42, No. 6, pp. 1562–1570, 2011.

[45] R. Rahmani, A. Qurban Pour, A. Rastgoo, *Introduction to Nanocomposites and Nano-Tubes,* Tehran:Academic book Publication, 2012. (In Persian)

[46] G. Formica, W. Lacarbonara, R. Alessi, Vibrations of carbon nanotube-reinforced composites*, Journal of Sound and Vibration,* Vol. 329, No. 10, pp. 1875–1889, 2010.

[10] Y. Han, J. Elliott, Molecular dynamics simulations of the elastic properties of polymer/ carbon nanotube composites, *Computational Material Sci*ence, Vol. 39, No. 2, pp. 315-23, 2007.

[11] P. Bonnet, D. Sireude, B. Garnier, O. Chauvet, Thermal properties and percolation in carbon nanotube-polymer composites, *Journal of Applied Physics,* Vol. 91, pp. 201910-4, 2007.

[12] P. Joshi, S. H. Upadhyay, Evaluation of elastic properties of multi-walled cabon nanotube reinforced composite, *Computational Materials Science,* Vol. 81, No. 1, pp. 332-338, 2014.

[13] T. Vodenitcharova, L. C. Zhang, Bending and local buckling of a nanocomposite beam reinforced by a single-walled carbon nanotube, *International Journal of Solid Structures,* Vol. 43, No. 10, pp. 3006-24, 2006.

[14] J. Wuite, S. Adali, Deflection and stress behaviour of nanocomposite reinforced beams using a multiscale analysis, *Composite Structures,* Vol. 71, No. 3-4, pp. 388-96, 2005.

[15] M. H. Yas, M. Heshmati, Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite beam reinforced by randomly oriented carbon nanotube under the action of moving load, *Applied Mathematical Modelling,* Vol. 36, No. 4, pp. 1371-1394, 2012.

[16] M. H. Yas, N. Samadi, Free vibrations and buckling analysis of carbon nanotube reinforced composite Timoshenko beams on elastic foundation, *International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 98,* No. 1, *pp. 119-128, 2012.*

[16] T. Irie, G. Yamada, Y. Kaneko, Free vibration of a conical shell with variable thickness, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 82, No. 1, pp. 83–94, 1982.

[17] T. Irie, G. Yamada, Y. Kaneko, Natural frequencies of truncated conical shells, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 92, No. 3, pp. 447–453, 1984.

[18] A. W. Leissa, *Vibration of Shells,* New York:Acoustic Society of America, 1993.

[19] K. R. sivadas, N. Ganesan, Free vibration of cantilever conical shells with variable thickness, *Computer and Structures,* Vol. 36, No. 3, pp. 559–566, 1990.

[20] K. R. sivadas, N. Ganesan, vibration analysis of thick composite clamped conical shells of varying thickness, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 152, No. 1, pp. 27–37, 1992.

[21] K. R. Sivadas, N. Ganesan, Vibration analysis of laminated conical shells with variable thickness*, Journal of Sound and Vibration,* Vol. 148, No. 3, pp. 477–491, 1991.

[22] L. Hua, Frequency analysis of rotating truncated circular orthotropic conical shells with different boundary conditions, *Composites Science and Technology,* Vol. 60, No. 16, pp. 2945-2955, 2000.

[23] F. M. Li, K. Kishimoto, W. H. Huang, The calculations of natural frequencies and forced vibration responses of conical shell using the Rayleigh–Ritz method, *Mechanics Research Communications,* Vol. 36, No. 5, pp. 595–602, 2009.

[24] F. Tornabene, Free vibration analysis of functionally graded conical shell, cylindrical shell and annular plate structures with a four- parameter power- law distribution, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 198, No. 37-40, pp. 2911-2935, 2009.

[25] A. H. Sofiyev, N. Kuruoglu, H. M. Halilov, The vibration and stability of non-homogeneous orthotropic conical shells with clamped edges subjected to uniform external pressures, *Applied Mathematical Modeling,* Vol. 34, No. 7, pp. 1807–1822, 2010.

[26] A. H. Sofiyev, large-amplitude vibration of non-homogenous orthotropic composite truncated conical shells, *Composites Part B: Engineering,* Vol. 61, pp. 365-374, 2014.

[27] A. R. Setoodeh, M. Tahani, E. Selahi, Transient dynamic and free vibration analysis of functionally graded truncated conical shells with non-uniform thickness subjected to mechanical shock loading, *Composites Part B: Engineering,* Vol. 43, No. 5, pp. 2161-2171, 2012.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.12.6.7]