



تحلیل ریاضی خمش غیرارتجاعی چرخه‌ای مقاطع لوله‌ای فولادی با مدل تنش-کرنش پیوسته

محمد معتمدی^۱، مصطفی زین الدینی^{۲*}، جواد فاخری^۳

۱- دانشجوی دکتری، مهندسی عمران، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

۲- استاد، مهندسی عمران، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

۳- مری، مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تهران، تهران

* تهران، صندوق پستی ۱۹۹۶۷۱۵۴۳۳ zeinoddini@kntu.ac.ir

چکیده

در این تحقیق اطلاعات حاصل از بررسی نظری رفتار نرم‌شوندگی / سخت‌شوندگی و پدیده خرابی خمیری پیش‌روندۀ اعضای فولادی با مقاطع لوله‌ای، تحت بارگذاری خمش خالص در محدوده غیرارتجاعی ارائه می‌شود. در این مطالعه برای حل مسئله، از تحلیل ریاضی استفاده شده است. پدیده‌های فیزیکی مورد توجه در تحلیل شامل رفتار غیرارتجاعی مصالح، بیضی‌شگی چرخه‌ای تجمیعی سطح مقطع (مشابه رفتار خوش) و رفتار خمیری چرخه‌ای شامل اثرات بوشینگر، رفتار نرم‌شوندگی / سخت‌شوندگی چرخه‌ای مصالح و پدیده خرابی خمیری پیش‌روندۀ است. روابط لنگر-احتنا بر پایه مقطع بیضی‌شده استخراج شده‌اند. رفتار مصالح در محدوده غیرخطی بر اساس معادله تنش-کرنش تورگارد لحاظ شده است که این امر موجب ساده‌سازی تحلیل شده است. یک مدل رفتاری ترکیبی شامل قانون سخت‌شوندگی پویای غیرخطی بعلاوه سخت‌شوندگی همسان‌گرد به منظور مدل‌سازی رفتار تنش-کرنش محوری چرخه‌ای در نظر گرفته شده است. تحلیل‌ها تحت بارگذاری خمش خالص تکرارشونده کم‌چرخه به صورت احتنا-کنترل انجام شده است. رشد چرخه به چرخه بیضی‌شدنگی مقطع با استفاده از قانون اصلاح شده خوش‌بایلی-بیوتون در محاسبات لنگر خشی آورده شده است پیش‌بینی‌های مدل با تعادل از داده‌های تجربی در دسترس که به صورت آزمایش یکسویه و چرخه‌ای در محدوده خمیری بر روی لوله‌های فولادی انجام شده مقایسه شده است و نتایج محاسبات همخوانی قابل قبولی با داده‌های آزمایشگاهی دارند.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۲۶ مرداد ۱۳۹۵

پذیرش: ۰۳ اذر ۱۳۹۵

ارائه در سایت: ۱۵ دی ۱۳۹۵

کلید واژگان:

لوله‌های فولادی

بارگذاری یکسویه و چرخه‌ای خمش خالص

Riftar Nرم شوندگی / سخت‌شوندگی چرخه‌ای

Closed form solutions for inelastic cyclic bending of steel tubulars using continuous stress-strain model

Mohammad Mo'tamedi¹, Mostafa Zeinoddini^{1*}, Javad Fakheri²

1- Department of Civil Engineering, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

2- Department of Civil and Environmental Engineering, Tehran University, Tehran, Iran.

* P.O.B. 1996715433, Tehran, Iran, zeinoddini@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 16 August 2016

Accepted 23 November 2016

Available Online 04 January 2017

Keywords:

Steel circular tubular

Monotonic and cyclic inelastic pure bending

Cyclic softening/ hardening behavior

ABSTRACT

The current paper deals with the cyclic softening/hardening and strain ratcheting behavior of circular steel tubes under repeated inelastic pure bending. A relatively simple mathematical solution is proposed to tackle the problem. Key physical features involved are the elastic after-effect, accumulated cyclic (creep type) ovalisation of the cross-section, cyclic plasticity including the Bauschinger effect, cyclic softening/hardening of the material and ratcheting effect. The moment-curvature formulation of the tube is derived in an ovalised configuration. Tvergaard stress-strain relation is used to describe the elasto-plastic stress-strain relationship of the material. This continuous nonlinear constitutive model considerably abridges the solution. A combined nonlinear kinematic/nonlinear isotropic hardening rule is used to describe the cyclic uniaxial stress-strain. The analysis of the low cycle pure inelastic bending of the tube is performed under a curvature-control regime. The cycle by cycle growth (creep type) in the ovalization of the cross-section is modeled using a modified version of the Bailey-Norton creep law. The model predictions are examined against a number of available test data on the inelastic monotonic and cyclic bending of tubes and reasonable agreements are observed.

قطر متوسط، D ، به ضخامت، t ، عضو لوله‌ای مورد استفاده در این سازه‌ها در

محدوده $80 \leq D/t \leq 15$ قرار دارد [۱]. در شرایط بهره‌برداری، این لوله‌ها

ممکن است در معرض بارگذاری چرخه‌ای^۱ خمشی، محوری یا ترکیبی از

اعضای لوله‌ای فولادی کاربری‌های فراوانی در سازه‌های مهندسی دارند. در

ساخت نیروگاه‌های اتمی، پالایشگاه‌ها، سکوهای دریایی، خطوط لوله خشکی

و خطوط لوله دریایی همگی از اعضای لوله‌ای استفاده می‌شود. عموماً نسبت

- مقدمه

¹ Cyclic

Please cite this article using:

M. Mo'tamedi, M. Zeinoddini, J. Fakheri, Closed form solutions for inelastic cyclic bending of steel tubulars using continuous stress-strain model, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 12, pp. 756-766, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

[10] در سال 2014 ضمن تأکید بر پیچیده و شدیداً غیرخطی بودن رفتار خمش خالص لوله‌های فولادی عنوان می‌دارند تعدادی رابطه ریاضی برای تحلیل رفتار یکسیوه در ادبیات فنی وجود دارد اما اغلب این روابط فاقد کاربرد طراحی هستند زیرا از نوع حل بسته نمی‌باشند. آن‌ها تلاش نموده‌اند تا یک رابطه ساده حل بسته با کاربرد آسان برای پیش‌بینی لنگر نقطه حدی لوله‌ای فولادی تحت خمش خالص ارائه دهند. دانیلو و همکاران [11] در 2015 یک رابطه صریح ریاضی برای پیش‌بینی ضربی اضافه ظرفیت تیرهای لوله‌ای فولادی تحت خمش خالص ارائه کردند. در سال 2016 چن و همکاران [12] بر پایه نظریه خمیری کرنش کل هنکی⁴ روشی تحلیلی برای تعیین ظرفیت خمش نهایی لوله‌های فولادی ارائه دادند که در آن سخت‌شوندگی کرنشی مصالح⁵ به صورت خطی-اتجاعی فرض شده است. بر اساس مطالعات پارامتری انجام‌شده در این تحقیق، سخت‌شوندگی کرنشی تأثیر عمدی در ظرفیت خمشی نهایی لوله‌های فولادی دارد.

از جمله محققین قبلى که در راستای ارائه حل بسته ریاضی برای رفتار غیراتجاعی اعضای لوله‌ای تحت خمش خالص چرخه‌ای تلاش کرده‌اند می‌توان از الچالاکانی [13] نام برد که نتایج مطالعات تحلیلی و آزمایشگاهی خود را در سال 2007 ارائه دادند. در این تحقیق رفتار مصالح به صورت دوخطی فرض شده و برای پاسخ غیراتجاعی اعضای لوله‌ای در یک چرخه کامل بارگذاری خمشی خالص یک حل بسته ریاضی ارائه شده است. همچنین بیضی‌شدنگی سطح مقطع لوله با استفاده از یک رابطه تجربی در راه حل تحلیلی لحاظ شده است. در سال 2008 چانگ و همکاران [14] تأثیر لنگر متوسط⁶ را بر پاسخ و شکل خرایی لوله‌های جدار نازک تحت لنگر خمشی چرخه‌ای مورد بررسی قرار دادند. طی این مطالعه تحلیلی و آزمایشگاهی با استفاده از ترکیب نظریه اندوکروئنیک⁷ و اصل کار مجازی روابطی بین لنگر، انحنای و بیضی‌شدنگی مقطع برای لوله‌های جدار نازک تحت بارگذاری خمشی چرخه‌ای ارائه شده است.

از نظر محققین قبلى رفتار لوله‌های فولادی تحت لنگر خمشی خالص موضوعی پیچیده و شدیداً غیرخطی است [10]. به این دلیل تحلیل‌های اجزاء محدود پیشرفتنه، علیرغم به کارگیری مدل‌های رفتاری جدید و پیچیده، هنوز در شبیه‌سازی توانمند خرایی خمیری پیش‌رونده در هر دو بعد سازه‌ای (شبیه‌سازی بیضی‌شدنگی مقطع یا وقوع چین خوردگی) و مصالح (جمع کرنش‌های خمیری) ناکارآمد هستند. به عنوان نمونه رحمان و همکاران [15] کارایی تعدادی از مدل‌های خمیری چرخه‌ای را برای شبیه‌سازی پاسخ خرایی خمیری پیش‌رونده لوله‌های فولادی تحت خمش تکرارشونده مورد ارزیابی قرار دادند. آن‌ها گزارش کردند که هیچ کدام از مدل‌ها توانسته‌اند در حد قابل قبولی تغییرات همزمان لنگر-چرخش، بیضی‌شدنگی مقطع و کرنش خمیری پیش‌رونده محیطی را شبیه‌سازی نمایند. آن‌ها نتیجه‌گیری کردند که علی‌رغم پیش‌رفته‌های قابل توجه در مدل‌سازی خمیری چرخه‌ای، روش‌های اجزای محدود هنوز توانایی لازم برای شبیه‌سازی پاسخ‌های چرخه‌ای سازه‌ای را ندارند. این به آن دلیل است که پارامترهای این مدل‌ها فقط بر اساس پاسخ‌های مصالح تعیین می‌شوند. زکوی و همکاران [16] و زهساز و همکاران [7] از روش اجزای محدود بر مبنای یک مدل سخت‌شوندگی ترکیبی ایزوتروپیک/کینماتیک برای شبیه‌سازی خرایی خمیری پیش‌رونده لوله‌های فولادی تحت لنگر خمشی خالص استفاده نمودند. نتایج کار آن‌ها نشان

آن‌ها قرار گیرند. تحت این شرایط، تجمع تغییرشکل‌ها و کرنش‌های خمیری می‌تواند منجر به کاهش کارایی و در نهایت واماندگی⁸ شود. تجمع کرنش ناشی از بارگذاری چرخه‌ای، خرایی خمیری پیش‌رونده⁹ نامیده می‌شود. این پدیده می‌تواند ناشی از تکرار فرآیندهای حرارتی یا بارگذاری چرخه‌ای مکانیکی باشد. پاسخ خرایی خمیری پیش‌رونده مصالح³ خصوصاً متأثر از تاریخچه تنش است که به بارگذاری خارجی و همچنین هندسه بستگی دارد. رفتارهایی از قبیل سخت‌شوندگی¹⁰/نمژشوندگی چرخه‌ای به طور ویژه به خرایی خمیری پیش‌رونده مرتبط است [2].

سیستم‌ها و اجزای لوله‌ای نیروگاه‌ها ممکن است به علت نیروهای ناشی از زمین‌لرزه یا سایر حوادث پیش‌بینی نشده تحت لنگرهای تکرارشونده، وارد محدوده خمیری شوند، طی چنین بارگذاری‌های چرخه‌ای، درصورتی که بارگذاری در یک جهت به صورت نیرو-کنترل باشد، آنگاه تجمع کرنش خمیری در آن جهت می‌تواند به خرایی خمیری پیش‌رونده منجر شود [3]. تداوم بارگذاری چرخه‌ای که توأم با خرایی خمیری پیش‌رونده است ممکن است به خرایی از نوع شکست خمیری یا خستگی در سازه منجر شده [4] و به علت تغییر شکل بیش‌از‌حد سازه دچار واماندگی شود [5].

تحقیق حاضر با رویکرد تحلیل ریاضی به مطالعه رفتار سخت‌شوندگی¹¹/نمژشوندگی چرخه‌ای و پدیده خرایی خمیری پیش‌رونده در مقاطع لوله‌ای فولادی تحت چرخه‌های خمش خالص در محدوده غیرخطی می‌پردازد. این موضوع پیش‌ازین به صورت تجربی و عددی توسط دیگر محققین مورد بررسی قرار گرفته است. در مطالعه اخیر تلاش شده است یک تحلیل ریاضی برای رفتار چرخه‌ای مقاطع لوله‌ای فولادی بهنسبت جدار ضخیم ($D/t \leq 30$) با در نظر گرفتن هر دو نوع خرایی پیش‌رونده خمیری سازه‌ای (هندسی) و مصالح ارائه گردد. راه حل ارائه شده با نتایج آزمایشگاهی موجود در ادبیات فنی مقایسه شده و تطابق خوبی مشاهده شده است.

2- مور ادبیات فنی

در تحلیل خرایی خمیری پیش‌رونده می‌توان از سه رویکرد تجربی، شبیه‌سازی عددی و تحلیل ریاضی استفاده کرد. چن و همکاران [6] مور جامعی از کارهای انجام‌شده توسط محققین با رویکرد تجربی و شبیه‌سازی عددی ارائه گرده‌اند. این مطالعه به خوبی نشان می‌دهد کارهای تجربی حجم عمدی‌های از پژوهش‌های قبلی را به خود تخصیص داده‌اند. مدل‌های پیشنهادشده برای رفتار مصالح و شبیه‌سازی عددی از نظر فراوانی به ترتیب در رتبه‌های بعدی قرار می‌گیرند. بر اساس مور ادبیات فنی که چن و همکاران [6] تا سال 2013 و زهساز و همکاران [7] تا سال 2016 نتیجه‌گیری گرده‌اند، هنوز راه حل بسته ریاضی دقیقی برای تحلیل رفتار خرایی خمیری پیش‌رونده لوله‌ها تحت چرخه‌های غیراتجاعی خمش در دسترس نیست. بر اساس نظر برادرفرد و تیپینگ [8] تا سال 2015 تنها چند مورد حل ریاضی روش بسته دقیق برای مسائل خرایی خمیری پیش‌رونده ارائه شده که عمدتاً ناظر به هندسه‌های بسیار ساده و حالات بارگذاری ایده‌آل هستند. در سال‌های اخیر حتی موضوع بسیار ساده‌تر ارائه حل بسته ریاضی برای خمش یکسیوه غیراتجاعی اعضای لوله‌ای از موضوعات موردنظر محققین بوده است. به عنوان نمونه می‌توان به کار پونایا و همکاران [9] در سال 2009 اشاره کرد. آن‌ها تلاش نموده‌اند یک رابطه حل بسته برای پیش‌بینی پاسخ لنگر-انحنای لوله‌های فلزی تحت خمش خالص یکسیوه ارائه دهند. شاهین و الچالاکانی

⁴ Hencky's total strain theory

⁵ Strain hardening material

⁶ Mean moment

⁷ Endochronic

¹ Failure

² Ratcheting

³ Material ratcheting

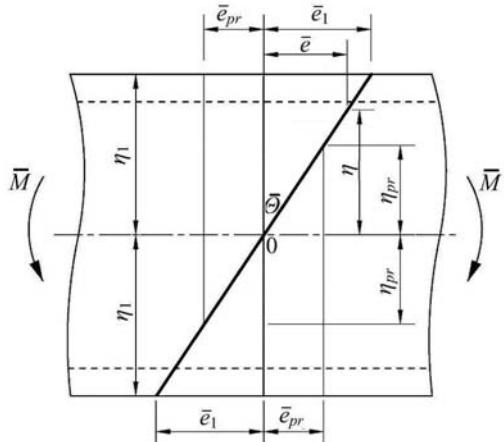


Fig. 1 Schematic strain profiles in a tubular section subject to inelastic monotonic pure bending

شکل ۱ طرح‌واره توزیع کرنش در یک عضو با سطح مقاطع لوله‌ی تحت خمش خالص ارجاعی- خمیری

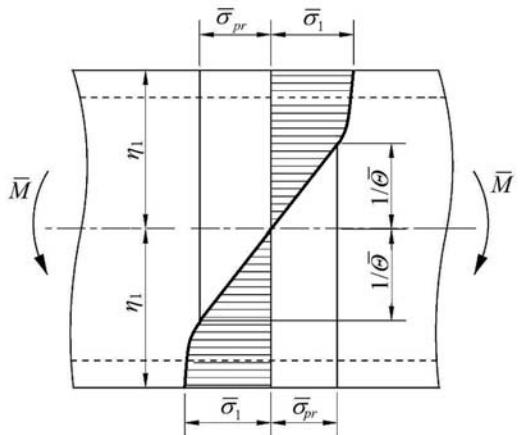


Fig. 2 Schematic stress profiles in a tubular section subject to inelastic monotonic pure bending

شکل ۲ طرح‌واره توزیع تنش در یک عضو با سطح مقاطع لوله‌ی تحت خمش خالص ارجاعی- خمیری

بر پایه فرضیه‌های درنظرگرفته شده، تحت خمش خالص، طرح‌واره^۵ توزیع کرنش در مقاطع عضو مطابق شکل ۱ و طرح‌واره توزیع تنش در مقاطع عضو مطابق شکل ۲ خواهد بود.

در شکل‌های ۱ و ۲، پارامترهای $\bar{\sigma}$ و \bar{e} به ترتیب تنش و کرنش کشنی‌ها فشاری در تارهای طولی تیر تحت خمش است که با استفاده از پارامترهای e_{pr} و σ_{pr} و به عنوان تنش حد تناسب و کرنش حد تناسب به صورت رابطه (۱) بی بعد شده‌اند:

$$\bar{\sigma} = \sigma / \sigma_{pr} \quad \text{and} \quad \bar{e} = e / e_{pr} \quad (1)$$

همچنین پارامترهای $\bar{\sigma}_1$ و \bar{e}_1 به ترتیب معرف تنش و کرنش بی بعد در دورترین تار از تار خنثی است و $\bar{\theta}$ ، زاویه نسبی چرخش سطح مقاطع است. در شکل‌های فوق، η_1 ، فاصله بی بعد هر تار از تار خنثی است که در رابطه (۷) تعریف شده است. $\eta_1 = 0.5\eta_{pr}$ فاصله بی بعد دورترین تار از تار خنثی و η_{pr} فاصله بی بعد دورترین تار ارجاعی از تار خنثی است.

طبق قانون تعادل در مقاطع یک تیر تحت بارگذاری خمش خالص M می‌توان نوشت:

⁵ Schematic

می‌دهد که مدل اجزای محدود مقدار دست بالایی را برای نرخ رشد کرنش خمیری پیش‌رونده در مقایسه با داده‌های آزمایشگاهی ارائه می‌دهد. تعدادی از محققین نیز مقالاتی در خصوص خرابی غیراتجاعی خمیری پیش‌رونده در مراجع داخل کشور منتشر نموده‌اند. از جمله در سال 2014 پیکانو و همکاران [17] در یک مطالعه آزمایشگاهی موضوع کمانش موضعی خطوط لوله دریایی دارای خوردگی تحت بارگذاری محوری متناوب را مورد بررسی قرار دادند. در سال 2016 شریعتی و همکاران [18] در مطالعه‌ای آزمایشگاهی رفتار پدیده خرابی خمیری پیش‌رونده و نرم‌شوندگی پوسته‌های جدار نازک فولادی زنگزن ZN-SS304L را تحت بارگذاری خمش خالص تناوبی مورد مطالعه قراردادند.

مرور ادبیات فنی ارائه شده در بالا به خوبی بیانگر آن است که در مقایسه با گزینه‌های پژوهشی آزمایشگاهی و هنوز کم‌دقیق عددی در شبیه‌سازی توأم رفتار لوله‌های فولادی تحت چرخه‌ای غیراتجاعی خمش در هر دو بعد سازه‌ای و مصالح، تحلیل ریاضی یک رویکرد مطرح در مواجهه با مسئله است. عمله کارهای تحلیل‌های ریاضی انجام شده در گذشته تحت بارگذاری یکسویه بوده است. راه حل‌های ریاضی برای تحلیل رفتار خرابی خمیری پیش‌رونده بسیار نادر می‌باشند. در اکثر مدل‌های ریاضی پیش‌نی رابطه تنش-کرنش به صورت دوخطی بوده و این مدل‌ها قابلیت شبیه‌سازی رفتارهای سخت‌شوندگی/ نرم‌شوندگی چرخه‌ای و پدیده خرابی خمیری پیش‌رونده را به صورت جامع نداشته‌اند. لذا توسعه راه حل‌های ریاضی - برای موضوع خرابی خمیری پیش‌رونده در مقاطع لوله‌ای فولادی در معرض خمش خالص غیراتجاعی چرخه‌ای دارای اهمیت است.

۳- تحلیل ریاضی رفتار غیرخطی مقاطع لوله‌ای تحت خمش خالص یکسویه

در این بخش رفتار یک عضو لوله‌ای فولادی نسبتاً جدار ضخیم $(D/t \leq 30)$ تحت بارگذاری خمش خالص یکسویه در حالت ارجاعی- خمیری به صورت تحلیلی بررسی می‌گردد. از نتایج تحلیل یکسویه در بخش بعدی برای تحلیل رفتار ارجاعی- خمیری^۱ لوله تحت خمش خالص چرخه‌ای استفاده خواهد شد. فرضیه‌های به کار رفته در این تحلیل به شرح زیر است:

- این تحلیل برای حالت قبل از وقوع هر نوع ناپایداری جزئی یا کلی² معتبر است.
- تحلیل انجام شده بر مبنای تنش‌های تک محوره در راستای محور لوله بوده و از تأثیر دیگر تنش‌ها صرف نظر شده است.
- مقاطع لوله تحت کرنش‌های ایجاد شده (کرنش‌های فراتر حد تناسب) مسطح باقی می‌ماند.
- رفتار مصالح فراتر حد تناسب³ از یک منحنی پیوسته بر اساس رابطه تورگاد⁴ تبعیت می‌کند.
- ضریب ارجاعی مصالح و منحنی تنش-کرنش تحت فشار و کشنی یکسان است.
- تحت خمش مقاطع لوله از حالت مدور خارج می‌شود مقاطع لوله پس از خمش به صورت یک بیضی در نظر گرفته شده است.
- بیضی شدگی مقاطع در حالت بارگذاری یکسویه بر اساس رابطه مرتع [19] و حالت بارگذاری تکرارشونده بر اساس رابطه پیشنهادی نگارندگان مقاله حاضر در نظر گرفته شده است.

¹ Elastoplastic

² Local or global instability

³ Proportional limit

⁴ Tvergaard

پیوسته بر اساس رابطه تورگارد (رابطه (10)) تعریف می‌شود:

$$\sigma = \sigma_{pr} \left(\frac{nEe}{\sigma_{pr}} + 1 - n \right)^{1/n} \quad (10)$$

که در آن، E ضریب ارجاعی مصالح است و n پارامتر سخت‌شوندگی است. با استفاده از رابطه (1)، رابطه (10) در حالت بی‌بعد به صورت رابطه (11) قابل بازنویسی است:

$$\bar{\sigma} = (n\bar{e} + 1 - n)^{1/n} \quad (11)$$

پارامتر E_T به عنوان شب خط مماس بر منحنی تنش-کرنش در محدوده سخت‌شوندگی تعریف می‌شود که در حالت بی‌بعد به صورت $G_T = E_T/E$ نوشته می‌شود و مقدار عددی G_T بر اساس داده‌های آزمایش کشش یکسویه بر روی نمونه استاندارد بدست می‌آید. بنابراین با حل معادله (12) پارامتر n قابل تعیین خواهد بود:

$$G_T = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{e}} = (n\bar{e}_1 + 1 - n)^{\frac{1}{n}-1} \quad (12)$$

فراتر از حد تناسب، برای تارهای واقع در ناحیه کششی و فشاری ناشی از خمش، مشابه حالت کشش ساده، از منحنی تنش-کرنش تورگارد مطابق رابطه (11) استفاده می‌شود که در ناحیه فشاری مقادیر تنش و کرنش منفی در نظر گرفته شده است:

$$\bar{\sigma}_1 = (n\bar{e} + 1 - n)^{1/n} \quad (13)$$

$$\bar{\sigma}_2 = -(-n\bar{e} + 1 - n)^{1/n} \quad (14)$$

بدیهی است با فرض اینکه حد تناسب، e_{pr} در کشش و فشار یکسان باشد و رفتار مصالح فراتر از حد تناسب در فشار و کشش به طور کامل مشابه باشد، محور تار خنثی منطبق بر محور تقارن مقاطع خواهد بود. بدون در نظر گرفتن این فرض، موقعیت تار خنثی از محور تقارن عضو منحرف می‌شود. بر اساس شکل 1 رابطه بین زاویه نسبی چرخش سطح مقاطع، $\bar{\Theta}$ ، و کرنش بی‌بعد شده، \bar{e} ، به صورت رابطه (15) است:

$$\bar{e} = \bar{\Theta} \cdot \eta \quad (15)$$

با جایگذاری رابطه (15) در رابطه‌های (13) و (14) خواهیم داشت:

$$\bar{\sigma}_1 = (n\bar{\Theta} \cdot \eta + 1 - n)^{1/n} \quad (16)$$

$$\bar{\sigma}_2 = -(-n\bar{\Theta} \cdot \eta + 1 - n)^{1/n} \quad (17)$$

قسمت میانی مقاطع تیر حالت ارجاعی دارد. در تارهای واقع در این محدوده، خواهیم داشت:

$$\bar{\sigma} = \bar{\Theta} \cdot \eta \quad (18)$$

با جایگذاری روابط (9) و (15) تا (18) در معادله (5) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \frac{256m}{\pi(m+1)^3(1-n^4)} \cdot \\ &\quad \left\{ \int_{-0.5}^{0.5} \left[(-n\bar{\Theta} \cdot \eta + 1 - n)^{\frac{1}{n}} \right] \eta \sqrt{1-4\eta^2} d\eta + \right. \\ &\quad \left. \int_{-0.5p}^{-1/\bar{\Theta}} \left[(-n\bar{\Theta} \cdot \eta + 1 - n)^{\frac{1}{n}} \right] \cdot \right. \\ &\quad \left. \eta \left(\sqrt{1-4\eta^2} - q \sqrt{1-\frac{4}{p^2}\eta^2} \right) d\eta + \right. \\ &\quad \left. \int_{-1/\bar{\Theta}}^{-1/0} [\bar{\Theta} \cdot \eta] \cdot \eta \left(\sqrt{1-4\eta^2} - q \sqrt{1-\frac{4}{p^2}\eta^2} \right) d\eta + \right. \\ &\quad \left. \int_{-0}^{0.5p} \left[(n\bar{\Theta} \cdot \eta + 1 - n)^{\frac{1}{n}} \right] \cdot \right. \\ &\quad \left. \eta \left(\sqrt{1-4\eta^2} - q \sqrt{1-\frac{4}{p^2}\eta^2} \right) d\eta + \right. \\ &\quad \left. \int_{0}^{0.5p} \left[(n\bar{\Theta} \cdot \eta + 1 - n)^{\frac{1}{n}} \right] \eta \sqrt{1-4\eta^2} d\eta \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} M &= M_{pr} \cdot \bar{M} \quad , \quad n_t = \frac{R'}{R} \\ R &= \frac{a+b}{2} \quad , \quad R' = \frac{a'+b'}{2} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\int_A \sigma dA = 0 \quad (2)$$

$$\int_A \sigma y dA = M \quad (3)$$

که در آن dA جزء سطح (یک نوار باریک از مقطع موادی محور x در فاصله y از محور تقارن و σ تنش در این جزء سطح است (شکل 3). با جایگذاری رابطه (1) در معادلات (2) و (3) خواهیم داشت:

$$\int_A \sigma_{pr} \cdot \bar{\sigma} dA = 0 \quad (4)$$

$$\int_A \sigma_{pr} \cdot \bar{\sigma} y dA = M \quad (5)$$

در حالت ارجاعی، محور تقارن بر محور تار خنثی مقطع منطبق است. خمش خالص در اعضای با مقطع لوله‌ای منجر به بیضی‌شدن مقطع می‌شود لذا معادلات رفتاری لوله برای حالت مقطع بیضی شده نوشته می‌شود که بدیهی است مقطع دایره (بدون بیضی‌شدن) حالت خاصی از حل مسئله محسوب می‌شود.

در شکل 2a، قطر بزرگتر، $2b$ قطر کوچکتر از بیضی بیرونی است همچنین $2a'$ قطر بزرگتر، $2b'$ قطر کوچکتر از بیضی داخلی است. با در نظر گرفتن m به عنوان نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک بیضی، p به عنوان نسبت قطر کوچک داخلی به قطر کوچک خارجی مقطع بیضی شده لوله و q به عنوان نسبت قطر بزرگ داخلی به قطر بزرگ خارجی مقطع بیضی شده لوله مطابق شکل 3 خواهیم داشت:

$$a = m \cdot b \cdot b' = p \cdot b \cdot a' = q \cdot a \quad (6)$$

مطابق شکل 3 فاصله هر تار از تار خنثی، y ، است که این پارامتر در محاسبات به صورت بی‌عدشه مطابق رابطه (7) در نظر گرفته می‌شود:

$$\eta = y/2b \quad (7)$$

برای عضو لوله‌ای در حالت بیضی شده، المان سطح، dA را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$dA = 2m\sqrt{b^2 - y^2} dy \quad b' \leq |y| \leq b \quad (8)$$

$$dA = 2m(\sqrt{b^2 - y^2} - q\sqrt{b^2 - \frac{1}{p^2}y^2})dy \quad |y| \leq b' \quad (8)$$

با جایگذاری رابطه (7) در رابطه (8) خواهیم داشت:

$$dA = 4mb^2\sqrt{1-4\eta^2}d\eta \quad (8)$$

$$dA = 4mb^2 \left(\sqrt{1-4\eta^2} - q\sqrt{1-\frac{4}{p^2}\eta^2} \right) d\eta \quad \begin{cases} 0.5p \leq |\eta| \leq p \\ |\eta| \leq 0.5p \end{cases} \quad (9)$$

در اینجا، رابطه تنش و کرنش فراتر از حد تناسب به صورت منحنی

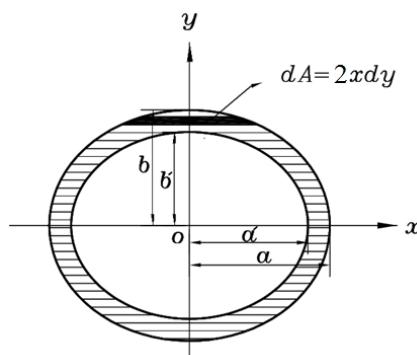


Fig. 3 The ovalised cross section of the tube.

شکل 3 سطح مقطع بیضی شده لوله

که در آن C_1 ، بر اساس تعریف یوادا [19]، پارامتری است که مرتبط با خصوصیات مصالح و نسبت لاغری (D/t) است و بر اساس داده‌های آزمایشگاهی تعیین می‌شود. توجه شود که رابطه (25) تحت بارگذاری خمش غیرارتجاعی، روندی توان دو برای "بیضی شدگی - انحنای" ارائه می‌دهد.

3-1-3- صحت‌سنجی مدل یک‌سویه

به منظور صحت‌سنجی رابطه (19)، از یکسری داده‌های آزمایشگاهی استفاده شده که این آزمایش‌ها توسط دیگر محققین بر روی لوله‌های فولادی انجام شده است. هندسه و خصوصیات مصالح بکار رفته در این آزمایش‌ها در جدول 1 آورده شده است. در این جدول، پارامترهای σ_y و n به ترتیب تنش حد نسبت و پارامتر سخت‌شوندگی مربوط به رابطه تورگارد است. قابل ذکر است که نتایج مورد استفاده از مرجع [23] بر اساس حل اجزاء محدود است.

شکل 4 مقایسه بین داده‌های تجربی مرجع [22] و نتایج بدست آمده از رابطه (25) به ازای $C_1 = 0.032$ را به صورت بیضی شدگی مقطع - انحنای ارائه می‌دهد. شکل 5 مقایسه بین داده‌های تجربی مرجع [22] و نتایج حاصل از تحلیل ریاضی بر اساس معادله (19) بر روی لوله‌های فولادی تحت بارگذاری یک‌سویه را نمایش می‌دهد. محورهای قائم و افقی این نمودار به ترتیب با عبارات $\kappa_0 = t/D_o$ و $M_0 = \sigma_{pr} D_o^2 t^2$ مطابق شکل 5 دو نمودار در قسمت اولیه، بر هم منطبق هستند و از یک نقطه به بعد با افزایش تأثیر بیضی شدگی مقطع، دو منحنی از هم جدا می‌شوند.

جدول 1 پارامترهای هندسی و خواص مصالح ارائه شده توسط محققین پیشین و مورد استفاده در صحت‌سنجی مدل یک‌سویه تحت بارگذاری یک‌سویه

Table 1 Geometric and material parameters in the previous experiments used for validation of the current monotonic analytical solution.

منابع	n	σ_y (MPa)	E (GPa)	D_o/t	t (mm)	D_o (mm)	نوع مصالح
[22]	12.9	280	201	25.7	1.232	31.69	فولاد زنگ‌زن 304
[23]	9.05	246	205	26	1.016	26.42	فولاد X52
[24]	21	512	207	35.7	0.889	31.78	فولاد کربنی 1018
[25]	∞	277.2	205	24.6	1.293	31.84	فولاد کربنی 1020

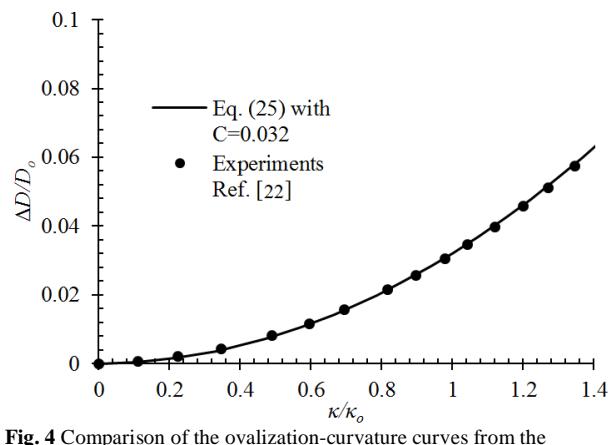


Fig. 4 Comparison of the ovalization-curvature curves from the experiments conducted by [22] with Eq. (25)

شکل 4 نمودار مقایسه منحنی بیضی شدگی - انحنای بر اساس داده‌های آزمایشگاهی مرجع [22] و نتایج بدست آمده از رابطه (25)

و لنگر خمشی خالص متناظر با تنش حد تناسب برابر است با:

$$M_{pr} = \frac{\sigma_{pr}}{32} \pi b^3 (m + 1)^3 (1 - n_t^4) \quad (21)$$

رابطه تنش-کرنش مورد استفاده در انتگرال‌های بدبست آمده در معادله خمش، قابل جایگذاری با معادله‌های تنش-کرنش بهصورت دوخطی یا روابط تجربی تنش-کرنش از قبیل لودویک¹، ووس²، تورگارد، رمبرگ-اسگود³ و ... یا تعریف رابطه تنش و کرنش بهصورت نقطه - نقطه است که بر اساس شکل تابع زیر انتگرال می‌توان از حل بسته ریاضی یا روش‌های عددی برای حصول جواب بهره برد. از آنجا که انتگرال‌های بدبست آمده در معادله خمش به ازای هر رابطه تنش-کرنش به شکل توابع چندجمله‌ای دارای حل بسته است در تحلیل جاری انتگرال مربوط به ناحیه ارجاعی دارای حل بسته می‌باشد ولی انتگرال‌های مربوط به ناحیه خمیری بهصورت نامعین قابل حل نیست لذا به منظور حصول حل بسته ریاضی ابتدا رابطه تنش-کرنش تورگارد به کمک سطح تیلور بسط داده شده و سپس بسط حاصل از آن با جایگذاری در معادله انتگرالی "لنگر-انحنای" تحلیل شده است که با توجه به طولانی بودن پاسخ‌ها فقط نتایج به دست آمده ارائه شده است.

معادله (19) بهصورت $\bar{M} = f(\bar{\epsilon})$ است که رابطه بین کرنش بی بعد شده، با لنگر خمشی بی بعد را بیان می‌کند. با در نظر گرفتن رابطه بین کرنش و انحنای⁴ بهصورت رابطه (22) معادله (19) قابل بازنویسی برحسب پارامتر انحنای، κ ، خواهد بود.

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \frac{\bar{\epsilon}_1 \cdot e_{pr}}{R} \quad (22)$$

مالحظه اثرات بیضی شدگی مقطع در تخمین پاسخ لنگر-انحنای از نکات بر جسته این کار بوده که در آن از یک رابطه نیمه تجربی برای لحاظ کردن اثر بیضی شدگی مقطع استفاده شده است. با فرض رفتار کاملاً ارجاعی لوله و تغییر شکل مقطع بهصورت بیضی کامل، بر پایه مطالعات کالادینه [20] و نستر و همکاران [21]، رابطه ساده‌شده بین بیضی شدگی مقطع و انحنای لوله بهصورت رابطه (23) تعیین می‌شود:

$$\frac{\Delta D_o}{D_o} = \frac{(1 - v^2)^2}{16} \left(\frac{\kappa}{\kappa_0} \right)^2 \quad (23)$$

که در آن D_o قطر خارجی لوله بدون درنظر گرفتن بیضی شدگی مقطع است، ΔD_o اختلاف قطر کاهش یافته به علت وقوع بیضی شدگی نسبت به D_o است و انحنای با جمله $\kappa_0 = t/D_o$ بی بعد شده است که در آن t ضخامت اولیه لوله است. قابل توجه است که در معادله (23) بیضی شدگی مقطع متناسب با محدود انحنای بوده و وابسته به ضریب ارجاعی مصالح نیست. بر اساس داده‌های آزمایشگاهی بر روی لوله‌های فلزی تحت بارگذاری یک‌سویه غیرارتجاعی، کابریاکیدس و همکاران [22] گزارش کردند که رابطه بین بیضی شدگی مقطع با انحنای روندی درجه دو دارد. یوادا [19] رابطه نیمه تحلیلی بیضی شدگی مقطع - انحنای برای لوله‌ها تحت خمش خالص غیرارتجاعی را بهصورت رابطه (24) ارائه کرد:

$$\frac{\Delta D_o}{D_o} = C e_1^2 \quad (24)$$

با در نظر گرفتن رابطه e_1 و انحنای بهصورت رابطه (22)، رابطه بیضی شدگی - انحنای بی بعد "لوله بهصورت رابطه (25)" قابل بازنویسی است.

$$\frac{\Delta D_o}{D_o} = C_1 \left(\frac{\kappa}{\kappa_0} \right)^2 \quad (25)$$

¹ Ludwik

² Voce

³ Ramberg-Osgood

⁴ Curvature

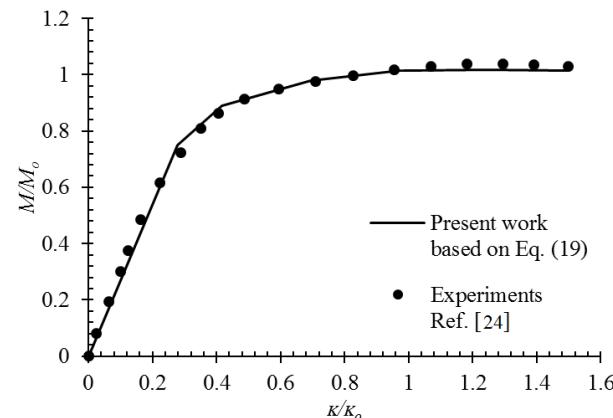


Fig. 8 Comparisons between the moment-curvature responses in experiments conducted by [24] and the analytical solution in the current study.

شکل 8 مقایسه پاسخ لنگر- انحنای بر اساس داده‌های آزمایشگاهی مرجع [24] و حل ریاضی ارائه شده

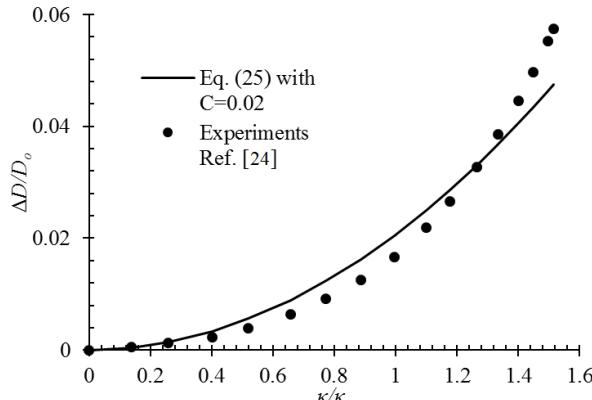


Fig. 9 Comparison of the ovalization-curvature curves from the experiments conducted by [24] with Eq. (25).

شکل 9 نمودار مقایسه منحنی بیضی شدگی- انحنای بر اساس داده‌های آزمایشگاهی مرجع [24] و نتایج بهدستآمده از رابطه (25)

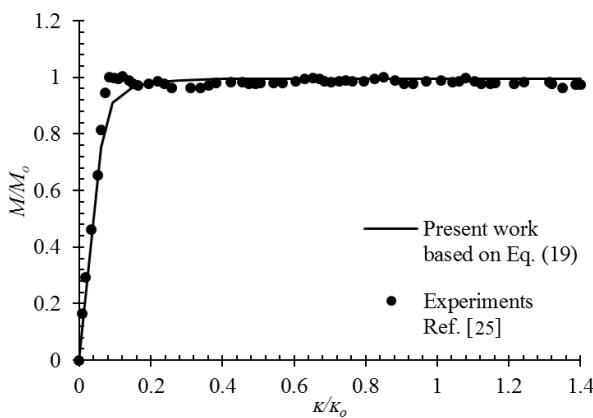


Fig. 10 Comparisons between the moment-curvature responses in experiments conducted by [25] and the analytical solution in the current study.

شکل 10 مقایسه پاسخ لنگر- انحنای بر اساس داده‌های آزمایشگاهی مرجع [25] و حل ریاضی ارائه شده

مشاهده می‌شود سازگاری مناسبی بین حل ریاضی ارائه شده و داده‌های آزمایشگاهی بر روی لوله‌های فولادی تحت بارگذاری خمش خالص یکسویه غیر ارجاعی وجود دارد.

شکل‌های 6 تا 11 مقایسه منحنی‌های لنگر- انحنای و بیضی شدگی- انحنای مراجع [23], [24] و [25] را با نتایج تحلیل ریاضی حاضر نشان می‌دهد.

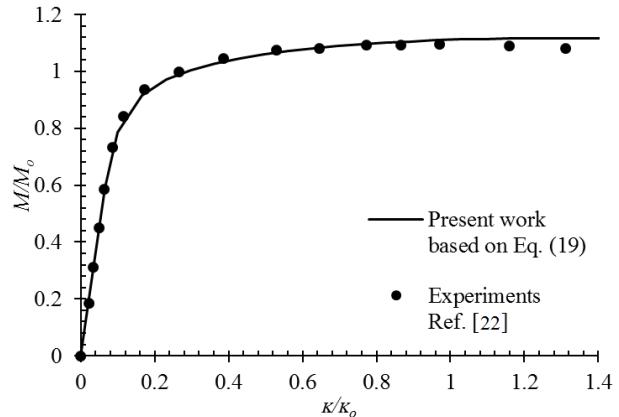


Fig. 5 Comparisons between the moment-curvature responses in experiments conducted by [22] and the analytical solution in the current study.

شکل 5 مقایسه پاسخ لنگر- انحنای بر اساس داده‌های آزمایشگاهی مرجع [22] و حل ریاضی ارائه شده

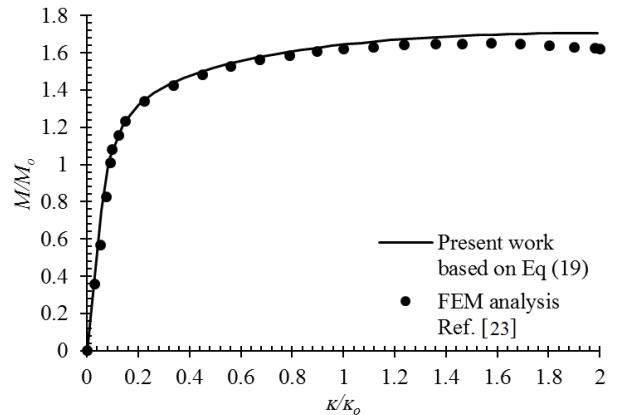


Fig. 6 Comparisons between the moment-curvature responses in experiments conducted by [23] and the analytical solution in the current study.

شکل 6 مقایسه پاسخ لنگر- انحنای بر اساس داده‌های آزمایشگاهی مرجع [23] و حل ریاضی ارائه شده

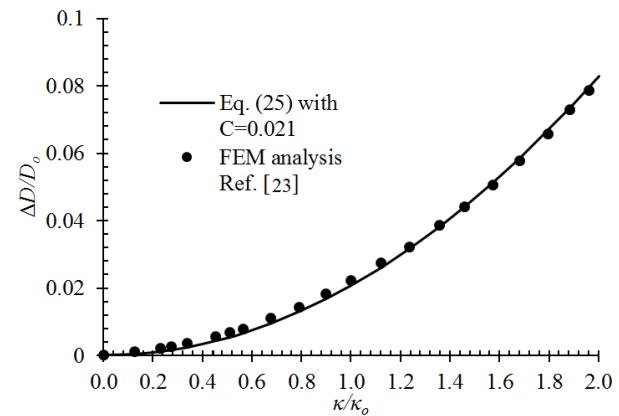


Fig. 7 Comparison of the ovalization-curvature curves from the experiments conducted by [23] with Eq. (25).

شکل 7 نمودار مقایسه منحنی بیضی شدگی- انحنای بر اساس داده‌های آزمایشگاهی مرجع [23] و نتایج بهدستآمده از رابطه (25)

نقطه پایانی مرحله بارگذاری است که در آن کرنش به مقدار از پیش تعريف شده e_0 می‌رسد. تنش در نقطه B، σ_0 است که بر اساس میزان سخت‌شوندگی و تنش حد تناوب از رابطه تورگاد تعیین می‌شود. در شکل 12، در نیم‌چرخه اول (مسیر BDE) نقطه B به عنوان مرکز سیستم مختصات جدید $S - e$ در نظر گرفته می‌شود که برای تعريف رابطه تنش - کرنش در نیم‌چرخه اول ($k=1$) از این سیستم مختصات استفاده می‌شود. در اینجا پارامتر e معرف کرنش تکرارشونده و پارامتر S معرف تنش تکرارشونده است. مسیر تنش - کرنش نیم‌چرخه اول از نقطه B شروع می‌شود که در آن خط BD موازی خط OA ناحیه ارجاعی در بارگذاری یکسویه است. نقطه D بر اساس رفتار نرم‌شوندگی یا سخت‌شوندگی تکرارشونده مصالح تعريف می‌شود.

تغییرات چرخه‌ای اندازه سطح تسليم در هر نیم‌چرخه، با پارامتر ایزوتوپیک R_k تعريف می‌شود که این پارامتر وابسته به کرنش خمیری تجمعی در هر نیم‌چرخه k است (p_k) و با استفاده از قانون سخت‌شوندگی ایزوتوپیک غیرخطی به صورت معادله (26) تعريف می‌شود:

$$R_k = Q(1 - e^{-b_p p_k}) \quad (26)$$

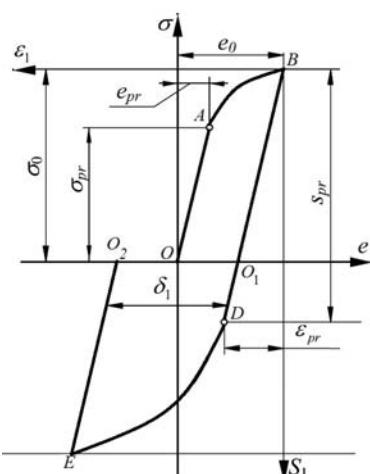
که پارامتر Q حداکثر تغییر در اندازه سطح تسليم از شروع بارگذاری تا رسیدن به چرخه پایدار و پارامتر b_p نزد پایدار شدن چرخه‌ها است. Q و b_p پارامترهای سخت‌شوندگی مصالح است که بر اساس داده‌های بدست‌آمده از آزمایش محوری تکرارشونده بر روی نمونه‌های استاندارد تعیین می‌شود. در معادله (26) پارامتر p_k به صورت تقریبی با استفاده از رابطه (27) تعیین می‌شود که توسط مرجع [26] ارائه شده است:

$$p_k = \frac{kp_0}{2} \quad (27)$$

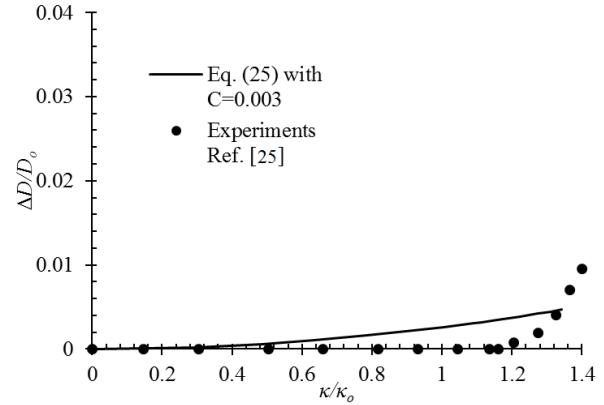
در رابطه (27) p_0 عرض اولین حلقه تنش و کرنش است (فاصله O_1 تا O_2 در شکل 12). با ترکیب قانون سخت‌شوندگی ایزوتوپیک غیرخطی (معادله (26)) و قانون سخت‌شوندگی کینماتیک، خواهیم داشت:

$$\bar{S}_{pr,k} = 2 + \frac{Q(1 - e^{-b_p p_k})}{\sigma_{pr}} \quad (28)$$

$$\bar{S}_{pr,k} = \frac{S_{pr,k}}{\sigma_{pr}} \quad (29)$$



شکل 12 تعریف رفتار ارجاعی در نیم‌چرخه اول و دوم



شکل 11 نمودار مقایسه منحنی بیضی شدگی - اعضا بر اساس داده‌های آزمایشگاهی

مرجع [25] و نتایج بدست‌آمده از رابطه (25)

4- بررسی تحلیلی مقطع لوله‌ای تحت خمش تکرارشونده

در این بخش رفتار ارجاعی - خمیری عضو لوله‌ای فولادی تحت بارگذاری خمش خالص تکرارشونده به صورت تحلیلی بررسی می‌گردد. به این منظور معادلات بدست آمده در بخش 3 در خصوص رفتار لوله تحت خمش خالص یکسویه، برای تحلیل رفتار لوله تحت بارگذاری خمش خالص تکرارشونده توسعه داده شده است.

تاریخچه تنش و رفتار خمیری چرخه‌ای ایجاد می‌کند که مدل رفتاری مناسبی به منظور شبیه‌سازی رفتار نرم‌شوندگی و سخت‌شوندگی، کرنش خمیری تجمعی چرخه به چرخه و تغییرات حلقه هیسترزیس¹ تنش و کرنش، در نظر گرفته شود. در این بخش به لحاظ قابل حل بودن معادلات، یک مدل ساده‌شده برای رفتار هیسترزیس مصالح انتخاب شده است که رابطه تنش-کرنش در هر نیم‌چرخه² بارگذاری را تعريف می‌کند. با تعريف رابطه تنش-کرنش در هر نیم‌چرخه و تعیین میزان بیضی شده مقطع، پاسخ غیرخطی لنگر-انحنا لوله در هر نیم‌چرخه مشابه حل ارائه شده در بخش 3 برای بارگذاری یکسویه قابل تحلیل خواهد بود و با تکرار حل در نیم‌چرخه‌های متولی معادلات حاکم بر رفتار عضو لوله‌ای فولادی تحت بارگذاری خمش خالص تکرارشونده در محدوده غیرارتجاعی به دست می‌آید. حل ارائه شده حالت غیرخطی مصالح، اثرات هیسترزیس و غیرخطی بودن هندسی به علت بیضی شدگی مقطع را در نظر می‌گیرد. به منظور صحبت‌سنگی مدل ریاضی ارائه شده از یکسری داده‌های آزمایشگاهی استفاده شده که هموارانی قابل قبول بین داده‌های آزمایش و نتایج مدل حاضر مشاهده شده است.

4-1- روابط تنش - کرنش تکرارشونده محوری مصالح

در هر نیم‌چرخه، رابطه تنش - کرنش در ناحیه ارجاعی به صورت خطی و فراتر از ناحیه ارجاعی با استفاده از رابطه تورگاد تعريف شده است. شکل 12 طرح‌واره نمودار تنش-کرنش تکرارشونده را برای مصالح لوله نشان می‌دهد. رابطه تنش - کرنش در نیم‌چرخه ابتدایی (مسیر OAB) که در حقیقت فاز بارگذاری یکسویه است) به کمک سیستم مختصات $\sigma - e$ تعريف می‌شود که پارامتر k شماره نیم‌چرخه بارگذاری است. مسیر OAB که در حقیقت فاز ارجاعی - خمیری یکسویه (کشش) را نشان می‌دهد. نقطه B نشان دهنده

¹ Hysteresis
² Semi-cycle

غیرخطی با سخت‌شوندگی همسانگرد غیرخطی برای شبیه‌سازی رفتارهای سخت‌شوندگی یکسویه، اثر بوشینگر، نرم‌شوندگی و سخت‌شوندگی چرخه‌ای و اثرات پدیده خرابی خمیری پیش‌روندۀ معتبر است هرچند میزان دقت این مدل‌ها در شبیه‌سازی هر چه دقیق‌تر پدیده‌های چرخه‌ای جای بحث و بررسی دارد.

برای فرمول‌بندی مسئله در نیم‌چرخه دوم ($k=2$) سیستم مختصات $S - \bar{e}$ را به اندازه 180 درجه دوران داده و به مرکز مختصات نقطه E منتقل می‌کنیم. مسیر تنش-کرنش در نیم‌چرخه‌های بعدی مشابه شرایط توصیف شده برای نیم‌چرخه اول در نظر گرفته می‌شود. نقطه شروع هر نیم‌چرخه بر اساس تحلیل نیم‌چرخه قبلی‌اش تعیین می‌شود. هر نیم‌چرخه با یک مسیر ارجاعی شروع می‌شود که شبیه آن برابر شبیه ناحیه ارجاعی نیم‌چرخه صفرم (ضریب ارجاعی) است. ناحیه ارجاعی هر نیم‌چرخه بر اساس رابطه (28) تعیین می‌شود. برای اکثر فولادها حد تسليم در کشش و فشار تقریباً یکسان است، لذا می‌توان نوشت:

$$\bar{e} = \frac{\bar{\theta}}{2}, \quad \bar{\varepsilon}_k = \frac{\bar{\theta}}{2} \quad (34)$$

بنابراین معادله انتگرالی (19) را برای خمش خالص تناوبی می‌توان به صورت معادله (35) نوشت:

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \frac{256m}{\pi(m+1)^3(1-n^4)} \cdot \\ &\left\{ \int_{-0.5}^{-0.5p} \left[-\lambda_k \left(-\frac{n\bar{\theta}\eta}{\lambda_k} + 1 - n \right)^{\frac{1}{n}} \right] \eta \sqrt{1-4\eta^2} d\eta + \right. \\ &\int_{-0.5p}^{-1/\bar{\theta}} \left[-\lambda_k \left(-\frac{n\bar{\theta}\eta}{\lambda_k} + 1 - n \right)^{\frac{1}{n}} \right] \cdot \\ &\eta \left(\sqrt{1-4\eta^2} - q \sqrt{1-\frac{4}{p^2}\eta^2} \right) d\eta + \\ &\int_{-1/\bar{\theta}}^{1/\bar{\theta}} [\bar{\theta} \cdot \eta] \cdot \eta \left(\sqrt{1-4\eta^2} - q \sqrt{1-\frac{4}{p^2}\eta^2} \right) d\eta + \\ &\left. \int_{1/\bar{\theta}}^{0.5p} \left[\lambda_k \left(\frac{n\bar{\theta}\eta}{\lambda_k} + 1 - n \right)^{\frac{1}{n}} \right] \eta \sqrt{1-4\eta^2} d\eta \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

در رابطه (35) پارامتر λ_k از رابطه (36) به دست می‌آید:

$$\lambda_k = 2 + \frac{Q(1-e^{-bp_k(2n\bar{\varepsilon}_k-1)})}{\sigma_{pr}} \quad (36)$$

به منظور دستیابی به پاسخ دقیق‌تر "لنگر - اتحنا" در لوله‌ای فولادی تحت خمش خالص غیرارتجاعی چرخه‌ای لازم است مسیر بیضی‌شدگی مقاطع لوله در هر نیم‌چرخه از بارگذاری مشخص باشد. در اینجا بر اساس فیزیک مسئله و روابط پیشنهادی دیگر محققین یک فرمول برای مسیر "بیضی‌شدگی - اتحنا" تحت خمش خالص غیرارتجاعی چرخه‌ای ارائه می‌شود. یک لوله ارجاعی تحت خمش خالص بیضی‌شدگی برگشت‌پذیر از خود نشان می‌دهد که مسیرهای بارگذاری و باربرداری بر روی هم قرار می‌گیرد و مقطع لوله پس از باربرداری حالت دایره کامل به خود می‌گیرد. تحت بارگذاری خمش خالص تکرارشونده مسیرهای "بیضی‌شدگی - اتحنا" در تمام نیم‌چرخه‌ها بر روی هم قرار می‌گیرد و هیچ بیضی‌شدگی پیشرونده یا پسمند در لوله‌ای ارجاعی مشاهده نمی‌شود.

که σ_{pr} تنش حد تناسب در نیم‌چرخه صفرم بارگذاری (بارگذاری یکسویه) است و $S_{pr,k}$ تنش حد تناسب در نیم‌چرخه G_k است. با استفاده از رابطه (30) مسیر غیرخطی رابطه تنش و کرنش، فراتر از تنش حد تناسب تعريف می‌شود.

$$\bar{\sigma} = \bar{S}_{pr,k} \left(\frac{n\bar{\varepsilon}}{\bar{S}_{pr,k}} + 1 - n \right)^{\frac{1}{n}} \quad (30)$$

مشابه حالت بارگذاری یکسویه، پارامتر G_k به عنوان شبیه خط مماس بر منحنی تنش-کرنش بی‌بعدشده در محدوده سخت‌شوندگی تعریف می‌شود. می‌توان G_k را با استفاده از یک قانون توانی ساده در نیم‌چرخه‌های مختلف تعريف کرد. با اعمال اصلاحاتی از مرجع [27]، پارامتر G_k به صورت رابطه (31) تعريف می‌شود:

$$\begin{aligned} G_k &= \frac{1}{1+X_1 k^{\xi}} && \text{برای نیم‌چرخه‌های فرد} \\ G_k &= \frac{1}{1+X_2(k-1)^{\xi}} && \text{برای نیم‌چرخه‌های زوج} \end{aligned} \quad (31)$$

که در آن، ξ ثابت مصالح است که بر پایه نرخ تغییرات شبیه خط مماس بر منحنی تنش-کرنش بی‌بعدشده در محدوده سخت‌شوندگی نسبت به تعداد نیم‌چرخه‌ها تعیین می‌شود. و X_1 و X_2 به صورت زیر تعريف می‌شوند:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{G_1} - 1 \\ X_2 &= \frac{1}{G_2} - 1 \end{aligned} \quad (32)$$

که در آن G_1 و G_2 شبیه خط مماس بر منحنی تنش-کرنش بی‌بعدشده در محدوده سخت‌شوندگی در نیم‌چرخه اول و دوم است. G_1 و G_2 را می‌توان بر اساس آزمایش تنش-کرنش محوری تکرارشونده تعیین کرد. با معلوم بودن تنش حد تناسب در هر نیم‌چرخه مطابق رابطه (28) و شبیه خط مماس بر ناحیه سخت‌شوندگی در هر نیم‌چرخه، G_k ، با استفاده از مشتق رابطه (30) مقدار پارامتر n در هر نیم‌چرخه، از حل معادله (33) قابل محاسبه خواهد بود.

$$G_k = \left(\frac{n\bar{\varepsilon}_1}{\bar{S}_{pr,k}} + 1 - n \right)^{\frac{1}{n}-1} \quad (33)$$

با تعیین پارامتر n و مختصات تنش حد تناسب، مطابق رابطه (30)، تنش در نقطه E (نقطه انتهای نیم‌چرخه اول) قابل تعیین خواهد بود. قابل ذکر است که شرایط بارگذاری خمی تکرارشونده اتحنا-کنترل کرنش در نقطه E مقدار از پیش تعیین شده در نظر گرفته می‌شود.

مدل رفتاری مورد استفاده در کار حاضر، به صورت مدل سخت‌شوندگی پویای غیرخطی است که با سخت‌شوندگی همسانگرد غیرخطی ترکیب شده است. در مدل سخت‌شوندگی پویای غیرخطی اندازه سطح تسليم ثابت بوده و به واسطه جایجایی سطح تسليم تغییرات غیرخطی تنش-کرنش در ناحیه خمیری، شبیه سخت‌شوندگی در هر نیم‌چرخه و همچنین نقطه شروع تسليم در هر نیم‌چرخه تعیین می‌شود. در مدل حاضر با استفاده از رابطه توگارد رفتار تنش-کرنش در ناحیه خمیری به صورت غیرخطی است و تغییرات شبیه سخت‌شوندگی در هر نیم‌چرخه به صورت تغییرات n (پارامتر سخت‌شوندگی رابطه توگارد) ایجاد می‌شود که محاسبه n بر اساس شبیه سخت‌شوندگی در هر چرخه G_k انجام می‌شود (رابطه (33)). همچنین نقطه شروع تسليم در هر نیم‌چرخه بر اساس موقعیت و اندازه دایره تسليم تعريف می‌شود (رابطه (28)). با ترکیب مدل سخت‌شوندگی پویای غیرخطی با سخت‌شوندگی همسانگرد غیرخطی امکان تغییرات اندازه سطح تسليم جهت شبیه‌سازی رفتارهای سخت‌شوندگی و نرم‌شوندگی مهیا می‌شود (جمله دوم رابطه (28)). بر اساس مرجع [26] مدل ترکیبی سخت‌شوندگی پویای

جدول 2 پارامترهای مربوط به خصوصیات مصالح فولاد 1018 بر اساس رابطه تورگارد [24] ارائه شده در مرجع [24]

Table 2 Mechanical properties of the carbon steel 1018 based on Tvergaard relation in tests conducted by [24]

	E (Gpa)	σ_{pr} (MPa)	n
منحنی تنش-کرنش تکرارشونده	207	320	6.64
منحنی حلقه پایدار هیسترزیس	207	960	17.7

1018 تحت کرنش ثابت 0.02 ± 0.02 به صورت منحنی‌های هیسترزیس شکل 13 شبیه‌سازی می‌شود.

با در نظر گرفتن مقادیر پارامترهای $C_1=0.018$, $m_1=2$, $n_1=0.95$ و $C_2=0.006$, در شکل 14 منحنی‌های بیضی‌شده‌گی مقطع برحسب انحنای لوله بر اساس داده‌های آزمایشگاهی مرجع [24] و نتایج بهدست آمده از رابطه (38) ترسیم شده است.

به منظور بررسی دقیق‌تر میزان انطباق در منحنی در شکل 14، نمودار Q-Q مقادیر بیضی‌شده‌گی مقطع در انحنای صفر در هر نیم‌چرخه برای داده‌های آزمایشگاهی مرجع [24] و مقادیر بهدست آمده از رابطه (38) در

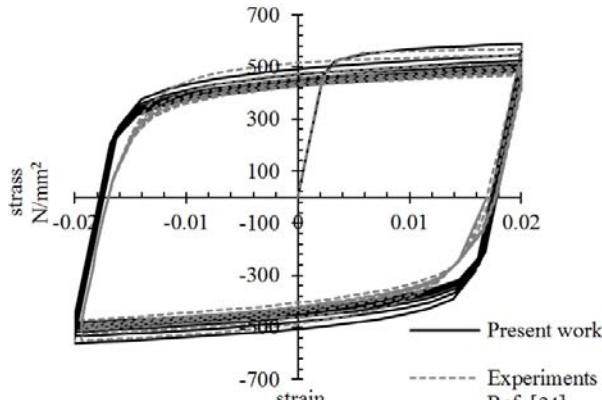


Fig. 13 Comparisons between the predictions from the cyclic material model in the current study with the cyclic coupon test data from [24]

شکل 13 مقایسه بین روابط تنش و کرنش حل تحلیلی حاضر و داده‌های آزمایشگاهی مرجع [24]

[24]

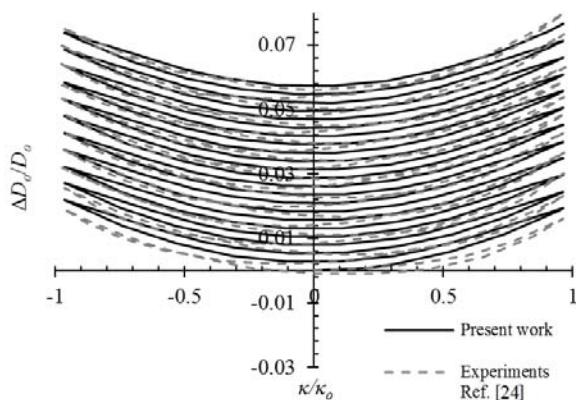


Fig. 14 Comparisons between the ‘ovalization-curvature’ loops from Eq. (38) with the corresponding experimental data from [24]

شکل 14 مقایسه منحنی‌های بیضی‌شده‌گی مقطع برحسب انحنای لوله برای داده‌های آزمایشگاهی مرجع [24] و مقادیر بهدست آمده از رابطه (38)

در یک لوله غیرارتجاعی، ابتدا مسیر "بیضی‌شده" - انحنای "بارگذاری یکسویه منطبق بر مسیر "بیضی‌شده" - انحنای "لوله ارجاعی رشد می‌کند و با شروع رفتار غیرارتجاعی لوله دو منحنی از هم جدا می‌شوند و نرخ بیضی‌شده‌گی مقطع در مقایسه با لوله ارجاعی کاهش می‌یابد. طی بارگذاری مصالح ابتدا رفتار ارجاعی از خود نشان می‌دهند بنابراین نرخ کاهش بیضی‌شده‌گی مقطع در ابتدا بالا بوده و در ادامه فرآیند بارگذاری، رفتار مصالح به صورت غیرارتجاعی بوده و به تبع آن نرخ کاهش بیضی‌شده‌گی کاهش می‌یابد. به علت اینکه مسیرهای بارگذاری و باربرگذاری در لوله غیرارتجاعی بر هم منطبق نیست بیضی‌شده‌گی پسماند در $\kappa=0$ به وجود می‌آید. تحت چرخه‌های انحنای-کنترل بیضی‌شده در هر نیم‌چرخه، بالاتر از بیضی‌شده‌گی در نیم‌چرخه قبلی قرار می‌گیرد، بدین ترتیب بیضی‌شده‌گی پیش‌رونده در نیم‌چرخه‌های متوالی اتفاق می‌افتد و مقدار بیضی‌شده‌گی در $\kappa=0$ نیز به طور پیش‌رونده با تکرار هر نیم‌چرخه افزایش می‌یابد. در کل می‌توان این گونه جمع‌بندی کرد که مسیر بیضی‌شده‌گی مقطع لوله در هر نیم‌چرخه نسبت انجنا (مشابه حالت بارگذاری یکسویه) رفتاری درجه دو دارد و با تکرار چرخه‌ها، به علت وقوع بیضی‌شده‌گی پسماند در هر نیم‌چرخه، مسیر بیضی‌شده‌گی لوله رفتاری پیش‌رونده از خود نشان می‌دهد، به عبارت دیگر مسیر بیضی‌شده‌گی لوله ترکیبی از دو رفتار درجه دو نسبت به انحنای و رفتار پیش‌رونده است.

چانگ و پان [28] در توصیف رفتار پیش‌رونده بیضی‌شده مقطع لوله، رابطه (37) را بین حداقل بیضی‌شده‌گی در هر چرخه، ($\Delta D_0/D_0$) در $\kappa=0$ (دامنه بی‌بعد انحنای چرخه‌ای K_c/K_0 و تعداد چرخه N) ارائه دادند:

$$\frac{\Delta D_0}{D_0} = C_2 (\kappa_c/\kappa_0)^{m_1} N^{n_1} \quad (37)$$

که در آن، κ_c ، حداقل انحنای لوله تحت آزمایش خمش چرخه‌ای، m_1 و n_1 ثابت‌های ماده و C_2 ضریب بی‌بعد وابسته به نسبت D_0/t و خصوصیات مصالح است. با ترکیب رفتار درجه دو بیضی‌شده‌گی لوله نسبت به انحنای (رابطه (25)) با رفتار پیش‌رونده بیضی‌شده‌گی (رابطه (37)) مسیر کامل بیضی‌شده‌گی لوله تحت خمش خالص تکرارشونده در محدوده انحنای $\kappa = \pm \kappa_c$ را می‌توان به صورت رابطه (38) نوشت:

$$\frac{\Delta D}{D_0} = C_1 \left(\frac{\kappa}{\kappa_0} \right)^2 + C_2 (\kappa_c/\kappa_0)^{m_1} N^{n_1} \quad (38)$$

4- صحبت سنجی مدل چرخه‌ای

به منظور صحبت سنجی مدل تحلیلی، از داده‌های تجربی ارائه شده در مرجع [24] استفاده شده است که در آن لوله‌ای با مشخصات هندسی $t = 0.88 \text{ mm}$ و $D_0 = 31.75 \text{ mm}$ قرار گرفته است. جنس لوله از نوع فولاد 1018 و پارامترهای مربوط به خصوصیات مصالح بر اساس رابطه تورگارد مطابق جدول 2 تعریف شده است. این آزمایش به صورت انحنای ثابت با حداقل انحنای $\kappa = 8.95e - 4 \text{ mm}^{-1}$ انجام شده است.

در مدل تحلیلی حاضر رابطه تنش-کرنش به صورت غیرخطی تعريف شده و پارامترهای لازم بر اساس داده‌های آزمایشگاهی مرجع [24] به صورت $\xi = 0.01$, $G_1 = G_2 = 0.025$, $G_T = 0.02$, $\sigma_{pr} = 468.3 \text{ MPa}$, $b_p = 5.5$, $Q = -87.5$ در نظر گرفته شده است.

با استفاده از روابط (28) و (30) رفتار نرم‌شوندگی تکرارشونده فولاد

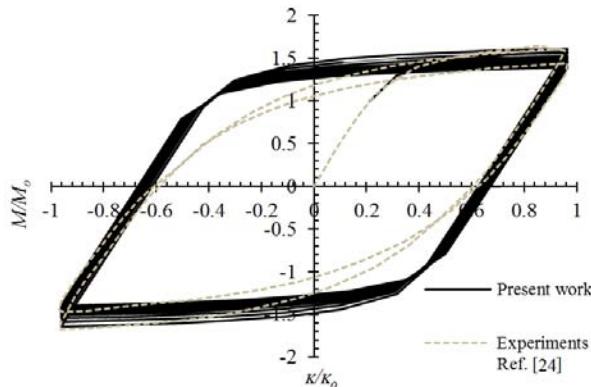


Fig. 17 Simulation of the inelastic cyclic "moment-curvature" path for a steel tube in Ref. [24] experiments provided by Eq. (35)

شکل 17 شبیه‌سازی ریاضی منحنی لنگر-انحنای برای لوله فولادی مورد آزمایش در مرجع [24] با معادله (35)

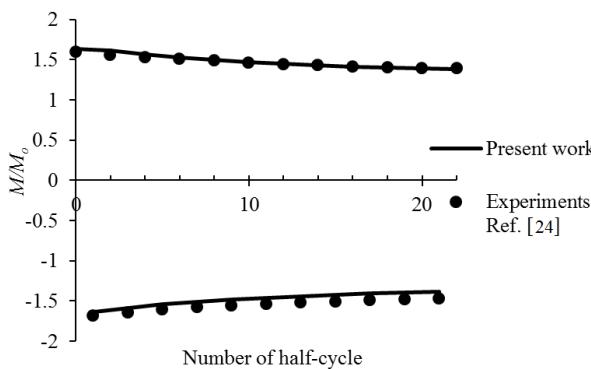


Fig. 18 Maximum and minimum moments in different half-cycles: Predictions from Eq. (35) and the corresponding experimental data from [24]

شکل 18 مقایسه مقادیر کمینه و بیشینه لنگر در هر نیم‌چرخه برای داده‌های آزمایشگاهی مرجع [24] و مقادیر به دست آمده از رابطه (35)

اختلاف در منحنی تنش-کرنش واقعی و منحنی تنش-کرنش لحاظ شده در مسئله باشد که این اختلاف در شکل 13 مشهود است.

5 نتایج

خلاصه نتایج تحقیق حاضر به قرار زیر هستند:

1- مرور ادبیات فنی حاکی از آن است که هنوز راه حل بسته دقیقی برای تحلیل رفتار خرابی خمیری پیشرونده لوله‌ها تحت چرخه‌های غیرارتجاعی خمش در دسترس نیست. تنها چند مورد حل ریاضی برای مسائل خرابی خمیری پیشرونده ارائه شده که عمدتاً ناظر به هندسه‌های سیار ساده و حالات بارگذاری ایده‌آل هستند. مقاله حاضر یک حل تحلیلی بسته برای رفتار خمش خالص غیرارتجاعی چرخه‌ای مقاطع لوله‌ای فولادی ارائه می‌دهد. نتایج مدل ارائه شده در مقایسه با داده‌های آزمایشگاهی از دقت قابل قبولی برخوردار است.

2- مدل‌های حل بسته ارائه شده توسط محققین قبلی بسیار محدود هستند که در اغلب آن‌ها از فرض دوخطی برای رفتار مصالح استفاده شده است. طبعاً این مدل رفتار تفاوت قابل توجهی با رفتار واقعی مصالح فولادی دارد. ناپیوستگی موجود در مدل دوخطی موجب انحراف نتایج حل ریاضی از رفتار چرخه‌ای واقعی خواهد شد. در تحقیق حاضر، علیرغم دشواری‌های ریاضی آن، از یک مدل پیوسته

شکل 15 ترسیم شده است همچنین در شکل 16 نمودار Q-Q مقادیر بیضی شدگی مقطع در انحنای کمینه و بیشینه در هر نیم‌چرخه برای داده‌های آزمایشگاهی مرجع [24] و مقادیر به دست آمده از رابطه (38) ارائه شده است. مشاهده می‌شود میزان خطای دو منحنی به دست آمده بر اساس رابطه (38) و داده‌های آزمایشگاهی کمتر از 1% است و همخوانی قابل قبول بین دو منحنی وجود دارد.

با در نظر گرفتن رفتار بیضی شدگی مقطع بر اساس رابطه (38) و حل معادله انتگرالی (35) منحنی‌های لنگر-انحنای مطابق شکل 17 به دست می‌آید. بهمنظور نمایش بهتر از صحت‌سنجی، نتایج آزمایشگاهی در اولین و آخرین چرخه‌ای بارگذاری [24] با چرخه‌های به دست آمده از مدل تحلیلی مقایسه شده است. همچنین نمودار مقایسه مقادیر بیشینه و کمینه لنگر در هر نیم‌چرخه برای داده‌های آزمایشگاهی مرجع [24] و مقادیر به دست آمده از رابطه (35) در شکل 18 ارائه شده است. مشاهده می‌شود تطابق قابل قبولی مقادیر بیشینه و کمینه لنگر در هر نیم‌چرخه وجود دارد. اختلاف موجود در شکل 17 بین دو منحنی حاصل از رابطه (35) و داده‌های آزمایشگاهی در محدوده انتقال از لنگر ارجاعی به لنگر خمیری به نظر می‌رسد ناشی از

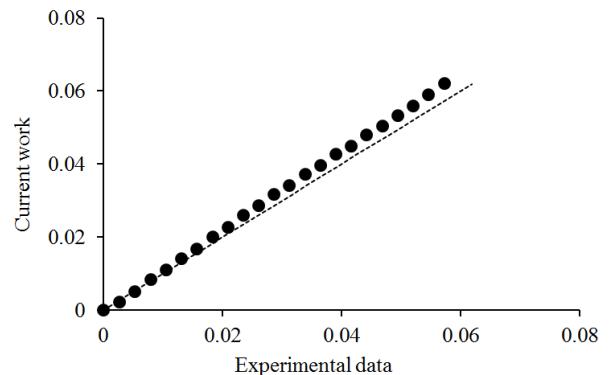


Fig. 15 A Q-Q plot of the ovalization at $\kappa=0$ in any half-cycle between the predictions of Eq. (38) with the corresponding experimental data from [24]

شکل 15 نمودار Q-Q مقادیر بیضی شدگی مقطع در انحنای صفر در هر نیم‌چرخه برای داده‌های آزمایشگاهی مرجع [24] و مقادیر به دست آمده از رابطه (38)

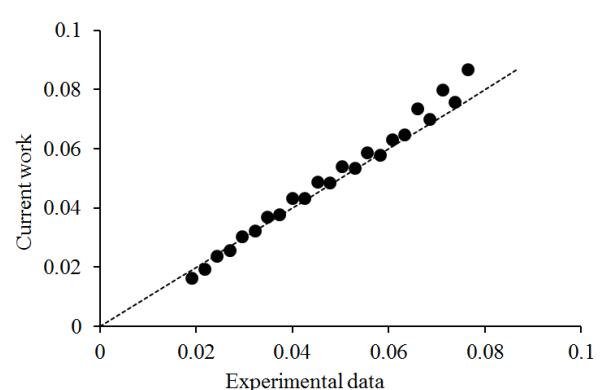


Fig. 16 A Q-Q plot of the ovalization at maximum and minimum curvatures in any half-cycle between the predictions of Eq. (38) with the corresponding experimental data from [24]

شکل 16 نمودار Q-Q مقادیر بیضی شدگی مقطع در انحنای کمینه و بیشینه در هر نیم‌چرخه برای داده‌های آزمایشگاهی مرجع [24] و مقادیر به دست آمده از رابطه (38)

- parameters using stabilized cycle tests to predict thermal ratchetting, *UPB Scientific Bulletin, Series D*, Vol. 78, No. 2, pp.17-30, 2016.
- [8] R. Bradford, D. Tipping, The ratchet-shakedown diagram for a thin pressurised pipe subject to additional axial load and cyclic secondary global bending, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 134, No.1, pp. 92-100, 2015.
- [9] S. Poonaya, U. Teeboonma, C. Thinvongpituk, Plastic collapse analysis of thin-walled circular tubes subjected to bending, *Thin-walled structures*, Vol. 47, No. 6, pp. 637-645, 2009.
- [10] M. A. Shahin, M. F. Elchalakani, A new model based on evolutionary computing for predicting ultimate pure bending of steel circular tubes, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 94, No. 1, pp. 84-90, 2014.
- [11] M. D'Aniello, E. M. Güneyisi, R. Landolfo, K. Mermerdaş, Predictive models of the flexural overstrength factor for steel thin-walled circular hollow section beams, *Thin-Walled Structures*, Vol. 94, pp. 67-78, 2015.
- [12] Y.-f. Chen, J. Zhang, H. Zhang, X. Li, J. Zhou, J. Cao, Ultimate bending capacity of strain hardening steel pipes, *China Ocean Engineering*, Vol. 30, pp. 231-241, 2016.
- [13] M. Elchalakani, Plastic mechanism analyses of circular tubular members under cyclic loading, *Thin-Walled Structures*, Vol. 45, No. 12, pp. 1044-1057, 2007.
- [14] K.-H. Chang, W.-F. Pan, K.-L. Lee, Mean moment effect on circular thin-walled tubes under cyclic bending, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 28, No. 5, pp. 495-514, 2008.
- [15] S. M. Rahman, T. Hassan, E. Corona, Evaluation of cyclic plasticity models in ratcheting simulation of straight pipes under cyclic bending and steady internal pressure, *International Journal of Plasticity*, Vol. 24, No. 10, pp. 1756-1791, 2008.
- [16] S. Zekavi, M. Zehsaz, M. Eslami, The ratchetting behavior of pressurized plain pipework subjected to cyclic bending moment with the combined hardening model, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 240, No. 4, pp. 726-737, 2010.
- [17] M. Peykanu, M. Zeinoddini, M. Motamed, Experimental modeling of local buckling of corroded offshore pipelines under axial cyclic loadings, *Sharif Civil Engineering Journal*, Vol. 29, No. 4, pp. 17-24, 2014. (in Persian) (فارسی)
- [18] M. Shariati, K. Kolasangiani, B. Jahangiri, A. Saber, Experimental study on ratcheting and softening behavior of stainless steel 304L thin-walled shells under cyclic pure bending load, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 4, pp. 324-332, 2016. (in Persian) (فارسی)
- [19] S. Ueda, Moment-rotation relationship considering flattening of pipe due to pipe whip loading, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 85, No. 2, pp. 251-259, 1985.
- [20] C. R. Calladine, *Theory of shell structures*, pp. 595-625, Cambridge University Press, 1989.
- [21] J. Knaster, G. Tortora, R. Veness, The Brazier effect and its influence in the design of beampipes for particle colliders, *Vacuum*, Vol. 64, No. 2, pp. 91-98, 2001.
- [22] S. Kyriakides, E. Corona, *Mechanics of offshore pipelines: volume 1 buckling and collapse*, pp. 226, Elsevier, 2007.
- [23] Y. Bai, R. Igland, T. Moan, Collapse of thick tubes under combined tension and bending, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 32, No. 3, pp. 233-257, 1995.
- [24] S. Kyriakides, P. Shaw, Inelastic buckling of tubes under cyclic bending, *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 109, No. 2, pp. 169-178, 1987.
- [25] J. F. Hallai, S. Kyriakides, On the effect of lüders bands on the bending of steel tubes. part i: Experiments, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 48, No. 24, pp. 3275-3284, 2011.
- [26] J. Lemaître, J.-L. Chaboche, *Mechanics of solid materials*, pp. 228-238, Cambridge university press, 1994.
- [27] M. Daunys, S. Rimovskis, Analysis of circular cross-section element, loaded by static and cyclic elastic-plastic pure bending, *International journal of fatigue*, Vol. 28, No. 3, pp. 211-222, 2006.
- [28] K.-H. Chang, W.-F. Pan, Buckling life estimation of circular tubes under cyclic bending, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, No. 2, pp. 254-270, 2009.

غیرخطی (مدل تورگارد) برای بیان رفتار مصالح هم در حالت یکسوزیه و هم در حالت چرخهای استفاده شده است که دقت نتایج را به میزان زیادی افزایش داده است. مدل ارائه شده حساسیت بالایی به مسیر تنش - کرنش تعریف شده دارد که با دسترسی به منحنی دقیق تنش - کرنش چرخهای در محدوده کرنش‌های موردمطالعه در بررسی رفتار خمشی تکرارشونده دقت بالاتری قابل حصول است.

-3- یکی از دشواری‌های تحلیل ریاضی یا اجرای محدود پدیده خرابی خمیری پیش‌رونده در اعضای لوله‌ای شبیه‌سازی توامان خرابی خمیری پیش‌رونده در بعد سازه‌ای (بیضی‌شدنگی) و در بعد مصالح (تجمع کرنش‌های خمیری) است. تحقیق حاضر به خوبی قادر بوده است با تأثیر دادن بیضی‌شدنگی مقطع در حل مسئله خمش یکسوزیه و چرخهای در محدوده غیراتجاعی، هر دو نوع خرابی خمیری پیش-رونده مصالح و سازه‌ای را به صورت توان پیش‌بینی و تحلیل نماید. این مهم در حل مسئله خمش چرخهای به کمک یک رابطه نیمه تجربی که توسط نگارندگان پیشنهاد شده انجام شده است. این رابطه به صورت ترکیبی شامل دو رفتار درجه دو بیضی‌شدنگی نسبت به انحنا و رفتار پیش‌رونده بیضی‌شدنگی چرخهای است که اجزای آن از مراجعت مختلفی استخراج و تلفیق شده‌اند. توسط این رابطه بیضی‌شدنگی مقطع با دقیقی منطقی پیش‌بینی شده و در حل ریاضی لنگ-انحنای عضو لوله‌ای دخالت داده می‌شود.

-4- رفتارهای غیرخطی و خمیری چرخهای مصالح (شامل اثر بوشینگر و اثرات نرم‌شوندگی/اسخت‌شوندگی چرخهای) در این تحقیق به کمک یک مدل سخت‌شوندگی پویای غیرخطی در ترکیب با سخت‌شوندگی همسانگرد غیرخطی شبیه‌سازی ریاضی شده است.

6- مراجع

- [1] S. Kyriakides, P. Shaw, Response and stability of elastoplastic circular pipes under combined bending and external pressure, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 18, No. 11, pp. 957-973, 1982.
- [2] S. Kulkarni, Y. Desai, T. Kant, G. Reddy, Y. Parulekar, K. Vaze, Uniaxial and biaxial ratchetting study of SA333 Gr. 6 steel at room temperature, *International journal of pressure vessels and piping*, Vol. 80, No. 3, pp. 179-185, 2003.
- [3] T. Hassan, E. Corona, S. Kyriakides, Ratcheting in cyclic plasticity, part II: multiaxial behavior, *International journal of plasticity*, Vol. 8, No. 2, pp. 117-146, 1992.
- [4] P. Benham, Axial-load and strain-cycling fatigue of copper at low endurance, *J INST MET*, Vol. 89, pp. 328-338, 1961.
- [5] E. Weiß, B. Postberg, T. Nicak, J. Rudolph, Simulation of ratcheting and low cycle fatigue, *International journal of pressure vessels and piping*, Vol. 81, No. 3, pp. 235-242, 2004.
- [6] X. Chen, X. Chen, D. Yu, B. Gao, Recent progresses in experimental investigation and finite element analysis of ratcheting in pressurized piping, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 101, No. 1, pp. 113-142, 2013.
- [7] M. Zehsaz, F. V. Tahami, H. Akhani, Experimental determination of material