ماهنامه علمى يژوهشى



مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

حل تحلیلی کمانش ورقهای تابعی مدرج با لایههای پیزوالکتریک به کمک تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و عمودی

مرتضى قاسمى¹، عبدالرحمان جامى الاحمدى^{2*}

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد 2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد * مشهد، صندوق پستی 9177948974، jaami-a@um.ac.ir

چکیدہ	اطلاعات مقاله
در این مقاله، کمانش ورق مستطیلی چند لایهای از جنس مواد مدرج تابعی و مواد همسانگرد عرضی با دو لایهی پیزوالکتریک در	مقاله پژوهشی کامل
بالا و پایین در حالتهای مدار باز و مدار بسته مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات تعادل حاکم بر ورق بر پایهی تئوری مرتبه	دریافت: 30 آبان 1393
بالای تغییر شکل برشی و عامدی، با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل و معادلهی ماکسول به دست آمدهاند. در حوزهی حل	پذیرش: 18 دی 1393
است	ارائه در سایت: 25 بهمن 1393
الکتریکی به منظور بررسی اثر لایههای پیزو الکتریک، از معادله ماکسول به عنوان معادلهی مورد نیاز برای متغیرهای الکتریکی	<i>کلید واژگان:</i>
استفاده شده است. با استفاده از معیار تعادل همسایگی، معادلات پایداری حاکم بر ورق استخراج شدهاند. معادلات حاصل با فرض	تحلیل کمانش
تکیهگاه ساده روی هر چهار لبهی ورق به صورت تحلیلی حل شده است و بارهای بحرانی کمانش داده شدهاند. در پایان، پس از	مادہی مدرج تابعی
بررسی صحت نتایج ارائه شده، نتایج عددی برای اثر پارامترهای مختلف مانند توان مادهی مدرج تایعی، نسبت ضخامت به طول،	لایہی پیزو الکتریک
برر ای منابع این این این منابع این می این این این این این این این این این ای	تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و عمودی

Analytical solution based on higher order shear and normal deformation theory for Buckling of functionally graded plates with piezoelectric layers

Morteza Ghasemi, Abdolrahman Jaamialahmadi*

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran. * P.O.B. 9177948974 Mashhad, Iran, jaami-a@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION ABSTRACT In this article, the buckling of multilayer rectangular thick plate made of functionally graded, Original Research Paper Received 21 November 2014 transversely isotropic and piezoelectric materials in both closed and open circuit conditions is Accepted 08 January 2015 investigated. Based on the higher-order shear and normal deformable plate theory, the governing Available Online 14 February 2015 equilibrium equations are obtained using the principle of minimum total potential energy and Maxwell's equation. Using an analytical approach, the governing stability equations of functionally Keywords: graded rectangular plates with piezoelectric layers have been presented in terms of displacement Buckling analysis Functionally graded material Piezoelectric layer components and electric potential. In order to obtain the stability equations, the adjacent equilibrium criterion is used. The stability equations are then solved analytically, assuming simply Higher Order shear and normal supported boundary condition along all edges. Finally, following validation of the results, deformation theory numerical results for compressible materials are presented. Also, the effects of different parameters such as different loading conditions, functionally graded power law index, thicknessto-length ratio and aspect ratio on the critical buckling loads of plates are studied in detail. The influences of the mentioned parameters on the critical buckling load have been presented in some figures. Furthermore, the effect of piezoelectric thickness on the plate critical buckling loads has been studied

1- مقدمه

تحليل ورق ها ارائه شده است. روش تحليل رفتار ورق با استفاده از تئورى الاستیسیتهی سه بعدی اگر چه روشی پایهای و دقیق محسوب می شود، اما به دلیل تحلیل سه بعدی ورق با پیچیدگیها و دشواریهایی همراه است. برای کاهش این پیچیدگیها، و با این فرض که در ورقها عمدتاً ضخامت نسبت به ابعاد دیگر بسیار کوچک است، تئوریهایی موسوم به تئوریهای ورق ارائه

ورقها به عنوان یکی از اجزاء مهم در سازههای مهندسی همواره مورد توجه محققان قرار گرفتهاند. ناپایداری ورقها تحت بار صفحهای استاتیکی به کمانش ورق میانجامد که به دلیل تغییر شکلهای بزرگ سازه در این حالت، کارایی ورق تا حد زیادی از بین خواهد رفت. تا کنون روشهای متفاوتی برای

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. Ghasemi, A. Jaamialahmadi, Analytical solution based on higher order shear and normal deformation theory for Buckling of functionally graded plates with piezoelectric layers, Modares Mechanical Engineering, Vol. 15, No. 3, pp. 387-397, 2015 (In Persian)

 $\Gamma(\mathbf{z}) = \Gamma_{\mathbf{M}} + (\Gamma_{\mathbf{c}} - \Gamma_{\mathbf{M}})(\frac{1}{2} - \frac{\mathbf{z}}{2\mathbf{h}})^{\mathbf{N}}$

 $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$

2- مواد هدفمند و مواد پيزوالكتريک

مىشود [18]:

(1)

(2)

مواد هدفمند، موادی با ریز ساختار غیر همگن میباشند که خواص مکانیکی

و حرارتی آنها به طور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر جسم

تغییر می کند. معمولاً این مواد از دو ماده ساختاری سرامیک و فلز ساخته

می شوند. ماده ساختاری سرامیک به علت ضریب انتقال حرارت کم و مقاومت

زیاد در مقابل درجه حرارت، دماهای بسیار بالا را تحمل کرده و ماده

ساختاری فلز، انعطاف پذیری لازم را فراهم می کند. مدلی که به طور رایج در

تحليل مواد هدفمند استفاده مىشود، بر پايه كسر حجمى مواد تشكيل دهنده بوده و به قانون توانی¹⁵ ماده هدفمند معروف است. در این مدل،

تغییرات خواص در راستای ضخامت به صورت رابطه (1) در نظر گرفته

که در این رابطه، ۲ بیانگر خواص فیزیکی یا مکانیکی جسم مانند

چگالی، ضریب انبساط حرارتی، مدول الاستیسیته، مدول برشی و غیره است.

زیرنویس های C و M به ترتیب معرف سرامیک و فلز بوده و پارامتر N

نشان دهنده توان ماده هدفمند است. با توجه به ناچیز بودن تغییرات ضریب

پوآسون، این کمیت به صورت ثابت در راستای ضخامت ورق در نظر گرفته

مى شود [18]. با توجه به ماهيت همسانگرد بودن مواد هدفمند، روابط تنش-

كرنش موسوم به روابط متشكله به كمك دو ثابت مستقل بيان مے شوند.

که در آن λ, μ ضرایب لامه نامیده می شوند. این ضرایب که معرف

خواص مکانیکی مواد هستند، برای مواد هدفمند ثابت نبوده و در راستای

ضخامت ورق تغییر می کنند. این تغییرات را می توان در قالب قانون توانی

بیان نمود. *E_{kk} مجموع د*رایه های روی قطر تانسور اصلی کرنش بوده و برای

ییزوالکتریسیته به یدیدهای الکتریکی- مکانیکی در بعضی مواد حالت

روابط تنش-کرنش را می توان به فرم رابطه (2) بیان کرد،

تغییر شکلهای کوچک معرف تغییر حجم نسبی است.

شدهاند. سادهترین تئوری در تحلیل ورقها، تئوری کلاسیک ورق¹ است. این تئوری که بر پایهی فرضیات کیرشهف² استوار است، اثر تغییر شکل برشی و عمودی را در راستای ضخامت در نظر نمی گیرد. به منظور کاهش خطا در تحلیل ورق های نسبتاً ضخیم، تئوری دیگری موسوم به تئوری تغییر شکل برشی³ معرفی شده است. در این تئوری، اثر تغییر شکل برشی در راستای ضخامت در نظر گرفته می شود. رایج ترین تئوری مرتبه ی بالاتر برشی، تئوری برشی مرتبهی سوم⁴است که توسط ردی⁵ **[1]** مطرح شده است. در این تئوری، هر صفحهی مسطح و عمود بر صفحهی میانی ورق، پس از تغییر شکل مسطح و عمود، باقی نمیماند. گر چه تئوریهای برشی ورق در تحلیل ورقهای ضخیم نتایج خوبی از خود به جای گذاشتهاند، اما به دلیل در نظر نگرفتن اثر کرنشهای عمودی، هنوز با جوابهای دقیق فاصله دارند. برای رفع این مشکل و بالا بردن حداکثری دقت، تئوری جدیدی بهنام تئوری تغییر شکل برشی و عمودی⁶ توسط باترا⁷ و ویدولی⁸ [2] معرفی شده است. این تئوری، کامل کنندهی تئوریهای قبل بوده و هر دو اثر تغییر شکل برشی و عمودی را در راستای ضخامت در نظر می گیرد.

طی سال های اخیر تحقیقات گوناگونی در زمینه یمدل سازی و رفتار مواد هدفمند (مدرج تابعی) انجام شده است. شریعت و اسلامی [3] تحلیل کمانش ورق ساخته شده از مادهی هدفمند تحت بارگذاری مکانیکی را بر اساس تئوری برشی مرتبه اول ارائه دادند. محمدی و همکارانش [۴،5] کمانش ورقهای ساخته شده از مواد هدفمند تحت بارگذاری مکانیکی یکنواخت را بر اساس تئوری های کلاسیک و تغییر شکل برشی مرتبهی اول انجام دادند. بداغی و سعیدی [6] نیز با در نظر گرفتن شرایط مرزی لوی⁹ و بر پایهی تئوری برشی مرتبهی سوم تحلیل کمانش ورقهای مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند را، ارائه دادند. مطالعات فراوان دیگری نیز در سالهای اخیر توسط محققان روی مواد مدرج تابعی صورت گرفته است [7-9]. در تحقیقات مربوط به پیزوالکتریک، در پیدا کردن روابط و معادلات حاکم می توان به یانگ¹⁰ و باترا [10-12]، باترا و ویدولی [13] اشاره کرد. بررسی ارتعاشات آزاد و کمانش ورق های بیضوی نازک کامپوزیتی متقارن روی بستر الاستیک توسط کشمیری و همکاران [14] انجام شده که برای حل معادلات حاکمه از روش ریتز¹¹ استفاده کردهاند. ابوالقاسمی و همکاران [15] به تحلیل کمانش ورقهای مستطیلی تحت بار صفحهای غیر یکنواخت بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبهی اول پرداختهاند و برای ورق با شرایط مرزی تکیه گاه ساده از روش گالرکین¹² برای حل معادلات پایداری استفاده کردهاند. قاسمی و همکاران [16] رفتار کمانشی پوسته های کامپوزیتی تقویت شده مشبک مخروطی تحت بار محوری را بررسی نمودند و با استفاده از روش ریتز بار کمانشی آنها را محاسبه کردهاند. یکی از اثرات مهم لایههای پیزوالکتریک موسوم به اثر پیزو¹³ در دو حالت مدار بسته و مدار باز توسط وو¹⁴ [17] و همکارانش بررسی شد.

2- Kirchhoff 3- Shear Deformation Theory

- 4- Third-Order Shear Deformation Theory
- 5- Reddy
- 6- Shear and Normal Deformable Theory
- 7- Batra
- 8- Vidoli
- 9- Levy 10- Yang
- 11- Ritz
- 12- Galerkin 13- Piezo Effect
- 14- Wu

جامد خاص اطلاق می شود که نشان دهنده جفت شدگی خواص مکانیکی، الکتریکی تولید شده به وسیله اعمال تنشهای مکانیکی به کریستالهای دی الکتریک است. رفتاری که مواد پیزوالکتریک از خود نشان میدهند، ترکیبی از برهم کنش میان میدانهای الکتریکی و مکانیکی است. روابط متشکله سه بعدی برای یک لایه پیزوالکتریک همسانگرد عرضی که در راستای Z پلاریزه شده به صورت رابطه (3) نوشته می شود [19]،

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \\$$

¹⁻ Classical Plate Theory

¹⁵⁻ FG Power Law

مهندسی مکانیک مدرس، خرداد 1394، دوره 15، شماره 3

بیانگر بردار جابجایی الکتریکی¹, $\{E\}$ بیانگر بردار میدان الکتریکی، $\{D\}$ [²] ماتریس صلبیت ماده پیزوالکتریک²، [Ξ] ماتریس نفوذپذیری دی الكتريك مطلق³و [e]، عامل كويل الكترومكانيكي، ماتريس ثوابت شارژ ماده یپزوالکتریک⁴ مے باشند.

3 - معادلات تعادل و پايداري ورق

ورقی مستطیلی شکل به طول l_1 و عرض l_2 و ضخامت کل $(h+h_p)$ در نظر گرفته می شود. لایه میانی ورق از ماده هدفمند به ضخامت 2h ساخته شده که سطوح بالا و پایین آن با لایه پیزوالکتریک به ضخامت $h_{\!p}$ پوشانده شده است (شکل 1). در تئوری تغییر شکل برشی و عمودی ورق، میدان جابجایی به صورت رابطه (4) بیان می شود [20]،

 $u_i(x_1, x_2, z, t) = v_{\alpha}(x_1, x_2, z, t)\delta_{i\alpha} + w(x_1, x_2, z, t)\delta_{i\beta}$ (4) که در آن u_i مؤلفه های میدان جابجایی کلی جسم بوده، v_{α} و w_i به

ترتیب مؤلفههای جابجایی درون صفحهای و جابجایی عرضی هر نقطه دلخواه x_1 در فاصله Z از صفحه میانی می باشند. زیرنویس α نشان دهنده راستاهای z_1 و x_2 بوده و δ بیانگر تابع دلتای کرونیکر 5 است. در حالت کلی میدان x_2 جابجایی تابع مختصات مکان و زمان است ولی در تحلیل کمانش ورق، حالت استاتیکی در نظر گرفته می شود. از آنجا که ضخامت ورق نسبت به ابعاد دیگر کوچک است، می توان مؤلفه های میدان جابجایی را در راستای ۲ به صورت بسط چند جملهای نوشت. یکی از انواع بسط چند جملهای ها، بسط با استفاده از چند جملهای های لژاندر متعامد 6 است. اگر $L_{_{\!A}}$ چند جملهای لژاندر متعامد به صورت رابطه (5) باشد [20]:

$$\int_{-h-hp}^{h+hp} L_a(z)L_b(z)dz = \delta_{ab} \quad , \quad a,b = 0,1,2,...,K$$
(5)

که در آن a, b شمارندههای آزاد بوده و K مرتبهی تئوری مورد استفاده در تحقیق است. برای نمونه، 6 چندجملهای اول لژاندر بر اساس تعریف فوق به صورت رابطه (6) بيان مي شوند [20]:

$$L_{0}(z) = \sqrt{\frac{1}{h}}$$

$$L_{1}(z) = 2\sqrt{\frac{3}{h}} \left(\frac{z}{h}\right)$$

$$L_{2}(z) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{h}} \left[12\left(\frac{z}{h}\right)^{2} - 1\right]$$

$$L_{3}(z) = \sqrt{\frac{7}{h}} \left[-3\left(\frac{z}{h}\right) + 20\left(\frac{z}{h}\right)^{3}\right]$$

$$L_{4}(z) = \frac{3}{\sqrt{h}} \left[\frac{3}{8} - 15\left(\frac{z}{h}\right)^{2} + 70\left(\frac{z}{h}\right)^{4}\right]$$

$$L_{5}(z) = \sqrt{\frac{11}{h}} \left[\frac{15}{4}\left(\frac{z}{h}\right) - 70\left(\frac{z}{h}\right)^{3} + 252\left(\frac{z}{h}\right)^{5}\right]$$
(6)

با استفاده از چند جملهای های لژاندر میتوان مؤلفه های میدان جابجایی را به صورت رابطه (7) بسط داد [20]:

$$v_{\alpha}(x_{1}, x_{2}, z) = L_{a}(z)v_{\alpha}^{a}(x_{1}, x_{2}) , \quad \alpha = 1, 2, \quad a, b = 0, 1, 2, ..., K$$
$$w(x_{1}, x_{2}, z) = L_{a}(z)w^{a}(x_{1}, x_{2})$$
(7)

شکل 1 نمای شماتیک ورق

 $^{\prime}$ شمارندهی تکرار شوندهی a در معادلات (7) اندیس تکرار شونده است و به معنای جمع روی آن از صفر تا مرتبه تئوری است. درجه چند جملهای لژاندر نگاه داشته شده در بسط میدان جابجایی، مرتبه تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و عمودی را نشان میدهد. میتوان مشتق چند جملهای های لژاندر را در قالب ترکیب خطی از خود چند جملهای ها به صورت رابطه (8) نوشت:

$$L_a'(z) = D_{ab}L_b(z)$$

که در معادله فوق، D ماتریس ضرایب مشتق است. برای نمونه، برای تئوری مرتبهی 5 درایههای این ماتریس به صورت رابطه (9) می باشند [20]:

	0	0	0	0	0	0	
	√3	0	0	0	0	0	
	0	$\sqrt{15}$	0	0	0	0	
[<i>D</i>]=	√7	0	$\sqrt{35}$	0	0	0	
	0	3√3	0	3√7	0	0	
	$\sqrt{11}$	0	$\sqrt{55}$	0	3√11	0	

با مشتق گرفتن نسبت به Z و مختصات درون صفحهای از مؤلفههای جابجایی، رابطه (10) را خواهیم داشت:

$$v_{\alpha,\beta} = L_a v_{\alpha,\beta}^a, \quad v_{\alpha,z} = D_{ab} L_b v_\alpha^a, \quad w_{,\alpha} = L_a w_{,\alpha}^a, \quad w_{,z} = D_{ab} L_b w^a$$
(10)

در تحلیل پایداری ورق از روابط غیرخطی کرنش-جابجایی، به صورت

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^T) + \frac{1}{2} ((\vec{\nabla} \vec{u})^T \cdot \vec{\nabla} \vec{u})$$
(11)

با جایگذاری معادلات **(4)** در **(11)** و با استفاده از فرضیات فون کارمن⁸ برای روابط غیرخطی کرنش -جابجایی، مؤلفه های کرنش بر حسب جابجایی به صورت رابطه (12) حاصل می شوند:

$$\varepsilon_{ij} = L_a \left[\frac{1}{2} (v^a_{\alpha,\beta} + v^a_{\beta,\alpha} + L_b w^a_{,\alpha} w^b_{,\beta}) \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \frac{1}{2} (D_{ba} v^b_{\alpha} + w^a_{,\alpha}) (\delta_{i\alpha} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j\alpha}) + D_{ba} w^b \delta_{i3} \delta_{j3} \right]$$
(12)

با جایگذاری مقادیر کرنش بالا در رابطهی (2)، رابطهی مؤلفههای تانسور تنش بر حسب مؤلفههای میدان جابجایی برای یک ماده هدفمند تراکم پذیر به صورت رابطه (13) به دست میآید:

DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.3.11.1

رابطه (11) استفاده می شود [4]:

(9)

¹⁻ Electrical Displacement Vector

²⁻ Piezoelectric Stiffness Matrix 3- Absolute Dielectric Permittivity Matrix

⁷⁻ Dummy Index 8- Von-Carman Hypothesis

⁶⁻ Legendre's orthonormal polynomials

$M^{ab}_{\alpha\beta} \rightarrow M^{ab0}_{\alpha\beta} + M^{ab1}_{\alpha\beta}$

$$\boldsymbol{T}_{i}^{a} \rightarrow \boldsymbol{T}_{i}^{a0} + \boldsymbol{T}_{i}^{a1} \tag{17}$$

که عبارتهای با بالانویس 0 مربوط به وضعیت تعادل ورق و شامل ترمهای غیرخطی از جابجایی هستند و عبارتهای با اندیس 1 مربوط به وضعیت همسایگی تعادل است که شامل ترمهای خطی از مؤلفههای جابجایی میباشند. با جایگزین کردن روابط (17) در (14) و در نظر گرفتن معادلات تعادل می توان معادلات پایداری ورق را به صورت رابطه (18) بیان کرد:

$$\delta v_1^a : \qquad M_{11,1}^{a1} + M_{12,2}^{a1} - D_{ab} T_1^{b1} = 0$$

$$\delta v_2^a : \qquad M_{12,1}^{a1} + M_{22,2}^{a1} - D_{ab} T_2^{b1} = 0$$

$$\delta w^a : \qquad M_{11}^{ab0} w_{,11}^b + M_{22}^{ab0} w_{,22}^b + T_{1,1}^{a1} + T_{2,2}^{a1} - D_{ab} T_3^{b1} = 0$$
(18)

معادلات (18) معادلات پایداری ورق تحت بارگذاری لبهای درون صفحهای هستند. همچنین پارامترهای $M_{11}^{ab\,0}$ و $M_{22}^{ab\,0}$ میتوانند توسط نیروهای پیش-کمانشی که از شرایط تعادل به دست آمدهاند، جایگزین شوند. مشابه با معادلات (18) برای تعادل مکانیکی، مؤلفههای الکتریکی ماده

پیزوالکتریک باید رابطهی حاکم بر خود که معادله ماکسول³ نام دارد را در فرم انتگرالی رابطه (19) ارضا کنند [23]:

$$\int_{h}^{h+h_{p}} (D_{x,x} + D_{y,y} + D_{z,z}) dz + \int_{-h-hp}^{-h} (D_{x,x} + D_{y,y} + D_{z,z}) dz = 0$$
(19)

به منظور حل این معادلات، لازم است معادلات متشکله (روابط تنش-کرنش) مواد هدفمند و لایههای پیزوالکتریک برای حالات مدار باز و بسته را در روابط بالا جایگذاری کرده تا تمام مجهولات بر حسب مؤلفههای میدان جابجایی و تابع پتانسیل الکتریکی بیان گردد. در این صورت، به معادلات به دست آمده، معادلات حاکم بر پایداری ورق گفته می شود. با حل این معادلات بار متناظر با نقطه انشعاب يا بار بحراني كمانش تعيين مي شوند.

4- تحليل الكتريكي

چنانچه دو سر مدار به سطوح پتانسیل صفر وصل گردد، هیچگونه اختلاف يتانسيلي بين دو سطح الكترودها به وجود نمي آيد. به اين حالت اتصال كوتاه یا مدار بسته گفته میشود. توزیع تابع پتانسیل الکتریکی برای به دست آوردن میدان، در راستای ضخامت به صورت تابعی مرتبه دوم فرض میشود، که صحت آن به کمک روش اجزا محدود بررسی شده است. برای تغییرات یتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت تابع زیر پیشنهاد شده است [23]:

$$\Phi(x, y, z) = \begin{cases} \phi(x, y) \left[1 - \left(\frac{z - h - h_p / 2}{h_p / 2}\right)^2\right] & h \le z \le h + h_p \\ \phi(x, y) \left[1 - \left(\frac{-z - h - h_p / 2}{h_p / 2}\right)^2\right] & -h - h_p \le z \le -h \end{cases}$$
(20)

هنگامی که سطوح خارجی لایههای پیزوالکتریک در تماس با محیطی با نفوذپذیری پایین، مانند هوا و یا خلأ باشد، محیط همچون عایق الکتریکی عمل کرده و بردار جابه جایی الکتریکی در راستای عمود بر سطوح لایه های خارجی پیزوالکتریک صفر خواهد شد. به این حالت که مدار باز گفته می شود، سطوح داخلی به پتانسیل صفر متصل می شوند. تابع پتانسیل الکتریکی برای حالت مدار باز به صورت رابطه (21) حاصل می شود [23]:

$$\sigma_{\alpha\beta} = L_a \{ \lambda [(v_{1,1}^a + v_{2,2}^a + \frac{1}{2} L_b w_{,1}^a w_{,1}^b + \frac{1}{2} L_b w_{,2}^a w_{,2}^b) \delta_{\alpha\beta} + D_{ba} w^b \delta_{\alpha\beta}] + \mu (v_{\alpha,\beta}^a + v_{\beta,\alpha}^a + L_b w_{,\alpha}^a w_{,\beta}^b) \}$$

$$\sigma_{\alpha3} = \mu L_a (D_{ba} v_{\alpha}^b + w_{,\alpha}^a)$$

$$\sigma_{33} = L_a \{ \lambda [(v_{1,1}^a + v_{2,2}^a + \frac{1}{2} L_b w_{,1}^a w_{,1}^b + \frac{1}{2} L_b w_{,2}^a w_{,2}^b) + D_{ba} w^b \} + 2\mu D_{ba} w^b \}$$
(13)

برای به دست آوردن معادلات تعادل حاکم بر ورق مستطیلی، با توجه به حالت استاتیکی حاکم بر ورق و عدم وجود ترمهای زمانی، از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل بهره میبریم. طبق اصل حداقل انرژی پتانسیل برای یک سیستم در حال تعادل، تغییرات انرژی یتانسیل کل برابر صفر است [21]. با استفاده از این اصل معادلات تعادل می توانند به صورت رابطه (14) بیان شوند:

$$\delta v_1^a : M_{11,1}^a + M_{12,2}^a - D_{ab} T_1^b = 0$$

$$\delta v_2^a : M_{12,1}^a + M_{22,2}^a - D_{ab} T_2^b = 0$$

$$\delta w^a : (M_{11}^{ab} w_{,1}^b + M_{12}^{ab} w_{,2}^b + T_1^a)_{,1} + (M_{22}^{ab} w_{,2}^b + M_{12}^{ab} w_{,1}^b + T_2^a)_{,2} - D_{ab} T_3^b = 0$$
(14)

معادلات (14)، معادلات غیر خطی تعادل ورق در تئوری تغییر شکل برشی و عمودی میباشند. در این معادلات، ترمهای $M^a_{lphaeta,\ eta}$ و $M^a_{lphaeta,\ eta}$ با **Z**;^{*a*} ممانهای برون صفحهای مرتبه بالا هستند. به همین ترتیب، **2** ممان نیروهای جانبی از مرتبه a می باشد. این ترمها توسط انتگرال گیری تنشهای متناظر سرتاسر ضخامت به صورت رابطه (15) به دست میآیند:

$$M_{\alpha\beta}^{a} = \int_{-h-h_{p}}^{h+h_{p}} L_{a}\sigma_{\alpha\beta}dz \quad , \quad M_{\alpha\beta}^{ab} = \int_{-h-h_{p}}^{h+h_{p}} L_{a}L_{b}\sigma_{\alpha\beta}dz$$
$$T_{i}^{a} = \int_{-h-h_{p}}^{h+h_{p}} L_{a}\sigma_{i3}dz \quad , \alpha, \beta = 1, 2 \quad , i = 1, 2, 3$$
(15)

بر پایهی نتایج تغییرات بار بحرانی با مؤلفههای جابجایی، برای بررسی وضعیت پیش از کمانش¹ می توان از معادلات تعادل به شکل خطی استفاده کرد. منظور از تحلیل پایداری سیستم تعیین بار متناظر با نقطه انشعاب² یا نقطه دوشاخگی (نقطهای که ورق در آن از وضعیت پایدار به ناپایدار تغییر حالت میدهد) به وسیله حل معادلات دیفرانسیل خطی است [4،22]. به منظور تعیین معادلات دیفرانسیل خطی برای تعیین بار متناظر با نقطه انشعاب یا بار بحرانی کمانش از معیار تعادل همسایگی استفاده میشود. برای بررسی امکان وجود شکلهای تعادل همسایگی، طبق این معیار یک تغییر کوچک در مؤلفههای جابجایی داده و دو شکل همسایگی با جابجاییها، قبل و بعد از تغییر به صورت رابطه (16) در نظر گرفته می شود:

$$u \to u^{0} + u^{1}$$
 , $v \to v^{0} + v^{1}$, $w \to w^{0} + w^{1}$ (16)

که ((u^1, v^1, w^1) جابجاییهایی به اندازه دلخواه کوچک هستند و وضعیت (u^{0}, v^{0}, w^{0}) و (u, v, w) دو حالت دلخواهی در همسایگی وضعیت (u, v, w)تعادل میباشند. با جایگذاری معادلات (16) در روابط مربوط به کرنش و سیس قرار دادن روابط حاصل در روابط مربوط به منتجههای تنش و ممان، این عبارات شامل ترمهای خطی و غیرخطی (حالت تعادل و همسایگی) مؤلفه های جابجایی به صورت رابطه (17) می شوند،

$$M^{a}_{\alpha\beta} \to M^{a0}_{\alpha\beta} + M^{a1}_{\alpha\beta}$$

³⁻ Maxwell's Equation

¹⁻ Pre Buckling 2- Bifurcation Point

$$\Phi(x, y, z) = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{z - h - h_p / 2}{h_p / 2}\right)^2\right]\varphi + \left\{\frac{L_a(h + h_p)}{\Xi_{33}}\right\}e_{31} \cdot \left[v_{1,1}^a + v_{2,2}^a + \frac{1}{2}L_b(h + h_p)(w_{,1}^a w_{,1}^b + w_{,2}^a w_{,2}^b)\right] + \\ e_{33}D_{ba}w^b + \frac{4\varphi}{h_p}\right\}(z - h) \quad ; \quad h \le z \le h + h_p \\ \left[1 - \left(\frac{-z - h - h_p / 2}{h_p / 2}\right)^2\right]\varphi + \left\{\frac{L_a(-h - h_p)}{\Xi_{33}}\right\}e_{31} \cdot \\ \left[v_{1,1}^a + v_{2,2}^a + \frac{1}{2}L_b(-h - h_p)(w_{,1}^a w_{,1}^b + w_{,2}^a w_{,2}^b)\right] + \\ e_{33}D_{ba}w^b - \frac{4\varphi}{h_p}\right\}(z + h) \quad ; \quad -h - h_p \le z \le -h \end{cases}$$
(21)

میدان الکتریکی به صورت منفی گرادیان تابع پتانسیل الکتریکی تعریف میشود [24]:

$$= -\vec{\nabla} \Phi$$

 \vec{E}

5- تحليل كمانش

(22)

یک ورق مستطیلی با طول a و عرض d که تحت بارهای فشاری درون صفحه ای که به طور یکنواخت در دو جهت x و y توزیع شده اند همانند شکل 2 در نظر گرفته می شود. بنابراین نیروه ای برآیند پیش کمانش با استفاده از شرایط تعادل به صورت رابطه (23) به دست می آیند:

 $M_{11}^{a0} = -L_a(0)q_1$, $M_{22}^{a0} = -L_a(0)q_2$ (23) Δb cr \bar{l} cr q_2 p_1 q_1 q_2 q_1 Δb cr \bar{l} cr q_2 q_1 \bar{l} cr $\bar{$

واحد طول و در راستاهای x و y میباست. در معاد C (معاد C (را با تعریف مستقل بار وجود دارد. میتوان بارهای اعمالی در جهات x و y را با تعریف پارامتر بی بعدی به نام نسبت بارگذاری ¹ (R) به هم مرتبط ساخت، به طوری که مقدار صفر برای R متناظر با حالت بارگذاری تک محوره در جهات x و y و مقدار مثبت متناظر با حالت بارگذاری فشاری دو محوره در جهات x و y و مقدار منفی متناظر با فشار در جهت x و کشش در جهت y است.

به منظور حل معادلات حاکم، شرایط مرزی روی چهار لبه ورق مورد نیاز است. برای یک ورق با تکیهگاه ساده، شرایط مرزی در امتداد لبهها به صورت رابطه (24) نوشته میشود:

 $M_{11}^{a} = 0, \quad M_{21}^{a} = 0, \quad w^{a} = 0 \qquad ; \qquad x_{1} = 0, l_{1}$ $M_{22}^{a} = 0, \quad M_{12}^{a} = 0, \quad w^{a} = 0 \qquad ; \qquad x_{2} = 0, l_{2} \qquad (24)$



1- Loading Ratio

مهندسی مکانیک مدرس، خرداد 1394، دورہ 15، شمارہ 3

با در نظر گرفتن معادلات (18) و (19) و روش ناویر²، دیده می شود که پتانسیل الکتریکی در همه ی لبه ها صفر است. پس طبق رابطه (25) داریم: $\varphi=0$; $x_1=0, l_1 \& x_2=0, l_2$ (25) در شرط مرزی تکیه گاه ساده، جابجایی در راستای ضخامت ورق روی لبه ها و جابجایی در راستای موازی با آن لبه نیز برابر با صفر است، اما جابجایی در راستای عمود بر آن لبه مخالف صفر است. در حقیقت، به لبه های ورق تنها اجازه ی جابجایی در راستای عمود بر لبه داده می شود.

به منظور اعمال شرط مرزی تکیه گاه ساده و حل معادلات پایداری، از روش ناویر یا روش سری های دوگانه استفاده می شود. این روش، تابعیت میدان جابجایی از مختصات درون صفحهای را به صورت مجموعی از جملات هارمونیک در نظر می گیرد. این تابعیت باید به گونهای در نظر گرفته شود که شرایط مرزی ورق را ارضا کند. بنابراین، با توجه به شرایط مرزی (24) و (25)، مؤلفه های میدان جابجایی و تابع پتانسیل الکتریکی را به صورت رابطه (26) می توان نوشت [25]:

$$v_{1}^{a}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{v}_{1}^{amn} \cos\left(\frac{m\pi x_{1}}{l_{1}}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_{2}}{l_{2}}\right)$$

$$v_{2}^{a}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{v}_{2}^{amn} \sin\left(\frac{m\pi x_{1}}{l_{1}}\right) \cos\left(\frac{n\pi x_{2}}{l_{2}}\right)$$

$$w^{a}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{v}^{amn} \sin\left(\frac{m\pi x_{1}}{l_{1}}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_{2}}{l_{2}}\right)$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\phi}^{mn} \sin\left(\frac{m\pi x_{1}}{l_{1}}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_{2}}{l_{2}}\right)$$
(26)

که در آن، ضرایب $\widetilde{\varphi}^{mn}, \widetilde{\psi}^{amn}, \widetilde{\psi}^{amn}, \widetilde{\psi}^{amn}$ به ترتیب، مؤلفههای ثابت جابجایی در راستاهای z, x_2, x_1 و تابع پتانسیل الکتریکی می اشند. در این سریها، m و n تعداد جملات موجود در سری بوده و در مسئلهی کمانش ورق، بیانگر شمارهی مدهای کمانشی می باشند. با قرار دادن روابط (26) در معادلات (18) و (19) برای هر دو شرط مدار باز و بسته، معادلات با مشتقات جزئی به معادلات جبری تبدیل می شوند. حل این معادلات، به مسئله مقدار ویژهای منجر می شود که مقادیر ویژه آن همان بارهای کمانش می باشند و کوچکترین آنها بار بحرانی کمانش نام دارد.

معادلات حاکم بر پایداری ورق برای حالت مدار بسته به صورت زیر نوشته میشود:

$$\begin{split} & \int_{h}^{h+h_{p}} L_{b}dz \left[e_{15} \left(-D_{ab} \left(\frac{m \pi}{l_{1}} \right) \right) \right]_{1}^{amn} - \left(\frac{m \pi}{l_{1}} \right)^{2} \tilde{w}^{bmn} - \\ & D_{ab} \left(\frac{n \pi}{l_{2}} \right) \right]_{2}^{amn} - \left(\frac{n \pi}{l_{2}} \right)^{2} \widetilde{w}^{bmn} \right) + e_{31} D_{ab} \left(- \\ & \left(\frac{m \pi}{l_{1}} \right) \right]_{1}^{amn} - \left(\frac{n \pi}{l_{2}} \right) \left[\left(\frac{m \pi}{l_{2}} \right) \right]_{2}^{amn} \right] + e_{33} D_{ac} D_{cb} \left[\left(\frac{m \pi}{l_{1}} \right) \right]_{1}^{amn} - \left(\frac{m \pi}{l_{2}} \right)^{2} \left[\left(\frac{m \pi}{l_{2}} \right)^{2} \left(\frac{m \pi}{l_{2}} \right) \right]_{2}^{amn} \right] + e_{33} D_{ac} D_{cb} \left[\left(\frac{m \pi}{l_{1}} \right)^{2} \left(\frac{m \pi}{l_{2}} \right)^{2} \left(\frac{m \pi}{l_{1}} \right)^{2} \left(\frac{m \pi}{l_{1}} \right)^{2} \left(\frac{m \pi}{l_{1}} \right)^{2} \left(\frac{m \pi}{l_{1}} \right) \right) + \int_{-h-h_{p}}^{-h} L_{b} dz \left[e_{15} \cdot \left(-D_{ab} \left(\frac{m \pi}{l_{1}} \right) \right) \left(\frac{m \pi}{l_{1}} \right)^{2} \left(\frac{$$

2- Navier's Solution

DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.3.11.1

$$\begin{split} & \int_{-h}^{h} \mu L_{a} L_{b} dz \left(-(\frac{m\pi}{l_{1}}) (\frac{n\pi}{l_{2}}) r_{1}^{hmm} -(\frac{m\pi}{l_{1}})^{2} \cdot \right. \\ & \tilde{v}_{2}^{hmn} \right) + \int_{h}^{h+h_{p}} L_{a} L_{b} dz \left(-c_{12}' (\frac{m\pi}{l_{1}}) (\frac{n\pi}{l_{2}}) r_{1}^{hmn} \right. \\ & -c_{11}' (\frac{n\pi}{l_{2}})^{2} \tilde{v}_{2}^{hmn} + c_{13}' D_{cb} (\frac{n\pi}{l_{2}}) \tilde{v}_{1}^{cmn} \right) - \\ & \int_{h+h_{p}}^{h+h_{p}} L_{a} (\frac{z-h-h_{p}/2}{h_{p}/2}) dz \left(\frac{4e_{31}}{h_{p}} (\frac{n\pi}{l_{2}}) \tilde{\varphi}^{mn} \right) \\ & + \int_{-h-h_{p}}^{-h} L_{a} L_{b} dz \left(-c_{12}' (\frac{m\pi}{l_{1}}) (\frac{n\pi}{l_{2}}) \tilde{v}_{1}^{hmn} - c_{11}' \cdot \\ & \left(\frac{n\pi}{l_{2}} \right)^{2} \tilde{v}_{2}^{hmn} + c_{13}' D_{cb} (\frac{n\pi}{l_{2}}) \tilde{v}^{cmn} \right) + \int_{-h-h_{p}}^{-h} L_{a} \cdot \\ & \left(\frac{-z-h-h_{p}/2}{h_{p}/2} \right) dz \left(\frac{4e_{31}}{h_{p}} (\frac{n\pi}{l_{2}}) \tilde{\varphi}^{mn} \right) + \\ & \int_{h}^{h} \lambda L_{a} L_{b} dz \left(-(\frac{m\pi}{l_{1}}) (\frac{n\pi}{l_{2}}) \tilde{v}^{tmn} - (\frac{n\pi}{l_{2}})^{2} \tilde{v}^{bmn} \\ & + D_{cb} (\frac{n\pi}{l_{2}}) \tilde{v}^{cmn} \right) + \int_{h}^{h} \mu L_{a} L_{b} dz \left(-2(\frac{n\pi}{l_{2}})^{2} \tilde{v}^{bmn} \right) \\ & \tilde{v}^{cmn} \right) - D_{ab} \int_{h}^{h+h_{p}} L_{b} L_{c} dz c_{55}' (D_{a}) \tilde{v}^{cmn} \right) + D_{ab} \cdot \\ & \int_{h-h_{p}}^{h+h_{p}} L_{b} (\frac{z-h-h_{p}/2}{l_{2}})^{2} dz \left(e_{15} (\frac{n\pi}{l_{2}}) \tilde{\varphi}^{mn} \right) - \\ & D_{ab} \int_{-h-h_{p}}^{-h} L_{b} L_{c} dz c_{55}' (D_{d}) \tilde{v}^{cmn} \right) - D_{ab} \cdot \\ & \int_{h}^{h+h_{p}} L_{b} (z c_{15} (\frac{n\pi}{l_{2}}) \tilde{\varphi}^{mn} \right) + D_{ab} \cdot \\ & \int_{-h-h_{p}}^{-h} L_{b} dz \left(e_{15} (\frac{n\pi}{l_{2}}) \tilde{\varphi}^{mn} \right) - D_{ab} \cdot \\ & \int_{h}^{h} \mu L_{b} L_{c} dz c_{55}' (D_{d} \tilde{v}^{cmn} + (\frac{n\pi}{l_{2}}) \tilde{v}^{cmn}) - \\ & D_{ab} \int_{-h-h_{p}}^{-h} L_{b} dz \left(e_{15} (\frac{n\pi}{l_{2}}) \tilde{\varphi}^{mn} \right) + D_{ab} \int_{-h-h_{p}}^{-h} L_{b} \cdot \\ & \left(\frac{-z-h-h_{p}/2}{h_{p}/2} \right)^{2} dz e_{15} (\frac{n\pi}{l_{2}}) \tilde{\varphi}^{mn} \right) - D_{ab} \cdot \\ & \int_{h}^{h} \mu L_{b} L_{c} dz \left(D_{ab} \tilde{v}^{cmn} + (\frac{n\pi}{l_{2}}) \tilde{\varphi}^{cmn} \right) = 0 \\ \\ & M_{10}^{m} \tilde{w}_{11}^{m} + M_{20}^{m} \tilde{w}_{22}^{m} + \int_{h}^{h+h_{p}} L_{a} L_{a} dz c_{5}' (-D_{c}) \left(\frac{m\pi}{l_{p}}) \tilde{v}^{cmn} \right) - \\ & \left(\frac{e^{2}}{h_{p}/2} \right)^{2} dz \left(-e_{15} \left(\frac{m\pi}{l_{p}} \right)^{2} \tilde{\varphi}^{mn} \right) - \int_{h-h_{p}}^{h+h_{p}} L_{a} L_{a} dz \cdot \\ & \left(\frac{e$$

(29)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{n\pi}{l_{2}}\mathbf{y}^{2}\mathbf{x}^{mn}\right) + e_{33}D_{ac}D_{cb}\mathbf{y}^{ram}\right) - \int_{-h^{-h_{p}}}^{-h} dz [\Xi_{11} \cdot (-\left(\frac{n\pi}{l_{2}}\mathbf{y}\right)^{2}\tilde{\mathbf{q}}^{mn} - \left(\frac{m\pi}{l_{1}}\mathbf{y}^{2}\tilde{\mathbf{q}}^{mn}\right) - \frac{8}{h_{p}}\mathbf{z}}\mathbf{z}_{33}\tilde{\mathbf{q}}^{mn}\right) + \\ & \int_{-h^{-h_{p}}}^{-h} (\frac{-z - h - h_{p}/2}{h_{p}/2})^{2} dz \Xi_{11}(-\left(\frac{n\pi}{l_{2}}\mathbf{y}\right)^{2}\tilde{\mathbf{q}}^{mn} - (\frac{m\pi}{l_{1}}\mathbf{y}^{2}\tilde{\mathbf{q}}^{mn}) = 0 \end{aligned} (27) \\ & h^{h^{-h_{p}}} \left(\sum_{a} (-c_{11}^{a})\left(\frac{m\pi}{l_{1}}\mathbf{y}\right)^{2} v_{1}^{hmm} - c_{12}^{a}\left(\frac{m\pi}{l_{1}}\mathbf{y}\right)^{2} v_{2}^{hmm} + c_{13}^{a} L_{b} dz \left(-c_{11}^{a}\left(\frac{m\pi}{l_{2}}\mathbf{y}\right)^{2} dz \right) \\ & \left(\frac{4e_{31}}{h_{p}}\left(\frac{m\pi}{l_{1}}\mathbf{y}\right)^{2} v_{1}^{hmm} - c_{12}^{a}\left(\frac{m\pi}{l_{1}}\mathbf{y}\right)^{2} v_{2}^{hmm} + c_{13}^{a} D_{ab}\left(\frac{m\pi}{l_{1}}\mathbf{y}\right)^{2} \cdot (\frac{m\pi}{l_{1}}\mathbf{y})^{2} \cdot (\frac{m\pi}{l_{1}}\mathbf{y})^{2} dz \right) \\ & v_{1}^{hmm} - c_{12}^{a}\left(\frac{m\pi}{l_{1}}\mathbf{y}\right)^{2} v_{2}^{hmm} + c_{13}^{a} D_{ab}\left(\frac{m\pi}{l_{1}}\mathbf{y}\right)^{2} \cdot (\frac{m\pi}{l_{1}}\mathbf{y})^{2} \cdot (\frac{m\pi}{l_{1}}\mathbf{y})^{2} dz \right) \\ & + \int_{-h}^{h} L_{a}\left(\frac{-z - h - h_{p}/2}{h_{p}/2}\right) dz \left(\frac{4e_{31}}{h_{p}}\left(\frac{m\pi}{l_{1}}\mathbf{y}\right)^{2} v_{2}^{hmm}\right) \\ & + \int_{-h}^{h} L_{a}\left(\frac{-z - h - h_{p}/2}{h_{p}/2}\right) dz \left(\frac{4e_{31}}{h_{p}}\left(\frac{m\pi}{l_{1}}\right)^{2} v_{1}^{hmm}\right) \\ & + \int_{-h}^{h} L_{a}L_{b}dz \left(\frac{-(m\pi}{l_{1}}\right)^{2} v_{1}^{hmm} - (\frac{m\pi}{l_{1}}\mathbf{y})\left(\frac{m\pi}{l_{2}}\right)^{2} v_{1}^{hmm}\right) \\ & + \int_{-h}^{h} L_{a}L_{b}dz \left(\frac{2}{h_{1}}\left(\frac{-(\pi}{l_{1}}^{2}\right)^{2} dz \left(\frac{e_{13}}{l_{1}}\left(\frac{m\pi}{l_{1}}\right)^{2} v_{1}^{hmm}\right) \\ & + \int_{-h}^{h} L_{a}L_{b}dz \left(\frac{1}{2}\left(\frac{e_{11}{l_{1}}-e_{12}^{l_{2}}\right) \left(-(\frac{m\pi}{l_{1}}\right)^{2} v_{1}^{hmm}\right) \\ & + \int_{-h}^{h} L_{a}L_{b}dz \left(\frac{1}{2}\left(\frac{e_{11}{l_{1}}-e_{12}^{l_{2}}\right) \left(-(\frac{m\pi}{l_{2}}\right)^{2} dz \left(\frac{e_{13}}{l_{1}}\right) \left(-(\frac{m\pi}{l_{1}}\right)^{2} v_{1}^{hmm}\right) \\ & + \int_{-h}^{h} L_{a}L_{b}dz \left(\frac{1}{2}\left(\frac{e_{11}{l_{1}}-e_{12}^{l_{2}}\right) - D_{ab} \int_{h}^{h} L_{h}L_{b}dz \left(\frac{e_{13}}{l_{1}}\right) \left(-(\frac{m\pi}{l_{1}}\right)^{2} v_{1}^{hmm}\right) \\ & + \int_{-h}^{h} L_{a}L_{b}dz \left(\frac{1}{l_{1}}\left(\frac{\pi\pi}{l_{1}}\right)^{2} v_{1}^{hmm}\right) - D_{ab} \int_{h}^{h} L_{h}L_{h}dz \left(\frac{e_{13}}{l_{1}}\right) \left(\frac{\pi\pi}{l_{1}}\right)^{2} v_{1}^{hmm}\right) \\ & + \int_{-h}^{h} L_{$$

مهندسی مکانیک مدرس، خرداد 1394، دوره 15، شما*ر*ه 3

$$\begin{split} dz \left(-e_{15}\left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2 \tilde{\varphi}^{mn}\right) &- \int_{h}^{h+h_p} L_a \left(\frac{z-h-h_p/2}{h_p/2}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2 \cdot \\ w^{\tau bmn}\right) + \int_{-h-h_p}^{-h} L_a dz \left(-e_{15}\left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2 \tilde{\varphi}^{mn}\right) + \int_{-h-h_p}^{-h} L_a L_b dz c_{55}^{\prime} \left(-D_{cb}\left(\frac{n\pi}{l_2}\right)\right)^{\tau} 2^{mn} \left(-e_{15}\left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2 \tilde{\varphi}^{mn}\right) - \int_{-h-h_p}^{-h} L_a \left(\frac{-z-h-h_p/2}{h_p/2}\right)^2 \cdot \\ dz \left(-e_{15}\left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2 \tilde{\varphi}^{mn}\right) + \int_{-h}^{h} \mu L_a L_b dz \left(-D_{cb}\left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^{\tau} 2^{\tau} - \left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2 \cdot \\ w^{\tau bmn}\right) - D_{ab} \int_{h}^{h+h_p} L_b L_c dz \left(-c_{13}^{\prime}\left(\frac{m\pi}{l_1}\right) v_1^{\tau} - c_{13}^{\prime}\left(\frac{n\pi}{l_2}\right) v_2^{\tau} + \\ c_{33}^{\prime} D_{dc} w^{\tau dmn}\right) + D_{ab} \int_{h}^{h+h_p} L_b \left(\frac{z-h-h_p/2}{h_p/2}\right) dz \left(\frac{4e_{33}}{h_p} \tilde{\varphi}^{mn}\right) - \\ D_{ab} \int_{-h-h_p}^{-h} L_b L_c dz \left(-c_{13}^{\prime}\left(\frac{m\pi}{l_1}\right) v_1^{\tau} - c_{13}^{\prime}\left(\frac{n\pi}{l_2}\right) v_2^{\tau} + c_{33}^{\prime} D_{dc} \cdot \\ w^{\tau dmn}\right) - D_{ab} \int_{-h-h_p}^{-h} L_b \left(\frac{-z-h-h_p/2}{h_p/2}\right) dz \left(\frac{4e_{33}}{h_p} \tilde{\varphi}^{mn}\right) - \\ D_{ab} \int_{-h-h_p}^{-h} L_b L_c dz \left(-\left(\frac{m\pi}{l_1}\right) v_1^{\tau} - \left(\frac{n\pi}{l_2}\right) v_2^{\tau} + D_{dc} w^{\tau} dmn\right) \\ - D_{ab} \int_{-h}^{h} \lambda L_b L_c dz \left(-\left(\frac{m\pi}{l_1}\right) v_1^{\tau} - \left(\frac{n\pi}{l_2}\right) v_2^{\tau} + D_{dc} w^{\tau} dmn\right) \\ - D_{ab} \int_{-h}^{h} h_b L_b L_c dz \left(2D_{dc} w^{\tau} dmn\right) = 0 \end{split}$$

برای تئوری مرتبهی k ام، در به دست آوردن یک حل غیر بدیهی از سیستم، با برابر صفر قرار دادن دترمینان ضرایب ماتریس مؤلفههای جابجایی و تابع پتانسیل الکتریکی، بارهای کمانشی ورق که همان مقادیر ویژه دستگاه معادلات (27) تا (30) هستند، به دست میآیند. کوچکترین مقدار در میان این بارهای کمانشی به عنوان بار بحرانی کمانشی شناخته میشود.

6- اعتبار سنجی نتایج و روش

(30)

به منظور اعتبارسنجی نتایج به دست آمده از مرتبه 5 این تئوری، مقایسهای میان نتایج این کار و نتایج حاصل از تئوریهای دیگر ورق انجام شده است. بارهای بحرانی ورق هدفمند مستطیلی با نتایج تئوری کلاسیک ورق، مرجع [26] و نیز با نتایج تئوری برشی مرتبه 3، مرجع [6]، مقایسه شدهاند (جدول 1). در این مقایسه، نتایج به دست آمده هنگامی که ضخامت لایه پیزوالکتریک نزدیک به صفر قرار داده شده بود مقایسه می شوند. همچنین توانهای مختلف ماده هدفمند و بارگذاریهای مختلف مورد اعتبارسنجی قرار می گیرند. همان طور که از نتایج به دست آمده مشخص است همخوانی دقیقی بین تئوری برشی مرتبه 3 با نتایج این تحقیق وجود دارد که دقت حل حاض را اثبات می کند.

مقایسهای دیگر نیز بین نتایج این تحقیق با نتایج حاصل از تئوری

کلاسیک ورق، مرجع [4] و نیز تئوری برشی مرتبه سوم، مرجع [6] انجام شده است (جدول 2). دیده می شود برای یک ورق نازک (2h/b = 0.01) نتایج همخوانی خوبی دارند.

7 - نتایج عددی و بحث

بعد از راستی آزمایی حل حاضر به منظور تحلیل کمانش ورق، ورقی از جنس ماده هدفمندی از ترکیب آلومینیوم و آلومینا (Al/Al₂O₃) که مدول الاستیسیته فلز و سرامیک آن به ترتیب $E_m = 70$ GPa و $E_m = 380$ GPa و ضریب پواسون در کل ضخامت ثابت و برابر 0.3 v = 0 می باشند، در نظر گرفته شده است. خواص ماده پیزوالکتریک نیز از جنس PZT-4 و از جدول 3 انتخاب شده است [23].

مقادیر بارهای بحرانی کمانش بی بعد برای ورق ساخته شده از مواد هدفمند با لایههای پیزوالکتریک برای حالتهای مدار باز و مدار بسته، بارگذاریهای مختلف، توانهای مختلف مادهی هدفمند، نسبتهای مختلف ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت ماده هدفمند ($h_{p}/2h$) و نیز نسبتهای ابعادی (a/b) مختلف با استفاده از تئوری مرتبه پنجم برشی و عمودی در جدول 4 آمده است.

همان طور که در این جدول مشاهده میشود برای هر دو حالت مدار باز و مدار بسته، با افزایش توان ماده هدفمند و نیز افزایش نسبت طول به عرض ورق بار بحرانی کمانش کاهش مییابد و با افزایش نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت ماده هدفمند، مقادیر بار بحرانی کمانش افزایش مییابند. همچنین مقادیر بارهای بحرانی کمانش برای حالت مدار بسته نسبت به حالت مشابه مدار باز کوچکتر هستند. مطابق جدول 4 میتوان دید که بار بحرانی کمانش در حالت بارگذاری دو محوره کششی-فشاری (1- =r)، در مدهای بالاتر به دست میآید. نیز در ضخامت یکسان بیشترین مقدار بار بحرانی مربوط به بارگذاری دومحوره کششی-فشاری و کمترین مقدار مربوط به دو محوره فشاری است.

جدول 5 همگرایی بارهای بحرانی کمانش را برای نسبتهای ضخامت مختلف در تئوری حاضر نشان میدهد. در همان جدول، ملاحظه میشود که تئوری مرتبه اول بار بحرانی کمانش را برای نسبتهای ضخامت پایین به خوبی پیشبینی میکند، ولی در تخمین جواب در نسبت ضخامتهای بالا ناموفق است. در حالی که استفاده از تئوریهای مرتبه سوم و پنجم به جوابهای با دقت بسیار بالا برای ورقهای ضخیم منجر می شوند.

در جدول 6، با استفاده از تئوری مرتبه پنجم تغییر شکل برشی و

	D						
$\frac{b}{h} = 100$	$\frac{b}{h} = 80$	$\frac{b}{h} = 60$	$\frac{b}{h} = 40$	$\frac{b}{h} = 20$	$\frac{b}{h} = 10$		R
0/26724	0/52149	1/23422	4/14866	32/4722	239/1476	تحقيق حاضر	0
0/26725	0/52149	1/23427	4/14863	32/4721	239/148	[6]	
0/2675	0/5224	1/2383	4/1794	33/435	267/48	[25]	
0/21371	0/41716	0/98795	3/31889	25/977	191/3191	تحقيق حاضر	1
0/21371	0/41716	0/98787	3/31890	25/9778	191/319	[6]	
0/2140	0/4179	0/9907	3/4353	26/748	213/99	[25]	
0/35622	0/69528	1/64568	5/53185	43/2962	318/8572	تحقيق حاضر	-1
0/35622	0/69528	1/64568	5/53153	43/2961	318/856	[6]	
0/3566	0/6966	1/6511	5/5725	44/580	356/64	[25]	

 $(N = 1, \frac{a}{r} = 0.5)$ [26] و [6] و [6] و (16 مقایسه ی بار بحرانی کمانش p_{ar} (**MN**) برای ورق هدفمند با مراجع

عمودی برای نسبتهای طول به عرض مختلف، نتایج بار بحرانی کمانش ارائه و با یکدیگر مقایسه شدهاند. همان طور که مشاهده میشود با افزایش نسبت طول به عرض ورق بار بحرانی کمانش کاهش مییابد.

شکل S، بارهای کمانش بحرانی بی بعد بر حسب نسبت ضخامتها شکل h_p برای توانهای مختلف ماده هدفمند را نشان میدهد مشاهده می گردد که بار بحرانی کمانش با افزایش توان ماده هدفمند، کاهش می یابد.

در واقع، از آنجا که افزایش توان ماده هدفمند به معنای فلزی تر شدن ورق است، لذا صلبیت کلی ورق کاهش مییابد و در نتیجه، کاهش بار بحرانی دور از انتظار نخواهد بود. همچنین بار بحرانی کمانش برای ورقهای کامل سرامیکی به طور قابل ملاحظهای بزرگتر از بار بحرانی کمانش برای ورقهای ساخته شده از مواد هدفمند هستند (٥-٨).

شکل 4 بارهای بحرانی کمانش بی بعد بر حسب نسبت ضخامتها تحت انواع مختلف بارگذاری را نشان میدهد. دیده میشود که بارهای بحرانی کمانش برای یک نسبت ضخامت مشخص، هنگامی که 1-=R است بیشترین مقدار، و هنگامی 1=R است کمترین مقدار را دارا میباشند.

در شکل 5، اثر شرایط مرزی الکتریکی روی بارهای بحرانی کمانش بی بعد بررسی شده است. این نتایچ میرسانند که تغییر از شرط مدار بسته به مدار باز، همیشه با افزایش در بار بحرانی کمانش ورق همراه هستند.

برای ورق ساخته شده از مواد هدفمند با لایههای پیزوالکتریک در شکل 6، تغییرات بارهای بحرانی کمانش بی بعد را بر حسب نسبت ضخامتها برای سه ماده مختلف لایه پیزوالکتریک، رسم کردهایم. مقدار بار بحرانی کمانش بی بعد برای PZT-4 کمترین و برای PZT-6B بیشترین است. سه ماده لایههای پیزوالکتریک از لحاظ کیفی اثر مشابه اما از نظر کمی اثرهای متفاوتی روی بار بحرانی کمانش دارند.

شکل 7 اثر ضخامت لایههای پیزوالکتریک را روی بار بحرانی کمانش بی بعد نشان میدهند. نتایج آشکار میسازند که برای یک مقدار ثابت از نسبت

ضخامتها، مقدار بار بحرانی کمانش بی بعد وقتی که شرایط مرزی روی سطوح اصلی لایههای پیزوالکتریک مدار باز هستند، نسبت به وقتی که آنها مدار بسته هستند، بیشتر است. علاوه بر این، اثرات مکانیکی افزودن لایه پیزوالکتریک ، موسوم به اثرات سختی، با صفر قرار دادن ماتریس ثوابت شارژ ماده پیزوالکتریک [*a*] مورد بررسی قرار گرفته است. همان طور که ملاحظه میشود، در نسبت ضخامتهای کم، اثر الکتریکی لایهی پیزو الکتریک، موسوم به اثر پیزو، که به نحوه توزیع تابع پتانسیل در راستای ضخامت وابسته بوده، برای هر دو حالت مدار باز و مدار بسته ناچیز است [18]. در میماند ولی در حالت مدار باز این اثر نقش کلیدی در تعیین بار بحرانی میماند ولی در حالت مدار باز، این اثر نقش کلیدی در تعیین بار بحرانی کمانش ورق بازی می کند. لازم به ذکر است، اثر پیزو برای هر دو حالت مدار باز و بسته سبب افزایش بار بحرانی کمانش ورق می گردد.

ورق هدفمند با مراجع [4] و [6]، (6] (1.0 = 1, $\frac{2h}{L} = 0.01$

	b	b			
		P _{cr}		Ν	R
	[4]	[6]	تحقيق حاضر		
	1/373016	1/37379	1/372959	0	0
	0/68475	0/684428	0/684406	1	
	0/53432	0/534053	0/534039	2	
	0/68689	0/686508	0/68648	0	1
	0/34238	0/342214	0/342203	1	
	0/26716	0/267026	0/267019	2	
	2/86206 ^(*)	2/860035 ^(*)	2/8577340 ^(*)	0	-1
	1/42657 ^(*)	1/424877 ^(*)	1/4247860 ^(*)	1	
	1/11318 ^(*)	1/111760 ^(*)	1/1116790 ^(*)	2	
-					

(*)نشاندهنده مود های بالاتر کمانش است.

			[Z 3] 3	صوصيات موا	جدول د حد				
			ه هسته	مادەي لايا			الكتريك	ماده پيزو	خصوصيت
Ti-6A1-4V	آلومينيوم اكسيد	AI_2O_3	آلومينيوم	ألومينا	G-1195N	PZT-4	PZT-6B	BaTiO ₃	
105/7	320/24	_	70	380	63/0	_	_	_	E(GPa)
0/2981	0/2600	_	0/3	0/3	0/3	_	_	_	V
_	_	460/2	_	_	_	132	168	150	c ₁₁ (GPa)
_	_	174/7	_	_	_	71	84/7	65/3	c ₁₂ (GPa)
_	_	509/5	_	_	_	115	163	146	c ₃₃ (GPa)
_	_	127/4	_	_	_	73	84/2	66/2	c ₁₃ (GPa)
_	_	126/9	_	_	_	26	35/5	43/9	c ₅₅ (GPa)
_	_	_	_	_	44/37	-4/1	-0/9	-4/3	$e_{31}(Cm^{-2})$
_	_	_	_	_	50/18	14/1	7/1	17/5	$e_{33}(Cm^{-2})$
_	_	_	_	_	14/13	10/5	4/6	11/4	$e_{15}(Cm^{-2})$
_	_	_	_	_	15/30	7/124	3/60	9/87	$\Xi_{11}(nFm^{-1})$
_	_	_	_	_	15/00	5/841	3/42	11/16	$\Xi_{33}(nFm^{-1})$
4429	3750	4000	2707	3800	7600	7500	7550	5700	$ ho(\mathrm{kgm}^{-3})$

جدول 3 خصوصيات مواد [23]

باز	مدار	بسته	مدار	<u>h,</u> 2h	Ν	F
(a =0.5)	$\left(\frac{a}{b}=1\right)$	(a =0.5)	$\left(\frac{a}{b}=1\right)$			
13/3908	37/2214	13/3908	37/2214	0	0	(
9/0786	25/4411	8/8451	24/7346	0/1		
6/8475	19/401	6/4953	18/3077	0/2		
4/0374	12/2099	3/7062	10/9534	0/5		
13/6831	37/5694	13/6831	37/5694	0	1	
11/8479	32/5863	11/091	30/8872	0/1		
11/1256	27/286	10/0501	26/9117	0/2		
6/6021	13/007	6/0124	12/3257	0/5		
15/0055	37/7424	15/0055	37/7424	0	5	
12/293	33/42	11/6215	31/9117	0/1		
11/7153	28/3627	10/6354	27/4291	0/2		
7/1264	17/0605	6/7055	16/1509	0/5		
10/7126	18/6107	10/7126	18/6107	0	0	-
7/2629	12/7205	7/0761	12/3673	0/1		
5/478	9/7005	5/1962	9/1538	0/2		
3/2299	6/1049	2/0615	5/1767	0/5		
10/9464	18/7847	10/9464	18/7847	0	1	
9/4783	16/8931	8/8728	15/4436	0/1		
8/9292	15/643	6/4001	13/5651	0/2		
3/9255	7/1035	3/5051	6/4124	0/5		
11/4044	19/3712	11/4044	19/3712	0	5	
10/1129	17/4099	9/5419	16/9551	0/1		
9/4252	16/1813	8/6181	15/8714	0/2		
4/4073	8/7214	3/9941	8/2579	0/5		
31/3512 ^(*)	71/4177 ^(*)	31/3512 ^(*)	71/4177 ^(*)	0	0	-
20/7871 ^(*)	48/4196 ^(*)	20/3739 ^(*)	47/1743 ^(*)	0/1		
15/2129 ^(*)	36/5204 ^(*)	14/6387 ^(*)	34/6417 ^(*)	0/2		
7/6677 ^(*)	21/5329 ^(*)	7/3761 ^(*)	19/7667 ^(*)	0/5		
33/1905 ^(*)	72/9765 ^(*)	33/1905 ^(*)	72/9765 ^(*)	0	1	
27/2915 ^(*)	62/2792 ^(*)	25/8533 ^(*)	59/1524 ^(*)	0/1		
17/9307 ^(*)	59/3776 ^(*)	17/0215 ^(*)	53/6007 ^(*)	0/2		
8/5824 ^(*)	22/3294 ^(*)	7/0351 ^(*)	21/0045 ^(*)	0/5		
33/9264 ^(*)	73/8184 ^(*)	33/9264 ^(*)	73/8184 ^(*)	0	5	
29/8532 ^(*)	67/0974 ^(*)	28/1758 ^(*)	65/2007 ^(*)	0/1		
22/5957 ^(*)	61/7614 ^(*)	21/9061 ^(*)	59/1154 ^(*)	0/2		
10/3051 ^(*)	37/1259 ^(*)	8/3652 ^(*)	29/6971 ^(*)	0/5		

جدول 4 مقادیر بارهای بحرانی کمانش بی بعد (p _{er} = 9₁2⁴) برای بارگذاریها،
نسبتهای ابعاد و توانهای مختلف مادهی هدفمند (2.5 = <mark>4)</mark> b

(*) نشاندهنده مودهای بالاتر کمانش است.

ت	را ی نسبه (ش = q₁a²) ش	رهای بحرانی کمان	ول 5 ھمگرایی با	جد		
(<i>R</i> =	=1, N = 1, -	$\frac{2h}{b} = 0.1, \frac{a}{b} =$	ئوری حاضر (5 =	های مختلف در ت	ضخامت		
$K=5$ $K=3$ $K=1$ $\frac{h}{2i}$							
17	3/4529	179/7651	l 212	/7302	0		
22	7/1874	232/483	1 293	/8583	0/1		
30)3/4526	304/604	403	/6027	0/2		
65	6/8449	662/4971	662/4971 936/7627		0/5		
	(p _{cr} =	q₁a²) كمانش D *	یر بارهای بحرانی	جدول 6 مقاد			
(R = 1, N =	$1, \frac{2h}{b} = 0.1)$	به عرض مختلف	نسبتهای طول	برای		
a b	=5	a b =2	a =1	a =0.5	<u>h,</u> 2h		
173	/4529	207/399	325/8213	759/4673	0		
227	/1874	271/3432	424/6073	975/8024	0/1		
303	/4526	357/2473	556/1106	1254/5354	0/2		
656/	8449	777/5808	1180/6298	2451/7784	0/5		



شکل 5 تغییرات بار بحرانی کمانش بی بعد بر حسب نسبت ضخامتها، برای مدارهای باز و بسته (R=1, N=0.5, a/b=0.5)



مادهی پیزوالکتریک مختلف (R=1, N=2, a/b=1)





شکل 3 تغییرات بار بحرانی کمانش بی بعد بر حسب نسبت ضخامتها برای توانهای مختلف مادهی هدفمند و مدار باز (R=0, a/b=1)





factor of FGM plates using MLPG method, *Modares Mechanical engineering*, Vol. 13, pp. 138-150, 2013. (in Persian)

- [9] M. Raoufi, S. Jafari Mehrabadi, S. Satouri, Free vibration analysis of 2D-FGM annular sectorial moderately thick plate resting on elastic foundation using 2D-DQM solution, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 299-306, 2015. (In Persian)
- [10] J. S. Yang, R. C. Batra, conservation laws in linear piezoelectricity, Engineering fracture mechanics, Vol. 51, pp. 1041-1047, 1995.
- [11] J. S. Yang, R. C. Batra, A second-order theory for piezoelectric materials, J Acoust Soc Am, Vol. 97, pp. 280-288, 1995.
- [12] J. S. Yang, R. C. Batra, theory of electroded thin thermopiezoelectric plates subject to large driving voltages, *A J ADDI Phys*, Vol. 76, pp. 5411-5417, 1994.
- [13] R. C. Batra, S. Vidoli, Higher-order piezoelectric plate theory derived from a three dimensional variational principle, *AIAA Journal*, Vol. 40, pp. 91-104, 2002.
- [14] A. Keshmiri, A. Ghaheri, F. Taheri-behrooz, Buckling and vibration of symmetrically laminated composite elliptical plates resting on winklertype foundation subjected to initial in-plane stresses, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 1, pp. 19-26, 1393. (In Persian)
- [15] S. Abolghasemi, H. R. Eipakchi, M. Shariati, Analytical solution for buckling of rectangular plates subjected to non-uniform in-plane loading based on first order shear deformation theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 13, pp. 37-46, 2015 (In Persian) [16] M. A. Ghasemi, M. Yazdani, E. Soltan Abadi, Buckling behavior
- [16] M. A. Ghasemi, M. Yazdani, E. Soltan Abadi, Buckling behavior investigation of grid stiffened composite conical shells under axial loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 170-176, 2015 (In Persian)
- [17] N. Wu, Q. Wang, S. T. Quek, Free Vibration Analysis of Piezoelectric Coupled Circular Plate with Open Circuit, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, pp. 1126-36, 2010.
- [18] V. Birman, L. W. Byrd, Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 60, pp. 195–216, 2007.
- [19] N. Jalili, Piezoelectric-Based Vibration Control, pp. 131-133, Springer, 2010.
- [20] R.C. Batra, Higher-order shear and normal deformable theory for functionally graded incompressible linear elastic plates, *Thin-Walled Struct*, Vol. 45, pp. 974–982, 2007.
- [21] Q. Wang, S. T. Quek, C. T. Sun, X. Liu, Analysis of Piezoelectric Coupled Circular Plate, *Smart Material and Structures*, Vol. 10, pp. 229–239, 2001.
- [22] F. J. Reitz, J. R. Milford, R. D. Christy, Foundations of Electromagnetic Teory, pp. 424-430, 2003.
- [23] J. N. Reddy, Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics, John Wiley, New York, 1984.
- [24]D. O. Brush, B. O. Almorth, Buckling of bars plates and shells, McGraw-Hill, New York, 1975.
- [25] S. A. Sheikholeslami, A. R. Saidi, Vibration analysis of functionally graded rectangular plates resting on elastic foundation using higherorder shear and normal deformable plate theory, *Composite Structures*, Vol. 106, pp. 350–361, 2013.
- [26] R. Javaheri, M. R. Eslami, Buckling of functionally graded plates under inplane compressive loading, Z Angew Math Mech ZAMM, Vol. 82, No. 4, pp. 277-283, 2002.



شکل 7 تغییرات بار بحرانی کمانش بی بعد بر حسب نسبت ضخامتها، اثر پیزو برای حالت مدار باز و بسته (R=1, N=5, a/b=0.5)

8- مراجع

- J. N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, Journal of Applied Mechanics, Vol. 45, pp. 745–52, 1984.
- [2] R. C. Batra, S. Vidoli, Higher order piezoelectric plate theory derived from a three-dimensional variational principle, *AIAA Journal*, Vol. 40, pp. 91–104, 2002.
- [3] S. Shariat, M. R. Eslami, Buckling of functionally graded plates under inplane compressive loading based on the first order plate theory, *Fifth international conference on composite science and technology*, Sharjah, UAE, 2005.
- [4] M. Mohammadi, A. R. Saidi, E. Jomehzadeh, Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates, *Applied Composite Materials*, Vol. 17, pp. 81-93, 2010.
- [5] M. Mohammadi, A. R. Saidi, E. Jomehzadeh, A novel analytical approach for the buckling analysis of moderately thick functionally graded rectangular plates with two simply-supported opposite edges, *Mechanical Engineering Science*, Vol. 224, pp. 1831-1841, 2009.
- [6] M. Bodaghi, A. R. Saidi, Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, pp. 3659-3673, 2010.
- [7] M. H. Ebrahimi, M. M. Najafizadeh, Free vibration of two-dimensional functionally graded circular cylindrical shells on elastic foundation, *Modares Mechanical engineering*, Vol. 13, pp. 27-38, 2013. (in Persian)
- [8] A. Abdollahifar, M. R. Nami, Investigating the effect of angle between the material gradation direction and crack on mixed-mode stress intensity