ماهنامه علمى پژوهشى



مهندسی مکانیک مدر س

mme.modares.ac.ir

بررسي تداخل غيرخطي بين مودهاي نامتقارن ورق ساندويچي ويسكوالاستيك تحت بار اتفاقي با يهناي باند وسيع

 2 سعد محمو دخانی *1 ، حسن حدادیو

1 - استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

2- استاد، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

s_mahmoudkhani@sbu.ac.ir ، 4716-19839 تهران، صندوق يستى s_mahmoudkhani

چکیدہ	اطلاعات مقاله
در این مطالعه، ارتعاشات غیرخطی ورق ساندویچی با لایه میانی ویسکوالاستیک، تحت اثر بار عرضی اتفاقی با پهنای باند وسیع مورد بررسی قرار گرفته است. بهطور ویژه، اثر تشدید داخلی ناشی از نزدیکی فرکانسهای طبیعی مودهای نامتقارن ورق با طول و عرض نزدیک به هم، در پاسخ مورد توجه قرار گرفته و امکان بروز پاسخ دو مودی و پدیدهایی همانند آشکار-نهانی اتفاقی مورد بررسی قرارگرفته است. مدلسازی لایه	مقاله پژوهشی کامل دریافت: 27 اردیبهشت 1395 پذیرش: 24 تیر 1395 ارائه در سابت: 31 مرداد 1395
میانی ورق، برپایه فرض بزرگی نسبی کرنش و برش های عرضی بوده که منجر به حضور عبارات غیرخطی مادی و هندسی در معادلات حاکم شده است. برای رابطه ساختاری غیرخطی ماده ویسکوالاستیک لایه میانی نیز از مدلی تکانتگرالی استفاده شده است. برای میدان جابجایی درنظرگرفته شده برای لایه میانی نیز، تغییرات در راستای ضخامت، به شکل خطی برای مولفه های درون صفحه ای و به شکل تابع درجه دو برای مولفه برون صفحه ای درنظرگرفته شده است. به علاوه، لایه های بیرونی به دلیل ضخامت کمتر، با استفاده از تئوری کیرشهف به همراه فرضیات ون کارمن مدلسازی شده اند. حل مسئله در گام اول به کمک روش گالرکین در کنار روش اغتشاشی انجام شده که منجر به تشکیل معادلات گسسته غیرخطی زمانی با عبارات انتگرالی شده است. این معادلات، با استفاده از روش اغتشاشی انجام شده که منجر به تشکیل معادلات انشعاب در پاسخ پایا با روش تعقیب مسیر شبه کمانی مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین از شبیه سازی عددی مونتکارلو برای ارزیابی حل تحلیلی و همچنین بررسی پاسخ زمانی ورق استفاده شده است. نتایج عددی در نهایت، برای تعیین پاسخ دومودی و تعیین کمترین بار لازم برای وقرع اندرکنش سن مودها را نه شده است.	کلید واژگان: ورق ساندویچی ارتعاشات اتفاقی روش بستن ممان غیرگوسی کرنشها و دورانهای متوسط

Nonlinear modal interaction between asymmetric modes of sandwich plates under wide-band random excitation

Saeed Mahmoudkhani^{1*}, Hassan Haddadpour²

1- Aerospace Department, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

2- Department of Aerospace Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran * P.O.B. 4716-19839, Tehran, Iran, s_mahmoudkhani@sbu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION ABSTRACT The nonlinear vibration of sandwich viscoelastic plates under wide-band random excitation is Original Research Paper Received 16 May 2016 investigated. The main focus is on the influence of the one-to-one internal resonance, arisen from the Accepted 14 July 2016 close natural frequencies of the asymmetric modes of a near-square plate on the response. The multi-Available Online 21 August 2016 modal response and the on-off intermittency phenomenon are especially considered. The mathematical modeling of the mid-layer is based on the moderate transverse shear strains and rotations, which have Keywords: led to both geometrical and material nonlinearities. For the nonlinear constitutive equation of the mid Sandwich plate Nonlinear interaction layer, a single integral viscoelastic model is used. The displacement field in the thickness direction is random vibration also assumed to be linear for the in-plane components and quadratic for the out-of-plane components. Non-Gaussian moment closure Moreover, the Kirchhoff theory with the von-Karman nonlinearities is used for the outer layers. The Moderate rotations and strains solution is initiated by applying the perturbation method along with the Galerkin's method to obtain integro-differential ordinary equations in time. These equations are then solved using the Gaussian and non-Gaussian closure methods and the results are used to investigate the occurrence of the bifurcation with the aid of the Pseudo-arclength continuation method. Numerical results are presented for the multimodal response and the minimum excitation intensity required for the nonlinear interaction between asymmetric modes

صنايع مختلف مهندسي همانند صنايع هوافضا، صنايع دريايي و صنايع سازههای ساندویچی یکی از انواع سازههای مهندسی با قابلیت کاربرد در 🦳 عمرانی هستند. ساختار این نوع سازهها شامل سه لایه رویهم قرار گرفته

1- مقدمه

Please cite this article using:

S. Mahmoudkhani, H. Haddadpour, Nonlinear modal interaction between asymmetric modes of sandwich plates under wide-band random excitation, Modares Mechanical Engineering, Vol. 16, No. 8, pp. 185-195, 2016 (in Persian)

است که لایههای بیرونی بهطور معمول از سفتی و چگالی بیشتری نسبت به لایه میانی (هسته) برخوردار هستند که همین امر موجب افزایش سفتی ویژه این نوع سازه میشود. بهعلاوه در صورت استفاده از مواد ویسکوالاستیک برای لایه میانی، سازه از میرایی بالایی بهعلت بروز کرنشهای برشی عرضی قابل توجه در لایه مقید شده مابین لایههای با سفتی بیشتر برخوردار خواهد شد. این دو ویژگی موجب افزایش کارایی سازههای ساندویچی با لایه ویسکوالاستیک در معرض انواع بارهای دینامیکی شده و لذا در بسیاری از سازههای هوافضایی و عمرانی مورد استفاده قرار میگیرند.

با توجه به ماهیت اتفاقی بسیاری از بارهایی که سازههای مهندسی در طول کارکرد خود متحمل می شوند، بررسی اثر این نوع بارها بر سازه، یکی از زمینههای مورد توجه در مطالعات انجام گرفته است. در این ارتباط می توان به مطالعات اخیر صورت گرفته توسط ایرانی و همکاران [1] روی ارتعاشات غيرخطى تير با مقطع متغير تحت بار اتفاقى، مطالعه صورت گرفته توسط عابدي و اصنافي [2] و اصنافي و عابدي [3] براي تعيين نواحي بروز ناپایداری دینامیکی در ورق با خواص هدفمند و تحت بار اتفاقی اشاره کرد. در ارتباط با سازههای ساندوچی نیز میتوان به مطالعه راماچاندرا ردی و همکاران [4] و همچنین گریسون و همکاران [5] اشاره کرد. در مرجع [4] پاسخ خطی ورق ساندویچی با لبه گیردار تحت بار تصادفی با استفاده از روشهای تحلیلی بهدست آمده و با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده است. مدلسازی سازهای در این مطالعه باصرفنظر از کرنشهای نرمال راستای ضخامت انجام گرفته است. در مرجع [5] نیز از روشهای تحلیلی برای تعیین پاسخ خطی به بار تصادفی با پهنای باند وسیع استفاده شده است. اما برای شبیهسازی، تغییر طول در راستای ضخامت هسته نیز درنظر گرفته شده است. همچنین سازه در شرایطی که لایه ویسکوالاستیک و لایه مقید کننده بالای آن، تنها بخشی از سطح لایه پایین را دربرگرفته باشند، مورد بررسی قرار گرفته است. باید توجه داشت که فرض خطی بودن رفتار سازه در بسیاری از موارد کاربردی، منطبق با واقعیت نبوده و لذا قادر به پیش بینی درست رفتار سازه نخواهد بود. این امر بهویژه در صورت اتفاقی بودن بارهای اعمالی اهمیت بیشتری مییابد چرا که در چنین شرایطی امکان بروز رفتارهای پیچیده در سازه همانند پدیده پرش تصادفی¹ و یا پدیده مشابهی با نام آشکار-نهانی تناوبي² [6] خواهد بود. پيشبيني اين رفتارها، عليرغم اثر قابل توجه، البته با استفاده از مدل خطی شده امکان پذیر نبوده و شبیه سازی غیرخطی سازه را لازم مىنمايد. مطالعات غيرخطى در اين زمينه نيز توسط وايكايتيس و همکاران [7] با مطالعه روی پاسخ تیر و ورق ساندویچی با هسته ويسكوالاستيك الكتريكي³ به بار تصادفي با محتواي فركانسي وسيع انجام گرفته است. منشاء رفتار غیرخطی در این مطالعه روابط غیرخطی هندسی بر مبنای رابطه ونکارمن درنظرگرفته شده است. معادلات حاکم در این مطالعات با استفاده از روش گالرکین، گسسته شده و سپس با شبیهسازیهای عددی پاسخ زمانی و همچنین تابع چگالی توان طیفی و مجذور میانگین مربعات پاسخ محاسبه شده است. بررسی اثر بارهای تصادفی بر تیرهای ساندویچی در مطالعه لی [8] با شبیهسازی غیرخطی ماده ویسکوالاستیک، مورد توجه قرار گرفته است. در این مقاله نیز پاسخ زمانی سازه با حل عددی معادلات، مورد مطالعه قرار گرفته است. تاکید ویژهای اما، در هیچیک از مطالعات یاد شده در این زمینه بر بروز پدیدههای متفاوت در حضور همزمان

بارهای تصادفی و رفتار غیرخطی نشد. مطالعه دیگر در این زمینه توسط محمودخانی و حدادپور [9] با هدف بررسی بروز پدیده پرش اتفاقی و دومودی شدن تابع چگالی احتمال پاسخ جابجایی در ورق ساندویچی تحت اثر بارهای اتفاقی با پهنای باند باریک صورت گرفته است. در این مطالعه، معادلات فوکرپلانک⁵ مربوط به معادلات دامنه-فاز حاصل از اعمال روش اغتشاشی مقیاسهای چندگانه⁶، با استفاده از روش اختلاف محدود، حل شده و از آن برای تعیین پاسخ فرکانسی سازه و همچنین تعیین تابع چگالی احتمال پاسخ استفاده شده است.

مطالعات اشاره شده در بالا تنها بخشی از از رفتارغیرخطی ارتعاشی ورقهای ساندویچی را دربر می گیرند و این امر انجام مطالعات بیشتر در این زمینه را لازم مینماید. یکی از موارد مهم در این ارتباط بررسی رفتار سازه تحت اثر بارهای اتفاقی با پهنای باند وسیع است که در صورت برقرار بودن شرایط تشدید داخلی در سازه منجر به پدیدههای رفتاری خاص در سازه می-شود. بر همین مبنا، مطالعه حاضر اثر تداخل غیرخطی مودهای نامتقارن ورق ساندویچی را تحت بارهای اتفاقی با پهنای باند بالا و توزیع گوسی بهشکل تحلیلی مورد توجه قرار میدهد. مودهای نامتقارن ورق در شرایط نزدیکی ابعاد طولی و عرضی ورق (شکل نزدیک به مربع) دارای فرکانسهای طبیعی نزدیک به هم هستند که همین امر شرایط اندر کنش بین این مودها را ایجاد می کند. در این شرایط تحریک مستقیم یکی از این مودها منجر به تحریک غیرمستقیم و در نتیجه انتقال انرژی به مود نامتقارن دیگر خواهد شد که با توجه به اتفاقی بودن بارها منجر به یدیده آشکار-نهانی تناوبی میگردد. برای انجام این کار، معادلات حاکم بر مبنای فرض بزرگی نسبی دوران و کرنش-های عرضی لایه میانی که در مراجع [10,9] توسعه داده شده، با استفاده از روش اغتشاشی در کنار روش گالرکین، تبدیل به معادلات دیفرانسیلی معمولی شده است. پس از آن مقادیر مربوط به مجذور میانگین مربعات پاسخ با استفاده از روش تحلیلی بستن ممان غیرگوسی ' بدست آمده و با مقادیر حاصل از روش بستن گوسی مقایسه شد. در ارتباط با روش بستن ممان لازم به توجه است که این روش یکی از روشهای تحلیلی حل معادلات دیفرانسیلی تصادفی بر پایه استخراج معادلات مربوط به ممانهای مرتبههای مختلف از معادلات فوکر-پلانک است. در این روش در صورت غیرخطی بودن معادلات، سلسلهای بینهایت از معادلات مربوط به ممان ایجاد می شود، بهطوری که در معادلات بهدست آمده در هر مرتبه، ممانهای با مرتبههای بالاتر ظاهر خواهند شد که این امر حل متوالی معادلات با مراتب متوالی را با مشکل روبرو میکند. بر این اساس نیاز به روابط بیشتری برای تعیین مقادیر ممانهای مرتبههای بالاتر بر حسب سایر ممانها خواهد بود که این روابط از طریق روش بستن ممان فراهم خواهند شد. همچنین مرتبههای معادلات ممان درنظرگرفته شده نیز تا مقداری محدود درنظرگرفته خواهد شد. در سادهترین حالت از این روش، تنها معادلات تا مرتبه دو درنظر گرفته می شوند که این حالت معادل با فرض گوسی بودن پاسخ است و به همین علت به روش بستن ممانها تا مرتبه دو، بستن ممان گوسی گفته میشود. در صورت احتساب مرتبههای بالاتر ممان نیز از نام روش بستن ممان غیرگوسی استفاده می شود. در مطالعه حاضر به علت بروز پدیده تداخل بین مودها، روش بستن گوسی از دقت لازم برخوردار نبود و لذا از روش بستن ممان غیرگوسی تا مرتبه چهارم استفاده خواهد شد. همچنین بهمنظور ارزیابی درستی حل

¹ Stochastic jump

² On-off intermittency

 ³ Electrorheological (ER)
 ⁴ Power Spectral Density (PSD)

⁵ Fokker–Planck–Kolmogorov (FPK)

⁶Method of Multiple Scales (MMS) ⁷Non-Gaussian moment closure (NGMC)

Non-Gaussian moment closure (NGMC

j **(**)

تحلیلی، شبیه سازی عددی مونت کارلو نیز در این مطالعه مورد استفاده قرار گرفته است.

در بخشهای بعدی، ابتدا معادلات حرکت حاکم بر سیستم که شامل هفت معادله مشتقات جزئی غیرخطی و دو معادله جبری مربوط به شرط تراکمناپذیری ماده ویسکوالاستیک است استخراج شده است. این معادلات با درنظر گرفتن تغییرات جابجاییها در راستای ضخامت، بهشکل خطی برای مولفههای درون-صفحهای و بهشکل تابع درجه دو برای مولفه برون-صفحهای (عرضی) لایه میانی بدست آمدهاند. برای لایههای بیرونی ورق ساندویچی نیز شده است. پس از استخراج معادلات، نحوه اعمال روش اغتششاشی در کنار روش گالرکین و همچنین روش بستن ممان غیر گوسی شرح داده شده و در نهیایت معادلات حاصل برای ممان با استفاده از روش عددی شبه کمانی¹ برای بررسی تغییرات میانگین مربعات پاسخ پایا² با تغییرات چگالی بار تحریک حل شدهاند. همچنین از روش عددی مونت کارلو³ برای ارزیابی و بررسی نتایج حل شده ندی بهره گرفته شده است. توجه ویژه در این قسمت به میزان شدت بار لازم برای تحریک غیرمستقیم مود نامتقارن و بروز انشعاب⁴ در پاسخ شده است.

2- روابط حاكم

نمای ورق ساندویچی مورد بررسی به همراه دستگاههای مختصاتی که به طور جداگانه برای هر لایه درنظر گرفته شده، در شکل 1 نشان داده شده است. همان طور که مشخص است، صفحه x_1x_2 مربوط به دستگاه مختصات هر لایه منطبق بر صفحه میانی آن لایه شده و مرکز آن بر روی گوشه ورق قرار گرفته است. همچنین لازم به ذکر است که بالانویس و یا زیرنویس t ، c d که در شکل 1 نشان داده شده، به ترتیب، نمایانگر مقادیر مرتبط با لایه بالایی، میانی و پایینی هستند. این قرارداد در باقی روابط و نمادهای ریاضی استفاده شده در بخشهای بعد نیز برقرار خواهد بود.

1-2- روابط سينماتيک

میدان جابجایی درنظرگرفته درکار حاضر برای لایه میانی بهشکل زیر خواهد ود:

$$U_{\alpha}(x_{1}, x_{2}, x_{3}^{(c)}, t) = \overset{0}{u}_{\alpha}^{(c)}(x_{1}, x_{2}, + x_{3}^{(c)}) \overset{1}{u}_{\alpha}^{(c)}(x_{1}, x_{2}, t), \qquad (1)$$

$$U_{3}(x_{1}, x_{2}, x_{3}^{(c)}, t) = \overset{0}{u}_{3}^{(c)}(x_{1}, x_{2}, + x_{3}^{(c)}) \overset{1}{u}_{3}^{(c)}(x_{1}, x_{2}, t), \qquad (1)$$

$$+ (x_3^{(c)})^{22} u_3^{(c)} (x_{1i} x_{2i} t)$$
(2)

که U_{lpha} برای a = 1,2 نشاندهنده جابجاییهای درونصفحهای در U_{lpha}



Fig. 1 The geometry of a sandwich plate and the coordinate systems adopted

شکل 1 نمای ورق ساندویچی سه لایه و دستگاههای مختصات درنظر گرفته شده

است:

1 E 0 E 3 1 U 1 U 1 2 i

 u_i راستای x_1 و x_2 و U_3 جابجایی در راستای x_3 هستند. بهعلاوه، عبارت u_i مرتبه y_1 است. رابطه ساده شده مرتبه y_1 از بسط مولفه جابجایی هسته در راستای x_i است. رابطه ساده شده کرنش -جابجایی برای مولفههای کرنش، بر اساس فرض بزرگی نسبی کرنش و دورانهای عرضی هسته که در مراجع [10,9]، با بهره گیری از روش نظاممند ردی [11]، توسعه داده شده است، مطابق زیر خواهد بود:

$$E = \sum_{k=0}^{2} {E \atop k} (x_{3}^{(c)})^{k}$$
(3)

شرط تراکم پذیری منجر به دو معادله زیر خواهد شد [10]:

برای لایههای بیرونی نیز با توجه به ضخامت کم و سفتی زیاد این لایه نسبت به هسته، از فرضیات کیرشهف در کنار عبارات غیرخطی ونکارمن استفاده شده است. لازم به توجه است که عبارات جابجایی مربوط به لایههای بالا و پایین، با استفاده از روابط مربوط به لزوم عدم لغزش بین لایهها [10] بر حسب عبارات جابجایی لایه میانی قابل بیان خواهند بود.

2-2- روابط ساختاری

در این مطالعه، با توجه به فرض تراکمناپذیری و همسانگرد بودن ماده ویسکوالاستیک، شکل ساده شده رابطه گرین-ریولین⁵ که توسط پیپکین [12] برای مواد ویسکوالاستیک تراکمناپذیر و همسانگرد ارائه شده است، به-کار خواهد رفت. رابطه گرین-ریولین بین تنش دوم پایولا-کیرشهف⁶، S و کرنش گرین، B, پس از اعمال روش استیفورد [13] و نامبودیریپاد و نیس [14] و همچنین اعمال فرض بزرگی نسبی کرنشها و دورانهای عرضی به شکل رابطه تکانتگرالی زیربهدست خواهد آمد [10]:

$$S_{ij}(X, t) = -p(X, t)\delta_{ij} + S^e_{ij}(X, t) - \frac{(1-\gamma)}{t_R} \int_0^t S^e_{ij}(X, \tau) e^{\frac{t-\tau}{t_R}} d\tau i_i j = 1,2,3, X = x_1, x_2, x_3^{(c)}$$
(6)
$$\Sigma_R \quad \Delta t = t_R \quad \Delta t = 0$$
(6)
$$\Sigma_R \quad \Delta t = 0$$
(6)
$$\Sigma_R \quad \Delta t = 0$$
(6)
$$\Sigma_R \quad \Delta t = 0$$
(7)
$$\Sigma_R \quad \Delta t = 0$$
(7)
$$\Sigma_R \quad \Delta t = 0$$
(6)
$$\Sigma_R \quad \Delta t = 0$$
(7)
$$\Sigma_R \quad \Delta t = 0$$
(6)
$$\Sigma_R \quad \Delta t = 0$$
(6)
$$\Sigma_R \quad \Delta t = 0$$
(7)
$$\Sigma_R \quad \Delta t = 0$$
(7)
$$\Sigma_R \quad \Delta t = 0$$
(6)
$$\Sigma_R \quad \Delta t = 0$$
(7)

¹ Pseudo-arclength continuation

² Steady-state

³ Monte carlo ⁴ Bifurcation

⁵ Green-Rivlin

⁶ Second Piola-Kirchhoff stress tensor ⁷ Standard Solid Model (SSM)

$$\sum_{k=1,2} \sum_{j=1,2} \sum_{i=t,0} \left(-N_{jk,jk}^{(0)} \frac{h_i}{2} \right) \frac{h_c}{2}$$

$$- \sum_{k=1,2} \sum_{j=1,2} \left(N_{jk,jk}^{(0)} - N_{jk,jk}^{(0)} \right) \frac{h_c}{2}$$

$$+ \sum_{i=1,2} N_{i3}^{(0)} \frac{u_{3,i}}{u_{3,i}} + \left(I_0^{(2)} \ddot{u}_{3}^{(2)} - I_0^{(2)} \ddot{u}_{3}^{(2)} \right) \frac{h_c}{2}$$

$$+ \sum_{i=1,2} \frac{h_c}{2} \left[\left(\frac{I_0^{(0)} h_t}{2} \ddot{u}_{i,i}^{(0)} + \frac{I_0^{(2)} h_b}{2} \ddot{u}_{i,i}^{(0)} \right) + \left(-I_2^{(0)} \ddot{u}_{3,ii}^{(0)} + I_2^{(0)} \ddot{u}_{3,ii}^{(0)} \right] \right] + I_2^{(2)} \ddot{u}_{3}^{(2)} - \tilde{q} \frac{h_c}{2} = 0$$

$$\delta \ddot{u}_3^2: - \sum_{i=1,2} \sum_{j=1,2} N_{i3,i}^2 + 2N_{33}^3 - \sum_{i=1,2} \sum_{j=1,2} \left(-\frac{0}{N_{jk,jk}} \frac{h_c}{2} + \frac{N_{i3,i}^{(0)} h_b}{2} \right) \left(\frac{h_c}{2} \right)^2$$

$$- \sum_{k=1,2} \sum_{j=1,2} \sum_{i=1,2} \sum_{i=i,b} N_{ik,jk} \left(\frac{h_c}{2} \right)^2$$

$$+ \sum_{i=1,2} \left(\frac{h_c}{2} \right)^2 \left[\frac{1}{2} \left(I_0^{(0)} h_t \ddot{u}_{i,i}^{(0)} - I_0^{(2)} h_b \ddot{u}_{i,i}^{(0)} \right) \right]$$

$$- \left(I_2^{(2)} \ddot{u}_{3,ii}^{(0)} + I_2^{(2)} \ddot{u}_{3,ii}^{(2)} \right] = 0 \qquad (s-9)$$

که در رابطه (9) و همچنین روابط بعدی این مطالعه، بالانویس c مربوط به عبارات جابجایی لایه میانی، بهمنظور ساده شدن روابط حذف شده است. عبارات N_{ij}^{l} نیز نشاندهنده تنشهای منتجه هستند که طبق رابطه زیر تعریف میشوند:

$$\begin{split} {}^{k}_{Nij} &= \int_{-\frac{h_{k}}{2}}^{h_{k}/2} \left(x_{3}^{\textbf{O}} \right)^{k} S_{ij} \ dx_{3}^{\textbf{O}} \\ &k = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, l = c, t, b \\ &\text{ ansatzi c, limbox (10)} \\ \end{split}$$

بالایی ورق است که به سمت بالا مثبت درنظر گرفته شده است. فشار اعمالی در مطالعه حاضر به کل نویز سفید در زمان درنظر گرفته شده است: $\tilde{q}(x_1, x_2, t) = q(x_1, x_2)\varsigma(t)$ (11) $q(x_1, x_2)$ نویز سفید با تابع چگالی توان ثابت $\tilde{\delta}_0$ بوده و $\varsigma(t)$

تابعی معین و غیرتصادفی است که بهشکل زیر درنظر گرفته شده است:

$$q(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sin(\frac{\pi x_1}{l_1})\sin(\frac{2\pi x_2}{l_2})$$
(12)

که با هدف تحریک مستقیم مود نامتقارن با تعداد نیم موج یک و دو در راستای x_1 و x_2 مود (**1,2**) است. علت اتخاذ چنین فرضی، ایجاد امکان بررسی تحلیلی انتقال انرژی از مود (**1,2**) به مود نامتقارن (**1,2**) بر اثر تشدید داخلی است. شرایط مرزی متناظر با معادلات حرکت نیز با استفاده از اصل همیلتون قابل استخراج خواهد بود که برای شرایط تکیه گاه ساده با لبه های آزاد در راستاهای درون صفحه ای در مرجع [10] ارائه شده است.

3- حل معادلات

در این بخش ابتدا روش گسستهسازی و تبدیل معادلات مشتقات جزئی حاکم به معادلات دیفرانسیلی معمولی برحسب زمان تشریح خواهد شد. پس

$$S_{\alpha\beta}^{c}(X,t) = 2c_{0}(1 + \mu)E_{\alpha\beta}(X,t) - 4c_{0}(1 + 2\mu)E_{\alpha3}(X,t)E_{\beta3}(X,t)$$

$$S_{\alpha3}^{e}(X,t) = [2p(X,t) + 2c_{0}(1 + \mu)]E_{\alpha3}(X,t) - 4c_{0}(1 + 2\mu)\sum_{i=1,2,3} E_{\alpha i}(X,t)E_{i3}(X,t) + 16c_{0}(1 + \mu)E_{\alpha3}(X,t)\sum_{\beta=1,2} E_{\beta3}(X,t)^{2}$$
(7)

و $C_0 \ e$ فرایب ثابت ماده در الگوی ماده مونی-ریولین 1 هستند. همچنین در رابطه (7)، p فشار هیدرستاتیکی مجهولی است که در نتیجه اعمال قید تراکمناپذیری ماده ویسکوالاستیک ظاهر شده است و وابستگی آن به مختصه راستای ضخامت به شکل زیر قابل بیان است:

$$p(X,t) = \stackrel{0}{p}(x_1, x_2, t) + \stackrel{1}{p}(x_1, x_2, t)x_3^{(c)}$$

$$i^{(O)}$$
(8)

که $\stackrel{n}{p}$ و p بههمراه عبارات جابجایی لایه میانی ((u_i) تعداد 9 تابع مجهول را تشکیل میدهند.

رابطه ساختاری برای لایههای بالا و پایین ورق نیز به کمک رابطه هوک در شرایط تنش صفحهای قابل بیان هستند که روابط آن در مرجع [15] آمده است.

3-2- معادلات حركت

معادلات حرکت با استفاده از روابط بیان شده در بخشهای قبل و به کمک اصل همیلتون استخراج شدهاند که بهقرار زیر هستند:

$$\delta \overset{0}{u_{\alpha}}: -\sum_{j=b,c,t} \sum_{i=1,2} \overset{0}{N} \overset{(j)}{\alpha_{i,i}} - \sum_{i=1,2} \begin{pmatrix} \overset{0}{N} \overset{(j)}{\alpha_{i,j}} \\ \overset{0}{N} \overset{0}{\alpha_{i,j}} \\ + \sum_{i=b,c,t} I_{0}^{(j)} \overset{0}{\ddot{u}_{\alpha}} \overset{(j)}{=} \mathbf{0}$$
(4-16)

$$\begin{split} \delta \overset{1}{u}_{\alpha} &: -\sum_{i=1,2} \overset{1}{N}_{\alpha i,i} + \overset{0}{N}_{\alpha 3} \\ &+ \sum_{i=1,2} (\overset{0}{N}_{\alpha i,i}^{(b)} - \overset{0}{N}_{\alpha i,i}^{(b)}) \frac{h_{c}}{2} + \overset{0}{N}_{33}^{(1)} \frac{1}{u}_{\alpha} + \\ &\frac{h_{c}}{2} (\overset{0}{U}_{0}^{(0)} \overset{0}{\ddot{u}}_{\alpha}^{(c)} - I_{0}^{(b)} \overset{0}{\ddot{u}}_{\alpha}^{(b)}) + I_{2}^{(c)} \overset{1}{\ddot{u}}_{\alpha} = \mathbf{0} \qquad (-9) \\ \delta \overset{0}{u}_{3} &: \sum_{k=1,2} \sum_{j=1,2} \sum_{i=1,2} (-\overset{0}{N}_{jk,jk} \frac{h_{t}}{2} + \overset{0}{N}_{jk,jk} \frac{h_{b}}{2}) \\ &- \sum_{k=1,2} \sum_{j=1,2} \sum_{i=t,b} \overset{1}{N}_{jk,jk} - \sum_{i=1,2} \overset{0}{N}_{i3,i} \\ &+ \sum_{i=b,c,t} I_{0}^{(b)} \overset{0}{\ddot{u}}_{3}^{(c)} + I_{2}^{(c)} \overset{2}{\ddot{u}}_{3} \\ &+ \sum_{i=1,2} [\overset{1}{\mathbf{1}} (J_{0}^{(b)} h_{t} \overset{0}{\ddot{u}}_{i,i}^{(c)} - I_{0}^{(b)} h_{b} \overset{0}{\ddot{u}}_{i,i}^{(c)}) - I_{2}^{(b)} \overset{0}{\ddot{u}}_{3,ii}^{(c)} \end{split}$$

$$-I_{2}^{(b)} \ddot{\ddot{u}}_{3,ii}^{(b)} \mathbf{l} - \tilde{q} = \mathbf{0}$$
 (z-9)

$$\delta u_{3}^{1}: -\sum_{i=1,2}^{1} N_{i3,i}^{1} + N_{33}^{0} -$$
(5-9)

¹ Mooney-Rivlin

از آن نیز روش بستن ممان به اختصار ارائه می گردد.

1-3- گسستەسازى معادلات

برای گسستهسازی معادلات بهدست آمده در رابطه (9)، روش گالرکین به مربوط به $\overset{0}{u_3}$ (رابطه (9-ج)) اعمال خواهد شد. برای این منظور $\overset{0}{u_3}$ با توجه به شرایط مرزی تکیهگاه ساده طبق بسط زیر درنظر گرفته خواهد شد:

$$u_{3}^{0} = \varepsilon \widetilde{w}_{12}(t) \sin\left(\frac{\pi x_{1}}{l_{1}}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_{2}}{l_{2}}\right) + \varepsilon \widetilde{w}_{21}(t) \sin\left(\frac{2\pi x_{1}}{l_{1}}\right) \sin\left(\frac{\pi x_{2}}{l_{2}}\right)$$
(13)

که \mathcal{F} کمیت با مقدار کوچک در روش اغتشاشی مقیاسهای چندگانه است. علت انتخاب این دو مود در حل حاضر، تحریک مستقیم مود متقارن (1,2) است که بهعلت تشدید داخلی ناشی از شکل مربعی ورق منجر به تحریک غیرمستقیم مود (2,1) خواهد شد. باید توجه داشت که بهعلت عدم حضور عبارات غیرخطی با مراتب زوج در معادله گسسته شده نهایی مربوط به $\overset{0}{u}_{3}$ ، دو جمله در نظرگرفته شده در رابطه (13) برای $\overset{0}{u}_{3}$ کافی خواهد بود. برای توابع مجهول دیگر، سایر معادلات حرکت با استفاده از روش اغتشاشی

$$\begin{split} y_{ij} (x_{1i}, x_{2i}, t) &= \sum_{k=1}^{N_p} \varepsilon^k p^{j(k)} (x_{1i}, x_{2i}, t) \\ & j^j (x_{1i}, x_{2i}, t) = \sum_{k=1}^{N_p} \varepsilon^k p^{j(k)} (x_{1i}, x_{2i}, t) \\ & j^j (x_{1i}, x_{2i}, t) = \sum_{k=1}^{N_p} \varepsilon^k Z^{(k)} (x_{1i}, x_{2i}, t) \\ & j = 0, 1, i = 1, 2 \end{split}$$

$$u_{3}^{j}(x_{1}, x_{2}, t) = \sum_{k=1}^{N_{p}} \varepsilon^{k} \widetilde{\widetilde{w}}^{j}(x_{1}, x_{2}, t)$$

$$j = 1,2$$

$$j$$

$$i$$

$$(15)$$

که
$$\widetilde{v}^{(k)}$$
 نماینده $\widetilde{u}^{(k)}$ برای $i=1$ و نماینده $\widetilde{v}^{(k)}$ برای $Z^{(k)}$ خواهد .
.د.

همچنین N_p نشاندهنده مرتبه حل اغتشاشی است که برابر با 3 درنظر گرفته شده است. قبل از جایگذاری روابط (13) تا (15) در معادلات حاکم، نیاز به اعمال مجموعهای از مقیاس,بندیهای متداول در روشهای اغتشاشی خواهد بود. برای این کار، عبارات انتگرالی موجود که منبع میرایی 0 اغتشاشی خواهد بود. برای این کار، عبارات انتگرالی موجود که منبع میرایی 2° ضرب خواهند شد که با توجه به فاصله زیاد فرکانس مود خمشی از سایر 2° ضرب خواهند شد که با توجه به فاصله زیاد فرکانس مود خمشی از سایر (13) تا (15) در معادلات حرکت حاکم (رابطه (9)) به جز معادله مربوط به شده و با جداکردن ضرایب با توانهای برابر 3، تعداد 3 دسته معادلات شده و با جداکردن ضرایب با توانهای برابر 3، تعداد 3 دسته شامل مشتقات جزئی خطی ناهمگن بهدست خواهد آمد که هر دسته شامل معادلات، از روش بسط توابع ویژه استفاده شده که مشروح آن در مراجع معادلات، از روش بسط توابع ویژه استفاده شده که مشروح آن در مراجع معادلات، از روش بسط توابع ویژه استفاده شده که مشروح آن در مراجع معادلات، از روش بسط توابع ویژه استفاده شده که مشروح آن در مراجع

دوم است. لازم به توضیح است که شرایط مرزی مربوط به شرط صفر بودن-تنشهای منتجه درونصفحهای (بهعلت آزاد بودن لبههای در راستای درون-صفحهای) منجر به روابطی غیرخطی خواهند شد که در طول اعمال روش اغتشاشی بهشکل رابطهای خطی و ناهمگن در مرتبه دوم روش میشوند. در این حالت جهت ارضای شرایط مرزی، نیاز به افزودن عباراتی به بسط توابع ویژه جابجاییهای درونصفحهای خواهد بود که شرح کامل آن در مرجع [10] آمده است. این توابع بهشکل زیر خواهند بود:

i i \widetilde{W}_{ij} (t) و \widetilde{W}_{pqrs} توابع معلوم از متغیرهای (t) \widetilde{W}_{ij} و همچنین خواص هندسی و فیزیکی سازه مورد مطالعه هستند. جزئیات بیشتر درباره این توابع در مرجع [10] آمده است. نکته لازم به توجه اینکه NM و NN تعداد جملات لازم در بسط بالا را نشان میدهند که مقدار آنها برای رسیدن به

مراتب مختلف، توابع جابجایی مجهول بر حسب (t) بهدست خواهند آمد. با جایگذاری مقادیر بهدست آمده بههمراه رابطه (13) در معادله مربوط به 0، و اعمال روش گالرکین، دو معادله دیفرانسیلی معمولی بهشکل زیر بهدست خواهند آمد:

همگرایی، بسته به خواص ورق تغییر میکند. در نهایت با حل هشت معادله

$$(\varepsilon + \varepsilon^{3} C I_{ij}) \frac{d^{2} \widetilde{\widetilde{W}}_{ij}}{dt^{2}} + \varepsilon \omega_{ij}^{2} \widetilde{\widetilde{W}}_{ij}$$

+ $\varepsilon^{3} \sum_{n,p,r} \sum_{n,q,s} R_{mnpqrs} \widetilde{\widetilde{W}}_{mn} \widetilde{\widetilde{W}}_{pq} \widetilde{\widetilde{W}}_{rs} +$
 $\varepsilon^{3} Q_{1ij} \int_{0}^{t} e^{-\eta(t-\tau)} \widetilde{\widetilde{W}}_{ij}(\tau) d\tau - \varepsilon^{3} q_{ij}\varsigma(t) = 0$
 $(i,j) = (1,2), (2,1)$

 CI_{ij} نشان دهنده فرکانس طبیعی ijام بوده و ضریب ثابت ω_{ij} نشان دهنده اثر اینرسی مربوط به عبارات دیگر جابجایی است. ضرایب نشاندهنده اثر اینرسی مراب ثابت وابسته به خواص مواد و هندسه سازه R_{mnpqrs} هستند. همچنین q_{ij} در رابطه بالا نماینده تحریک با خاصیت تصادفی در

(17)

 $q_{ij} = ct \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} q(x_1, x_2) \quad \tilde{\phi}_{ij} dx_1 dx_2$ (مان است و برابر است با: $q_{ij} = ct \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} q(x_1, x_2) \quad \tilde{\phi}_{ij} dx_1 dx_2$ دو معادله نشان داده شده با رابطه (17)، در نهایت با استفاده از روش

بستن ممان گوسی و غیرگوسی حلّ خواهند شد. جهت ایجاد امکان استفاده

از این روش، عبارت انتگرالی رابطه (17) (17 $\widetilde{w}_{ij}(\tau) d\tau$) نیز با تابع مجهول جدید (2_{ij} z_{ij} جایگزین و در عوض، معادلات دیفرانسیلی دیگری به شکل زیر اضافه میشوند:

$$\dot{z}_{ij}(t) = -\eta z_{ij}(t) + \tilde{\widetilde{w}}_{ij}, (i,j) = (1,2), (2,1)$$
 (18)

3-2- اعمال روش بستن ممان

معادلات ممان در حالت کلی به شکل زیر قابل بیان خواهند بود [17,16]:

$$\frac{d(m_{p_1p_2\dots p_{nv}})}{dt} = \sum_{i=1}^{N} E \left[\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\tilde{\sigma}_i \prod_{i=1}^{6} y_i^{p_i} \right) \right] + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} E \left[\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \left(\tilde{\theta}_{ij} \prod_{i=1}^{6} y_i^{p_i} \right) \right]$$
(19)

که _yi عناصر بردار مربوط به فضای حالت را نشان میدهد که بهشکل زیر درنظرگرفته شده است:

$$\tilde{b}_{ij} = [H(\mathbf{y}, t)H(\mathbf{y}, t)^{\mathsf{T}}]_{ij}$$
(21)

$$G = \{\tilde{G}_{1}^{12}, \tilde{G}_{2}^{12}, \tilde{G}_{3}^{12}, \tilde{G}_{1}^{21}, \tilde{G}_{2}^{21}, \tilde{G}_{3}^{21}\}^{\mathrm{T}}$$
(22)

$$\tilde{G}_{1}^{ij} = d\tilde{w}_{ij}$$

$$\tilde{G}_{2}^{ij} = \frac{1}{(\varepsilon + \varepsilon^{3}CI_{ij})} [-\varepsilon \omega_{ij}^{2} \overset{0}{\widetilde{w}}_{ij} - \varepsilon^{3}Q_{1ij}z_{ij}(t)$$

$$-\varepsilon^{\mathbf{3}} \sum_{n,p,r} \sum_{n,q,s} R_{\mathbf{1}mnpqrs} \widetilde{\widetilde{w}}_{mn} \widetilde{\widetilde{w}}_{pq} \widetilde{\widetilde{w}}_{rs}]$$
$$\widetilde{G}_{3}^{ij} = -\eta z_{ij}(t) + \widetilde{\widetilde{w}}_{ij}$$

همچنین ماتریس H طبق رابطه زیر است: (24)

(25)

$$\widetilde{\mathbf{H}}^{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{q_{ij}}{(\varepsilon + \varepsilon^3 C I_{ij})} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

بهعلاوه در رابطه (19)، **ا u** نشاندهنده میانگین عملیاتی است. همچنین $m_{p_{4}p_{2}\dots p_{nv}}$ ممان با مرتبه (np) برابر با مجموع توانهای y_{i} ها بوده همچنین $m_{p_{4}p_{2}\dots p_{nv}}$ ممان با مرتبه (np) و با $p_{i=1}^{e_{1}} p_{i}^{p_{i}}$ **a** عیین می شود. از رابطه (19) می توان برای تعیین ممان با مقادیر مختلف np استفاده کرد اما نکتهای که باید توجه داشت این که بهعلت وابستگی $\tilde{\sigma}_{i}$ و \tilde{d}_{ij} به $i \sqrt{n}$ ، طبق روابط (21) تا (25)، در صورت وجود عبارات غیرخطی، ممانهای با مراتب بالاتر از nr در سمت راست رابطه (19) حاصل می شوند. لذا همواره تعداد ممانهای مجهول از تعداد معادلات ممان موجود بیشتر خواهند بود. حل این

جهت تعیین مقادیر ممانهای با مراتب بالا بر حسب ممانهای مراتب پایین، مقادیر کامیولنت با مراتب بالاتر از مقدار مشخصی برابر با صفر نهاده خواهند شد. کامیولنت با مرتبه np با نماد $K_{p_1p_2\dots p_6}$ مشخص میشود و برابر با ضرایب بسط تیلور لگاریتم طبیعی تابع مشخصه چگالی احتمال (($\Theta(\omega)$) است. بنابراین میتوان نوشت [18]:

 $\mathbf{H} = \text{diag}[\widetilde{\mathbf{H}}^{ij}]$

$$\Theta(\omega) = \exp(\sum_{sm=1}^{\infty} \frac{l^{sm}}{sm!} \sum_{\substack{p_{1},\dots,p_{6}=1\\p_{1}+\dots+p_{6}=sm}}^{sm} \kappa_{p_{1}p_{2}\dots p_{nv}} \omega_{1}^{p_{1}} \omega_{2}^{p_{2}} \dots \omega_{6}^{p_{3}} \frac{sm!}{p_{1}! p_{2}! \dots p_{6}!}$$

(26)

لازم به توجه است که رابطه بالا در مقایسه با رابطه ارائه شده در مرجع [18]، بهشکل متفاوتی نوشته شده است. (ω) Θ در واقع تابع فوریه چند بعدی تابع چگالی احتمال پاسخهاست که بسط تیلور آن تا مرتبه دوم حول $\mathbf{0} = \boldsymbol{w}$ ، متناظر با تابع چگالی احتمال توزیع گوسی خواهد بود [18]. لازم به توجه است که بولد شدن کمیت \boldsymbol{w} به معنی برداری بودن آن است. بنابراین در صورت صفرکردن کامیولنتهای با مرتبه بالای دو، روش به نام روش بستن ممان گوسی خوانده میشود. با درنظرگرفتن جملاتی بیشتر از بسط تیلور، اثر غیرگوسی بودن تابع احتمال پاسخ تا اندازهای لحاظ خواهد شد که به دقت بیشتر حل میانجامد. در نهایت برای تعیین روابط بین ممانهای مرتبه پایین و بالا از طریق صفرکردن کامیولنت، نیاز به تعیین رابطه کامیولنتها با ممان خواهد بود که با استفاده از رابطه زیر قابل انجام خواهد بود [18]:

$$m_{p_1p_2 \dots p_6} = (-1)^{sm} (\frac{\partial^{sm} \mathcal{O}(\omega)}{\partial \omega_1^{p_1} \partial \omega_2^{p_2} \dots \partial \omega_6^{p_6}})_{\omega=0}$$
(27)

با جایگذاری رابطه (26) در رابطه (27) رابطه بین ممانها و کامیولنتها بهدست خواهد آمد. در مطالعه حاضر کامیولنتهای با مرتبه بیشتر از 4 برابر با صفر نهاده شده که در این حالت نیاز به تعیین کامیولنتهای تا مرتبه 6 خواهد بود.

در نهایت با تعیین ممانهای با مراتب بالا بر حسب ممانهای مرتبه پایین میتوان معادلات حاکم بر ممانها را که بهشکل معادلات دیفراسیلی غیرخطی مرتبه اول وابسته بههم هستند، حل کرد. همچنین در صورتی که تنها پاسخ پایا مدنظر باشد، میتوان مشتق زمانی ممانها ($n_{p_1p_2-p_4}$) را برابر با صفر قرار داده و معادلات جبری حاصل را حل نمود. در مطالعه حاضر، با توجه به تعداد 6 مولفه فضای حالت، تعداد معادلات در صورت استفاده از میشود. در صورت استفاده از روش بستن غیرگوسی مرتبه چهارم (صفر میشود. در مورت استفاده از روش بستن غیرگوسی مرتبه چهارم (صفر کردن کامیولنتهای مراتب بالای چهار) نیز تعداد معادلات برابر با 20 خواهد شد. برای حل عددی این معادلات در شرایط پایا (که به شکل معادلات غیرخطی جبری هستند)، بهعلت وجود نواحی چند-جوابی، نیاز به استفاده از موشهای تعقیب مسیر² خواهد بود که در مطالعه حاضر از روش شبه کمانی³

4- تحليل نتايج عددى

در این بخش نتایج حاصل از حل معادلات حاکم جهت بررسی تداخل بین مودهای نامتقارن سازه ارائه شده است. بهمنظور بررسی صحت معادلات و حل نیز، با توجه به ارزیابیهای انجام شده در مراجع [10,9]، تنها نتایج مربوط به حل معادلات گسسته شده زمانی با استفاده از روش بستن ممان مورد بررسی قرار گرفته است که در ادامه خواهد آمد.

Continuation

¹ Ensemble average

³ Pseudo-arclength continuation

1-4- ارزيابي حل بستن ممان

ارزیابی درستی نتایج روش بستن ممان با مقایسه با نتایج حاصل از حل عددی معادلات رابطه (17) و (18) انجام شده است. مساله بررسی شده، مربوط به تحریک مستقیم مود (1,2) در ورق ساندویچی مربع شکل است که خواص مربوط به آن به قرار زیر است:

$$E_b = E_t = 70 \text{GPa}, c_0 = 5\text{MPa}$$

$$\rho_b = \rho_t = 2700 \text{kg/m}^3, \rho_c = 1000 \text{kg/m}^3$$

$$v_t = v_b = 0.3, \mu = 0.25$$

$$l_1 = l_2 = 1 \text{ m}, \frac{h_b}{l_1} = \frac{h_t}{l_1} = 0.001, \frac{h_c}{l_1} = 0.01, \frac{h_c}{l_1} = 0.01, \frac{h_c}{l_1} = 0.01$$

نتیجه بهدست آمده برای میانگین مربعات پاسخ مود **(1,2)**. بهازای چگالی بار کمتر از بار لازم برای تحریک غیرمستقیم مود **(2,1)** (بار انشعاب¹) در شکل 2 نشان داده شده است. نتایج ناشی از اعمال بار با مقدار بیشتر از بار انشعاب نیز در شکل 3 برای میانگین مربعات جابجایی دو مود **(2,1)** و **(2,1)** ارائه شده است.

در این شکلها از نماد $[W_{12}^2]$ برای میانگین مربعات پاسخ مود (1,2) و از نماد $[W_{21}^2]$ برای مود (1,2). با حذف بالانویس 0 و ~ استفاده شده است. همچنین مقدار چگالی بیبعد \overline{S} برابر است با $S_0 \frac{S_0}{12} \overline{S} = \overline{S}$ که M_{12}^{Sq} فرکانس مود (1,2) برای ورق ساندویچی مربعشکل است. همان طور که m_{12}^{Sq} فرکانس مود (1,2) برای ورق ساندویچی مربعشکل است. همان طور که مشخص است نتایج بهدست آمده از هر دو روش گوسی، غیرگوسی و مونت-کارلو، در شرایط بار کمتر از بار انشعاب، از انطباق خوبی برخوردار هستند که این امر درستی اجرای روش در مطالعه حاضر را تایید میکند. عدم انطباق این امر درستی اجرای روش در مطالعه حاضر را تایید میکند. عدم انطباق این ناحیه بوده و در بررسیهای مرجع [16] نیز مشاهده شده است. لازم به ابتدایی نیز مربوط به محدودیت در کارایی روش بستن گوسی و غیرگوسی در این ناحیه بوده و در بررسیهای مرجع [16] نیز مشاهده شده است. لازم به توجه است که مقادیر حاصل از حل غیرگوسی در این ناحیه، بهویژه برای مود این ناحیه بوده و در بررسیهای مرجع [16] نیز مشاهده شده است. لازم به توجه است که مقادیر حاصل از حل غیرگوسی در این ناحیه، بهویژه برای مود دوم بهتر از حل گوسی نیست که همان طور که گفته شد، در نتایج مرجع [19] نیز گزارش شده است. با توجه به نتایج بهدست آمده به نظر می رسد که حل تحلیلی به کار برده شده تا حد معقولی قادر به تخمین صحیح پاسخ سیستم است. لازم به ذکر است که در حالت کلی و طبق نتایج مطالعات



Fig. 2 Comparison of the response mean square (MS) obtained with Non-Gaussian MC, Gaussian MC and the numerical simulation, when the load PSD is lower than the bifurcation load.

شکل 2 مقایسه تابع زمانی میانگین مربعات پاسخ حاصل از روش بستن ممان گوسی و غیرگوسی با نتایج حاصل از شبیهسازی عددی برای چگالی بار کمتر از بار انشعاب

متعدد، حل غیرگوسی در بیشتر مسائل غیرخطی بهتر از حل گوسی قادر به تخمین بار انشعاب است. بهعلاوه، حل غیرگوسی در بیشتر مسائل چند مودی قادر به تخمین قابل قبول مقادیر ایستای میانگین مربعات پاسخ بوده، هرچند تغییرات ممان با زمان قبل از رسیدن به پاسخ ایستا در بیشتر مسائل بررسی شده از دقت خوبی برخوردار نیستند.

4-2- بررسی تداخل غیرخطی بین مودهای نامتقارن

هدف اصلی در این بخش، تعیین پاسخ دو مودی پایای حاصل از ترکیب مودهای **(1,2)** و **(1,2)** در ورق ساندویچی با طول و عرض نزدیک بههم، تحت تحریک مستقیم مود **(1,2)** است. برای دستیابی به نتایج این بخش، همچنین تعداد جملات **5** = Nm = Nn، برای رسیدن به پاسخ با همگرایی مناسب در حل توابع مجهول معادلات حاکم بر حسب بسط دومودی $\overset{0}{u}_{3}$ درنظرگرفته شده است. مقادیر اتخاذ شده برای خواص مختلف ورق ساندویچی نیز برابر با مقادیر درنظرگرفته در زیربخش قبلی بوده و در صورت تغییر، مقدار جدید آن در کنار نتایج ارائه شده است.

در ابتدای کار منحنی تغییرات میانگین مربعات جابجایی مود **(1,2)** و (**2,1)** ورق ساندویچی مربع شکل، با افزایش 50 در 0شکل 4 برای **0.6** = *γ*



شکل 3 مقایسه تابع زمانی میانگین مربعات پاسخ حاصل از روش بستن ممان گوسی و غیرگوسی با نتایج حاصل از شبیهسازی عددی برای چگالی بار بیشتر از بار انشعاب

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-05

is higher than the bifurcation load

¹ Bifurcation load

و **0.4 =** γ رسم شده است. همانطور که در این نمودارها میتوان دید، روند افزایشی پاسخ مربوط به مود **(1,2)**، با افزایش شدت تحریک، در نقطهای معین بهطور ناگهانی کاهش یافته و در مقابل، مود **(2,1)** شروع به رشد میکند.

مقایسه بین نتایج حاصل از روش گوسی و غیر گوسی در این نمودارها نیز حاکی از مقادیر کمتر بار مربوط به انشعاب در حل غیر گوسی است. ضمن این که مقادیر بیشتری برای $[2W_{12}^{22}]$ با روش گوسی پیش بینی می شود. مقدار بهدست آمده برای $[2W_{21}^{22}]$ اما در مقایسه با روش غیر گوسی کمتر است. بار مربوط به انشعاب در هسته با میرایی کمتر نیز (**0.6** = γ) دارای مقدار بیشتری نسبت به حالت دوم است که البته با توجه به اثر میرایی در اتلاف انرژی و ممانعت از انتقال آن به مود (**1,2**)، طبیعی به نظر می رسد.

در 0شکلهای 5 و 6 برای دستیابی به دید بهتر در ارتباط با نحوه بروز انشعاب و تحریک ناگهانی مود **(1,2)**، نتایج حاصل از حل عددی معادلات تصادفی حاکم برای مقادیر مختلف \overline{o} بهدست آمده است. همان طور که در شکل 5 مشخص است، بهازای بار 5 – **9.84e =** \overline{o} و – **17.48e =** \overline{o} **5.** جابجایی بسیار کوچکی در مود **(2,1)** ظاهر شده و سپس ناپدید می شود. مقادیر میانگین مربعات پاسخ در این شرایط کوچک هستند.





Fig. 4 Variation of the mean square (MS) response of the modes (1,2) and (2,1) with the excitation PSD; Solid line: Non-Gaussian MC, Dashed line: Gaussian MC.

شکل 4 تغییرات میانگین مربعات مود (1,2) و (2,1) ورق ساندویچی مربع شکل با افزایش چگالی طیفی تحریک (50)؛ خط ممتد: حل غیرگوسی؛ خطچین: حل گوسی



Fig. 5 Time history of the mean square response of the mode (2,1), which is indirectly excited by the mode (1,2) (for excitations with lower PSD)

شکل 5 پاسخ زمانی مود (2,1) که بهطور غیر مستقیم توسط مود (1,2) تحریک شده است (برای تحریکهای تصادفی با مقادیر چگالی بار کوچک).

با افزایش بیشتر بار در شکل 6-الف، وقوع تحریک در نقاط بیشتری از زمان، و همچنین با مقادیر میانگین مربعات بیشتری ظاهر می شود. اما پاسخ همچنان بین مقدار صفر و مقادیر غیرصفر تغییر می کند. به این پدیده، آشکار-نهانی تناوبی گفته می شود که در واقع، در نتیجه انتقال اتفاقی انرژی از مود اول به مود دوم، رخ می دهد. با افزایش بیشتر چگالی بار تحریک همان طور که در شکل 6-ب مشخص است، پاسخ تصادفی در مود (2,1) به طور کامل توسعه یافته است. این نواحی از پاسخ در مطالعات چنگ و ابراهیم [10] و ایکدا و ابراهیم [20] مورد توجه قرار گرفته اند.

برای نمایش اثر تغییرات نسبت عرض به طول (l_1/l_1) در تسریع وقوع انشعاب و تحریک مود **(2,1)**، تغییرات چگالی طیفی در نقطه وقوع انشعاب ((S_b)) با تغییر l_2/l_1 در شکل 7 رسم شدهاند. تغییرات فرکانس طبیعی مود **((** S_b)) با تغییر (l_2/l_1) در شکل 7 رسم شدهاند. تغییرات فرکانس طبیعی مود ((S_b)) و همچنین فاصله فرکانس دو مود درگیر ((σ_{IR})) نیز در 0شکل 8. نشان داده شده که طبق آن همانطور که انتظار میرود، σ_{IR} در حالت (l_2/l_1 برابر با صفر بوده و با تغییر l_2/l_1 از 28.0 تا 1.15، از مقدار 0.11- تا 0.11 بطور خطی تغییر میکند. کمترین بار لازم برای وقوع انشعاب نیز آنچنان که در شکل 7 مشهود است، دارای نقطه کمینه است، که البته این نقطه، نه در حالت **1 = l_2/l_1** و بلکه در نزدیکی آن اتفاق می افتد. مقادیر بار





Fig. 7 Variation of the bifurcation load PSD with the length to width ratio; Solid line: Non-Gaussian (NG) MC, Dashed line: Gaussian (G) MC.

شکل 7 تغییرات چگالی بار در نقطه انشعاب بر حسب نسبت عرض به طول ورق ساندویچی، خط ممتد: حل غیرگوسی؛ خطچین: حل گوسی.

پاسخ در مود دوم به صفر میل میکند. همچنین طبق این شکل، مقادیر میانگین مربعات نرمال شده در هر دو مود در حالت **0.96 = l_2/l_1** به بیشترین مقدار خود میرسند که این نقطه منطبق بر نقطه کمینه در منحنی تغییرات چگالی طیفی بار انشعاب با l_2/l_1 است (شکل 7-الف).

5- نتيجه گيري

ارتعاشات غیرخطی ورق ساندویچی با لایه میانی ویسکوالاستیک تحت بار اتفاقی با پهنای باند وسیع با استفاده از روش تحلیل بستن ممان غیرگوسی بررسی شده و بروز پاسخ چند مودی بهعلت وجود تشدیدهای داخلی مورد توجه قرار گرفت. مدلسازی ورق با فرض بزرگی نسبی کرنش و دوران عرضی بزرگ صورت گرفت که منجر به غیرخطی شدن روابط ساختاری و همچنین روابط سینماتیکی حاکم بر سازه شد. معادلات حاکم شامل هفت معادله ناشی از اصل همیلتون در کنار دو معادله تراکمپذیری بود که بر مبنای تغییرات ضطی جابجاییهای درونصفحهای و تغییرات مرتبه دوم جابجاییهای برون صفحهای در راستای ضخامت بهدست آمد. حل معادلات با اعمال روش اغتشاشی و روش گالرگین آغاز شد که منجر به دو معادله غیرخطی زمانی با





Fig. 6 Time history of the mean square response of the mode **(2,1)**, which is indirectly excited by the mode **(1,2)** (for excitations with higher PSD)

شکل 6 پاسخ زمانی مود (2,1)، که بهطور غیر مستقیم توسط مود (1,2) تحریک شده است (برای تحریکهای تصادفی با مقادیر چگالی بار بزرگ).

انشعاب بهدست آمده از حل گوسی نیز طبق این شکل، بیشتر از مقدار پیش بینی شده با روش حل غیر گوسی است. ضمن آن که نسبت عرض به طول در نقطه کمینه نمودار حاصل از حل گوسی بهاندازه کوچکی کمتر از مقدار آن در نمودار حاصل از حل غیر گوسی است. این نقطه همچنین، با افزایش میرایی هسته (کاهش γ)، در l_2/l_1 بزر گتری اتفاق می افتد. افزایش میرایی همچنین موجب افزایش بار لازم برای تحریک غیر مستقیم مود (1,2) شده که در شکل 4 نیز مشاهده شد.

در شکل 9 تغییرات میانگین مربعات پاسخ در نقطه انشعاب (**[**[*W*²_{b12}]) با تغییر نسبت عرض به طول نشان داده شده است که نمایان گر افزایش این مقدار با افزایش ا*2/l* است. این روند، با توجه به کاهش فرکانس طبیعی سازه در شکل 8، قابل توجیه است. مقدار پیشبینی شده با حل گوسی در اینجا نیز بیشتر از مقدار حاصل از حل غیر گوسی است.

از مقادیر بهدست آمده برای $E[W_{b12}^2]$ در شکل 9، برای نرمال سازی میانگین مربعات پاسخ مود **(1,2)** و **(1,2)** در شکل 10 استفاده شده است. در این شکل چگونگی تغییرات مقدار نرمال شده میانگین مربعات پاسخ مودهای درگیر، با نزدیک شدن به ناحیه وقوع تشدید نشان داده شده است. همان طور که مشخص است، با دور شدن از مقادیر l_2/l_1 نزدیک به یک،



Fig. 10 Variations of the normalized MS response of the modes (1,2) (solid line) and (2,1) (dashed line) with the length to width ratio $(\gamma = 0.6)$.

(1,2) شکل 10 تغییرات مقادیر نرمال شده میانگین مربعات دامنه پاسخ در مود (1,2) (خط ممتد) و (1,2) (خطچین) بر حسب نسبت عرض به طول (2,6 = γ).

- مقادیر بهدست آمده از روش بستن ممان گوسی برای بار انشعاب همواره بیشتر از بار پیش.بینی شده با روش بستن ممان غیرگوسی خواهد بود. علت این امر عدم انطباق تابع چگالی پاسخ با تابع چگالی گوسی است.
- وقوع پاسخ چند مودی با بروز پدیده آشکار-نهانی متناوب همراه خواهد بود که طی آن مود نامتقارنی که بهطور مستقیم تحریک نشده، در بازههای کوچکی از زمان مقادیر غیر صفر یافته و دوباره صفر میشود. این رفتار تنها از طریق شبیهسازی عددی قابل مشاهده بوده و روشهای تحلیلی بهکارگرفته شده قادر به پیشبینی آن نیستند.

6- مراجع

- S. Irani, S. Sazesh, Random vibration of cantilever tapered beam under stochastic excitation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 3, pp. 138-154, 2013. (in Persian نفارسی)
- [2] M. Abedi, A. Asnafi, To reduce the instability region in the nonlinear transverse vibration of randomly excited plates using orthotropic P-FG material, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 80, No. 3, pp. 1413-1430, 2015.
- [3] A. Asnafi, M. Abedi, A comparison between the dynamic stability of three types of nonlinear orthotropic functionally graded plates under random lateral loads, *Journal of Vibration and Control*, November 25, 2015.
- [4] C. V. R. Reddy, N. Ganesan, B. V. A. Rao, Response of clamped sandwich panels with viscoelastic core under random acoustic excitation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 75, No. 4, pp. 481-494, 1981.
- [5] M. R. Garrison, R. N. Miles, J. Q. Sun, W. Bao, Random response of a plate partially covered by a constrained layer damper, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 172, No. 2, pp. 231-245, 1994.
- [6] R. A. Ibrahim, Recent Results in Random Vibrations of Nonlinear Mechanical Systems, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 117, No. B, pp. 222-233, 1995.
- [7] S. L. R. Vaicaitis, E. Jotautiene, Nonlinear random vibrations of a sandwich beam adaptive to electrorheological materials, *Mechanika*, Vol. 3, pp. 1207-1392, 2008.
- [8] H. H. Lee, Non-linear vibration of a multilayer sandwich beam with viscoelastic layers, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 216, No. 4, pp. 601-621, 1998.
- [9] S. Mahmoudkhani, H. Haddadpour, Nonlinear vibration of viscoelastic sandwich plates under narrow-band random excitations, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 74, No. 1, pp. 165-188, 2013.
- [10] S. Mahmoudkhani, H. Haddadpour, H. M. Navazi, The effects of nonlinearities on the vibration of viscoelastic sandwich plates, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 62, pp. 41-57, 2014.



Fig. 8 Variation of the natural frequency of the mode (1,2) (solid line) and also variation of frequency difference between modes (1,2) and (2,1) (dashed line) with the length to width ratio of the plate (1,2) (dashed line) with the length to width ratio of the plate شکل 8 تغییرات فرکانس طبیعی مود (1,2) (خط ممتد) و تغییرات فاصله فرکانس

مربوط به دو مود (**2,1) و (2,1)** (خطچین) با نسبت طول به عرض ورق.



Fig. 9 Variation of the mean square response of the mode (1,2) with the length to width ratio for $\gamma = 0.6$; Solid line: Non-Gaussian MC, Dashed line: Gaussian MC.

شکل 9 تغییرات میانگین مربعات مود **(1,2)** در نقطه وقوع انشعاب با نسبت عرض به طول برای **0.6 =** ۲، خط ممتد: حل غیرگوسی؛ خطچین: حل گوسی.

و همچنین شبیهسازی عددی مونتکارلو استفاده شد. اهم نتایج بهدست آمده به قرار زیر است:

- در ورق ساندویچی با طول و عرض نزدیک بههم، علیرغم تحریک تنها یکی از مودهای نامتقارن سازه، امکان بروز پاسخ مرکب از هر دو مود نامتقارن، به علت تداخل غیرخطی مودها وجود خواهد داشت.
- مقدار بار لازم برای انشعاب، همواره در شرایط شکل مربعی
 کامل اتفاق نیفتاده و با تغییر میرایی، جابجا می شود.
- وقوع انشعاب و در نتیجه پاسخ دو مودی تنها برای نسبت طول به عرض بین 0.88 و 1.05 رخ داده و با دور شدن مقدار ابعاد طولی و عرضی، اثر اندرکنش غیرخطی در ایجاد پاسخ چندمودی حذف می شود.

- Vibration and Control, Vol. 19, No. 14, pp. 2223-2240, 2012. [16] W. K. Chang, R. A. Ibrahim, Multiple internal resonance in suspended cables under random in-plane loading, Nonlinear Dynamics, Vol. 12, No. 3, pp. 275-303, 1997.
- [17] I. Cicek, Vibration absorbers for flexible structures under random excitation:
- [17] I. Cicce, Volution dissovers for jecture sinclures under random exchanton: theory and experiments, PhD Thesis, Texas Tech University, 1999.
 [18] J. B. Roberts, P. D. Spanos, Random Vibration and Statistical Linearization, pp. 293-305, New York: John Wiley & Sons, 1990.
 [20] Y. J. Yoon, R. A. Ibrahim, Parametric random excitation of nonlinear
- coupled oscillators, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 8, No. 3, pp. 385-413, 1995. [21] T. Ikeda, R. A. Ibrahim, Nonlinear random responses of a structure
- parametrically coupled with liquid sloshing in a cylindrical tank, Journal of Sound and Vibration, Vol. 284, No. 1-2, pp. 75-102, 2005.
- [11] J. N. Reddy, A small strain and moderate rotation theory of elastic anisotropic plates, Journal of Applied Mechanics, Vol. 54, No. 3, pp. 623-626, 1987.
- [12] A. C. Pipkin, Small finite deformations of viscoelastic solids, Reviews of
- [12] M. C. Hipki, Small mine deformations of viscotastic solids, *Reviews of Modern Physics*, Vol. 36, No. 4, pp. 1034-1041, 1964.
 [13] R. O. Stafford, On mathematical forms for the material functions in nonlinear viscoelasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 17, No. 5, pp. 339-358, 1969.
 [14] K. B. M. Nambudiripad, V. V. Neis, Determination of mechanical response
- of non-linear viscoelastic solids based on frechet expansion, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 11, No. 2, pp. 135-145, 1976.
- [15] S. Mahmoudkhani, H. Haddadpour, H. M. Navazi, Free and forced random vibration analysis of sandwich plates with thick viscoelastic cores, Journal of