مجله مهندسی مکانیک مدرس، تیر 1396، دوره 17، شماره 4، ص‌ص 255-266

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بهینه‌سازی توپولوژی، شکل و ابعاد سازه‌های کش‌بستی با تعداد عضو مشخص تحت بارگذاری خارجی

نسترن قیصریه[1]، علی اصغر عطائی[2*]، مسعود شریعت پناهی[2]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک ، دانشگاه تهران، تهران

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

* تهران، صندوق پستی 11155-4563، aataee@ut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 29 آذر 1395

پذیرش: 25 بهمن 1395

ارائه در سایت: 03 اردیبهشت 1396

کلید واژگان:

سازه‌های کش‌بستی

روش چگالی نیرویی

شکل‌یابی

بهینه‌سازی

چکیده

سازه‌های کش‌بستی، سازه‌های گسسته با اعضای دو نیرویی هستند که علاوه بر کاربردهای معماری، به‌عنوان یک سازه باربر نیز مورد توجه قرار گرفته‌اند. از آن‌جا که در این سازه‌ها کابل‌ها فقط کشش و میله‌ها فقط فشار را تحمل می‌کنند، با داشتن اعضای کمتر در مقایسه با خرپاها و پیش‌تنیدگی در هنگام برپا شدن، ساختار خودمتعادلی را ایجاد می‌نمایند که هم می‌توانند بارگذاری خارجی را تحمل کنند و هم بالقوه وزن کمتری در مقایسه با خرپاها دارا باشند. تعیین چیدمان پایدار سازه‌های کش‌بستی (توپولوژی)، موقعیت گره‌های آن‌ها (شکل) و ابعاد مقطع این سازه‌ها (تعیین اندازه) به منظور بهینه‌سازی وزن سازه، با چالش‌های زیادی همراه است چرا که تحلیل این سازه‌ها به‌صورت ماتریسی ممکن نیست و معادلات حاکم غیرخطی هستند. در این مقاله، با در نظر گرفتن سازه‌ی کش‌بستی با تعداد مشخصی کابل و میله، با تکیه‌گاه‌های مشخص برای تحمل هر نوع بارگذاری در گره‌های معین، فرایند جدیدی برای بهینه‌سازی از هر سه دیدگاه توپولوژی، شکل و ابعاد سازه بر پایه‌ی روش‌های تکاملی ارائه می‌شود. متغیرهای طراحی شامل نحوه‌ی اتصال اعضا، چگالی نیرویی و سطح مقطع آن‌ها، و قیود مسئله شامل استحکام اعضا، کمانش میله‌ها، حداکثر جابجایی گرهی و مختصات گره‌های شناور برای ایجاد تقارن است. قیود مسئله با فرایند غیرخطی شکل‌یابی ساختار خودمتعادل پیش‌تنیده، و تحلیل خطی سازه بارگذاری شده با فرض جابجایی‌های کوچک ارزیابی می‌شوند. در یک گام ابتکاری، بهینه‌سازی به طور همزمان در مناطق مختلفی از فضای جواب، که بالقوه ارزشمند هستند صورت می‌گیرد و پاسخ‌های متنوعی پدید می‌آیند. تنوع سازه‌های بهینه در نتایج ارائه شده مشاهده می‌شود.

Topology, shape and size optimization of 3-D tensegrity structures with specified number of members under external loads

Nastaran Gheisarieh, Ali Asghar Atai*, Masoud Shariatpanahi

School of Mechanical Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Iran
* P.O.B. 11155-4563, Tehran, Iran, aataee@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 19 December 2016
Accepted 13 February 2017
Available Online 23 April 2017

Keywords:
Tensegrity structures
Force density method
Form-finding
Optimization

ABSTRACT

"Tensegrity" refers to a class of discrete structures with two-force members (bars and cables) wherein cables only take tensile loads and bars only take compressive loads. The pre-stressed members are interconnected so as to form a self-equilibrium structure. Compared to a truss, supporting the same external loading, a tensegrity structure has fewer members and could weigh less. Determining the stable topology (member connectivities), shape (node coordinates) and size (cross-sectional areas of members) of a tensegrity structure for weight minimization is a challenging task, as the governing equations are nonlinear and the conventional matrix analysis methods cannot be used. This article addresses the weight minimization of a class one tensegrity structure with a given number of bars and cables, anchored at certain nodes and supporting given load(s) at certain node(s). In this paper, a novel procedure is proposed to optimize topology, shape and size of tensegrity structures simultaneously based on evolutionary methods. Member connectivities and their cross-sectional areas and force densities are taken as design variables, whereas the members' strength and buckling requirements and maximum nodal displacements constitute the constraints, along with the coordinates of the floating nodes to make the structure symmetric. Constraints are evaluated through the nonlinear shape design of the self-equilibrium structure and the linear analysis of the loaded structure, assuming small displacements. Using a novel approach, optimization is simultaneously performed in multiple promising areas of the solution space, resulting in multiple, optimum solutions. The diversity of the solutions is demonstrated by applying the proposed approach to a number of structural design problems.

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

N. Gheisarieh, A. Asghar Atai, M. Shariatpanahi, Topology, shape and size optimization of 3-D tensegrity structures with specified number of members under external loads, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 4, pp. 255-266, 2017 (in Persian)

1- مقدمه

سازه‌های کش‌بستی، نوعی سازه‌های دو یا سه‌بعدی هستند که در آن‌ها مجموعه‌ای از اجزای فشاری (میله) در یک شبکه از اجزای پیش‌تنیده[1] کششی (کابل) قرار می‌گیرند و با کمینه کردن انرژی ارتجاعی ذخیره شده در اجزای خود در حالت تعادل پایدار باقی می‌مانند [1]. یکپارچگی این گروه از ساختارها، بسته به تعادل نیروهای داخلی است. همه‌ی اعضا با پین به هم متصل شده‌اند و در نتیجه نیروی آن‌ها از نوع محوری است که این مسئله مدل‌سازی آن‌ها را ساده‌تر می‌کند. سازه‌های کش‌بستی به‌دلیل وزن کم و پایداری بالا اخیراً در طراحی سازه‌های بزرگ کاربرد فراوانی یافته‌اند و از آن‌ها در ساخت سقف سالن‌های عظیم [2]، پل‌ها [3] و انواعی از ربات‌ها [4] استفاده شده است. همچنین اخیراً از این سازه‌ها در شبیه‌سازی رفتار اسکلت سلول استفاده شده است [5]. مزیت اصلی سازه‌های کش‌بستی نسبت سختی به وزن بالا است. قابلیت گسترش یافتن به صورت ماژولار، قابلیت تاشوندگی و وزن کم از دیگر ویژگی‌های این نوع سازه‌ها می‌باشد.

دیوید جورج امریچ، ریچارد باکمینستر فولر و کنت اسنلسون نخستین کسانی هستند که سازه‌های کش‌بستی را معرفی کردند [6]. اسنلسون هنرمند جوانی بود که در سال 1947 اولین سازه‌ی کش‌بستی را ساخت [7]. فولر در سال 1962 نام کش‌بستی را برای توصیف سازه‌ی اسنلسون معرفی کرد [8].

بررسی سازه‌های کش‌بستی تاکنون از جنبه‌های مختلفی مورد مطالعه قرار گرفته است. یافتن شکل این سازه‌ها به طور نسبتاً وسیعی در مقالات بررسی شده است. هدف از این‌گونه مقالات پیدا کردن یک حالت خودمتعادل برای سازه‌های کش‌بستی دو یا سه‌بعدی است. در اکثر این‌گونه مقالات بدون در نظر گرفتن تکیه‌گاه و یا نیروهای خارجی تلاش شده تا شکل خودمتعادلی برای سازه پیدا شود.

پارامترهای اساسی برای طراحی این سازه‌ها عبارتند از: توپولوژی، نیروهای داخلی، نیروهای خارجی، پیکربندی (شکل) و قیود هندسی [9]. توپولوژی اتصالات بین اعضا و گره‌ها را بیان می‌کند. پیکربندی به صورت مختصات گره‌ها بیان می‌شود. تعیین پیکربندی هندسی در حالت تعادل، فرایند تعیین شکل[2] نامیده می‌شود [10]. قیود هندسی به معنای در نظر گرفتن محل اعمال نیروها، محل تکیه‌گاه‌ها و احیاناً لحاظ کردن شرایط تقارن می‌باشد.

اسکلتون در سال 2001 ساده‌ترین سازه‌ی کش‌بستی سه‌بعدی را بررسی کرد. این سازه از دو طبقه تشکیل شده که هر طبقه شامل سه میله می‌باشد که توسط کابل‌ها نگه داشته شده‌اند. در این مقاله بیان می‌شود که چگونه پیش‌تنش کابل‌ها یک سازه‌ی محکم و مقاوم را پدید می‌آورد [11].

روش‌های تعیین شکل سازه‌های کش‌بستی برای به‌دست آوردن حالت خودمتعادل را می‌توان به روش‌های تحلیلی و عددی تقسیم کرد. روش‌های تحلیلی برای سازه‌های کوچک و متقارن قابل استفاده هستند [12]. روش‌های عددی برای انواع سازه‌های کش‌بستی ارائه شده‌اند، که در ادامه به تعدادی از آن‌ها اشاره می‌شود.

روش چگالی نیرویی از جمله روش‌های عددی است که برای اولین بار در سال 1974 معرفی شد [13]. در سال 2006 استرادا نیز یک روش عددی برای تعیین شکل بر پایه‌ی روش چگالی نیرویی ارائه کرد. این روش صرفاً به یک حدس اولیه برای بردار چگالی نیرویی نیازمند است [14]. در این مقاله فقط تعادل سازه مورد نظر استرادا بود و هیچ گونه قیدی در این روش در نظر گرفته نشده بود. همچنین به علت نامعین بودن مسئله، یکتایی پاسخ تضمین نمی‌شود. در مراجع [15] و [12] این روش تعیین شکل توسعه داده شده است. یاماموتو و همکاران قیودی را روی هندسه اعمال نمودند و با کمک الگوریتم ژنتیک و با دانستن نوع اعضا و نحوه‌ی اتصال آن‌ها به یکدیگر، حالت پایدار را پیدا کردند. در این مقاله وجود حالت خود تنش[3] میزان تابع برازندگی را تعیین می‌کند. قیود اعمال شده روی هندسه شامل حداقل تعداد اتصالات در هر گره و حداکثر تعداد میله‌هایی که به هر گره می‌توانند متصل شوند می‌باشد [15]. در سال 2015 روش دیگری بر مبنای روش استرادا [14] با استفاده از الگوریتم ژنتیک ارائه شد، که در آن تنها تعداد گره‌ها برای یافتن پیکربندی لازم است. این روش برای سازه‌های کش‌بستی نامنظم و پیچیده مناسب می‌باشد [16]. در این روش تابع برازندگی و قیود مشابه کار یاماموتو [15] انتخاب شده‌اند، با این تفاوت که قید دیگری برای جلوگیری از برخورد دو عضو به یکدیگر نیز اعمال شده است.

کوهستانی نیز در سال 2012 از الگوریتم ژنتیک به عنوان بهینه‌ساز در روش چگالی نیرویی استفاده کرد و توانست آن را روی سازه‌های کش‌بستی منظم پیاده کند. اما این روش فقط برای سازه‌های نامنظم کوچک مناسب است [17]. از این‌رو در سال 2013 روشی مشابه روش استرادا [14] را مطرح نمود و روی سازه‌های کش‌بستی سه‌بعدی نامنظم و نسبتاً بزرگ اعمال کرد. در این روش نیز پاسخ به انتخاب بردار چگالی نیرویی اولیه بستگی دارد و ممکن است به یک حالت پایدار همگرا نشود و یا به پاسخی غیر مجاز برسد [12].

در روش دیگری که در سال 2014 ارائه شده، تنها به اطلاعات اتصالات گره‌ها به عنوان ورودی نیاز است و خروجی، نوع اتصالات، مختصات گره‌های مجاز و چگالی نیرویی اعضا می‌باشد. در این روش نیز چگالی نیرویی با الگوریتم ژنتیک ترکیب شده تا حالت خودمتعادل و پایدار یافت شود. تابع برازندگی به‌صورت انحراف معیار چگالی نیرویی‌ها تعریف شده تا مقادیر چگالی نیرویی در اعضا یکنواخت باشد. در این روش به‌علت کمتر بودن متغیرها نیازی به اعمال شروط تقارن برای کاهش تعداد متغیرهای چگالی نیرویی، متغیرهای هندسی و معادلات تعادل نیست. همچنین در این روش امکان اتصال بیش از یک میله به هر گره وجود ندارد، به‌عبارت دیگر سازه‌ی کش‌بستی، حاصل از کلاس یک می‌باشد [18].

روش چگالی نیرویی به صورت عددی و تجربی توسط شکسته‌بند و عابدی بررسی شده است [19]. آسیب‌های ممکن از قبیل از دست‌دادن یک عضو یعنی پاره شدن کابل یا کمانش میله و تاثیر آن بر رفتار سازه نیز به صورت عددی توسط این نویسندگان بررسی شده است [20].

علاوه بر روش‌های ذکر شده که عموماً به نحوی مشابه یکدیگر می‌باشند، یک روش اجزا محدود نیز برای تعیین شکل سازه‌های کش‌بستی ارائه شده است، که در آن برای رسیدن به پاسخ صحیح باید شکل اولیه نزدیک به شکل نهایی در نظر گرفته شود [21]. همچنین یک روش براساس ماتریس سختی[4] در سال 2014 ارائه شد. در این روش برای رسیدن به حالت خودمتعادل و پایدار از ماتریس سختی و انرژی پتانسیل سازه استفاده شده است. این روش برای تمامی سازه‌های کش‌بستی اعم از منظم، غیرمنظم و بزرگ قابل استفاده است [22]. در روش دیگری برای یافتن حالت خودمتعادل از روش سادکی[5] استفاده شده است [23].

[1] Pre–stressed
[2] form finding
[3] Self-stressed state
[4] SMFF (stiffness matrix based form-finding)
[5] Simplex

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.8.4]

لی و همکارانش در سال 2014 روش چگالی نیرویی را با الگوریتم ژنتیک ترکیب کردند و آن را روی چند سازه‌ی ساده‌ی دو و سه‌بعدی اعمال نمودند [24]. در این کار کمانش میله‌ها در نظر گرفته نشده است.

در طراحی یک سازه‌ی کش‌بستی توجه به ویژگی‌های مکانیکی از جمله نیروی هر عضو حائز اهمیت می‌باشد، اما علاوه بر آن، سایر ویژگی‌های پیکربندی نیز باید مورد توجه قرار گیرد. محل قرارگیری اعضا، محل قرارگیری تکیه‌گاه‌ها و محدودیت‌های هندسی دیگر از جمله‌ی این موارد می‌باشند. از این‌رو در سال 2006 اسکلتون روشی برای بهینه‌سازی نسبت وزن به سختی ارائه داد که تمامی موارد فوق را در برگیرد. او در طراحی خود قیود استحکام برای همه‌ی اعضا (بیش‌ترین نیروی قابل تحمل میله‌ها و کابل‌ها) و قید کمانش برای اعضای تحت فشار (میله‌ها) را در نظر گرفت. نوآوری او در لحاظ کردن تعداد زیادی قید برای شکل سازه بود [25].

مواردی که ذکر شد همگی درصدد به‌دست آوردن حالت خودمتعادل سازه، بدون در نظر گرفتن بار خارجی بودند. در زمینه‌ی بهینه‌سازی وزن سازه‌های کش‌بستی که تحت بار خارجی نیز قرار گرفته‌اند، بررسی‌های محدودی صورت گرفته است که در ادامه به آن‌ها اشاره می‌شود.

اسکلتون و ناگس در سال 2014 روشی را برای یافتن شکل بهینه، برای سازه‌ای که تحت مجموعه بارهای متفاوتی است ارائه دادند. متغیرهای آن‌ها در طراحی، چگالی نیرویی و سطح مقطع اعضا بودند. آن‌ها علاوه‌بر تسلیم و کمانش، شرط پایداری را نیز در نظر گرفته‌اند. نیروی وزن هر عضو نیز به صورت یک بار خارجی در نظر گرفته شده و به‌طور مساوی روی گره‌های دو سر آن تقسیم شده است [26]. در [25] به‌علت زیاد بودن قیود هندسی پاسخ به‌وسیله‌ی یک روش بهینه‌سازی غیرخطی به‌دست آمده، اما در [26] به علت ساده‌تر بودن قیود، روابط خطی بوده و پاسخ با روش ساده‌تری محاسبه شده است. روش ارائه شده در [26] صرفاً برای سازه‌های دو بعدی قابل استفاده است و کارایی آن تنها بر روی تیر یک سر گیردار با ساختار میشل ([27] و [1]) مورد بررسی قرار گرفته است. این نوع سازه‌ها برای تحمل بار خمشی طراحی شده‌اند [28] اما کارایی روش غیرخطی ارائه شده در [25] (مناسب برای تغییر شکل‌های بزرگ) روی سازه‌های دو و سه‌بعدی بررسی شده است. در [29] از روش هم-چرخشی برای تحلیل غیرخطی این سازه‌ها استفاده شده است. همچنین در این مقاله اثر پیش‌تنش نیز بر روی سختی سازه بررسی شده است.

تحلیل رفتار دینامیکی سازه‌های کش‌بستی نیز به طور نسبتاً گسترده‌ای انجام شده است. این کار اولین بار توسط موترو صورت گرفت [30]. فاروقی و بامداد نیز به بررسی این مسئله به کمک روش هم-چرخشی [31] و همچنین روش فضای حالت [32] پرداخته‌اند. در [33] نیز به بررسی اثر پیش‌تنیدگی بر روی مشخصات دینامیکی این سازه‌ها از جمله فرکانس طبیعی، با استفاده از یک نرم‌افزار اجزا محدود پرداخته شده است.

در مطالعه‌ی پیش‌رو روش جدیدی برای سبک‌سازی یک سازه‌ی کش‌بستی سه‌بعدی با قیود مختلف، شرایط هندسی و بارگذاری کلی و دلخواه، به کمک کاهش تعداد اعضای سازه ارائه شده است. سازه‌های مورد بررسی، سازه‌های کش‌بستی کلاس یک هستند، یعنی به هر گره تنها یک میله متصل است [1]. ابتدا حالت خودمتعادل سازه با در نظر گرفتن محل تکیه‌گاه‌ها، محل اعمال بار خارجی، اعمال شرایط تقارنی دلخواه، و حذف تعدادی عضو برای سبک‌سازی سازه، به‌دست می‌آید. سپس معادلات تعادل در حضور بار خارجی بررسی می‌شوند. در این پژوهش برای کاهش هزینه‌ی محاسباتی، با فرض کوچک بودن تغییر شکل‌ها در سازه‌ی مورد نظر، معادلات تعادل خطی‌سازی می‌شوند. در نهایت فرایند جدیدی برای بهینه‌سازی از سه منظر توپولوژی، شکل و ابعاد این سازه‌ها پیشنهاد می‌شود. اگرچه بهینه‌سازی بر پایه‌ی روش ازدحام ذرات انجام شده است اما روندی کاملاً جدید و ابتکاری به منظور بهینه‌سازی از نظر توپولوژی، شکل و ابعاد معرفی شده است. با به‌کارگیری این روش، بهینه‌سازی به‌طور همزمان در مناطق مختلفی از فضای جواب که بالقوه ارزشمند هستند صورت می‌گیرد و پاسخ‌های متنوعی پدید می‌آیند. این روش دو مرحله‌ای با ارائه‌ی چند مثال کاربردی به‌طور دقیق‌تری تبیین شده و نتایج سبک‌سازی این سازه‌ها ارائه می‌گردد.

2- فرمول‌بندی و روش حل مسئله

2-1- حالت خودمتعادل

در سازه‌های کش‌بستی کابل‌ها و میله‌ها با پین به یکدیگر متصل شده‌اند، همچنین نیرو تنها به گره‌ها وارد می‌شود. بنابراین نیروی داخل اعضا از نوع محوری است. با توجه به "شکل 1" معادلات تعادل نیرویی در گره شماره i که به گره‌های j و k متصل است و نیروی خارجی f_i^{ext} به آن گره اعمال می‌شود، به‌صورت رابطه‌ی (1) می‌باشد. این فرمول‌بندی توسط موترو [6] انجام شده است.

$$\begin{aligned}
&\frac{x_i-x_j}{l_{i,j}}f_{i,j}+\frac{x_i-x_k}{l_{i,k}}f_{i,k}+\cdots=f_{i,x}^{\text{ext}}\\
&\frac{y_i-y_j}{l_{i,j}}f_{i,j}+\frac{y_i-y_k}{l_{i,k}}f_{i,k}+\cdots=f_{i,y}^{\text{ext}}\\
&\frac{z_i-z_j}{l_{i,j}}f_{i,j}+\frac{z_i-z_k}{l_{i,k}}f_{i,k}+\cdots=f_{i,z}^{\text{ext}}
\end{aligned}\tag{1}$$

که در آن $l_{i,j}$ و $f_{i,j}$ طول و نیروی داخلی عضوی هستند که بین گره i و j قرار گرفته است. طول هر عضو از رابطه‌ی (2) قابل محاسبه است.

$$l_{i,j}=\sqrt{\left(x_i-x_j\right)^2+\left(y_i-y_j\right)^2+\left(z_i-z_j\right)^2}\tag{2}$$

با تعریف پارامتری به نام چگالی نیرویی که به صورت $q_{i,j}=f_{i,j}/l_{i,j}$ تعریف می‌شود، می‌توان معادلات تعادل را به صورت رابطه‌ی (3) بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
&(x_i-x_j)q_{i,j}+(x_i-x_k)q_{i,k}+\cdots=f_{i,x}^{\text{ext}}\\
&(y_i-y_j)q_{i,j}+(y_i-y_k)q_{i,k}+\cdots=f_{i,y}^{\text{ext}}\\
&(z_i-z_j)q_{i,j}+(z_i-z_k)q_{i,k}+\cdots=f_{i,z}^{\text{ext}}
\end{aligned}\tag{3}$$

یا به عبارت دیگر:

$$\begin{aligned}
&(q_{i,j}+q_{i,k})x_i-q_{i,j}x_j-q_{i,k}x_k+\cdots=f_{i,x}^{\text{ext}}\\
&(q_{i,j}+q_{i,k})y_i-q_{i,j}y_j-q_{i,k}y_k+\cdots=f_{i,y}^{\text{ext}}\\
&(q_{i,j}+q_{i,k})z_i-q_{i,j}z_j-q_{i,k}z_k+\cdots=f_{i,z}^{\text{ext}}
\end{aligned}\tag{4}$$

برای به‌دست آوردن معادلات تعادل برای کل سازه، بردارهای $\vec{x}=[x_1\cdots x_n]^{\mathrm{T}}$ ، $\vec{y}=[y_1\cdots y_n]^{\mathrm{T}}$ و $\vec{z}=[z_1\cdots z_n]^{\mathrm{T}}$ به عنوان بردارهای مختصات کل گره‌ها به ترتیب در راستای محورهای x، y و z در

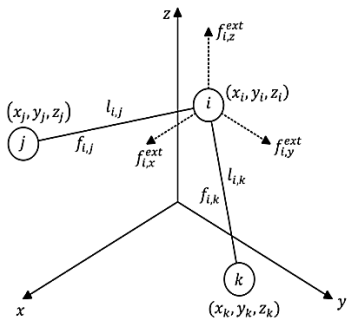

Fig. 1 Equilibrium at node i

شکل 1 تعادل در گره i

نظر گرفته می‌شوند. همچنین ماتریس اتصال C برای نمایش نحوه‌ی اتصال گره‌ها به هم تعریف می‌شود. این ماتریس یک سطر به ازای هر عضو دارد و تعداد ستون‌های آن برابر تعداد گره‌ها است. درایه‌های هر سطر این ماتریس شامل اعداد 1 و 1- می‌باشد، به این معنا که هر عضو از گرهی که درایه‌ی متناظر با آن 1 است آغاز و به گرهی که درایه‌ی متناظر با آن 1- است ختم می‌گردد. با این تعریف معادلات تعادل (3) به صورت رابطه‌ی (5) خلاصه می‌شوند.

$$B\vec{q} = \begin{pmatrix} C^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(C\vec{x}) \\ C^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(C\vec{y}) \\ C^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(C\vec{z}) \end{pmatrix}\vec{q} = \vec{f}^{\mathrm{ext}} \tag{5}$$

در معادله‌ی (5) منظور از $\mathrm{diag}(a)$ ماتریسی قطری است که قطر آن شامل درایه‌های بردار a می‌باشد.

همچنین معادلات (4) را نیز می‌توان به شکل رابطه‌ی (6) برای کل سازه بازنویسی کرد.

$$D[\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z}] = (C^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\vec{q})C)[\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z}] = [\vec{0}\ \vec{0}\ \vec{0}] \tag{6}$$

2-2- حل عددی معادلات حالت خودمتعادل

پیش از اعمال نیروی خارجی و حل معادلات تعادل، باید سازه در حالت خودمتعادل برپا گردد. در این حالت داریم:

$$B\vec{q} = \vec{0} \tag{7}$$

در تعداد زیادی از مقالات ارائه شده در این زمینه از جمله [13-15] برای حل دستگاه معادلات (7) از یک روش عددی تکرار شونده که مبنای آن بر تجزیه‌ی ماتریس‌های A و D است استفاده شده است. در این‌گونه مقالات، هیچ‌گونه قید هندسی از جمله محل تکیه‌گاه‌ها و محل اعمال نیرو برای سازه نمی‌تواند در نظر گرفته شود، به عبارت دیگر مختصات تمام گره‌ها مجهول بوده و از محاسبات مربوطه به‌دست می‌آیند.

در این پژوهش هدف یافتن سازه‌ای است که توانایی تحمل بار خارجی داشته باشد. به این منظور باید مختصات تعدادی از گره‌ها به عنوان تکیه‌گاه و محل اعمال نیرو مشخص باشد. بنابراین چگالی نیرویی اعضا و مختصات سایر گره‌ها مجهول هستند. برای حل دستگاه معادلات غیرخطی (7) از الگوریتم لونبرگ–مارکارد[1] [34] استفاده شده است. این الگوریتم روشی تکراری است و کمینه‌ی دستگاه معادلات غیرخطی را با حل مسئله‌ی کمینه مربعات پیدا می‌کند. برای آغاز کمینه‌سازی به یک حدس اولیه نیاز است که این حدس اولیه در همگرایی یا عدم همگرایی الگوریتم به پاسخ صحیح مؤثر است.

مجهولات در معادله‌ی تعادل (7) شامل چگالی نیرویی اعضا و همچنین مختصات تعدادی از گره‌ها می‌باشد. از آن‌جا که تعداد معادلات برابر تعداد اعضا است، واضح است که تعداد مجهولات در هر صورت بیشتر از معادلات است و در نتیجه این دستگاه معادلات بی‌شمار پاسخ دارد. به عبارت دیگر حالت خودمتعادل برای تعداد مشخصی گره و عضو، یکتا نیست [14] و بسته به حدس اولیه به پاسخ‌های متعددی همگرا می‌شود. همچنین ممکن است به ازای مقادیری از حدس اولیه، به هیچ پاسخی همگرا نشود. در ادامه و در روند بهینه‌سازی این پاسخ‌ها از نظر ارضا کردن قیود مورد نظر بررسی می‌شوند.

3-2- خطی‌سازی معادلات تعادل پس از اعمال نیرو

در مرحله‌ی قبل روش حل دستگاه معادلات تعادل همگن (7) و به‌دست آوردن حالت خودمتعادل ذکر شد. با اعمال نیرو، این معادلات به شکل ناهمگن در می‌آیند. در این مرحله، روش حل این معادلات غیرخطی، ارائه می‌شود.

همان‌گونه که اشاره شد تمام اعضا با پین به یکدیگر متصل شده‌اند. همچنین نیرو تنها در گره‌ها وارد می‌شود. بنابراین تمام اعضا تحت نیروی محوری قرار دارند. با فرض این‌که اعضا از قانون هوک پیروی می‌کنند، می‌توان طول اولیه‌ی هر عضو را محاسبه کرد. در رابطه‌ی (8) سختی اعضا برابر AE/l_{initial} قرار داده شده است. E و A به ترتیب مدول الاستیسیته و سطح مقطع اعضا و l_{initial} طول اولیه‌ی اعضا پیش از اعمال نیرو می‌باشند.

$$f_{i,j} = K_{i,j}\left(l_{i,j} - l_{i,j_{\mathrm{initial}}}\right) = \frac{A_{i,j}E_{i,j}}{l_{i,j_{\mathrm{initial}}}}\left(l_{i,j} - l_{i,j_{\mathrm{initial}}}\right) \tag{8}$$

همچنین می‌دانیم:

$$f_{i,j} = q_{i,j}l_{i,j} \tag{9}$$

با برابر قرار دادن روابط (8) و (9) و جای‌گذاری طول اعضا از رابطه‌ی (2)، طول اولیه‌ی اعضا از رابطه‌ی (10) قابل محاسبه است. چگالی نیرویی (q) برای کابل‌ها مثبت و برای میله‌ها منفی است. با توجه به رابطه‌ی (10) ممکن است طول اولیه‌ی میله‌ها به‌ازای مقادیر بالای چگالی نیرویی، منفی شود. واضح است این‌گونه مقادیر چگالی نیرویی غیرقابل قبول هستند. در ادامه و در روند بهینه‌سازی، این مسئله به‌صورت یک قید بررسی خواهد شد.

$$l_{i,j_{\mathrm{initial}}} = \frac{\sqrt{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2 + \left(z_i - z_j\right)^2}}{1 + q_{i,j}\dfrac{\sqrt{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2 + \left(z_i - z_j\right)^2}}{A_{i,j}E_{i,j}}} \tag{10}$$

پیش از خطی‌سازی، معادل نیروی داخلی از رابطه‌ی (8) در معادلات تعادل (1) قرار داده می‌شود (رابطه‌ی (11)). همچنین طول اعضا در حالت خودمتعادل از رابطه‌ی (2) در معادلات تعادل (1) جایگزین می‌شوند. بنابراین رابطه‌ی نهایی به‌دست آمده برای معادلات تعادل (بعد از اعمال نیرو) به صورت رابطه‌ی (12) در می‌آید. برای اختصار تنها معادلات تعادل در راستای محور x آورده شده‌اند. لازم به ذکر است طول اولیه‌ی اعضا نیز پس از محاسبه از رابطه‌ی (10) در معادله تعادل نهایی (12) قرار داده می‌شود.

$$\frac{x_i - x_j}{l_{i,j}}\left[\frac{A_{i,j}E_{i,j}}{l_{i,j_{\mathrm{initial}}}}\left(l_{i,j} - l_{i,j_{\mathrm{initial}}}\right)\right] + \frac{x_i - x_k}{l_{i,k}}\left[\frac{A_{i,k}E_{i,k}}{l_{i,k_{\mathrm{initial}}}}\left(l_{i,k} - l_{i,k_{\mathrm{initial}}}\right)\right] + \cdots = f_{i,x}^{\mathrm{ext}} \tag{11}$$

$$\frac{x_i - x_j}{\sqrt{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2 + \left(z_i - z_j\right)^2}}\left[\frac{A_{i,j}E_{i,j}}{l_{i,j_{\mathrm{initial}}}}\left(\sqrt{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2 + \left(z_i - z_j\right)^2} - l_{i,j_{\mathrm{initial}}}\right)\right] + \frac{x_i - x_k}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}}\left[\frac{A_{i,k}E_{i,k}}{l_{i,k_{\mathrm{initial}}}}\left(\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2} - l_{i,k_{\mathrm{initial}}}\right)\right] + \cdots = f_{i,x}^{\mathrm{ext}} \tag{12}$$

معادله تعادل به‌دست آمده در راستای محور x به صورت رابطه‌ی (13) نشان داده می‌شود. به همین ترتیب معادلات تعادل در دو راستای دیگر نیز به‌دست می‌آیند. مجموعه معادلات در سه راستا به صورت رابطه‌ی (14) نمایش داده می‌شوند.

$$G(\vec{x}) = \vec{f}_x^{\mathrm{ext}} \tag{13}$$

$$G(\vec{X}) = \vec{f}^{\mathrm{ext}} \tag{14}$$

که در آن:

$$\vec{X} = [x_1\ \ y_1\ \ z_1\ \ x_2\ \ \ldots]^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

در حالت خودمتعادل نیروی خارجی برابر صفر است. در نتیجه داریم:

[1] Levenberg–Marquardt algorithm

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.8.4]

$$G(\vec{X}) = \vec{0} \tag{16}$$

در این حالت $\vec{X}$ نشان‌دهنده‌ی حالت خودمتعادل سازه است. با اعمال نیروی خارجی مختصات گره‌ها تغییر خواهد کرد. این تغییر را می‌توان به صورت رابطه‌ی (17) نمایش داد.

$$G(\vec{X} + \Delta\vec{X}) = \vec{f}^{\text{ext}} \tag{17}$$

همان‌گونه که قبلاً نیز اشاره شد هدف به‌دست آوردن سازه‌ای است که در برابر نیروی خارجی از خود مقاومت نشان داده (سختی بالایی داشته باشد) و در نتیجه تغییر شکل‌ها در آن کوچک باشند. بنابراین با فرض تغییر شکل‌های کوچک می‌توان تنها جمله‌ی اول از بسط تیلور معادل رابطه‌ی (17) را در نظر گرفت و از سایر جملات صرف نظر کرد (رابطه‌ی (18)).

$$\begin{aligned} G(\vec{X} + \Delta\vec{X}) &= G(\vec{X}) + \nabla G(@\vec{X})\,\Delta\vec{X} + \cdots \\ &\cong G(\vec{X}) + \nabla G(@\vec{X})\,\Delta\vec{X} \end{aligned} \tag{18}$$

از طرفی با توجه به رابطه‌ی (16) در حالت خودمتعادل می‌توان رابطه‌ی (18) را به صورت رابطه‌ی (19) ساده نمود.

$$G(\vec{X} + \Delta\vec{X}) = \nabla G(@\vec{X})\,\Delta\vec{X} \tag{19}$$

که در آن:

$$(\nabla G)_{ij} = \frac{\partial G_i}{\partial X_j} \tag{20}$$

بنابراین ماتریس گرادیان معادلات تعادل را می‌توان از رابطه‌ی (21) محاسبه نمود.

$$\nabla G = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_{1x}}{\partial x_1} & \frac{\partial G_{1x}}{\partial y_1} & \frac{\partial G_{1x}}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial G_{1x}}{\partial x_n} & \frac{\partial G_{1x}}{\partial y_n} & \frac{\partial G_{1x}}{\partial z_n} \\ \frac{\partial G_{1y}}{\partial x_1} & \frac{\partial G_{1y}}{\partial y_1} & \frac{\partial G_{1y}}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial G_{1y}}{\partial x_n} & \frac{\partial G_{1y}}{\partial y_n} & \frac{\partial G_{1y}}{\partial z_n} \\ \frac{\partial G_{1z}}{\partial x_1} & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \frac{\partial G_{nx}}{\partial x_1} & & & & \ddots & & \vdots \\ \frac{\partial G_{ny}}{\partial x_1} & & & & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_{nz}}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial G_{nz}}{\partial z_n} \end{bmatrix} \tag{21}$$

که در آن منظور از G_{ix} معادله تعادل در راستای محور x در گره i است. لازم به ذکر است که ماتریس ∇G به ازای $\vec{X}$، یعنی مختصات گره‌ها در حالت خودمتعادل، محاسبه می‌گردد. اکنون به کمک رابطه‌ی (22) می‌توان میزان جابجایی گره‌ها بعد از اعمال نیرو را محاسبه کرد.

$$\nabla G \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \Delta z_1 \\ \vdots \\ \Delta z_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1x}^{\text{ext}} \\ f_{1y}^{\text{ext}} \\ f_{1z}^{\text{ext}} \\ \vdots \\ f_{nz}^{\text{ext}} \end{Bmatrix} \tag{22}$$

در این رابطه، f_{ix}^{ext} نیروی خارجی در راستای محور x در گره i را نشان می‌دهد. به این ترتیب با محاسبه‌ی متخصات جدید گره‌ها، طول جدید آن‌ها نیز به‌دست آمده و نیروی داخلی اعضا را می‌توان از رابطه‌ی (23) محاسبه کرد.

$$f_{i,j} = \frac{A_{i,j}E_{i,j}}{l_{i,j_{\text{initial}}}}\left(l_{i,j} - l_{i,j_{\text{initial}}}\right) \tag{23}$$

3- بهینه‌سازی

3-1- تعریف مسئله‌ی بهینه‌سازی

3-1-1- انتخاب متغیرهای بهینه‌سازی و تابع هدف

هدف در این پژوهش برپایی یک سازه‌ی کش‌بستی قابل قبول با کمترین وزن ممکن است. یکی از اقداماتی که برای کاهش وزن باید صورت پذیرد، کاهش سطح مقطع اعضا است که به عنوان یکی از متغیرهای بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شود. اما این کاهش باید به نحوی باشد که تنش اعضا از حد مجاز تجاوز نکند، کابل‌ها تحت کشش باشند و میله‌ها کمانش نکنند.

با دقت در معادلات تعادل در حالت خودمتعادل (7)، می‌توان نتیجه گرفت اگر چگالی نیرویی به‌دست آمده در عددی ثابت ضرب شود، این معادلات همچنان برقرار هستند. در عمل این تغییر باعث افزایش یا کاهش میزان کشیدگی کابل‌ها و فشردگی میله‌ها شده و سختی سازه را تغییر می‌دهد. بنابراین برای یافتن مناسب‌ترین مقادیر چگالی نیرویی، ضریب آن به عنوان یکی دیگر از متغیرهای بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شود.

همان‌گونه که قبلاً نیز اشاره شد، حالت خودمتعادل یک سازه‌ی کش‌بستی با تعداد گره معلوم، یکتا نیست [14]. این مسئله با توجه به تعداد معادلات تعادل و تعداد مجهولات نیز مشخص است. مجهولات شامل چگالی نیرویی اعضا و بخشی از مختصات گره‌ها می‌باشند. معادلات تعادل در سه جهت باید در گره‌های آزاد (یعنی تمام گره‌ها به جز گره‌هایی که تکیه‌گاه هستند) برقرار باشد. در صورتی که تعداد مجهولات از تعداد معادلات بیش‌تر باشد، مسئله نامعین بوده و بی‌شمار جواب دارد. در مثال‌های عملی معمولاً این حالت به وجود می‌آید. بنابراین بخشی از متغیرهای بهینه‌سازی، متغیرهای مربوط به به‌دست آوردن حالت خودمتعادل سازه است، که شامل بخشی از مختصات گره‌ها، چگالی نیرویی اعضا و نحوه‌ی چیدمان آن‌ها می‌باشد.

به منظور کاهش وزن، سازه‌ی کش‌بستی مورد نظر از کلاس یک انتخاب شده‌است. در سازه‌های کش‌بستی کلاس یک، به هر گره تنها یک میله باید متصل باشد [1]. در این صورت با معلوم بودن تعداد گره‌ها، تعداد میله‌ها نیز مشخص است که باید نصف تعداد گره‌ها باشد.

با کاهش تعداد کابل‌ها سازه‌ی سبک‌تری به‌دست می‌آید. البته باید در نظر داشت که برای قابل قبول بودن یک سازه‌ی کش‌بستی سه‌بعدی، تعداد اعضا در هر گره نباید کمتر از سه عضو باشد. زیرا برای تعادل نیرویی در سه بعد، حداقل سه عضو نیرویی لازم است. اگر تعداد کابل‌های سازه از پیش تعیین گردد، چیدمان این کابل‌ها می‌تواند جزء متغیرهای طراحی در نظر گرفته شود. در این‌جا برای سهولت ابتدا سازه‌ای با حداکثر تعداد کابل ممکن در نظر گرفته شده و سپس به تعداد موردنظر، کابل از آن حذف خواهد شد. به‌عبارت دیگر شماره‌ی کابل‌های موردنظر برای حذف، جزء متغیرهای طراحی هستند. تعداد حالات ممکن برای حذف کابل‌ها از رابطه‌ی (24) قابل محاسبه است:

$$\frac{n_{\text{ca\_max}}!}{n_{\text{el}}!\left(n_{\text{ca\_max}} - n_{\text{el}}\right)!} \tag{24}$$

که در آن $n_{\text{ca\_max}}$ حداکثر تعداد کابل ممکن برای سازه‌ای با تعداد گره مشخص و n_{el} تعداد کابل‌های حذف شده برای رسیدن به سازه‌ای با تعداد کابل مطلوب می‌باشند. این مقدار با افزایش تعداد گره‌ها به شدت افزایش می‌یابد. بنابراین فرایند تعیین بهترین حالت حذف کابل‌ها یکی از چالش‌های این بهینه‌سازی است. حذف این کابل‌ها می‌تواند منجربه فرو ریختن یا غیرقابل قبول شدن سازه شود. انتخاب این مجموعه کابل‌ها از میان کل کابل‌ها فرایندی طولانی و تصادفی است. به‌عبارت دیگر وجود یک کابل مشخص در یک مجموعه از کابل‌های حذفی نمی‌تواند به تنهایی موجب برقراری یا عدم برقراری قیود شود، بلکه مجموعه‌ی کابل‌ها با هم در نتیجه‌ی

نهایی دخیل هستند. از طرفی با در نظر گرفتن شماره‌ی کابل‌های موردنظر برای حذف، تعداد متغیرهای طراحی به شدت افزایش پیدا کرده و این مسئله روند بهینه‌سازی را به شدت کند می‌کند و همگرایی آن را تحت تاثیر قرار می‌دهد. به دلیل ماهیت تاثیر بدون قاعده‌ی نحوه‌ی حذف کابل‌ها از سازه، این مرحله به طور تصادفی و در هر بار محاسبه‌ی تابع هدف انجام می‌شود.

در مجموع می‌توان گفت در این بهینه‌سازی، متغیرهای طراحی به دو دسته تقسیم شده‌اند. دسته‌ی اول شامل ضریب چگالی نیرویی و سطح مقطع اعضا می‌باشد که در واقع متغیرهایی هستند که ابعاد سازه را بهینه می‌کنند (بهینه‌سازی ابعادی). دسته‌ی دوم شامل شماره‌ی کابل‌های حذفی و متغیرهای مربوط به یافتن حالت خودمتعادل سازه است. در روش پیشنهادی، به‌دلیل قاعده‌مند نبودن تاثیر نحوه‌ی حذف کابل‌ها بر رفتار سازه، این فرایند به‌صورت تصادفی انجام می‌شود. همچنین برای یافتن حالت خودمتعادل سازه نیز همین مسئله وجود دارد. فضای جستجوی حالت خودمتعادل، بسیار بزرگ است، زیرا همان‌طور که ذکر شد معادله تعادل (7) بی‌شمار جواب دارد. همچنین تعداد حالات قابل قبول به راحتی یافت نمی‌شوند، زیرا این فرایند به حدس اولیه نیازمند است. ممکن است به ازای مقادیری از حدس اولیه، دستگاه معادلات همگرا نشده و پاسخی یافت نگردد. بنابراین جستجو در این بخش نیز به‌صورت تصادفی صورت می‌گیرد. پس از یافتن تعدادی طرح قابل قبول، بهینه‌سازی ابعادی بر روی آن‌ها انجام می‌شود. در واقع یافتن بهینه‌ی مطلق عملاً امکان‌پذیر نیست و بدون خدشه به جامعیت روش پیشنهادی، به یافتن تعدادی از بهترین حالات و بهینه‌سازی ابعادی آن‌ها بسنده می‌شود.

3-1-2- قیود بهینه‌سازی

همان‌گونه که اشاره شد، تابع هدف وزن سازه (با توجه به طول و سطح مقطع اعضا) است که در صورت برپایی سازه محاسبه شده و پس از بی‌بعدسازی به عنوان مقدار تابع هدف در نظر گرفته می‌شود. اما در فرایند بهینه‌سازی ممکن است متغیرهای طراحی طوری انتخاب شوند که سازه‌ی کش‌بستی در حالت خودمتعادل برپا نشود و یا پس از برپایی و اعمال نیرو فرو ریزد یا قابل قبول نباشد. به‌منظور جلوگیری از چنین شرایطی و رسیدن به سازه‌ای قابل قبول، تعداد زیادی قید در این بهینه‌سازی در نظر گرفته شده‌اند که در این بخش به آن‌ها اشاره می‌شود.

گام اول در بهینه‌سازی سازه، برپایی حالت خودمتعادل است. یکی از شروط برپایی سازه‌ای سه‌بعدی این است که حداقل تعداد عضو در هر گره برابر سه باشد، یعنی کمتر از دو کابل در هر گره وجود نداشته باشد. علت این امر لزوم برقراری معادلات تعادل در سه جهت در حالت سه‌بعدی است. در ابتدا این شرط بررسی شده و در صورت ارضا نشدن مقداری بزرگ برای تابع هدف در نظر گرفته می‌شود. واضح است که بررسی این شرط در گره‌های ثابت مانند تکیه‌گاه‌ها نیاز نیست. همچنین بین گره‌های ثابت نباید کابل یا میله‌ای قرار بگیرد.

سپس سایر شرایط بررسی می‌شوند. تنش کششی کابل‌ها و تنش فشاری میله‌ها قبل و بعد از بارگذاری محاسبه شده و در صورت تجاوز تنش اعضا از حداکثر تنش مجاز، به نسبت میزان افزایش نیرو از مقدار مجاز، تابع هدف جریمه می‌گردد. همچنین کمانش میله‌ها قبل و بعد از بارگذاری نیز بررسی می‌شود. ممکن است بر اثر نحوه‌ی چیدمان اعضا و میزان نیروی وارد بر آن‌ها کابلی تحت کشش نبوده و درنتیجه نیروی داخلی آن صفر شود. در این صورت نیز سازه قابل قبول نیست و جریمه‌ای برای این حالت نیز به تابع هدف اعمال می‌گردد.

با توجه به جنبه‌های کاربردی سازه (از نظر ساخت و ...) مقدار حداقلی برای طول اعضا در نظر گرفته می‌شود. همچنین محدوده‌ای مجاز برای انتخاب محل گره‌ها در نظر گرفته می‌شود. با توجه به رابطه‌ی (10) طول اولیه‌ی میله‌ها ممکن است به ازای مقادیری از چگالی نیرویی، منفی شود. تمام این موارد قبل از اعمال نیرو بررسی شده و در صورت وجود چنین شرایطی، جریمه‌ای در نظر گرفته شده و مرحله‌ی اعمال نیرو انجام نمی‌شود.

پس از اعمال نیرو نیز قیودی باید بررسی گردند. علاوه بر کمانش و حداکثر تنش اعضا، جابجایی گره‌ها نیز بررسی شده و به تناسب میزان افزایش از حد مجاز، جریمه‌ای به تابع هدف اضافه می‌گردد.

3-2- روند بهینه‌سازی

ابتدا با معلوم بودن تعداد گره، ماتریس اتصال یک سازه‌ی تنسگریتی کلاس یک با حداکثر تعداد کابل ممکن تشکیل داده می‌شود. به‌طوری که بین گره‌های ثابت عضوی قرار نگیرد. با معلوم بودن تعداد کابل‌های مورد نظر برای حذف از سازه، باید به دنبال شماره‌ی این کابل‌ها بود. این حذف کردن باید طوری صورت پذیرد که سازه‌ی به‌دست آمده سازه‌ای قابل قبول باشد، یعنی در هر گره کمتر از سه عضو وجود نداشته باشد. سپس حالت خودمتعادل سازه به‌دست آمده و قیود ذکرشده در بخش قبل بررسی می‌شوند. در صورت ارضا شدن قیودی که برای برپایی حالت خودمتعادل لازم است، بار خارجی اعمال شده و سایر قیود مورد بررسی قرار می‌گیرند.

بهینه‌سازی تا زمان رسیدن به یک یا چند سازه‌ی قابل قبول ادامه پیدا می‌کند. این سازه‌ها به عنوان هسته‌های جستجو در ادامه‌ی بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شوند. برای بهبود روند بهینه‌سازی، در مرحله‌ی دوم چند سازه‌ی قابل قبول در نظر گرفته شده و بهینه‌سازی ابعادی بر روی آن‌ها انجام می‌شود. یعنی کابل‌های حذفی و حالت خودمتعادل سازه، که شامل مختصات گره‌ها، نحوه‌ی چینش و چگالی نیرویی اعضا در حالت خودمتعادل می‌باشد، ثابت در نظر گرفته می‌شوند و بهینه‌سازی تنها با سطح مقطع اعضا و ضریب چگالی نیرویی ادامه می‌یابد. به این ترتیب علاوه بر بهینه‌سازی اولیه، چند بهینه‌سازی ابعادی نیز به‌طور موازی انجام می‌شوند. در این مرحله تمرکز بهینه‌ساز بر روی سایر متغیرهای طراحی باعث همگرایی بهتر به پاسخ نهایی می‌گردد. نمودار جریانی روش مذکور به اختصار در "شکل 2" ارائه شده است.

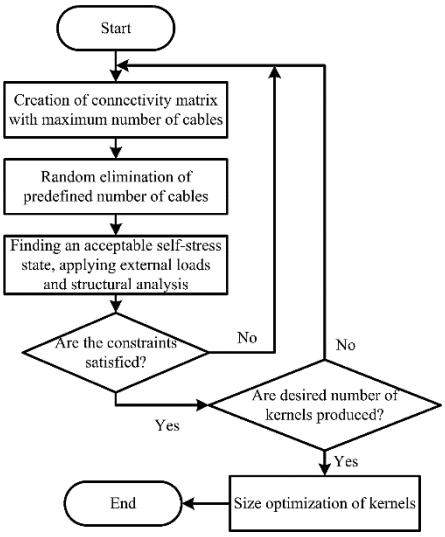

Fig. 2 Flow chart of optimization procedure

شکل 2 نمودار جریانی فرایند بهینه‌سازی

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.8.4]

3-3- روش بهینه‌سازی ازدحام ذرات[1]

روش بهینه‌سازی ازدحام ذرات، الگوریتمی جمعیتی است. به‌علت زیاد بودن تعداد متغیرهای جستجو، بزرگ بودن فضای جستجو و عدم آگاهی در مورد نحوه‌ی تغییرات تابع هدف، این روش برای بهینه‌سازی انتخاب شده است.

روش ازدحام ذرات از مفهوم تعامل اجتماعی الهام گرفته شده است. این روش ابتکاری توسط کندی و ابرهارت ابداع شده و توسعه یافته است [35]. روش ازدحام ذرات مبتنی بر جمعیتی از ذرات است که هرکدام با سرعتی به سمت بهترین موقعیت شناخته شده در حافظه‌ی خود و بهترین موقعیت شناخته شده در کل جمعیت در حال اصلاح حرکت خود هستند. موقعیت جدید ذره‌ی i در تکرار $k+1$ یعنی X_{k+1}^{i} از رابطه‌ی (25) به‌دست می‌آید:

$$X_{(k+1)}^{i} = X_{(k)}^{i} + V_{(k+1)}^{i} \tag{25}$$

که در آن V_{k+1}^{i} سرعت ذره‌ی i در تکرار $k+1$ است که از رابطه‌ی (26) قابل محاسبه می‌باشد:

$$V_{(k+1)}^{i} = w\,V_{(k)}^{i} + c_1\,\mathrm{rand}_1\left(X_{\mathrm{best}}^{i} - X_{(k)}^{i}\right) + c_2\,\mathrm{rand}_2\left(X_{\mathrm{best}}^{G} - X_{(k)}^{i}\right) \tag{26}$$

که در آن w ضریب اینرسی، c_1 پارامتر شناختی[2] و c_2 پارامتر اجتماعی[3] است. c_1 و c_2 به ترتیب نشان‌دهنده‌ی میزان تاثیرپذیری از شناخت فردی و اجتماعی می‌باشند [35].

نخستین گام برای آغاز بهینه‌سازی، انتخاب پارامترهای این الگوریتم است. این پارامترها شامل ضریب اینرسی، پارامتر شناختی و پارامتر اجتماعی می‌باشند. ضریب اینرسی در واقع میزان تاثیر سرعت قبلی ذره در سرعت آن در تکرار بعدی را مشخص می‌کند. کم بودن این ضریب باعث جستجوی محلی شده و بالا بودن آن باعث افزایش دامنه‌ی جستجو می‌شود. شی و ابرهارت پیشنهاد داده‌اند در ابتدا ضریب اینرسی بالا بوده و به تدریج کاهش یابد. بازه‌ی پیشنهادی آن‌ها بین 0.8 و 1 می‌باشد [36]. در مرجع دیگری این مقدار بین 0.8 و 1.2 پیشنهاد داده شده است [37]. پارامترهای شناختی و اجتماعی نیز معمولاً برابر 2 در نظر گرفته می‌شوند [35].

4- نتایج عددی

در این بخش پس از ارائه‌ی یک مثال برای اعتبارسنجی، روش پیشنهادی بر روی دو سازه‌ی کش‌بستی اعمال شده و نتایج بهینه‌سازی ارائه شده است. در این مثال‌ها، تابع هدف وزن بی‌بعدسازی شده می‌باشد و قیود نیز به صورت بی‌بعد به عنوان جریمه به آن اضافه شده‌اند. تعداد گره‌ها برای اولین مثال برابر 8 و برای مثال دوم برابر 10 در نظر گرفته شده است. در تمامی مراحل بهینه‌سازی با توجه به مراجع [35] و [37] پارامترهای شناختی و اجتماعی برابر 2 در نظر گرفته شده و ضریب اینرسی به طور خطی از مقدار 1.2 تا 0.8 تغییر می‌کند.

4-1- اعتبارسنجی روش بهینه‌سازی

به منظور بررسی توانایی روش ارائه شده در این مقاله، یک سازه‌ی دوبعدی با هشت گره و 15 عضو در نظر گرفته شده است. این سازه از نظر ابعاد در مراجع [38] و [39] بهینه‌سازی شده است. جهت مقایسه‌ی نتایج، شرایطی کاملاً مشابه این مقالات در نظر گرفته شده است. ساختار سازه‌ی مذکور در "شکل 3" مشخص شده است. در این شکل خطوط پررنگ میله و خطوط کم‌رنگ کابل می‌باشند. نیرویی برابر -10000 lb به یکی از گره‌های انتهایی تیر وارد می‌شود. مقدار تنش مجاز کششی و فشاری برابر 25 ksi در نظر گرفته شده است. مدول الاستیسیته و چگالی نیز به ترتیب برابر 10^4ksi و $0.1\ \mathrm{lb/in^3}$ می‌باشند.

متغیرهای طراحی شامل سطح مقطع اعضا می‌باشد. سطح مقطع اعضا همانند مراجع ذکر شده از مجموعه‌ی $D = (0.111, 0.141, 0.174, 0.220, 0.270, 0.287, 0.347, 0.440, 0.539, 0.954, 1.081, 1.174, 1.333, 1.488, 1.764, 2.142, 2.697, 2.800, 3.131, 3.565, 3.813, 4.805, 5.952, 6.572, 7.192, 8.525, 9.300, 10.850, 13.330, 14.290, 17.170, 19.180)\ \mathrm{in}^2$ انتخاب شده‌اند. جدول 1 سطح مقطع اعضا را پس از بهینه‌سازی نشان می‌دهد.

در جدول 2 وزن سازه‌ی حاصل از این بهینه‌سازی با نتایج دو مقاله‌ی دیگر مقایسه شده است. با توجه به این جدول نتایج حاصل از روش معرفی شده با نتایج سایر مقالات تطابق خوبی داشته و توانایی روش در به‌دست آوردن سازه‌ای سبک را نشان می‌دهد.

4-2- سازه‌ی کش‌بستی با هشت گره

سازه‌ی انتخاب شده، سازه‌ای کش‌بستی با هشت گره می‌باشد که محل چهار گره به عنوان تکیه‌گاه ثابت در نظر گرفته شده است. به چهار گره دیگر نیز نیروهایی برابر و در جهت منفی محور z وارد می‌شود. مختصات z این چهار گره معلوم فرض شده است. این گره‌ها نسبت به محور z دو به دو متقارنند. کلیه‌ی مشخصات و فرضیات در نظر گرفته شده برای این سازه در جدول 3 آمده است. با توجه به این‌که بین تکیه‌گاه‌ها نباید عضوی قرار گیرد، حداکثر تعداد اعضا برابر 22 عضو است. در حین بهینه‌سازی، هر بار سازه‌ای با 22 عضو تشکیل داده شده و 6 کابل به‌طور تصادفی از آن حذف می‌گردد.

در مرحله‌ی اول، بهینه‌سازی با تمام متغیرهای موجود در جدول 3 انجام می‌شود. در این مرحله سازه‌هایی قابل قبول تشکیل داده می‌شوند تا به‌عنوان هسته‌های جستجو در مرحله‌ی بعد استفاده شوند. با توجه به "شکل 4" در شماره تکرارهای 33، 43، 57 و 125 سازه‌های قابل قبولی به‌دست آمده‌اند که به عنوان هسته‌های جستجو در نظر گرفته شده‌اند. بدیهی است می‌توان

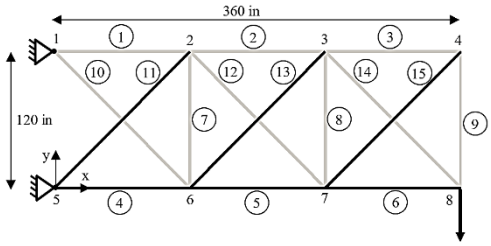

Fig. 3 2-D–eight-node structure

شکل 3 سازه‌ی هشت گرهی دو بعدی

جدول 1 سطح مقطع اعضا پس از بهینه‌سازی سازه‌ی هشت گرهی دو بعدی

Table 1 Cross-sectional areas after optimization of 2-D–eight-node structure

سطح مقطع اعضا (شماره عضو (سطح مقطع in^2))
1(1.081), 2(0.95), 3(0.347), 4(0.954), 5(0.954), 6(0.174), 7(0.111), 8(0.111), 9(0.347), 10(0.22), 11(0.44), 12(0.44), 13(0.22), 14(0.27), 15(0.44)

جدول 2 نتایج بهینه‌سازی ابعادی سازه‌ی هشت گرهی دوبعدی

Table 2 Size optimization results of 2-D–eight-node structure

	مرجع [38]	مرجع [39]		پژوهش حاضر
		روش 1	روش 2	
وزن (lb)	133.21	114.99	108.90	94.85

[1] Particle Swarm Optimization (PSO)
[2] Cognitive parameter
[3] Social parameter

جدول 3 اطلاعات مربوط به بهینه‌سازی سازه‌ی کش‌بستی هشت گرهی

Table 3 Optimization information of 8–node tensegrity structure

متغیرهای طراحی	
متغیرهای شکل و توپولوژی	x_5, x_7, y_5, y_7 $q_i\ ; i = 1{:}\,n_{\text{elements}}$ نحوه‌ی اتصال اعضا کابل‌های حذفی
متغیرهای اندازه	c_q $A_i\ ; i = 1{:}\,n_{\text{elements}}$
قیود	
تنش کابل‌ها	$\sigma_i \le 138\ \text{MPa}\ ; i = 1{:}\,n_{\text{cables}}$
تنش میله‌ها	$\sigma_i \le 103\ \text{MPa}\ ; i = 1{:}\,n_{\text{bars}}$
کمانش میله‌ها	$\sigma_i < \pi^2 EI/(l^2 A)\ ; i = 1{:}\,n_{\text{bars}}$
جابجایی گره‌ها	$\Delta_i \le 0.01\ \text{m}\ ; i = 1{:}\,n_{\text{nodes}}$
طول اولیه	$l_{i_{\text{initial}}} \ge 0.1\ \text{m}\ ; i = 1{:}\,n_{\text{elements}}$
محدوده‌ی جستجو	
متغیرهای شکل	$-3\ \text{m} \le x_i \le 3\ \text{m}$ $-3\ \text{m} \le y_i \le 3\ \text{m}$ $0 \le q_i \le 100\ \text{N/m}\ ; i = 1{:}\,n_{\text{elements}}$
متغیرهای اندازه	$0.0001\ \text{m}^2 < A_i < 0.002\ \text{m}^2 ; i = 1{:}\,n_{\text{elements}}$ $0.1 \le c_q \le 10$
مشخصات هندسی مفروض	
شروط تقارن	$x_5 = -x_6, x_7 = -x_8, y_5 = -y_6, y_7 = -y_8$
مختصات‌گره‌های معلوم	$x_1 = x_2 = 1\ \text{m}, x_3 = x_4 = -1\ \text{m}$ $y_1 = y_4 = -1\ \text{m}, y_2 = y_3 = 1\ \text{m}$ $z_5 = z_6 = 5\ \text{m}, z_7 = z_8 = 8\ \text{m}$
بارگذاری	
گره‌های 5 و 6	$F_z = -5000\ \text{N}$
مشخصات مکانیکی	
مدول الاستیسیته	$E_i = 210\ \text{GPa}\ ; i = 1{:}\,n_{\text{elements}}$
چگالی	$\rho = 2768\ \text{N/m}^3$

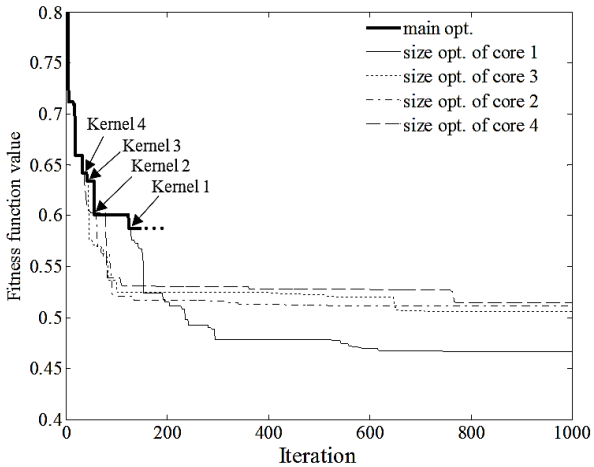

Fig. 4 Fitness function values of 8-node tensegrity structure

شکل 4 مقادیر تابع هدف مربوط به سازه‌ی کش‌بستی هشت گرهی

بهینه‌سازی مرحله‌ی اول را بیش‌تر ادامه داده و سازه‌های قابل قبول بیش‌تر و مناسب‌تری را به عنوان هسته‌های جستجو در نظر گرفت. اما همان‌گونه که در بخش‌های قبل ذکر شد، رسیدن به بهینه‌ی مطلق امکان‌پذیر نیست.

همان‌گونه که در "شکل 4" مشاهده می‌شود مقادیر تابع هدف برای هر چهار هسته پس از بهینه‌سازی ابعادی به میزان زیادی کاهش پیدا کرده است. کمترین مقدار تابع هدف مربوط به هسته‌ی اول می‌باشد. جدول 4 وزن

جدول 4 مقایسه‌ی وزن سازه‌های کش‌بستی بهینه شده با هشت گره

Table 4 Comparison of optimized tensegrity structures' weights with eight nodes

	وزن (N)
سازه‌ی بهینه‌شده با ساختار هسته‌ی 1	129.1826
سازه‌ی بهینه‌شده با ساختار هسته‌ی 2	141.3894
سازه‌ی بهینه‌شده با ساختار هسته‌ی 3	140.1162
سازه‌ی بهینه‌شده با ساختار هسته‌ی 4	142.4690

به‌دست آمده برای این چهار سازه را پس از دو مرحله بهینه‌سازی نشان می‌دهد.

مشخصات ساختار مربوط به هسته‌ی اول بهینه‌سازی، شامل مختصات گره‌ها و نحوه‌ی اتصال آن‌ها، در جدول 5 آمده است. لازم به ذکر است چهار عضو آخر، میله و سایر اعضا کابل هستند. سایر متغیرهای بهینه‌سازی سازه با ساختار هسته‌ی اول نیز که شامل سطح مقطع و چگالی نیرویی اعضا می‌باشد، پس از این دو مرحله بهینه‌سازی در جدول 6 آورده شده‌اند.

"شکل‌های 5 تا 8" ساختار این چهار سازه را نشان می‌دهند. لازم به ذکر است در تمامی شکل‌ها خطوط پررنگ، میله و خطوط کم‌رنگ، کابل هستند.

4-3- سازه‌ی کش‌بستی با 10 گره

به عنوان مثالی دیگر، در این بخش سازه‌ای کش‌بستی با 10 گره مورد بررسی قرار می‌گیرد. تعداد اعضای این سازه حداکثر می‌تواند 39 عضو باشد. در این مثال، 15 عضو به صورت تصادفی از سازه حذف می‌شود. بنابراین سازه‌ی مورد بررسی 10 گره و 24 عضو خواهد داشت. محل چهار گره به عنوان تکیه‌گاه ثابت در نظر گرفته شده است. به چهار گره دیگر نیروهایی برابر و در جهت

جدول 5 مختصات گره‌ها و اتصالات بین آن‌ها پس از بهینه‌سازی هسته‌ی 1 (سازه‌ی کش‌بستی هشت گرهی)

Table 5 Nodal coordinates and connectivity information after optimization of kernel 1 (8-node tensegrity structure)

مختصات گره‌ها (m)
$x_5 = -x_6 = 0.2651, \quad x_7 = -x_8 = -0.4052$ $y_5 = -y_6 = -0.4214, \quad y_7 = -y_8 = -0.3167$
اتصالات بین گره‌ها (شماره عضو (شماره گره‌ها))
$1(1,5), 2(4,5), 3(2,6), 4(3,6), 5(5,6), 6(4,7), 7(5,7), 8(6,7), 9(2,8),$ $10(3,8), 11(5,8), 12(7,8), 13(4,8), 14(2,7), 15(3,5), 16(1,6)$

جدول 6 نتایج بهینه‌سازی ابعادی هسته‌ی 1 (سازه‌ی کش‌بستی با هشت گره)

Table 6 Results of size optimization of kernel 1 (8-node tensegrity structure)

شماره عضو	سطح مقطع (cm^2)	چگالی نیرویی حالت خودمتعادل (N/m)	چگالی نیرویی پس از اعمال نیرو (N/m)
1	1	506.39	305.19
2	1	438.68	500.06
3	1	264.54	461.61
4	1	270.03	7.64e-06
5	1	613.21	1807.94
6	1	198.64	174.35
7	1	145.05	325.23
8	1	347.21	559.93
9	1	105.31	105.11
10	1	189.11	195.05
11	1	775.96	795.94
12	20	630.33	932.54
13	14.2	-585.41	-598.54
14	20	-383.24	-504.53
15	10.2	-392.46	-1132.42
16	10.3	-326.25	-1124.12

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.8.4]

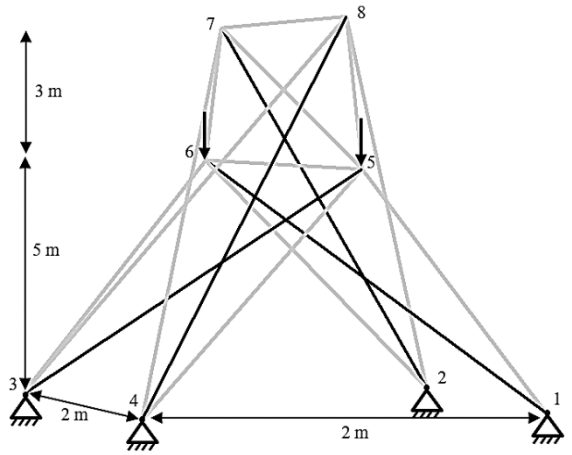

Fig. 5 Structure of the 1st kernel of optimization (8-node tensegrity structure)

شکل 5 ساختار هسته‌ی اول بهینه‌سازی (سازه‌ی کش‌بستی هشت گرهی)

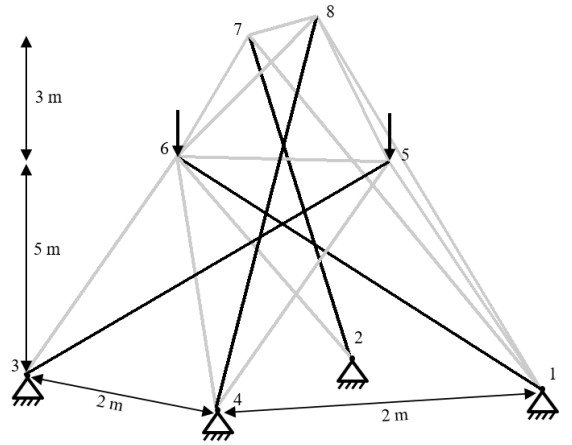

Fig. 6 Structure of the 2nd kernel of optimization (8-node tensegrity structure)

شکل 6 ساختار هسته‌ی دوم بهینه‌سازی (سازه‌ی کش‌بستی هشت گرهی)

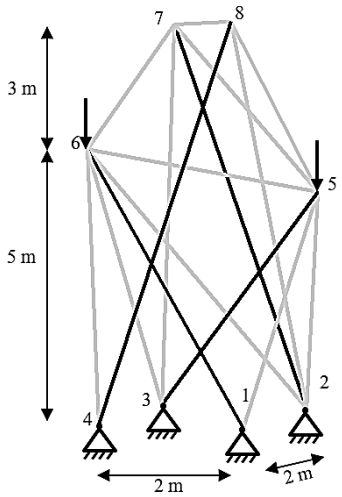

Fig. 7 Structure of the 3rd kernel of optimization (8-node tensegrity structure)

شکل 7 ساختار هسته‌ی سوم بهینه‌سازی (سازه‌ی کش‌بستی هشت گرهی)

منفی محور z وارد می‌شود. مختصات z این چهار گره با هم برابر و معلوم است. این چهار گره نسبت به محور z دو به دو متقارنند. دو گره باقی‌مانده نیز

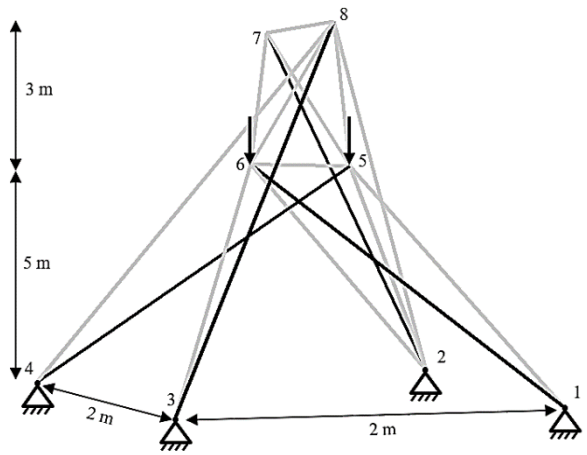

Fig. 8 Structure of the 4th kernel of optimization (8-node tensegrity structure)

شکل 8 ساختار هسته‌ی چهارم بهینه‌سازی (سازه‌ی کش‌بستی هشت گرهی)

دارای z برابر اما مجهول هستند و نسبت به محور z تقارن دارند. کلیه‌ی مشخصات و فرضیات در نظر گرفته شده برای این سازه در جدول 7 آمده است.

"شکل 9" تغییرات تابع هدف طی هر دو مرحله‌ی فرایند بهینه‌سازی را نشان می‌دهد. سه سازه‌ی قابل قبول در تکرارهای 32، 96 و 134 به‌دست آمده‌اند که بهینه‌سازی ابعادی آن‌ها نیز در این شکل نشان داده شده است. با توجه به "شکل 9"، پس از بهینه‌سازی ابعادی، همچنان هسته‌ی اول مقدار کمتری نسبت به مقادیر بهینه شده‌ی دو سازه‌ی دیگر پیدا کرده است. وزن این سه سازه در جدول 8 ارائه شده است.

نتایج بهینه‌سازی سازه‌ی هسته‌ی اول به‌طور کامل در جداول 9 و 10 آورده شده است. جدول 9 مختصات به‌دست آمده برای گره‌ها را نشان می‌دهد. سایر نتایج بهینه‌سازی ابعادی هسته‌ی اول شامل چگالی نیرویی و سطح مقطع اعضا در جدول 10 ارائه شده است.

به منظور مقایسه، ساختار هر سه سازه در "شکل‌های 10 تا 12" نمایش داده شده است. تنوع ساختار در این مثال نسبت به مثال قبل مشهودتر است. ضمناً در تمامی شکل‌ها خطوط پررنگ، میله و خطوط کم‌رنگ، کابل هستند.

5- جمع‌بندی

در این مقاله، روش جدیدی جهت تحلیل و بهینه‌سازی از هر سه دیدگاه

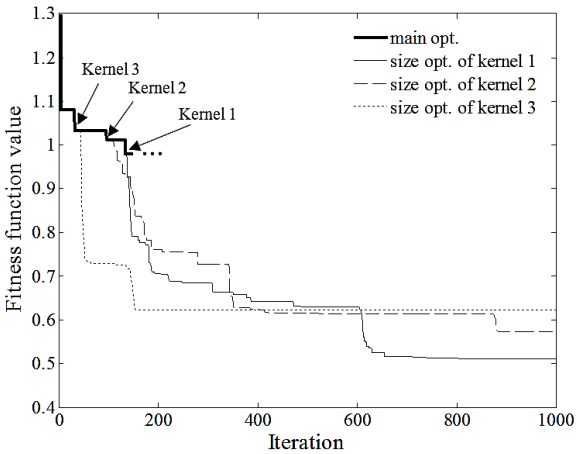

Fig. 9 Fitness function values of 10-node tensegrity structure

شکل 9 مقادیر تابع هدف مربوط به سازه‌ی کش‌بستی 10 گرهی

جدول 7 اطلاعات مربوط به بهینه‌سازی سازه‌ی کش‌بستی با 10 گره

Table 7 Optimization information of 10-node tensegrity structure

متغیرهای طراحی	
متغیرهای شکل و توپولوژی	$x_5, x_7, x_9, y_5, y_7, y_9, z_9$ $q_i\ ; i = 1{:}n_{\text{elements}}$ نحوه‌ی اتصال اعضا کابل‌های حذفی
متغیرهای اندازه	c_q $A_i\ ; i = 1{:}n_{\text{elements}}$
قیود	
تنش کابل‌ها	$\sigma_i \le 138\ \text{MPa}\ ; i = 1{:}n_{\text{cables}}$
تنش میله‌ها	$\sigma_i \le 103\ \text{MPa}\ ; i = 1{:}n_{\text{bars}}$
کمانش میله‌ها	$\sigma_i < \pi^2 EI/(l^2 A)\ ; i = 1{:}n_{\text{bars}}$
جابجایی گره‌ها	$\Delta_i \le 0.01\ \text{m}\ ; i = 1{:}n_{\text{nodes}}$
طول اولیه	$l_{i_{\text{initial}}} \ge 0.1\ \text{m}\ ; i = 1{:}n_{\text{elements}}$
محدوده‌ی جستجو	
متغیرهای شکل	$-3\ \text{m} \le x_i \le 3\ \text{m}$ $-3\ \text{m} \le y_i \le 3\ \text{m}$ $0 \le z_i \le 10\ \text{m}$ $0 \le q_i \le 100\ \text{N/m}\ ; i = 1{:}n_{\text{elements}}$
متغیرهای اندازه	$0.0001\ \text{m}^2 < A_i < 0.002\ \text{m}^2 ; i = 1{:}n_{\text{elements}}$ $0.1 \le c_q \le 10$
مشخصات هندسی مفروض	
شروط تقارن	$x_5 = -x_6, x_7 = -x_8, x_9 = -x_{10}$ $y_5 = -y_6, y_7 = -y_8, y_9 = -y_{10}$ $z_9 = z_{10}$
مختصات‌گره‌های معلوم	$x_1 = x_2 = 1\ \text{m}, x_3 = x_4 = -1\ \text{m}$ $y_1 = y_4 = -1\ \text{m}, y_2 = y_3 = 1\ \text{m}$ $z_5 = z_6 = z_7 = z_8 = 5\ \text{m}$
بارگذاری	
گره‌های 5، 6، 7 و 8	$F_z = -5000\ \text{N}$
مشخصات مکانیکی	
مدول الاستیسیته	$E_i = 210\ \text{GPa}\ ; i = 1{:}n_{\text{elements}}$
چگالی	$\rho = 2768\ \text{N/m}^3$

جدول 8 مقایسه‌ی وزن سازه‌های کش‌بستی بهینه شده با 10 گره

Table 8 Comparison of optimized tensegrity structures' weights with 10 nodes

	وزن (N)
سازه‌ی بهینه‌شده با ساختار هسته‌ی 1	141.0850
سازه‌ی بهینه‌شده با ساختار هسته‌ی 2	158.8832
سازه‌ی بهینه‌شده با ساختار هسته‌ی 3	172.7232

جدول 9 مختصات گره‌ها و اتصالات بین آن‌ها پس از بهینه‌سازی هسته‌ی 1 (سازه‌ی کش‌بستی 10 گرهی)

Table 9 Nodal coordinate and connectivity information after optimization of kernel 1 (10-node tensegrity structure)

مختصات گره‌ها (m)
$x_5 = -x_6 = 0.6001,\ \ x_7 = -x_8 = 0.3731,$ $x_9 = -x_{10} = -0.6309$ $y_5 = -y_6 = -0.4722,\ \ \ y_7 = -y_8 = 0.0442,$ $y_9 = -y_{10} = 0.0935$ $z_9 = z_{10} = 1.7594$
اتصالات بین گره‌ها (شماره عضو (شماره گره‌ها))
$1(1,5), 2(2,6), 3(4,6), 4(5,6), 5(3,7), 6(5,7), 7(1,8), 8(3,8),$ $9(5,8), 10(6,8), 11(7,8), 12(1,9), 13(3,9), 14(4,9), 15(6,9),$ $16(1,10), 17(5,10), 18(6,10), 19(9,10), 20(3,5), 21(4,7),$ $22(8,10), 23(2,9), 24(1,6)$

توپولوژی، شکل و اندازه برای یک سازه کش‌بستی سه‌بعدی از کلاس یک با تعداد اعضای مشخص و گره‌های تکیه‌گاهی معلوم، برای تحمل بارگذاری خارجی دلخواه در نقاط معین گرهی، به منظور رسیدن به حداقل وزن سازه ارائه شد. متغیرهای طراحی شامل نحوه اتصال اعضا، چگالی نیرویی و سطح مقطع آن‌ها بودند. قیود مسئله نیز شامل استحکام اعضا، کمانش میله‌ها، تحت کشش بودن کابل‌ها، طول‌های اولیه‌ی قابل قبول، حداکثر جابجایی گرهی و تقارن سازه بود. به منظور یافتن حالت خودمتعادل از روش جدیدی استفاده شد که در آن ابتدا سازه‌ای با حداکثر تعداد کابل ممکن تشکیل داده شد و سپس به تعداد موردنظر کابل از آن حذف گردید. به این ترتیب چیدمان‌های مختلفی به‌وجود آمدند. در فرایند بهینه‌سازی، با در نظر گرفتن یک چیدمان دلخواه از کلاس یک که از نظر حداقل تعداد کابل‌ها در نقاط گرهی مناسب باشد، ساختار خودمتعادل پیش‌تنیده با حل معادلات غیرخطی حاکم به‌دست آمد. سپس سازه‌ی پیش‌تنیده بارگذاری شد و معادلات تعادل گرهی با فرض

جدول 10 نتایج بهینه‌سازی ابعادی هسته‌ی 1 (سازه‌ی کش‌بستی 10 گرهی)

Table 10 Results of size optimization of kernel 1 (10-node tensegrity structure)

شماره عضو	سطح مقطع (cm^2)	چگالی نیرویی حالت خودمتعادل (N/m)	چگالی نیرویی پس از اعمال نیرو (N/m)
1	1	1273.02	896.75
2	1	414.21	464.54
3	1	895.33	980.68
4	1	1770.93	1936.47
5	1	1506.79	1298.75
6	1	1729.53	3920.42
7	1	4.16	1549.42
8	1	297.09	0.001
9	1.25	453.53	1191.18
10	20	666.05	4367.50
11	1	1673.23	2042.60
12	1	711.05	609.45
13	5.59	1178.36	5042.18
14	6.16	2357.71	58.09
15	1	326.13	143.30
16	1	940.86	1221.15
17	6.48	2924.58	6838.23
18	20	2013.62	1293.24
19	20	360.99	2788.00
20	20	-1570.04	-3126.57
21	20	-2608.64	-2623.63
22	6.78	-1178.67	-3870.89
23	7.01	-1192.59	-987.63
24	20	-2046.72	-4148.30

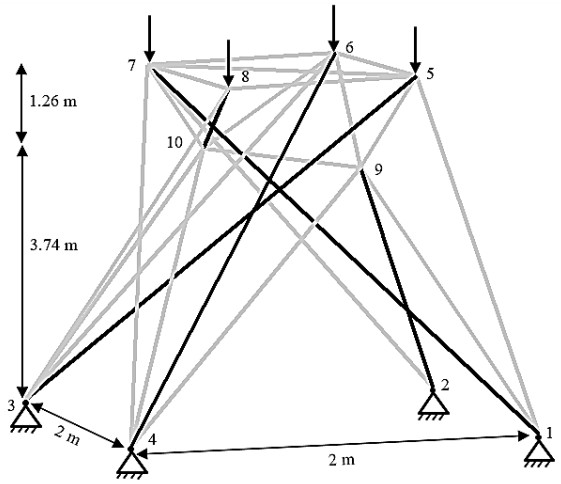

Fig. 10 Structure of the 1st kernel of optimization (10-node tensegrity structure)

شکل 10 ساختار هسته‌ی اول بهینه‌سازی (سازه‌ی کش‌بستی 10 گرهی)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.8.4]

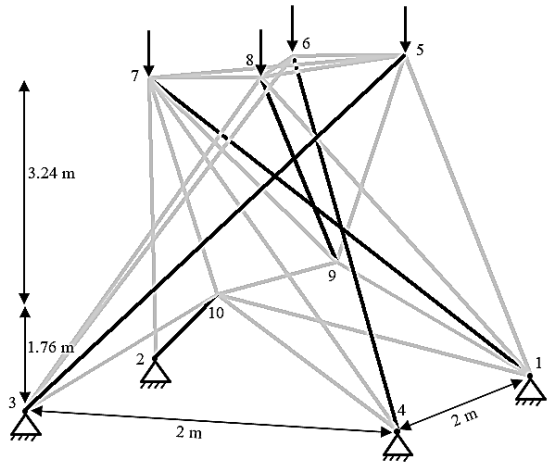

Fig. 11 Structure of the 2nd kernel of optimization (10-node tensegrity structure)

شکل 11 ساختار هسته‌ی دوم بهینه‌سازی (سازه‌ی کش‌بستی 10 گرهی)

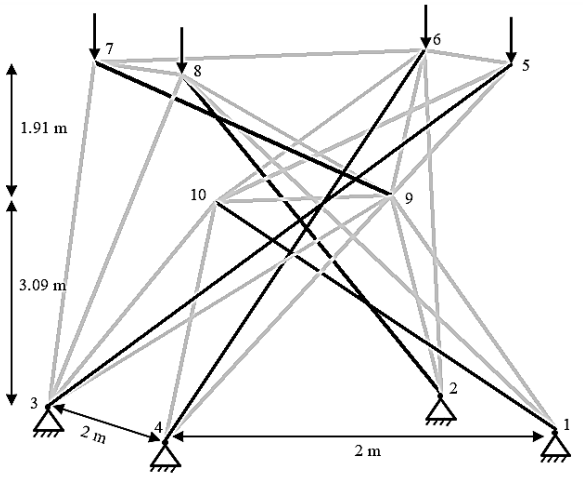

Fig. 12 Structure of the 3rd kernel of optimization (10-node tensegrity structure)

شکل 12 ساختار هسته‌ی سوم بهینه‌سازی (سازه‌ی کش‌بستی 10 گرهی)

تغییر شکل‌های کوچک، خطی‌سازی و حل شدند تا جابجایی‌های گرهی و نیروی درون اعضا به منظور ارزیابی قیود به‌دست آیند. همچنین روش جدیدی برای بهینه‌سازی بر پایه‌ی روش جمعیتی ازدحام ذرات ارائه شد. در این روش به‌منظور ایجاد پاسخ‌های متنوع و جستجوی عمیق‌تر فضای جواب، در یک گام ابتکاری، مسیرهای بهینه‌سازی مختلفی از مسیر اصلی منشعب شدند که هر کدام از آن‌ها بالقوه می‌توانستند به یک جواب بهینه موضعی ختم شوند و با توجه به تعدد انشعاب‌ها، احتمال رسیدن به پاسخ بهینه مطلق بالا رفت. روش بهینه‌سازی مطرح شده برای چند مسئله نمونه به‌کار گرفته شد. بررسی این نتایج نشان می‌دهد که:

- در شرایط یکسان، سازه‌های متنوعی با وزن‌های متفاوت یا نزدیک به هم می‌توانند پاسخ مسئله باشند که دست طراح را برای انتخاب در شرایط مختلف باز می‌گذارند.
- گام ابتکاری ارائه شده امکان جستجوی دقیق‌تر فضای جواب را می‌دهد.
- در شرایط تقارنی، پاسخ‌هایی وجود دارند که هر چند از نظر موقعیت گره‌ها متقارنند، اما از نظر چیدمان و نوع اعضا متقارن نیستند که این مسئله نشان‌دهنده تعدد بسیار زیاد پاسخ‌های بهینه موضعی است.

درنهایت می‌توان گفت با توجه به جامعیت روش ارائه شده در این پژوهش می‌توان از آن برای تحلیل و بهینه‌سازی هر نوع سازه‌ای با هر کاربرد و نوع بارگذاری و به خصوص برای سازه‌های با ابعاد بزرگ استفاده کرد و با توجه به روش‌های به‌کار گرفته شده برای افزایش سرعت همگرایی بهینه‌سازی، به پاسخ‌های متنوعی رسید و با توجه به کاربرد مورد نظر، مناسب‌ترین سازه را انتخاب نمود.

6- فهرست علایم

A	سطح مقطع
C	ماتریس اتصال
c_1	پارامتر شناختی
c_2	پارامتر اجتماعی
c_q	ضریب چگالی نیرویی
E	مدول الاستیسیته (GPa)
F	نیرو (N)
f^{ext}	نیروی خارجی (N)
G	ماتریس معادلات تعادل
l	طول (m)
n	تعداد
q	چگالی نیرویی (N/m)
$V_{(k)}^{i}$	سرعت ذره‌ی i در تکرار k در روش ازدحام ذرات
w	ضریب اینرسی
$X_{(k)}^{i}$	موقعیت ذره‌ی i در تکرار k در روش ازدحام ذرات

علایم یونانی

Δ	جابجایی (m)
σ	تنش (MPa)
ρ	چگالی (N/m^3)

زیرنویس‌ها

bars	میله‌ها
ca_max	حداکثر کابل‌ها
cables	کابل‌ها
el	کابل‌های حذفی
elements	اعضا
initial	اولیه

7- مراجع

[1] M. C. Oliveira, R. E. Skelton, *Tensegrity Systems*, pp. 45–48, Boston: Springer, 2009.

[2] J. Quirant, M. N. Kazi-Aoual, R. Motro, Designing tensegrity systems: The case of a double layer grid, *Engineering Structures*, Vol. 25, No. 9, pp. 1121–1130, 2003.

[3] N. Bel Hadj Ali, L. Rhode-Barbarigos, A. A. Pascual Albi, I. F. C. Smith, Design optimization and dynamic analysis of a tensegrity-based footbridge, *Engineering Struructures*, Vol. 32, No. 11, pp. 3650–3659, 2010.

[4] V. Bohm, K. Zimmermann, Vibration-driven mobile robots based on single actuated tensegrity structures, *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Karlsruhe, Germany, May 6–10, 2013.

[5] G. Khonsaraki, H. Oskouiy, Modeling the behavior of the cytoskeleton with six and twelve bar tensegrity structures by AFM test and investigating scaffolds stiffness, *Proceedings of First International Conference on New Research Achievements in Mechanics, Mechatronics and Biomechanics*, Tehran, Iran, May 14, 2016. (in Persian فارسی)

[6] R. Motro, *Tensegrity: Structural Systems for The Future*, pp. 70–71, London: Kogan Page Science, 2003.

[7] S. H. Juan, J. M. Mirats Tur, Tensegrity frameworks: Static analysis review, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 43, No. 7, pp. 859–881, 2008.

[8] R. B. Fuller, *Tensile-integrity structures*, US Patent No. 3063521, 1962.

[9] R. B. Haber, J. F. Abel, Initial equilibrium solution methods for cable reinforced membranes. Part II - implementation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 30, No. 3, pp. 285–306, 1982.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.8.4]

[10] J. Y. Zhang, M. Ohsaki, Y. Kanno, A direct approach to design of geometry and forces of tensegrity systems, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 7–8, pp. 2260–2278, 2006.

[11] R. E. Skelton, J. W. Helton, W. Chan, J.-P. Pinaud, R. Adhikari, An introduction to the mechanics of tensegrity structures, *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida USA, December 4–7, 2001.

[12] K. Koohestani, S. D. Guest, A new approach to the analytical and numerical form-finding of tensegrity structures, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 50, No. 19, pp. 2995–3007, 2013.

[13] H.-J. Schek, The force density method for form finding and computation of general networks, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 3, No. 1, pp. 115–134, 1974.

[14] G. G. Estrada, H. J. Bungartz, C. Mohrdieck, Numerical form-finding of tensegrity structures, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 22, pp. 6855–6868, 2006.

[15] M. Yamamoto, B. S. Gan, K. Fujita, J. Kurokawa, A genetic algorithm based form-finding for tensegrity structure, *Procedia Engineering*, Vol. 14, No. 371, pp. 2949–2956, 2011.

[16] B. S. Gan, J. Zhang, D.-K. Nguyen, E. Nouchi, Node-based genetic form-finding of irregular tensegrity structures, *Computers & Structures*, Vol. 159, No. 5, pp. 61–73, 2015.

[17] K. Koohestani, Form-finding of tensegrity structures via genetic algorithm, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 49, No. 5, pp. 739–747, 2012.

[18] S. Lee, J. Lee, Form-finding of tensegrity structures with arbitrary strut and cable members, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 85, No. 6, pp. 55–62, 2014.

[19] B. Shekastehband, K. Abedi, N. Dianat, Experimental and numerical study on the self-stress design of tensegrity systems, *Meccanica*, Vol. 48, No. 10, pp. 2367–2389, 2013.

[20] B. Shekastehband, K. Abedi, N. Dianat, M. R. Chenaghlou, Experimental and numerical studies on the collapse behavior of tensegrity systems considering cable rupture and strut collapse with snap-through, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 47, No. 7, pp. 751–768, 2012.

[21] M. Pagitz, J. M. Mirats Tur, Finite element based form-finding algorithm for tensegrity structures, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, No. 17, pp. 3235–3240, 2009.

[22] L. Y. Zhang, Y. Li, Y. P. Cao, X. Q. Feng, Stiffness matrix based form-finding method of tensegrity structures, *Engineering Struructures*, Vol. 58, No. 4, pp. 36–48, 2014.

[23] K. Abedi, K. Zahabi, Prestressed states selection of tensegrity structures using simplex method, *Proceedings of 6th National Congress on Civil Engineering*, Semnan, Iran, April 26–27, 2011. (in Persian فارسی)

[24] S. Lee, B. H. Woo, J. Lee, Self-stress design of tensegrity grid structures using genetic algorithm, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 79, No. 5, pp. 38–46, 2014.

[25] M. Masic, R. E. Skelton, P. E. Gill, Optimization of tensegrity structures, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 16, pp. 4687–4703, 2006.

[26] K. Nagase, R. E. Skelton, Minimal mass tensegrity structures, *Journal of The International Association for Shell and Spatial Structures*, Vol. 55, No. 1, pp. 37–48, 2014.

[27] A. G. M. Michell, The Limits of Economy of material in Frame-structures, *Philosophical Magazine*, Vol. 8, No. 47, pp. 589–597, 1904.

[28] R. E. Skelton, M. C. de Oliveira, Optimal tensegrity structures in bending: The discrete Michell truss, *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 347, No. 1, pp. 257–283, 2010.

[29] A. Gghafori, S. Faroughi, M. Bamdad, Geometrical nonlinear analysis and effect of pre-stress on tensegrity structure using co-rotational method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 7, pp. 150–156, 2014. (in Persian فارسی)

[30] R. Motro, S. Najari, P. Jouanna, Static and dynamic analysis of tensegrity systems, *Proceedings of the International Symposium on Shell and Spatial Structures: Computations Aspects*, USA: Springer, pp. 21–38, 1987.

[31] S. Faroughi, M. Bamdad, Using co-rotational approach for analysing nonlinear dynamic tensegrity structures, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 14, pp. 245–250, 2015. (in Persian فارسی)

[32] S. Faroughi, M. Bamdad, S. H. Hoseini, Analysis of tensegrity structure subjected to dynamic loading using state space, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 5, pp. 261–268, 2015. (in Persian فارسی)

[33] F. Seifolahi, A. Sadeghi, S. Nosrati, Effect of rise to span ratio and prestress ratio on dynamic properties of tensegrity barrel vaults, *Proceedings of Second National Conference on Structure, Earthquake and Geotechnics*, Mazandaran, Iran, November 21, 2012. (in Persian فارسی)

[34] J. Pujol, The solution of nonlinear inverse problems and the Levenberg-Marquardt method, *Geophysics*, Vol. 72, No. 4, pp. W1–W16, 2007.

[35] J. Kennedy, R. Eberhart, Particle swarm optimization, *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks*, Perth, Australia, November 27–December 1, 1995.

[36] Y. Shi, R. C. Eberhart, Parameter Selection in Particle Swarm Optimization, *Proceedings of International Conference on Evolutionary Programming*, March 25–27, 1998.

[37] Y. Shi, R. Eberhart, A modified particle swarm optimizer, *Proceedings of IEEE Intelligence Conference on Evolutionary Computation*, Berlin, Germany, May 4–9, 1998.

[38] S. J. Wu, P. T. Chaw, Integrated discrete and configuration optimization of trusses using genetic algorithms, *Computer and Structures*, Vol. 55, No. 4, pp. 695–702, 1995.

[39] W. Tang, L. Tong, Y. Gu, Improved genetic algorithm for design optimization of truss structures with sizing, shape and topology variables, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 62, No. 13, pp. 1737–1762, 2005.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.8.4]