مجله مهندسی مکانیک مدرس، خرداد 1394، دوره 15، شماره 3، ص‌ص 387-397

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

حل تحلیلی کمانش ورق‌های تابعی مدرج با لایه‌های پیزوالکتریک به کمک تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و عمودی

مرتضی قاسمی[1]، عبدالرحمان جامی الاحمدی[2*]

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

* مشهد، صندوق پستی 9177948974، jaami-a@um.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 30 آبان 1393

پذیرش: 18 دی 1393

ارائه در سایت: 25 بهمن 1393

کلید واژگان:

تحلیل کمانش

ماده‌ی مدرج تابعی

لایه‌ی پیزو الکتریک

تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و عمودی

چکیده

در این مقاله، کمانش ورق مستطیلی چند لایه‌ای از جنس مواد مدرج تابعی و مواد همسانگرد عرضی با دو لایه‌ی پیزوالکتریک در بالا و پایین در حالت‌های مدار باز و مدار بسته مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات تعادل حاکم بر ورق بر پایه‌ی تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و عمودی، با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل و معادله‌ی ماکسول به دست آمده‌اند. در حوزه‌ی حل الکتریکی به منظور بررسی اثر لایه‌های پیزو الکتریک، از معادله ماکسول به عنوان معادله‌ی مورد نیاز برای متغیرهای الکتریکی استفاده شده است. با استفاده از معیار تعادل همسایگی، معادلات پایداری حاکم بر ورق استخراج شده‌اند. معادلات حاصل با فرض تکیه‌گاه ساده روی هر چهار لبه‌ی ورق به صورت تحلیلی حل شده است و بارهای بحرانی کمانش داده شده‌اند. در پایان، پس از بررسی صحت نتایج ارائه شده، نتایج عددی برای اثر پارامترهای مختلف مانند توان ماده‌ی مدرج تابعی، نسبت ضخامت به طول، ضخامت لایه‌های پیزو الکتریک، ضخامت ورق، حالت‌های مدار باز و مدار بسته، نسبت منظری، شرایط بارگذاری و نوع ماده‌ی پیزو الکتریک بر بار بحرانی کمانش با جزئیات مورد مطالعه قرار گرفته است.

Analytical solution based on higher order shear and normal deformation theory for Buckling of functionally graded plates with piezoelectric layers

Morteza Ghasemi, Abdolrahman Jaamialahmadi*

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.

* P.O.B. 9177948974 Mashhad, Iran, jaami-a@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 21 November 2014
Accepted 08 January 2015
Available Online 14 February 2015

Keywords:
Buckling analysis
Functionally graded material
Piezoelectric layer
Higher Order shear and normal deformation theory

ABSTRACT

In this article, the buckling of multilayer rectangular thick plate made of functionally graded, transversely isotropic and piezoelectric materials in both closed and open circuit conditions is investigated. Based on the higher-order shear and normal deformable plate theory, the governing equilibrium equations are obtained using the principle of minimum total potential energy and Maxwell's equation. Using an analytical approach, the governing stability equations of functionally graded rectangular plates with piezoelectric layers have been presented in terms of displacement components and electric potential. In order to obtain the stability equations, the adjacent equilibrium criterion is used. The stability equations are then solved analytically, assuming simply supported boundary condition along all edges. Finally, following validation of the results, numerical results for compressible materials are presented. Also, the effects of different parameters such as different loading conditions, functionally graded power law index, thickness-to-length ratio and aspect ratio on the critical buckling loads of plates are studied in detail. The influences of the mentioned parameters on the critical buckling load have been presented in some figures. Furthermore, the effect of piezoelectric thickness on the plate critical buckling loads has been studied.

1- مقدمه

ورق‌ها به عنوان یکی از اجزاء مهم در سازه‌های مهندسی همواره مورد توجه محققان قرار گرفته‌اند. ناپایداری ورق‌ها تحت بار صفحه‌ای استاتیکی به کمانش ورق می‌انجامد که به دلیل تغییر شکل‌های بزرگ سازه در این حالت، کارایی ورق تا حد زیادی از بین خواهد رفت. تا کنون روش‌های متفاوتی برای تحلیل ورق‌ها ارائه شده است. روش تحلیل رفتار ورق با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی اگر چه روشی پایه‌ای و دقیق محسوب می‌شود، اما به دلیل تحلیل سه بعدی ورق با پیچیدگی‌ها و دشواری‌هایی همراه است. برای کاهش این پیچیدگی‌ها، و با این فرض که در ورق‌ها عمدتاً ضخامت نسبت به ابعاد دیگر بسیار کوچک است، تئوری‌هایی موسوم به تئوری‌های ورق ارائه

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

M. Ghasemi, A. Jaamialahmadi, Analytical solution based on higher order shear and normal deformation theory for Buckling of functionally graded plates with piezoelectric layers, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 3, pp. 387-397, 2015 (In Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.3.11.1]

شده‌اند. ساده‌ترین تئوری در تحلیل ورق‌ها، تئوری کلاسیک ورق[1] است. این تئوری که بر پایه‌ی فرضیات کیرشهف[2] استوار است، اثر تغییر شکل برشی و عمودی را در راستای ضخامت در نظر نمی‌گیرد. به منظور کاهش خطا در تحلیل ورق‌های نسبتاً ضخیم، تئوری دیگری موسوم به تئوری تغییر شکل برشی[3] معرفی شده است. در این تئوری، اثر تغییر شکل برشی در راستای ضخامت در نظر گرفته می‌شود. رایج‌ترین تئوری مرتبه‌ی بالاتر برشی، تئوری برشی مرتبه‌ی سوم[4] است که توسط ردی[5] [1] مطرح شده است. در این تئوری، هر صفحه‌ی مسطح و عمود بر صفحه‌ی میانی ورق، پس از تغییر شکل مسطح و عمود، باقی نمی‌ماند. گر چه تئوری‌های برشی ورق در تحلیل ورق‌های ضخیم نتایج خوبی از خود به جای گذاشته‌اند، اما به دلیل در نظر نگرفتن اثر کرنش‌های عمودی، هنوز با جواب‌های دقیق فاصله دارند. برای رفع این مشکل و بالا بردن حداکثری دقت، تئوری جدیدی به‌نام تئوری تغییر شکل برشی و عمودی[6] توسط باترا[7] و ویدولی[8] [2] معرفی شده است. این تئوری، کامل کننده‌ی تئوری‌های قبل بوده و هر دو اثر تغییر شکل برشی و عمودی را در راستای ضخامت در نظر می‌گیرد.

طی سال‌های اخیر تحقیقات گوناگونی در زمینه‌ی مدل‌سازی و رفتار مواد هدفمند (مدرج تابعی) انجام شده است. شریعت و اسلامی [3] تحلیل کمانش ورق ساخته شده از ماده‌ی هدفمند تحت بارگذاری مکانیکی را بر اساس تئوری برشی مرتبه اول ارائه دادند. محمدی و همکارانش [4،5] کمانش ورق‌های ساخته شده از مواد هدفمند تحت بارگذاری مکانیکی یکنواخت را بر اساس تئوری های کلاسیک و تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول انجام دادند. بداغی و سعیدی [6] نیز با در نظر گرفتن شرایط مرزی لوی[9] و بر پایه‌ی تئوری برشی مرتبه‌ی سوم تحلیل کمانش ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند را، ارائه دادند. مطالعات فراوان دیگری نیز در سال‌های اخیر توسط محققان روی مواد مدرج تابعی صورت گرفته است [7-9]. در تحقیقات مربوط به پیزوالکتریک، در پیدا کردن روابط و معادلات حاکم می‌توان به یانگ[10] و باترا [10-12]، باترا و ویدولی [13] اشاره کرد. بررسی ارتعاشات آزاد و کمانش ورق‌های بیضوی نازک کامپوزیتی متقارن روی بستر الاستیک توسط کشمیری و همکاران [14] انجام شده که برای حل معادلات حاکمه از روش ریتز[11] استفاده کرده‌اند. ابوالقاسمی و همکاران [15] به تحلیل کمانش ورق‌های مستطیلی تحت بار صفحه‌ای غیر یکنواخت بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول پرداخته‌اند و برای ورق با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده از روش گالرکین[12] برای حل معادلات پایداری استفاده کرده‌اند. قاسمی و همکاران [16] رفتار کمانشی پوسته‌های کامپوزیتی تقویت شده مشبک مخروطی تحت بار محوری را بررسی نمودند و با استفاده از روش ریتز بار کمانشی آن‌ها را محاسبه کرده‌اند. یکی از اثرات مهم لایه‌های پیزوالکتریک موسوم به اثر پیزو[13] در دو حالت مدار بسته و مدار باز توسط وو[14] [17] و همکارانش بررسی شد.

1- Classical Plate Theory
2- Kirchhoff
3- Shear Deformation Theory
4- Third-Order Shear Deformation Theory
5- Reddy
6- Shear and Normal Deformable Theory
7- Batra
8- Vidoli
9- Levy
10- Yang
11- Ritz
12- Galerkin
13- Piezo Effect
14- Wu

2- مواد هدفمند و مواد پیزوالکتریک

مواد هدفمند، موادی با ریز ساختار غیر همگن می‌باشند که خواص مکانیکی و حرارتی آن‌ها به طور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر جسم تغییر می‌کند. معمولاً این مواد از دو ماده ساختاری سرامیک و فلز ساخته می‌شوند. ماده ساختاری سرامیک به علت ضریب انتقال حرارت کم و مقاومت زیاد در مقابل درجه حرارت، دماهای بسیار بالا را تحمل کرده و ماده ساختاری فلز، انعطاف‌پذیری لازم را فراهم می‌کند. مدلی که به طور رایج در تحلیل مواد هدفمند استفاده می‌شود، بر پایه کسر حجمی مواد تشکیل دهنده بوده و به قانون توانی[15] ماده هدفمند معروف است. در این مدل، تغییرات خواص در راستای ضخامت به صورت رابطه (1) در نظر گرفته می‌شود [18]:

$$\Gamma(z) = \Gamma_M + (\Gamma_C - \Gamma_M)\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2h}\right)^N \tag{1}$$

که در این رابطه، Γ بیانگر خواص فیزیکی یا مکانیکی جسم مانند چگالی، ضریب انبساط حرارتی، مدول الاستیسیته، مدول برشی و غیره است. زیرنویس‌های C و M به ترتیب معرف سرامیک و فلز بوده و پارامتر N نشان‌دهنده توان ماده هدفمند است. با توجه به ناچیز بودن تغییرات ضریب پوآسون، این کمیت به صورت ثابت در راستای ضخامت ورق در نظر گرفته می‌شود [18]. با توجه به ماهیت همسانگرد بودن مواد هدفمند، روابط تنش-کرنش موسوم به روابط متشکله به کمک دو ثابت مستقل بیان می‌شوند. روابط تنش-کرنش را می‌توان به فرم رابطه (2) بیان کرد،

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{2}$$

که در آن λ, μ ضرایب لامه نامیده می‌شوند. این ضرایب که معرف خواص مکانیکی مواد هستند، برای مواد هدفمند ثابت نبوده و در راستای ضخامت ورق تغییر می‌کنند. این تغییرات را می‌توان در قالب قانون توانی بیان نمود. ε_{kk} مجموع درایه‌های روی قطر تانسور اصلی کرنش بوده و برای تغییر شکل‌های کوچک معرف تغییر حجم نسبی است.

پیزوالکتریسیته به پدیده‌ای الکتریکی- مکانیکی در بعضی مواد حالت جامد خاص اطلاق می‌شود که نشان دهنده جفت شدگی خواص مکانیکی، الکتریکی تولید شده به وسیله اعمال تنش‌های مکانیکی به کریستالهای دی الکتریک است. رفتاری که مواد پیزوالکتریک از خود نشان می‌دهند، ترکیبی از برهم‌کنش میان میدان‌های الکتریکی و مکانیکی است. روابط متشکله سه بعدی برای یک لایه پیزوالکتریک همسانگرد عرضی که در راستای z پلاریزه شده به صورت رابطه (3) نوشته می‌شود [19]،

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & 0\\ C'_{12} & C'_{11} & C'_{13} & 0 & 0 & 0\\ C'_{13} & C'_{13} & C'_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C'_{55} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C'_{11}-C'_{12})\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0 & e_{31}\\ 0 & 0 & e_{31}\\ 0 & 0 & e_{33}\\ 0 & e_{15} & 0\\ e_{15} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}D_x\\ D_y\\ D_z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0\\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\Xi_{11} & 0 & 0\\ 0 & \Xi_{11} & 0\\ 0 & 0 & \Xi_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{Bmatrix} \tag{3}$$

15- FG Power Law

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.3.11.1]

$\{D\}$ بیانگر بردار جابجایی الکتریکی [1]، $\{E\}$ بیانگر بردار میدان الکتریکی، $[C']$ ماتریس صلبیت ماده پیزوالکتریک [2]، $[\Xi]$ ماتریس نفوذپذیری دی الکتریک مطلق [3] و $[e]$، عامل کوپل الکترومکانیکی، ماتریس ثوابت شارژ ماده پیزوالکتریک [4] می‌باشند.

3- معادلات تعادل و پایداری ورق

ورقی مستطیلی شکل به طول l_1 و عرض l_2 و ضخامت کل $2(h+h_p)$ در نظر گرفته می‌شود. لایه میانی ورق از ماده هدفمند به ضخامت $2h$ ساخته شده که سطوح بالا و پایین آن با لایه پیزوالکتریک به ضخامت h_p پوشانده شده است (شکل 1). در تئوری تغییر شکل برشی و عمودی ورق، میدان جابجایی به صورت رابطه (4) بیان می‌شود [20].

$$u_i(x_1,x_2,z,t)=v_\alpha(x_1,x_2,z,t)\delta_{i\alpha}+w(x_1,x_2,z,t)\delta_{i3} \tag{4}$$

که در آن u_i مؤلفه‌های میدان جابجایی کلی جسم بوده، v_α و w به ترتیب مؤلفه‌های جابجایی درون صفحه‌ای و جابجایی عرضی هر نقطه دلخواه در فاصله z از صفحه میانی می‌باشند. زیرنویس α نشان دهنده راستاهای x_1 و x_2 بوده و δ بیانگر تابع دلتای کرونیکر [5] است. در حالت کلی میدان جابجایی تابع مختصات مکان و زمان است ولی در تحلیل کمانش ورق، حالت استاتیکی در نظر گرفته می‌شود. از آنجا که ضخامت ورق نسبت به ابعاد دیگر کوچک است، می‌توان مؤلفه‌های میدان جابجایی را در راستای z به صورت بسط چند جمله‌ای نوشت. یکی از انواع بسط چند جمله‌ای‌ها، بسط با استفاده از چند جمله‌ای های لژاندر متعامد [6] است. اگر L_a چند جمله‌ای لژاندر متعامد به صورت رابطه (5) باشد [20]:

$$\int_{-h-hp}^{h+hp} L_a(z)L_b(z)dz=\delta_{ab} \qquad , \qquad a,b=0,1,2,\dots,K \tag{5}$$

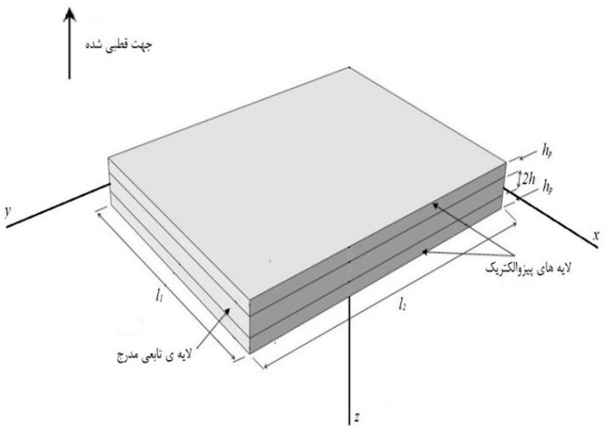
که در آن $a\,,b$ شمارنده‌های آزاد بوده و K مرتبه‌ی تئوری مورد استفاده در تحقیق است. برای نمونه، 6 چندجمله‌ای اول لژاندر بر اساس تعریف فوق به صورت رابطه (6) بیان می‌شوند [20]:

$$\begin{aligned}
L_0(z)&=\sqrt{\frac{1}{h}}\\
L_1(z)&=2\sqrt{\frac{3}{h}}\left(\frac{z}{h}\right)\\
L_2(z)&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{h}}\left[12\left(\frac{z}{h}\right)^2-1\right]\\
L_3(z)&=\sqrt{\frac{7}{h}}\left[-3\left(\frac{z}{h}\right)+20\left(\frac{z}{h}\right)^3\right]\\
L_4(z)&=\frac{3}{\sqrt{h}}\left[\frac{3}{8}-15\left(\frac{z}{h}\right)^2+70\left(\frac{z}{h}\right)^4\right]\\
L_5(z)&=\sqrt{\frac{11}{h}}\left[\frac{15}{4}\left(\frac{z}{h}\right)-70\left(\frac{z}{h}\right)^3+252\left(\frac{z}{h}\right)^5\right]
\end{aligned} \tag{6}$$

با استفاده از چند جمله‌ای‌های لژاندر می‌توان مؤلفه‌های میدان جابجایی را به صورت رابطه (7) بسط داد [20]:

$$\begin{aligned}
v_\alpha(x_1,x_2,z)&=L_a(z)v_\alpha^a(x_1,x_2) \quad , \quad \alpha=1,2 \;\; , \;\; a,b=0,1,2,\dots,K\\
w(x_1,x_2,z)&=L_a(z)w^a(x_1,x_2)
\end{aligned} \tag{7}$$

1- Electrical Displacement Vector
2- Piezoelectric Stiffness Matrix
3- Absolute Dielectric Permittivity Matrix
4- Piezoelectric Charge Constants Matrix
5- Kronecker's delta function
6- Legendre's orthonormal polynomials



شکل 1 نمای شماتیک ورق

شمارنده‌ی تکرار شونده‌ی a در معادلات (7) اندیس تکرار شونده [7] است و به معنای جمع روی آن از صفر تا مرتبه تئوری است. درجه چند جمله‌ای لژاندر نگاه داشته شده در بسط میدان جابجایی، مرتبه تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و عمودی را نشان می‌دهد. می‌توان مشتق چند جمله‌ای‌های لژاندر را در قالب ترکیب خطی از خود چند جمله‌ای‌ها به صورت رابطه (8) نوشت:

$$L_a'(z)=D_{ab}L_b(z) \tag{8}$$

که در معادله فوق، D ماتریس ضرایب مشتق است. برای نمونه، برای تئوری مرتبه‌ی 5 درایه‌های این ماتریس به صورت رابطه (9) می‌باشند [20]:

$$[D]=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \sqrt{15} & 0 & 0 & 0 & 0\\
\sqrt{7} & 0 & \sqrt{35} & 0 & 0 & 0\\
0 & 3\sqrt{3} & 0 & 3\sqrt{7} & 0 & 0\\
\sqrt{11} & 0 & \sqrt{55} & 0 & 3\sqrt{11} & 0
\end{bmatrix} \tag{9}$$

با مشتق گرفتن نسبت به z و مختصات درون صفحه‌ای از مؤلفه‌های جابجایی، رابطه (10) را خواهیم داشت:

$$v_{\alpha,\beta}=L_a v_{\alpha,\beta}^a,\quad v_{\alpha,z}=D_{ab}L_b v_\alpha^a,\quad w_{,\alpha}=L_a w_{,\alpha}^a,\quad w_{,z}=D_{ab}L_b w^a \tag{10}$$

در تحلیل پایداری ورق از روابط غیرخطی کرنش-جابجایی، به صورت رابطه (11) استفاده می‌شود [4]:

$$[\varepsilon]=\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{u}+(\vec{\nabla}\vec{u})^T)+\frac{1}{2}((\vec{\nabla}\vec{u})^T\cdot\vec{\nabla}\vec{u}) \tag{11}$$

با جایگذاری معادلات (4) در (11) و با استفاده از فرضیات فون کارمن [8] برای روابط غیرخطی کرنش-جابجایی، مؤلفه‌های کرنش بر حسب جابجایی به صورت رابطه (12) حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij}=L_a[&\frac{1}{2}(v_{\alpha,\beta}^a+v_{\beta,\alpha}^a+L_b w_{,\alpha}^a w_{,\beta}^b)\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}+\\
&\frac{1}{2}(D_{ba}v_\alpha^b+w_{,\alpha}^a)(\delta_{i\alpha}\delta_{j3}+\delta_{i3}\delta_{j\alpha})+D_{ba}w^b\delta_{i3}\delta_{j3}]
\end{aligned} \tag{12}$$

با جایگذاری مقادیر کرنش بالا در رابطه‌ی (2)، رابطه‌ی مؤلفه‌های تانسور تنش بر حسب مؤلفه‌های میدان جابجایی برای یک ماده هدفمند تراکم پذیر به صورت رابطه (13) به دست می‌آید:

7- Dummy Index
8- Von-Carman Hypothesis

$$\sigma_{\alpha\beta} = L_a\{\lambda[(v^a_{1,1} + v^a_{2,2} + \frac{1}{2}L_b w^a_{,1} w^b_{,1} + \frac{1}{2}L_b w^a_{,2} w^b_{,2})\delta_{\alpha\beta} + D_{ba} w^b \delta_{\alpha\beta}] + \mu(v^a_{\alpha,\beta} + v^a_{\beta,\alpha} + L_b w^a_{,\alpha} w^b_{,\beta})\}$$
$$\sigma_{\alpha 3} = \mu L_a (D_{ba} v^b_{\alpha} + w^a_{,\alpha})$$
$$\sigma_{33} = L_a\{\lambda[(v^a_{1,1} + v^a_{2,2} + \frac{1}{2}L_b w^a_{,1} w^b_{,1} + \frac{1}{2}L_b w^a_{,2} w^b_{,2}) + D_{ba} w^b] + 2\mu D_{ba} w^b\} \quad (13)$$

برای به دست آوردن معادلات تعادل حاکم بر ورق مستطیلی، با توجه به حالت استاتیکی حاکم بر ورق و عدم وجود ترم‌های زمانی، از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل بهره می‌بریم. طبق اصل حداقل انرژی پتانسیل برای یک سیستم در حال تعادل، تغییرات انرژی پتانسیل کل برابر صفر است [21]. با استفاده از این اصل معادلات تعادل می‌توانند به صورت رابطه (14) بیان شوند:

$$\delta v^a_1 \;:\; M^a_{11,1} + M^a_{12,2} - D_{ab} T^b_1 = 0$$
$$\delta v^a_2 \;:\; M^a_{12,1} + M^a_{22,2} - D_{ab} T^b_2 = 0$$
$$\delta w^a \;:\; (M^{ab}_{11} w^b_{,1} + M^{ab}_{12} w^b_{,2} + T_1^{\,a})_{,1} + (M^{ab}_{22} w^b_{,2} + M^{ab}_{12} w^b_{,1} + T_2^{\,a})_{,2} - D_{ab} T^b_3 = 0 \quad (14)$$

معادلات (14)، معادلات غیر خطی تعادل ورق در تئوری تغییر شکل برشی و عمودی می‌باشند. در این معادلات، ترم‌های $M^a_{\alpha\beta,\beta}$ و $M^{ab}_{\alpha\beta,\beta}$ با $a,b\geq 2$ ممان‌های برون صفحه‌ای مرتبه بالا هستند، به همین ترتیب، $T_i^{\,a}$ ممان نیروهای جانبی از مرتبه a می‌باشد. این ترم‌ها توسط انتگرال‌گیری تنش‌های متناظر سرتاسر ضخامت به صورت رابطه (15) به دست می‌آیند:

$$M^a_{\alpha\beta} = \int_{-h-h_p}^{h+h_p} L_a \sigma_{\alpha\beta} dz \quad , \quad M^{ab}_{\alpha\beta} = \int_{-h-h_p}^{h+h_p} L_a L_b \sigma_{\alpha\beta} dz$$
$$T_i^{\,a} = \int_{-h-h_p}^{h+h_p} L_a \sigma_{i3} dz \quad ,\alpha,\beta = 1,2 \quad ,i = 1,2,3 \quad (15)$$

بر پایه‌ی نتایج تغییرات بار بحرانی با مؤلفه‌های جابجایی، برای بررسی وضعیت پیش از کمانش[1] می‌توان از معادلات تعادل به شکل خطی استفاده کرد. منظور از تحلیل پایداری سیستم تعیین بار متناظر با نقطه انشعاب[2] یا نقطه دوشاخگی (نقطه‌ای که ورق در آن از وضعیت پایدار به ناپایدار تغییر حالت می‌دهد) به وسیله حل معادلات دیفرانسیل خطی است [22،۴]. به منظور تعیین معادلات دیفرانسیل خطی برای تعیین بار متناظر با نقطه انشعاب یا بار بحرانی کمانش از معیار تعادل همسایگی استفاده می‌شود. برای بررسی امکان وجود شکل‌های تعادل همسایگی، طبق این معیار یک تغییر کوچک در مؤلفه‌های جابجایی داده و دو شکل همسایگی با جابجایی‌ها، قبل و بعد از تغییر به صورت رابطه (16) در نظر گرفته می‌شود:

$$u \to u^0 + u^1 \quad , \quad v \to v^0 + v^1 \quad , \quad w \to w^0 + w^1 \quad (16)$$

که (u^1, v^1, w^1) جابجایی‌هایی به اندازه دلخواه کوچک هستند و (u, v, w) و (u^0, v^0, w^0) دو حالت دلخواهی در همسایگی وضعیت تعادل می‌باشند. با جایگذاری معادلات (16) در روابط مربوط به کرنش و سپس قرار دادن روابط حاصل در روابط مربوط به منتجه‌های تنش و ممان، این عبارات شامل ترم‌های خطی و غیرخطی (حالت تعادل و همسایگی) مؤلفه‌های جابجایی به صورت رابطه (17) می‌شوند،

$$M^a_{\alpha\beta} \to M^{a0}_{\alpha\beta} + M^{a1}_{\alpha\beta}$$
$$M^{ab}_{\alpha\beta} \to M^{ab0}_{\alpha\beta} + M^{ab1}_{\alpha\beta}$$
$$T_i^a \to T_i^{a0} + T_i^{a1} \quad (17)$$

که عبارت‌های با بالانویس 0 مربوط به وضعیت تعادل ورق و شامل ترم‌های غیرخطی از جابجایی هستند و عبارت‌های با اندیس 1 مربوط به وضعیت همسایگی تعادل است که شامل ترم‌های خطی از مؤلفه‌های جابجایی می‌باشند. با جایگزین کردن روابط (17) در (14) و در نظر گرفتن معادلات تعادل می‌توان معادلات پایداری ورق را به صورت رابطه (18) بیان کرد:

$$\delta v^a_1 : \quad M^{a1}_{11,1} + M^{a1}_{12,2} - D_{ab} T^{b1}_1 = 0$$
$$\delta v^a_2 : \quad M^{a1}_{12,1} + M^{a1}_{22,2} - D_{ab} T^{b1}_2 = 0$$
$$\delta w^a : \quad M^{ab0}_{11} w^b_{,11} + M^{ab0}_{22} w^b_{,22} + T^{a1}_{1,1} + T^{a1}_{2,2} - D_{ab} T^{b1}_3 = 0 \quad (18)$$

معادلات (18) معادلات پایداری ورق تحت بارگذاری لبه‌ای درون صفحه‌ای هستند. همچنین پارامترهای M^{ab0}_{11} و M^{ab0}_{22} می‌توانند توسط نیروهای پیش-کمانشی که از شرایط تعادل به دست آمده‌اند، جایگزین شوند.

مشابه با معادلات (18) برای تعادل مکانیکی، مؤلفه‌های الکتریکی ماده پیزوالکتریک باید رابطه‌ی حاکم بر خود که معادله ماکسول[3] نام دارد را در فرم انتگرالی رابطه (19) ارضا کنند [23]:

$$\int_{h}^{h+h_p} (D_{x,x} + D_{y,y} + D_{z,z})dz + \int_{-h-hp}^{-h} (D_{x,x} + D_{y,y} + D_{z,z})dz = 0 \quad (19)$$

به منظور حل این معادلات، لازم است معادلات متشکله (روابط تنش-کرنش) مواد هدفمند و لایه‌های پیزوالکتریک برای حالات مدار باز و بسته را در روابط بالا جایگذاری کرده تا تمام مجهولات بر حسب مؤلفه‌های میدان جابجایی و تابع پتانسیل الکتریکی بیان گردد. در این صورت، به معادلات به دست آمده، معادلات حاکم بر پایداری ورق گفته می‌شود. با حل این معادلات بار متناظر با نقطه انشعاب یا بار بحرانی کمانش تعیین می‌شوند.

4- تحلیل الکتریکی

چنانچه دو سر مدار به سطوح پتانسیل صفر وصل گردد، هیچ‌گونه اختلاف پتانسیلی بین دو سطح الکترودها به وجود نمی‌آید. به این حالت اتصال کوتاه یا مدار بسته گفته می‌شود. توزیع تابع پتانسیل الکتریکی برای به دست آوردن میدان، در راستای ضخامت به صورت تابعی مرتبه دوم فرض می‌شود، که صحت آن به کمک روش اجزا محدود بررسی شده است. برای تغییرات پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت تابع زیر پیشنهاد شده است [23]:

$$\Phi(x,y,z) = \begin{cases} \phi(x,y)[1 - (\dfrac{z-h-h_p/2}{h_p/2})^2] & h \le z \le h+h_p \\ \phi(x,y)[1 - (\dfrac{-z-h-h_p/2}{h_p/2})^2] & -h-h_p \le z \le -h \end{cases} \quad (20)$$

هنگامی که سطوح خارجی لایه‌های پیزوالکتریک در تماس با محیطی با نفوذپذیری پایین، مانند هوا و یا خلأ باشد، محیط همچـون عـایق الکتریکـی عمل کرده و بردار جابه‌جایی الکتریکی در راستای عمود بر سطوح لایـه‌هـای خارجی پیزوالکتریک صفر خواهد شد. به این حالت که مدار باز گفته می‌شود، سطوح داخلی به پتانسیل صفر متصل می‌شوند. تابع پتانسیل الکتریکی بـرای حالت مدار باز به صورت رابطه (21) حاصل می‌شود [23]:

1- Pre Buckling
2- Bifurcation Point
3- Maxwell's Equation

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.3.11.1]

$$\Phi(x,y,z)=\begin{cases}[1-(\frac{z-h-h_p/2}{h_p/2})^2]\varphi+\{\frac{L_a(h+h_p)}{\Xi_{33}}\{e_{31}\cdot \\ [v^a_{1,1}+v^a_{2,2}+\frac{1}{2}L_b(h+h_p)(w^a_{,1}w^b_{,1}+w^a_{,2}w^b_{,2})]+ \\ e_{33}D_{ba}w^b\}+\frac{4\varphi}{h_p}\}(z-h) \quad ; \quad h\le z\le h+h_p \\ [1-(\frac{-z-h-h_p/2}{h_p/2})^2]\varphi+\{\frac{L_a(-h-h_p)}{\Xi_{33}}\{e_{31}\cdot \\ [v^a_{1,1}+v^a_{2,2}+\frac{1}{2}L_b(-h-h_p)(w^a_{,1}w^b_{,1}+w^a_{,2}w^b_{,2})]+ \\ e_{33}D_{ba}w^b\}-\frac{4\varphi}{h_p}\}(z+h) \; ; \; -h-h_p\le z\le -h\end{cases} \tag{21}$$

میدان الکتریکی به صورت منفی گرادیان تابع پتانسیل الکتریکی تعریف می‌شود [24]:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi \tag{22}$$

5- تحلیل کمانش

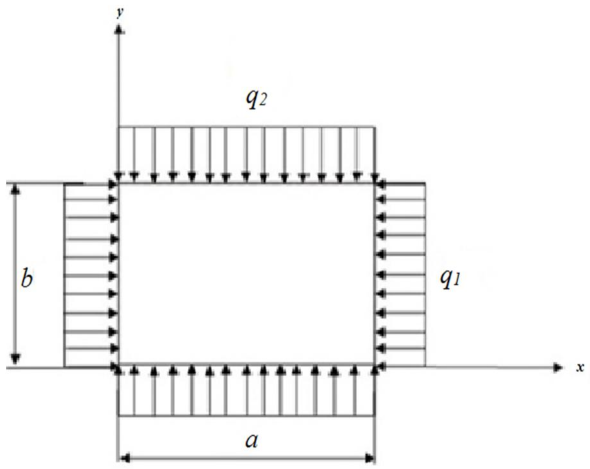
یک ورق مستطیلی با طول a و عرض b که تحت بارهای فشاری درون صفحه‌ای که به طور یکنواخت در دو جهت x و y توزیع شده‌اند همانند شکل 2 در نظر گرفته می‌شود، بنابراین نیروهای برآیند پیش کمانش با استفاده از شرایط تعادل به صورت رابطه (23) به دست می‌آیند:

$$M^{a0}_{11}=-L_a(0)q_1 \quad , \quad M^{a0}_{22}=-L_a(0)q_2 \tag{23}$$

که در آن q_1 و q_2 نیروهای وارد شده در صفحه‌ی میانی بر حسب واحد طول و در راستاهای x و y می‌باشند. در معادلات (23) دو پارامتر مستقل بار وجود دارد، می‌توان بارهای اعمالی در جهات x و y را با تعریف پارامتر بی بعدی به نام نسبت بارگذاری[1] (R) به هم مرتبط ساخت، به طوری که مقدار صفر برای R متناظر با حالت بارگذاری تک محوره در جهت x مقدار مثبت متناظر با حالت بارگذاری فشاری دو محوره در جهات x و y و مقدار منفی متناظر با فشار در جهت x و کشش در جهت y است.

به منظور حل معادلات حاکم، شرایط مرزی روی چهار لبه ورق مورد نیاز است. برای یک ورق با تکیه‌گاه ساده، شرایط مرزی در امتداد لبه‌ها به صورت رابطه (24) نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} &M^a_{11}=0,\ M^a_{21}=0,\ w^a=0 \quad ; \quad x_1=0,l_1 \\ &M^a_{22}=0,\ M^a_{12}=0,\ w^a=0 \quad ; \quad x_2=0,l_2 \end{aligned} \tag{24}$$



شکل 2 ورق مستطیلی تحت بارهای صفحه‌ای

با در نظر گرفتن معادلات (18) و (19) و روش ناویر[2]، دیده می‌شود که پتانسیل الکتریکی در همه‌ی لبه‌ها صفر است. پس طبق رابطه (25) داریم:

$$\varphi=0 \quad ; \quad x_1=0,l_1 \ \ \& \ \ x_2=0,l_2 \tag{25}$$

در شرط مرزی تکیه‌گاه ساده، جابجایی در راستای ضخامت ورق روی لبه‌ها و جابجایی در راستای موازی با آن لبه نیز برابر با صفر است، اما جابجایی در راستای عمود بر آن لبه مخالف صفر است. در حقیقت، به لبه‌های ورق تنها اجازه‌ی جابجایی در راستای عمود بر لبه داده می‌شود.

به منظور اعمال شرط مرزی تکیه‌گاه ساده و حل معادلات پایداری، از روش ناویر یا روش سری‌های دوگانه استفاده می‌شود. این روش، تابعیت میدان جابجایی از مختصات درون صفحه‌ای را به صورت مجموعی از جملات هارمونیک در نظر می‌گیرد. این تابعیت باید به گونه‌ای در نظر گرفته شود که شرایط مرزی ورق را ارضا کند. بنابراین، با توجه به شرایط مرزی (24) و (25)، مؤلفه‌های میدان جابجایی و تابع پتانسیل الکتریکی را به صورت رابطه (26) می‌توان نوشت [25]:

$$\begin{aligned} v^a_1(x,y)&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{v}^{amn}_1\cos(\frac{m\pi x_1}{l_1})\sin(\frac{n\pi x_2}{l_2}) \\ v^a_2(x,y)&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{v}^{amn}_2\sin(\frac{m\pi x_1}{l_1})\cos(\frac{n\pi x_2}{l_2}) \\ w^a(x,y)&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{w}^{amn}\sin(\frac{m\pi x_1}{l_1})\sin(\frac{n\pi x_2}{l_2}) \\ \varphi(x,y)&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{\varphi}^{mn}\sin(\frac{m\pi x_1}{l_1})\sin(\frac{n\pi x_2}{l_2}) \end{aligned} \tag{26}$$

که در آن، ضرایب $\tilde{v}^{amn}_1, \tilde{v}^{amn}_2, \tilde{w}^{amn}, \tilde{\varphi}^{mn}$ به ترتیب، مؤلفه‌های ثابت جابجایی در راستاهای x_1, x_2, z و تابع پتانسیل الکتریکی می‌باشند. در این سری‌ها، m و n تعداد جملات موجود در سری بوده و در مسئله‌ی کمانش ورق، بیانگر شماره‌ی مدهای کمانشی می‌باشند. با قرار دادن روابط (26) در معادلات (18) و (19) برای هر دو شرط مدار باز و بسته، معادلات با مشتقات جزئی به معادلات جبری تبدیل می‌شوند. حل این معادلات، به مسئله مقدار ویژه‌ای منجر می‌شود که مقادیر ویژه آن همان بارهای کمانش می‌باشند و کوچک‌ترین آن‌ها بار بحرانی کمانش نام دارد.

معادلات حاکم بر پایداری ورق برای حالت مدار بسته به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} &\int_{h}^{h+h_p} L_b dz\,[e_{15}(-D_{ab}(\frac{m\pi}{l_1})\tilde{v}^{amn}_1-(\frac{m\pi}{l_1})^2\tilde{w}^{bmn}- \\ &D_{ab}(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{v}^{amn}_2-(\frac{n\pi}{l_2})^2\tilde{w}^{bmn})+e_{31}D_{ab}(- \\ &(\frac{m\pi}{l_1})\tilde{v}^{amn}_1-(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{v}^{amn}_2)+e_{33}D_{ac}D_{cb}\tilde{w}^{amn}] \\ &-\int_{h}^{h+h_p} dz\,[\Xi_{11}(-(\frac{n\pi}{l_2})^2\tilde{\varphi}^{mn}-(\frac{m\pi}{l_1})^2\tilde{\varphi}^{mn}) \\ &-\frac{8}{{h_p}^2}\Xi_{33}\tilde{\varphi}^{mn}]+\int_{h}^{h+h_p}(\frac{z-h-h_p/2}{h_p/2})^2 dz\,\Xi_{11}\cdot \\ &(-(\frac{n\pi}{l_2})^2\tilde{\varphi}^{mn}-(\frac{m\pi}{l_1})^2\tilde{\varphi}^{mn})+\int_{-h-h_p}^{-h} L_b dz\,[e_{15}\cdot \\ &(-D_{ab}(\frac{m\pi}{l_1})\tilde{v}^{amn}_1-(\frac{m\pi}{l_1})^2\tilde{w}^{bmn}-D_{ab}(\frac{n\pi}{l_2})\cdot \\ &\tilde{v}^{amn}_2-(\frac{n\pi}{l_2})^2\tilde{w}^{bmn})+e_{31}D_{ab}(-(\frac{m\pi}{l_1})\tilde{v}^{amn}_1- \end{aligned}$$

1- Loading Ratio

2- Navier's Solution

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.3.11.1]

$$(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{v}_2^{amn}) + e_{33}D_{ac}D_{cb}\tilde{w}^{amn}] - \int_{-h-h_p}^{-h} dz\,[\Xi_{11}\cdot$$
$$(-(\frac{n\pi}{l_2})^2\tilde{\varphi}^{mn} - (\frac{m\pi}{l_1})^2\tilde{\varphi}^{mn}) - \frac{8}{{h_p}^2}\Xi_{33}\tilde{\varphi}^{mn}] +$$
$$\int_{-h-h_p}^{-h} (\frac{-z-h-h_p/2}{h_p/2})^2 dz\,\Xi_{11}(-(\frac{n\pi}{l_2})^2\tilde{\varphi}^{mn}$$
$$-(\frac{m\pi}{l_1})^2\tilde{\varphi}^{mn}) = 0 \tag{27}$$

$$\int_{h}^{h+h_p} L_aL_b dz\,(-c'_{11}(\frac{m\pi}{l_1})^2\tilde{v}_1^{bmn} - c'_{12}(\frac{m\pi}{l_1})(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{v}_2^{bmn} +$$
$$c'_{13}D_{cb}(\frac{m\pi}{l_1})\tilde{w}^{cmn}) - \int_{h}^{h+h_p} L_a(\frac{z-h-h_p/2}{h_p/2})dz\,\cdot$$
$$(\frac{4e_{31}}{h_p}(\frac{m\pi}{l_1})\tilde{\varphi}^{mn}) + \int_{-h-h_p}^{-h} L_aL_b dz\,(-c'_{11}(\frac{m\pi}{l_1})^2\cdot$$
$$\tilde{v}_1^{bmn} - c'_{12}(\frac{m\pi}{l_1})(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{v}_2^{bmn} + c'_{13}D_{cb}(\frac{m\pi}{l_1})\tilde{w}^{cmn})$$
$$+\int_{-h-h_p}^{-h} L_a(\frac{-z-h-h_p/2}{h_p/2})dz\,(\frac{4e_{31}}{h_p}(\frac{m\pi}{l_1})\tilde{\varphi}^{mn})$$
$$+\int_{-h}^{h}\lambda L_aL_b dz\,(-(\frac{m\pi}{l_1})^2\tilde{v}_1^{bmn} - (\frac{m\pi}{l_1})(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{v}_2^{bmn}$$
$$+D_{cb}(\frac{m\pi}{l_1})\tilde{w}^{cmn}) + \int_{-h}^{h}\mu L_aL_b dz\,(-2(\frac{m\pi}{l_1})^2\tilde{v}_1^{bmn})$$
$$+\int_{h}^{h+h_p} L_aL_b dz\,\frac{1}{2}(c'_{11}-c'_{12})(-(\frac{n\pi}{l_2})^2\tilde{v}_1^{bmn} - (\frac{m\pi}{l_1})\cdot$$
$$(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{v}_2^{bmn}) + \int_{-h-h_p}^{-h} L_aL_b dz\,\frac{1}{2}(c'_{11}-c'_{12})(-(\frac{n\pi}{l_2})^2\cdot$$
$$\tilde{v}_1^{bmn} - (\frac{m\pi}{l_1})(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{v}_2^{bmn}) + \int_{-h}^{h}\mu L_aL_b dz\,(-(\frac{n\pi}{l_2})^2\cdot$$
$$\tilde{v}_1^{bmn} - (\frac{m\pi}{l_1})(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{v}_2^{bmn}) - D_{ab}\int_{h}^{h+h_p} L_bL_c dz\,c'_{55}(D_{dc}\cdot$$
$$\tilde{v}_1^{dmn} + (\frac{m\pi}{l_1})\tilde{w}^{cmn}) - D_{ab}\int_{h}^{h+h_p} L_b dz\,(e_{15}(\frac{m\pi}{l_1})\tilde{\varphi}^{mn})$$
$$+D_{ab}\int_{h}^{h+h_p} L_b(\frac{z-h-h_p/2}{h_p/2})^2 dz\,(e_{15}(\frac{m\pi}{l_1})\tilde{\varphi}^{mn}) -$$
$$D_{ab}\int_{-h-h_p}^{-h} L_bL_c dz\,c'_{55}(D_{dc}\tilde{v}_1^{dmn} + (\frac{m\pi}{l_1})\tilde{w}^{cmn}) - D_{ab}\cdot$$
$$\int_{-h-h_p}^{-h} L_b dz\,(e_{15}(\frac{m\pi}{l_1})\tilde{\varphi}^{mn}) + D_{ab}\cdot$$
$$\int_{-h-h_p}^{-h} L_b(\frac{-z-h-h_p/2}{h_p/2})^2 dz\,(e_{15}(\frac{m\pi}{l_1})\tilde{\varphi}^{mn}) -$$
$$D_{ab}\int_{-h}^{h}\mu L_bL_c dz\,(D_{dc}\tilde{v}_1^{dmn} + (\frac{m\pi}{l_1})\tilde{w}^{cmn}) = 0 \tag{28}$$

$$\int_{h}^{h+h_p} L_aL_b dz\,\frac{1}{2}(c'_{11}-c'_{12})(-(\frac{m\pi}{l_1})(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{v}_1^{bmn} -$$
$$(\frac{m\pi}{l_1})^2\tilde{v}_2^{bmn}) + \int_{-h-h_p}^{-h} L_aL_b dz\,\frac{1}{2}(c'_{11}-c'_{12})\cdot$$
$$(-(\frac{m\pi}{l_1})(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{v}_1^{bmn} - (\frac{m\pi}{l_1})^2\tilde{v}_2^{bmn}) +$$
$$\int_{-h}^{h}\mu L_aL_b dz\,(-(\frac{m\pi}{l_1})(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{v}_1^{bmn} - (\frac{m\pi}{l_1})^2\cdot$$
$$\tilde{v}_2^{bmn}) + \int_{h}^{h+h_p} L_aL_b dz\,(-c'_{12}(\frac{m\pi}{l_1})(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{v}_1^{bmn}$$
$$-c'_{11}\cdot(\frac{n\pi}{l_2})^2\tilde{v}_2^{bmn} + c'_{13}.D_{cb}(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{w}^{cmn}) -$$
$$\int_{h}^{h+h_p} L_a(\frac{z-h-h_p/2}{h_p/2})dz\,(\frac{4e_{31}}{h_p}(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{\varphi}^{mn})$$
$$+\int_{-h-h_p}^{-h} L_aL_b dz\,(-c'_{12}(\frac{m\pi}{l_1})(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{v}_1^{bmn} - c'_{11}\cdot$$
$$(\frac{n\pi}{l_2})^2\tilde{v}_2^{bmn} + c'_{13}D_{cb}(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{w}^{cmn}) + \int_{-h-h_p}^{-h} L_a\cdot$$
$$(\frac{-z-h-h_p/2}{h_p/2})dz\,(\frac{4e_{31}}{h_p}(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{\varphi}^{mn}) +$$
$$\int_{-h}^{h}\lambda L_aL_b dz\,(-(\frac{m\pi}{l_1})(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{v}_1^{bmn} - (\frac{n\pi}{l_2})^2\tilde{v}_2^{bmn}$$
$$+D_{cb}(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{w}^{cmn}) + \int_{-h}^{h}\mu L_aL_b dz\,(-2(\frac{n\pi}{l_2})^2\cdot$$
$$\tilde{v}_2^{bmn}) - D_{ab}\int_{h}^{h+h_p} L_bL_c dz\,c'_{55}(D_{dc}\tilde{v}_2^{dmn} + (\frac{n\pi}{l_2})\cdot$$
$$\tilde{w}^{cmn}) - D_{ab}\int_{h}^{h+h_p} L_b dz\,(e_{15}(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{\varphi}^{mn}) + D_{ab}\cdot$$
$$\int_{h}^{h+h_p} L_b(\frac{z-h-h_p/2}{h_p/2})^2 dz\,(e_{15}(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{\varphi}^{mn}) -$$
$$D_{ab}\int_{-h-h_p}^{-h} L_bL_c dz\,c'_{55}(D_{dc}\tilde{v}_2^{dmn} + (\frac{n\pi}{l_2})\tilde{w}^{cmn}) -$$
$$D_{ab}\int_{-h-h_p}^{-h} L_b dz\,(e_{15}(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{\varphi}^{mn}) + D_{ab}\int_{-h-h_p}^{-h} L_b\cdot$$
$$(\frac{-z-h-h_p/2}{h_p/2})^2 dz\,e_{15}(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{\varphi}^{mn}) - D_{ab}\cdot$$
$$\int_{-h}^{h}\mu L_bL_c dz\,(D_{dc}\tilde{v}_2^{dmn} + (\frac{n\pi}{l_2})\tilde{w}^{cmn}) = 0 \tag{29}$$

$$M_{11}^{ab0}w^b_{,11} + M_{22}^{ab0}w^b_{,22} + \int_{h}^{h+h_p} L_aL_b dz\,c'_{55}(-D_{cb}(\frac{m\pi}{l_1})\tilde{v}_1^{cmn} -$$
$$(\frac{m\pi}{l_1})^2\tilde{w}^{bmn}) + \int_{h}^{h+h_p} L_a dz\,(-e_{15}(\frac{m\pi}{l_1})^2\tilde{\varphi}^{mn}) - \int_{h}^{h+h_p} L_a\cdot$$
$$(\frac{z-h-h_p/2}{h_p/2})^2 dz\,(-e_{15}(\frac{m\pi}{l_1})^2\tilde{\varphi}^{mn}) + \int_{-h-h_p}^{-h} L_aL_b dz\,\cdot$$
$$c'_{55}(-D_{cb}(\frac{m\pi}{l_1})\tilde{v}_1^{cmn} - (\frac{m\pi}{l_1})^2\tilde{w}^{bmn}) + \int_{-h-h_p}^{-h} L_a dz\,(-e_{15}\cdot$$
$$(\frac{m\pi}{l_1})^2\tilde{\varphi}^{mn}) - \int_{-h-h_p}^{-h} L_a(\frac{-z-h-h_p/2}{h_p/2})^2 dz\,(-e_{15}(\frac{m\pi}{l_1})^2\cdot$$
$$\tilde{\varphi}^{mn}) + \int_{-h}^{h}\mu L_aL_b dz\,(-D_{cb}(\frac{m\pi}{l_1})\tilde{v}_1^{cmn} - (\frac{m\pi}{l_1})^2\tilde{w}^{bmn}) +$$
$$\int_{h}^{h+h_p} L_aL_b dz\,c'_{55}(-D_{cb}(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{v}_2^{cmn} - (\frac{n\pi}{l_2})^2\tilde{w}^{bmn}) + \int_{h}^{h+h_p} L_a\cdot$$

$$\begin{aligned}
& dz\,(-e_{15}(\frac{n\pi}{l_2})^2\tilde{\varphi}^{mn}) - \int_{h}^{h+h_p} L_a(\frac{z-h-h_p/2}{h_p/2})^2 - (\frac{n\pi}{l_2})^2 \cdot \\
& \tilde{w}^{bmn}) + \int_{-h-h_p}^{-h} L_a dz\,(-e_{15}(\frac{n\pi}{l_2})^2\tilde{\varphi}^{mn}) + \int_{-h-h_p}^{-h} L_a L_b dz c'_{55}(- \\
& D_{cb}(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{v}_2^{cmn}(-e_{15}(\frac{n\pi}{l_2})^2\tilde{\varphi}^{mn}) - \int_{-h-h_p}^{-h} L_a(\frac{-z-h-h_p/2}{h_p/2})^2 \cdot \\
& dz\,(-e_{15}(\frac{n\pi}{l_2})^2\tilde{\varphi}^{mn}) + \int_{-h}^{h}\mu L_a L_b dz\,(-D_{cb}(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{v}_2^{cmn} - (\frac{n\pi}{l_2})^2 \cdot \\
& \tilde{w}^{bmn}) - D_{ab}\int_{h}^{h+h_p} L_b L_c dz\,(-c'_{13}(\frac{m\pi}{l_1})\tilde{v}_1^{cmn} - c'_{13}(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{v}_2^{cmn} + \\
& c'_{33}D_{dc}\tilde{w}^{dmn}) + D_{ab}\int_{h}^{h+h_p} L_b(\frac{z-h-h_p/2}{h_p/2})dz\,(\frac{4e_{33}}{h_p}\tilde{\varphi}^{mn}) - \\
& D_{ab}\int_{-h-h_p}^{-h} L_b L_c dz\,(-c'_{13}(\frac{m\pi}{l_1})\tilde{v}_1^{cmn} - c'_{13}(\frac{n\pi}{l_2})\tilde{v}_2^{cmn} + c'_{33}D_{dc} \cdot \\
& \tilde{w}^{dmn}) - D_{ab}\int_{-h-h_p}^{-h} L_b(\frac{-z-h-h_p/2}{h_p/2})dz\,(\frac{4e_{33}}{h_p}\tilde{\varphi}^{mn}) - \\
& D_{ab}\int_{-h}^{h}\lambda L_b L_c dz\,(-(\frac{m\pi}{l_1})\tilde{v}_1^{cmn} - (\frac{n\pi}{l_2})\tilde{v}_2^{cmn} + D_{dc}\tilde{w}^{dmn}) \\
& -D_{ab}\int_{-h}^{h}\mu L_b L_c dz\,(2D_{dc}\tilde{w}^{dmn}) = 0
\end{aligned} \tag{30}$$

برای تئوری مرتبه‌ی k ام، در به دست آوردن یک حل غیر بدیهی از سیستم، با برابر صفر قرار دادن دترمینان ضرایب ماتریس مؤلفه‌های جابجایی و تابع پتانسیل الکتریکی، بارهای کمانشی ورق که همان مقادیر ویژه دستگاه معادلات (27) تا (30) هستند، به دست می‌آیند. کوچک‌ترین مقدار در میان این بارهای کمانشی به عنوان بار بحرانی کمانشی شناخته می‌شود.

6- اعتبارسنجی نتایج و روش

به منظور اعتبارسنجی نتایج به دست آمده از مرتبه 5 این تئوری، مقایسه‌ای میان نتایج این کار و نتایج حاصل از تئوری‌های دیگر ورق انجام شده است. بارهای بحرانی ورق هدفمند مستطیلی با نتایج تئوری کلاسیک ورق، مرجع [26] و نیز با نتایج تئوری برشی مرتبه 3، مرجع [6]، مقایسه شده‌اند (جدول 1). در این مقایسه، نتایج به دست آمده هنگامی که ضخامت لایه پیزوالکتریک نزدیک به صفر قرار داده شده بود مقایسه می‌شوند. همچنین توان‌های مختلف ماده هدفمند و بارگذاری‌های مختلف مورد اعتبارسنجی قرار می‌گیرند. همان طور که از نتایج به دست آمده مشخص است همخوانی دقیقی بین تئوری برشی مرتبه 3 با نتایج این تحقیق وجود دارد که دقت حل حاضر را اثبات می‌کند.

مقایسه‌ای دیگر نیز بین نتایج این تحقیق با نتایج حاصل از تئوری کلاسیک ورق، مرجع [4] و نیز تئوری برشی مرتبه سوم، مرجع [6] انجام شده است (جدول 2). دیده می‌شود برای یک ورق نازک ($2h/b=0.01$) نتایج همخوانی خوبی دارند.

7- نتایج عددی و بحث

بعد از راستی آزمایی حل حاضر به منظور تحلیل کمانش ورق، ورقی از جنس ماده هدفمندی از ترکیب آلومینیوم و آلومینا (Al/Al_2O_3) که مدول الاستیسیته فلز و سرامیک آن به ترتیب $E_m = 70\,GPa$ و $E_c = 380\,GPa$، ضریب پواسون در کل ضخامت ثابت و برابر $\upsilon = 0.3$ می‌باشند، در نظر گرفته شده است. خواص ماده پیزوالکتریک نیز از جنس PZT-4 و از جدول 3 انتخاب شده است [23].

مقادیر بارهای بحرانی کمانش بی بعد برای ورق ساخته شده از مواد هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک برای حالت‌های مدار باز و مدار بسته، بارگذاری‌های مختلف، توان‌های مختلف ماده‌ی هدفمند، نسبت‌های مختلف ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت ماده هدفمند ($h_p/2h$) و نیز نسبت‌های ابعادی (a/b) مختلف با استفاده از تئوری مرتبه پنجم برشی و عمودی در جدول 4 آمده است.

همان طور که در این جدول مشاهده می‌شود برای هر دو حالت مدار باز و مدار بسته، با افزایش توان ماده هدفمند و نیز افزایش نسبت طول به عرض ورق بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد و با افزایش نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت ماده هدفمند، مقادیر بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابند، همچنین مقادیر بارهای بحرانی کمانش برای حالت مدار بسته نسبت به حالت مشابه مدار باز کوچک‌تر هستند. مطابق جدول 4 می‌توان دید که بار بحرانی کمانش در حالت بارگذاری دو محوره کششی-فشاری (R= -1)، در مدهای بالاتر به دست می‌آید. نیز در ضخامت یکسان بیش‌ترین مقدار بار بحرانی مربوط به بارگذاری دومحوره کششی-فشاری و کمترین مقدار مربوط به دو محوره فشاری است.

جدول 5 همگرایی بارهای بحرانی کمانش را برای نسبت‌های ضخامت مختلف در تئوری حاضر نشان می‌دهد. در همان جدول، ملاحظه می‌شود که تئوری مرتبه اول بار بحرانی کمانش را برای نسبت‌های ضخامت پایین به خوبی پیش‌بینی می‌کند، ولی در تخمین جواب در نسبت ضخامت‌های بالا ناموفق است. در حالی که استفاده از تئوری‌های مرتبه سوم و پنجم به جواب‌های با دقت بسیار بالا برای ورق‌های ضخیم منجر می‌شوند.

در جدول 6، با استفاده از تئوری مرتبه پنجم تغییر شکل برشی و

جدول 1 مقایسه‌ی بار بحرانی کمانش $p_{cr}(\frac{MN}{m})$ برای ورق هدفمند با مراجع [6] و [26] $(N=1, \frac{a}{b}=0.5)$

R		$\frac{b}{h}=10$	$\frac{b}{h}=20$	$\frac{b}{h}=40$	$\frac{b}{h}=60$	$\frac{b}{h}=80$	$\frac{b}{h}=100$
0	تحقیق حاضر	239/1476	32/4722	4/14866	1/23422	0/52149	0/26724
	[6]	239/148	32/4721	4/14863	1/23427	0/52149	0/26725
	[25]	267/48	33/435	4/1794	1/2383	0/5224	0/2675
1	تحقیق حاضر	191/3191	25/977	3/31889	0/98795	0/41716	0/21371
	[6]	191/319	25/9778	3/31890	0/98787	0/41716	0/21371
	[25]	213/99	26/748	3/4353	0/9907	0/4179	0/2140
-1	تحقیق حاضر	318/8572	43/2962	5/53185	1/64568	0/69528	0/35622
	[6]	318/856	43/2961	5/53153	1/64568	0/69528	0/35622
	[25]	356/64	44/580	5/5725	1/6511	0/6966	0/3566

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.3.11.1]

عمودی برای نسبت‌های طول به عرض مختلف، نتایج بار بحرانی کمانش ارائه و با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همان طور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت طول به عرض ورق بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد.

شکل 3، بارهای کمانش بحرانی بی بعد بر حسب نسبت ضخامت‌ها ($h_p/2h$)، برای توان‌های مختلف ماده هدفمند را نشان می‌دهد مشاهده می‌گردد که بار بحرانی کمانش با افزایش توان ماده هدفمند، کاهش می‌یابد.

در واقع، از آنجا که افزایش توان ماده هدفمند به معنای فلزی تر شدن ورق است، لذا صلبیت کلی ورق کاهش می‌یابد و در نتیجه، کاهش بار بحرانی دور از انتظار نخواهد بود. همچنین بار بحرانی کمانش برای ورق‌های کامل سرامیکی به طور قابل ملاحظه‌ای بزرگ‌تر از بار بحرانی کمانش برای ورق‌های ساخته شده از مواد هدفمند هستند (N>0).

شکل 4 بارهای بحرانی کمانش بی بعد بر حسب نسبت ضخامت‌ها تحت انواع مختلف بارگذاری را نشان می‌دهد. دیده می‌شود که بارهای بحرانی کمانش برای یک نسبت ضخامت مشخص، هنگامی که R=-1 است بیش‌ترین مقدار، و هنگامی R=1 است کمترین مقدار را دارا می‌باشند.

در شکل 5، اثر شرایط مرزی الکتریکی روی بارهای بحرانی کمانش بی بعد بررسی شده است. این نتایج می‌رسانند که تغییر از شرط مدار بسته به مدار باز، همیشه با افزایش در بار بحرانی کمانش ورق همراه هستند.

برای ورق ساخته شده از مواد هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک در شکل 6، تغییرات بارهای بحرانی کمانش بی بعد را بر حسب نسبت ضخامت‌ها برای سه ماده مختلف لایه پیزوالکتریک، رسم کرده‌ایم، مقدار بار بحرانی کمانش بی بعد برای PZT-4 کمترین و برای PZT-6B بیش‌ترین است. سه ماده لایه‌های پیزوالکتریک از لحاظ کیفی اثر مشابه اما از نظر کمی اثرهای متفاوتی روی بار بحرانی کمانش دارند.

شکل 7 اثر ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک را روی بار بحرانی کمانش بی بعد نشان می‌دهند. نتایج آشکار می‌سازند که برای یک مقدار ثابت از نسبت ضخامت‌ها، مقدار بار بحرانی کمانش بی بعد وقتی که شرایط مرزی روی سطوح اصلی لایه‌های پیزوالکتریک مدار باز هستند، نسبت به وقتی که آن‌ها مدار بسته هستند، بیشتر است. علاوه بر این، اثرات مکانیکی افزودن لایه پیزوالکتریک ، موسوم به اثرات سختی، با صفر قرار دادن ماتریس ثوابت شارژ ماده پیزوالکتریک $[e]$ مورد بررسی قرار گرفته است. همان طور که ملاحظه می‌شود، در نسبت ضخامت‌های کم، اثر الکتریکی لایه‌ی پیزو الکتریک، موسوم به اثر پیزو، که به نحوه توزیع تابع پتانسیل در راستای ضخامت وابسته بوده، برای هر دو حالت مدار باز و مدار بسته ناچیز است [18]. در نسبت ضخامت بالاتر، اگرچه اثر پیزو برای حالت مدار بسته کوچک باقی می‌ماند ولی در حالت مدار باز، این اثر نقش کلیدی در تعیین بار بحرانی کمانش ورق بازی می‌کند. لازم به ذکر است، اثر پیزو برای هر دو حالت مدار باز و بسته سبب افزایش بار بحرانی کمانش ورق می‌گردد.

جدول 2 مقایسه‌ی بار بحرانی کمانش $p_{cr}(\frac{MN}{m})$ برای ورق هدفمند با مراجع [4] و [6]، $(\frac{a}{b}=1, \frac{2h}{b}=0.01)$

R	N	p_{cr}		
		تحقیق حاضر	[6]	[4]
0	0	1/372959	1/37379	1/373016
	1	0/684406	0/684428	0/68475
	2	0/534039	0/534053	0/53432
1	0	0/68648	0/686508	0/68689
	1	0/342203	0/342214	0/34238
	2	0/267019	0/267026	0/26716
-1	0	2/8577340(*)	2/860035(*)	2/86206(*)
	1	1/4247860(*)	1/424877(*)	1/42657(*)
	2	1/1116790(*)	1/111760(*)	1/11318(*)

(*)نشان‌دهنده مود های بالاتر کمانش است.

جدول 3 خصوصیات مواد [23]

خصوصیت	ماده پیزوالکتریک			ماده‌ی لایه هسته					
	$BaTiO_3$	PZT-6B	PZT-4	G-1195N	آلومینا	آلومینیوم	Al_2O_3	آلومینیوم اکسید	Ti-6A1-4V
E (GPa)	_	_	_	63/0	380	70	_	320/24	105/7
ν	_	_	_	0/3	0/3	0/3	_	0/2600	0/2981
c_{11} (GPa)	150	168	132	_	_	_	460/2	_	_
c_{12} (GPa)	65/3	84/7	71	_	_	_	174/7	_	_
c_{33} (GPa)	146	163	115	_	_	_	509/5	_	_
c_{13} (GPa)	66/2	84/2	73	_	_	_	127/4	_	_
c_{55} (GPa)	43/9	35/5	26	_	_	_	126/9	_	_
e_{31} (Cm^{-2})	-4/3	-0/9	-4/1	44/37	_	_	_	_	_
e_{33} (Cm^{-2})	17/5	7/1	14/1	50/18	_	_	_	_	_
e_{15} (Cm^{-2})	11/4	4/6	10/5	14/13	_	_	_	_	_
Ξ_{11} (nFm^{-1})	9/87	3/60	7/124	15/30	_	_	_	_	_
Ξ_{33} (nFm^{-1})	11/16	3/42	5/841	15/00	_	_	_	_	_
ρ (kgm^{-3})	5700	7550	7500	7600	3800	2707	4000	3750	4429

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.3.11.1]

جدول 4 مقادیر بارهای بحرانی کمانش بی بعد ($p_{cr}=\frac{q_1a^2}{D^*}$) برای بارگذاری‌ها، نسبت‌های ابعاد و توان‌های مختلف ماده‌ی هدفمند ($\frac{2h}{b}=0.5$)

مدار باز ($\frac{a}{b}=0.5$)	مدار باز ($\frac{a}{b}=1$)	مدار بسته ($\frac{a}{b}=0.5$)	مدار بسته ($\frac{a}{b}=1$)	$\frac{h_p}{2h}$	N	R
13/3908	37/2214	13/3908	37/2214	0	0	0
9/0786	25/4411	8/8451	24/7346	0/1		
6/8475	19/401	6/4953	18/3077	0/2		
4/0374	12/2099	3/7062	10/9534	0/5		
13/6831	37/5694	13/6831	37/5694	0	1	
11/8479	32/5863	11/091	30/8872	0/1		
11/1256	27/286	10/0501	26/9117	0/2		
6/6021	13/007	6/0124	12/3257	0/5		
15/0055	37/7424	15/0055	37/7424	0	5	
12/293	33/42	11/6215	31/9117	0/1		
11/7153	28/3627	10/6354	27/4291	0/2		
7/1264	17/0605	6/7055	16/1509	0/5		
10/7126	18/6107	10/7126	18/6107	0	0	1
7/2629	12/7205	7/0761	12/3673	0/1		
5/478	9/7005	5/1962	9/1538	0/2		
3/2299	6/1049	2/0615	5/1767	0/5		
10/9464	18/7847	10/9464	18/7847	0	1	
9/4783	16/8931	8/8728	15/4436	0/1		
8/9292	15/643	6/4001	13/5651	0/2		
3/9255	7/1035	3/5051	6/4124	0/5		
11/4044	19/3712	11/4044	19/3712	0	5	
10/1129	17/4099	9/5419	16/9551	0/1		
9/4252	16/1813	8/6181	15/8714	0/2		
4/4073	8/7214	3/9941	8/2579	0/5		
31/3512(*)	71/4177(*)	31/3512(*)	71/4177(*)	0	0	-1
20/7871(*)	48/4196(*)	20/3739(*)	47/1743(*)	0/1		
15/2129(*)	36/5204(*)	14/6387(*)	34/6417(*)	0/2		
7/6677(*)	21/5329(*)	7/3761(*)	19/7667(*)	0/5		
33/1905(*)	72/9765(*)	33/1905(*)	72/9765(*)	0	1	
27/2915(*)	62/2792(*)	25/8533(*)	59/1524(*)	0/1		
17/9307(*)	59/3776(*)	17/0215(*)	53/6007(*)	0/2		
8/5824(*)	22/3294(*)	7/0351(*)	21/0045(*)	0/5		
33/9264(*)	73/8184(*)	33/9264(*)	73/8184(*)	0	5	
29/8532(*)	67/0974(*)	28/1758(*)	65/2007(*)	0/1		
22/5957(*)	61/7614(*)	21/9061(*)	59/1154(*)	0/2		
10/3051(*)	37/1259(*)	8/3652(*)	29/6971(*)	0/5		

(*) نشان‌دهنده مودهای بالاتر کمانش است.

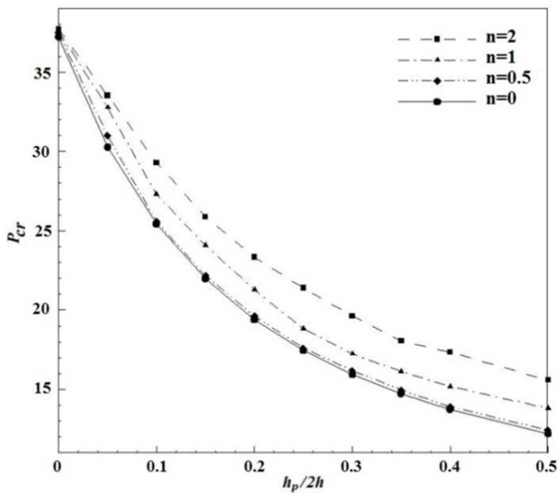
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.3.11.1]

جدول 5 همگرایی بارهای بحرانی کمانش ($p_{cr}=\frac{q_1 a^2}{D^*}$) برای نسبت ضخامت‌های مختلف در تئوری حاضر ($R=1, N=1, \frac{2h}{b}=0.1, \frac{a}{b}=5$)

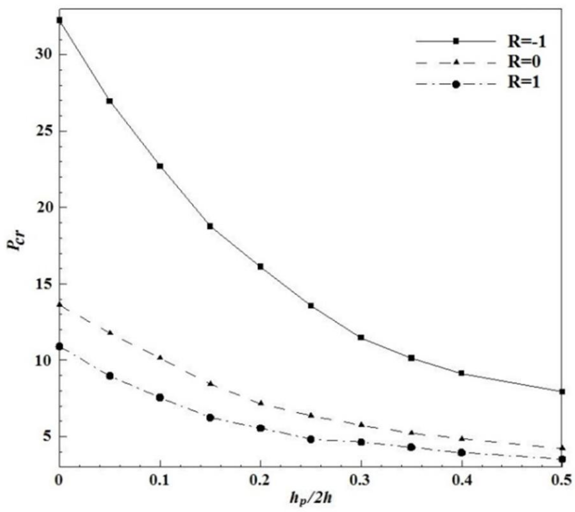
$\frac{h_p}{2h}$	K=1	K=3	K=5
0	212/7302	179/7651	173/4529
0/1	293/8583	232/4831	227/1874
0/2	403/6027	304/604	303/4526
0/5	936/7627	662/4971	656/8449

جدول 6 مقادیر بارهای بحرانی کمانش ($p_{cr}=\frac{q_1 a^2}{D^*}$) برای نسبت‌های طول به عرض مختلف ($R=1, N=1, \frac{2h}{b}=0.1$)

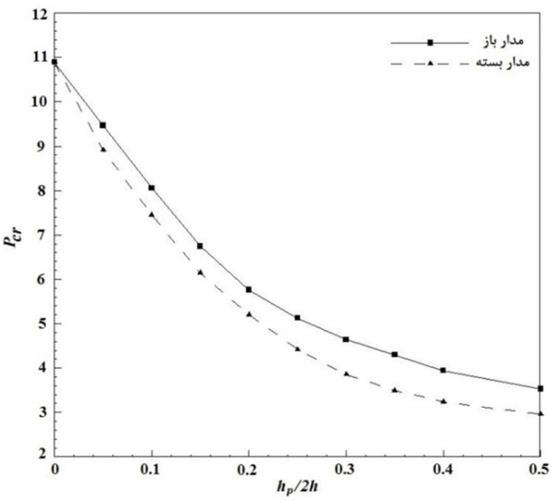
$\frac{h_p}{2h}$	$\frac{a}{b}$=0.5	$\frac{a}{b}$=1	$\frac{a}{b}$=2	$\frac{a}{b}$=5
0	759/4673	325/8213	207/399	173/4529
0/1	975/8024	424/6073	271/3432	227/1874
0/2	1254/5354	556/1106	357/2473	303/4526
0/5	2451/7784	1180/6298	777/5808	656/8449



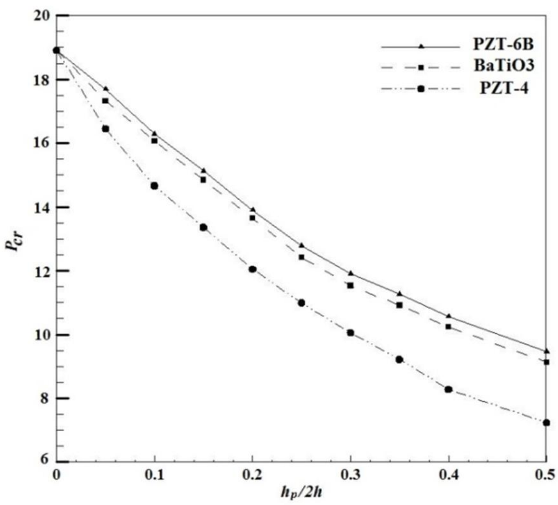
شکل 3 تغییرات بار بحرانی کمانش بی بعد بر حسب نسبت ضخامت‌ها برای توان‌های مختلف ماده‌ی هدفمند و مدار باز (R=0, a/b=1)



شکل 4 تغییرات بار بحرانی کمانش بی بعد بر حسب نسبت ضخامت‌ها برای بارگذاری‌های مختلف و مدار باز (N=0.5, a/b=0.5)

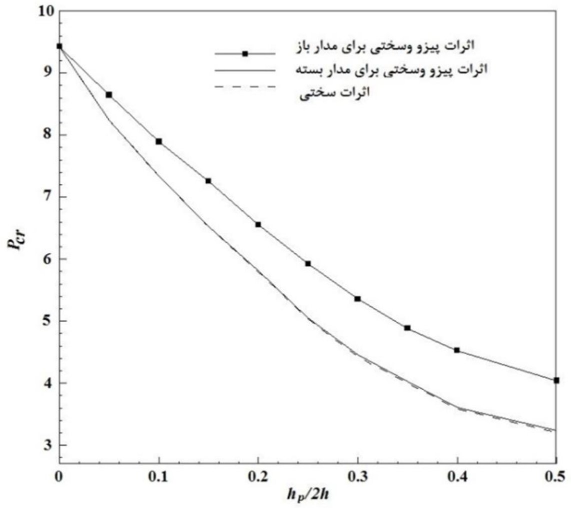


شکل 5 تغییرات بار بحرانی کمانش بی بعد بر حسب نسبت ضخامت‌ها، برای مدارهای باز و بسته (R=1, N=0.5, a/b=0.5)



شکل 6 تغییرات بار بحرانی کمانش بی بعد بر حسب نسبت ضخامت‌ها، برای سه ماده‌ی پیزوالکتریک مختلف (R=1, N=2, a/b=1)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.3.11.1]



شکل 7 تغییرات بار بحرانی کمانش بی بعد بر حسب نسبت ضخامت‌ها، اثر پیزو برای حالت مدار باز و بسته (R=1, N=5, a/b=0.5)

8- مراجع

[1] J. N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 45, pp. 745–52, 1984.
[2] R. C. Batra, S. Vidoli, Higher order piezoelectric plate theory derived from a three-dimensional variational principle, *AIAA Journal*, Vol. 40, pp. 91–104, 2002.
[3] S. Shariat, M. R. Eslami, Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading based on the first order plate theory, *Fifth international conference on composite science and technology*, Sharjah, UAE, 2005.
[4] M. Mohammadi, A. R. Saidi, E. Jomehzadeh, Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates, *Applied Composite Materials*, Vol. 17, pp. 81-93, 2010.
[5] M. Mohammadi, A. R. Saidi, E. Jomehzadeh, A novel analytical approach for the buckling analysis of moderately thick functionally graded rectangular plates with two simply-supported opposite edges, *Mechanical Engineering Science*, Vol. 224, pp. 1831-1841, 2009 .
[6] M. Bodaghi, A. R. Saidi, Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, pp. 3659-3673, 2010.
[7] M. H. Ebrahimi, M. M. Najafizadeh, Free vibration of two-dimensional functionally graded circular cylindrical shells on elastic foundation, *Modares Mechanical engineering*, Vol. 13, pp. 27-38, 2013. (in Persian)
[8] A. Abdollahifar, M. R. Nami, Investigating the effect of angle between the material gradation direction and crack on mixed-mode stress intensity factor of FGM plates using MLPG method, *Modares Mechanical engineering*, Vol. 13, pp. 138-150, 2013. (in Persian)
[9] M. Raoufi, S. Jafari Mehrabadi, S. Satouri, Free vibration analysis of 2D-FGM annular sectorial moderately thick plate resting on elastic foundation using 2D-DQM solution, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 299-306, 2015. (In Persian)
[10] J. S. Yang, R. C. Batra, conservation laws in linear piezoelectricity, *Engineering fracture mechanics*, Vol. 51, pp. 1041-1047, 1995 .
[11] J. S. Yang, R. C. Batra, A second-order theory for piezoelectric materials, *J Acoust Soc Am*, Vol. 97, pp. 280-288, 1995.
[12] J. S. Yang, R. C. Batra, theory of electroded thin thermopiezoelectric plates subject to large driving voltages, *A J ADDI Phys*, Vol. 76, pp. 5411-5417, 1994 .
[13] R. C. Batra, S. Vidoli, Higher-order piezoelectric plate theory derived from a three dimensional variational principle, *AIAA Journal*, Vol. 40, pp. 91-104, 2002.
[14] A. Keshmiri, A. Ghaheri, F. Taheri-behrooz, Buckling and vibration of symmetrically laminated composite elliptical plates resting on winklertype foundation subjected to initial in-plane stresses, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 1, pp. 19-26, 1393. (In Persian)
[15] S. Abolghasemi, H. R. Eipakchi, M. Shariati, Analytical solution for buckling of rectangular plates subjected to non-uniform in-plane loading based on first order shear deformation theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 13, pp. 37-46, 2015 (In Persian)
[16] M. A. Ghasemi, M. Yazdani, E. Soltan Abadi, Buckling behavior investigation of grid stiffened composite conical shells under axial loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 170-176, 2015 (In Persian)
[17] N. Wu, Q. Wang, S. T. Quek, Free Vibration Analysis of Piezoelectric Coupled Circular Plate with Open Circuit, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, pp. 1126-36, 2010.
[18] V. Birman, L. W. Byrd, Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, pp. 195–216, 2007.
[19] N. Jalili, *Piezoelectric-Based Vibration Control*, pp. 131-133, Springer, 2010.
[20] R .C. Batra, Higher-order shear and normal deformable theory for functionally graded incompressible linear elastic plates, *Thin-Walled Struct*, Vol. 45, pp. 974–982, 2007.
[21] Q. Wang, S. T. Quek, C. T. Sun, X. Liu, Analysis of Piezoelectric Coupled Circular Plate, *Smart Material and Structures*, Vol. 10, pp. 229–239, 2001 .
[22] F. J. Reitz, J. R. Milford, R. D. Christy, *Foundations of Electromagnetic Teory*, pp. 424-430, 2003.
[23] J. N. Reddy, *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*, John Wiley, New York, 1984.
[24] D. O. Brush, B. O. Almorth, *Buckling of bars plates and shells*, McGraw-Hill, New York, 1975.
[25] S. A. Sheikholeslami, A. R. Saidi, Vibration analysis of functionally graded rectangular plates resting on elastic foundation using higher-order shear and normal deformable plate theory, *Composite Structures*, Vol. 106, pp. 350–361, 2013.
[26] R. Javaheri, M. R. Eslami, Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading, *Z Angew Math Mech ZAMM*, Vol. 82, No. 4, pp. 277-283, 2002 .