مجله مهندسی مکانیک مدرس، فروردین 1396، دوره 17، شماره 6، ص‌ص 248-256

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

# مدل‌سازی حرکت چرخ قطار به منظور جلوگیری از لغزش در هنگام ترمزگیری از منظر تئوری‌های کلاسیک و آنالیز المان محدود

مجید شهروی[1*]، نجفعلی حیدری[2]

1- استادیار، مهندسی ماشین‌های ریلی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
2- فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
* تهران، صندوق پستی 16845-363، m_shahrav@iust.ac.ir

**اطلاعات مقاله**

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 18 بهمن 1395
پذیرش: 07 اردیبهشت 1396
ارائه در سایت: 25 خرداد 1396

*کلید واژگان:*
مکانیک تماس
تماس چرخ و ریل
چسبندگی چرخ و ریل
مدل تیر
آنالیز المان محدود

**چکیده**

آشکارسازی و جلوگیری از لغزش چرخ در دینامیک حرکت قطارها از اهمیت بسزایی برخوردار بوده است. در عین حال؛ عملکرد ماشین‌های ریلی وابسته به ناحیه بسیار کوچکی‌ست که چرخ و ریل با یکدیگر تماس دارند. این ناحیه پر تنش تقریبا ریشه تمامی تحقیقات در حوزه ماشین‌های ریلی– از عملکرد دینامیکی تا اصلاح زیربنا– بوده است. بنابراین درک بهتر مسئله تماس بین چرخ و ریل جهت طراحی بهینه در حوزه حمل و نقل ریلی بسیار ضروری‌ست. در این تحقیق سه مدل تماسی غیربیضوی مورد ارزیابی و قیاس در مقابل یکدیگر از منظر ناحیه تماس، فشار وارده، توزیع نیروی کششی و نیروهای خزشی قرار خواهند گرفت. در این میان مدل‌هایی از جمله جانسون و کالکر در این خصوص به خوبی توانسته‌اند رفتار چرخ و ریل را در ناحیه موردنظر پیش‌بینی کنند. حال آنکه فرض اولیه تمامی این تئوری‌ها جسم نیمه بی‌نهایت بوده است که این فرضیه خطاهای بسیاری را در مسئله وارد خواهد کرد مخصوصا زمانی که فلانج تیر به گوشه ریل برخورد نماید. همچنین لازم به ذکر است که تئوری‌های مذکور در هنگام اشباع ناحیه لغزش به درستی نمی‌توانند پاسخگوی مسئله باشند. از این‌رو در این تحقیق دو مدل از مهندسی خودرو و آنالیز المان محدود –که محدودیت‌های فوق را ندارند– جهت بررسی مسئله، مورد استفاده قرار می‌گیرند. مهندسی خودرو به‌دلیل کار با لغزش‌های زیاد توانایی پیش‌بینی دینامیک حرکت را در ناحیه اشباع داراست. در نهایت با عنایت به نتایج به‌دست آمده، تئوری‌های تیر، بریستل و آنالیز المان محدود تطابق بسیار مناسبی با نتایج آزمایشات عملی نشان دادند. در تحقیق پیش‌رو چرخ S1002 در تماس با ریل UIC60 قرار داشته و در سرعت‌های اولیه 30، 60، 100 و 140 کیلومتر بر ساعت ممان ترمزی اعمال می‌گردد تا به نقطه اشباع لغزش برسد، در همین وضعیت ناحیه تماس مورد بررسی قرار می‌گیرد.

# Modelling Wheel Motion in order to prevent Slipping as it is Braking: Using Classic Models and FEM

**Majid Shahravi[1*], Najafali Heidari[2]**

1- Rolling Stocks Department, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran
2- Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran
* P.O.B. 16845-363, Tehran, Iran, m_shahrav@iust.ac.ir

**ARTICLE INFORMATION**

Original Research Paper
Received 05 February 2017
Accepted 27 April 2017
Available Online 15 June 2017

*Keywords:*
Wheel-rail
rolling-sliding contact
adhesion
FEM method

**ABSTRACT**

Detecting and Preventing wheels slipping is at the core of all researches related to railway vehicle dynamics. This tiny interface governs the dynamic performance of rail vehicles through the loads it transmits and like any high stress concentration zone, it is subjected to serious damage phenomena. Thus, a clear understanding of the rolling contact between wheel and rail is key to realistic vehicle dynamic simulation and damage analyses. In this paper, three fast non-elliptic contact models are evaluated and compared to each other in terms of contact patch, pressure and traction distributions as well as the creep forces. Among them Johnson and Kalker method was considerably useful for the similar problems while the common assumption is elastic half-space in which many errors could be made, especially in gauge-corner contact. Based on the conclusions drawn from this evaluation, two new methods are proposed which result in more accurate contact patch and pressure distribution estimation while maintaining the same computational efficiency. The Beam and Bristle model are proposed for tire engineering in automotive industries but they can predict slip in wheel-rail contact too. New methods are typically used for tire engineering. Tire engineering usually deals with higher values of slippage than there is rail engineering so that they can be applied into the saturation zone. Finally, a FEM analysis will be done for evaluating the methods proposed. Also, in the special case that similar experimental projects have been done by other scientists. It should be noted that good agreement was found between FEM analysis results, tire engineering models, and experimental results. Models have been used for several contact applications including S1002 wheel profile over UIC60 rail profile for four different initial braking speeds of 30, 60, 100, 140 km/h and compared with experimental results.

**Please cite this article using:**

**برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:**

M. Shahravi, N. Heidari, Modelling Wheel Motion in order to prevent Slipping as it is Braking: Using Classic Models and FEM, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 6, pp. 248-256, 2017 (in Persian)

[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12 ]

[ DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.8.8 ]

## 1- مقدمه

تحلیل تماس دو جسم غلتان همواره از دو بخش آنالیز عمودی و آنالیز غلتان تشکیل شده است. در بخش نیروهای عمودی نظریه هرتز از دقیق‌ترین مدل‌های موجود است که متاسفانه چند محدودیت جزئی جهت کاربرد در آن وجود دارد.

نظریه هرتز همواره از تئوری‌های کاربردی در مکانیک تماس بوده است این در حالی است که هرتز در مقاله خود به کتاب وینکلر [1] اشاره داشته و اظهار کرده دو جسم الاستیک همگن که با یکدیگر در ناحیه کوچکی از سطح خارجی خود تماس دارند، از جمله کارهای عملی وینکلر بوده است.

در حقیقت وینکلر، یک بنیان الاستیک را برای مواجهه جهت مسئله تماس معرفی کرده است. بنیان الاستیک، متناظر با یک تشک حاوی فنرهای عمودی است. فنرهای یادشده در هیچ راستایی به یکدیگر متصل نیستند، بدین معنی که هر کدام مستقل از دیگر فنرهای اطراف خود، قادر به فشرده شدن هستند. "شکل 1" رویکرد وینکلر را به خوبی نشان می‌دهد. این ایده یافتن ناحیه تماس را ساده‌تر کرد. ولی نتایج وابسته به مقادیری هستند که برای سختی فنر برگزیده می‌شوند.

به‌دلیل نبود نتایج مطلوب از راه‌حل وینکلر، هرتز نظریه خود را با فرضیه‌های زیر ارائه نمود:

- اجسام می‌بایست همگن، آیزوتروپیک و به‌صورت خطی الاستیک باشند. سینماتیک خطی نیز در این بند فرض شده است.
- اجسام کاملا صیقلی فرض می‌شوند. بنابراین هیچ گونه اصطکاکی بین آن‌ها وجود نخواهد داشت (این فرض با قرارگیری اجسام مشابه -به لحاظ مقاومت مصالحی- در مسئله قابل جایگزینی است).
- اجسام در مجاورت تماس به صورت نیمه بی‌نهایت در نظر گرفته می‌شوند. این فرض مستلزم کوچک بودن سطح تماس در مقایسه با اندازه اجسام در تماس است. همچنین ناحیه تماس بایستی از شعاع مرتبط اجسام نیز بسیار کوچک‌تر باشد. به عبارت دیگر اجسام باید یک تماس غیرهمدیس را شکل بدهند. این فرض تخت بودن ناحیه تماس را مطمئن ساخته و کرنش‌ها در آن با تئوری خطی سازگارند.

سطوح اجسام در مجاورت ناحیه تماس به صورت درجه دو نمایش داده می‌شوند. به عبارت بهتر، انحنای سطوح در تماس ثابت هستند. با فرض این‌که هر جسم دارای دو شعاع اصلی‌ست جدایش برای این مسئله مانند رابطه (1) نوشته می‌شود (پارامترهای اضافی در رابطه (2) حذف شده‌اند).

$$z(x,y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + \cdots \quad (1)$$

$$z(x,y) = Ax^2 + By^2 \quad (2)$$

که در آن:

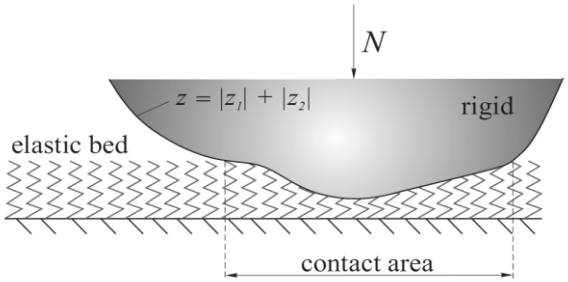



**Fig. 1** Winkler Elastic Foundation [1]

**شکل 1** بستر الاستیکی وینکلر [1]

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_{1y}} + \frac{1}{R_{2y}}\right)$$
$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_{1x}} + \frac{1}{R_{2x}}\right) \quad (3)$$

در روابط (2) و (3)، $A$ و $B$ به ترتیب انحناهای طولی و عرضی نامیده می‌شوند. هرتز متوجه شد، یک توزیع فشار شبه بیضوی بر روی ناحیه تماس با اقطار $a$ و $b$ قرار دارد. در این بیضی، توزیع فشار طبق رابطه (4) ارائه شده است.

$$p(x.y) = p_0\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (4)$$

در رابطه (4) $p_0$ بیشینه فشار اعمال شده در نقطه تماس است. تساوی انتگرال فشار روی ناحیه تماس با نیروی کل اعمال شده، پارامتر $p_0$ را براساس $N$به عنوان نیروی اولیه تماس رابطه (5) را نتیجه می‌دهد.

$$p_0 = \frac{3N}{2\pi ab} \quad (5)$$

محورهای $a$ و $b$ به هندسه اجسام و نیروی اولیه تماس بستگی دارد. ویژگی مهم نظریه هرتز، ارائه یک فرم کامل جهت حل مسئله پیچیده تماس بود. این فرم یکپارچه برای مهندسین بسیار جذاب است. راه‌حل او در بسیاری از مسائل از جمله تماس چرخ و ریل مورد استفاده قرار می‌گیرد اگرچه، استفاده از این نظریه هوشیاری کامل در ارتباط با تطابق فرضیات مسئله مورد بحث را می‌طلبد.

اولین فرضیه مورد نظریه هرتز، الاستیک خطی مواد است. این فرض ممکن است به سبب نیروی بالای اکسل در قطارهای جدید نقض شود. ذکر این موضوع ضروری است که فشارهای تماسی بیشتر از استحکام تسلیم مواد، الزاما باعث ایجاد جریان الاستیک بر روی سطح تماس نمی‌شود. این بدان سبب است که معیار تسلیم پلاستیک براساس حالت تنش در سه جهت اصلی مورد بحث است. در غیاب تنش‌های تماسی، تسلیم از زیر سطح تماس آغاز شده و با افزایش بار اعمالی به‌صورت ناگهانی به سطح نیز خواهد رسید. تحقیقات تلیسکیوی و همکاران [2] نشان می‌دهد که تسلیم در سطوح تماس برای شرایط فشار تماسی کم و ناحیه تماس کوچک رخ می‌دهد.

فرضیه دیگری که در تئوری هرتز بحث شده و در تماس ماشین‌های ریلی هم مورد استفاده قرار می‌گیرد، فرض جسم نیمه بی‌نهایت است. همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد، ناحیه تماس باید بسیار کوچک‌تر از ابعاد دو جسم در تماس باشد. این فرض در تماس سر چرخ و سر ریل کاملا مورد تایید است. نواحی تماس چرخ-ریل در "شکل 2" نشان داده شده‌اند [3].

نگرانی‌هایی در باب اعتبار نظریه هرتز به هنگام تماس فلنج چرخ و گوشه ریل[1] وجود دارد. ذکر این نکته نیز ضروری است که لبه بیرونی چرخ و ریل[2] به ندرت با یکدیگر تماس دارند.

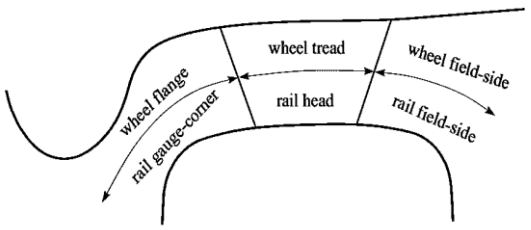



**Fig. 2** Possible Wheel-rain Contact Zones

**شکل 2** نواحی تماس چرخ و ریل

[1] Wheel Flange-Rail Gauge Corner
[2] Field Sides



[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12 ]
[ DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.8.8 ]

جهت اعتبارسنجی نظریه هرتز در فرضیه جسم بی‌نهایت، تحلیل المان محدود به سبب نداشتن این محدودیت مورد بررسی قرار می‌گیرد. این تحلیل‌ها به‌وسیله یان و همکاران [4] جهت تحقیق بر کاربرد نظریه هرتز در تماس چرخ و ریل انجام شده است. نتایج تحقیقات یان و همکاران نشان داد فارغ از حالت تماسی چرخ و ریل، نظریه هرتز تنها زمانی معتبر است که ناحیه تماس به منطقه تغییرات انحنای چرخ یا ریل گسترش پیدا نکند یا جریان پلاستیک روی سطح تماس ایجاد نشود. به هنگام تماس فلنج چرخ و گوشه ریل با اینکه شعاع نسبی جانبی کوچک است، عرض ناحیه تماس نیز کوچک‌تر است. بنابراین فرض نیمه بی‌نهایت بر قرار است. به هر حال آن چیزی که در تماس چرخ و ریل بیشتر از تماس فلنج چرخ مورد بحث است، تماس همدیس می‌باشد. تماس همدیس ممکن است در بین پروفیل‌های مستهلک رخ بدهد. در این مورد اخیر، فارغ از این‌که ناحیه تماس در کدام منطقه واقع شود، عرض ناحیه تماس ممکن از با شعاع نسبی عرضی قابل قیاس باشد.

همان‌طور که از نتیجه‌گیری یان و همکاران [4] مشخص شد، نظریه هرتز در جایی که ناحیه تماس وارد منطقه‌ای با شعاع نسبی عرضی شود، معتبر نیست. در حقیقت آخرین فرضیه بیان شده در ارتباط با روش حل هرتز که همان نحوه نمایش ناحیه تماس به صورت بیضی درجه دو است اغلب در تماس پروفیل‌های استاندارد چرخ و ریل مورد نقض قرار می‌گیرد.

## 2- تماس غلتشی

کارتر [5] جهت مدل‌سازی چرخ و ریل، دو استوانه درگیر را در نظر گرفت. با فرض کرنش صفحه‌ای مسئله به غلتش دو بعدی تبدیل می‌گردد.

قبل از آشکار شدن لغزش در ناحیه تماس، لغزش به صورت بخشی از ناحیه وجود دارد. باقی ناحیه تمامی ذرات در تماس با یکدیگر هستند. این ناحیه چسبنده[1] نام دارد. در ناحیه چسبنده هیچ‌گونه لغزشی وجود ندارد، بنابراین رابطه (6) برقرار است.

$$v_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \text{Constant} \tag{6}$$

طرفی در ناحیه لغزش، نیروی رانش، $q$، به بیشینه مقدار خود رسیده و در رابطه (7) دیده می‌شود.

$$q_x(x) = \mu p(x) \tag{7}$$

مشخص است که $\mu$ به ضریب اصطکاک دلالت دارد. جهت بردار $q_x$، نیز با بردار لغزش $S_x$، مخالف است. رابطه (8) بیانگر این موضوع است.

$$\frac{q_x(x)}{|q_x(x)|} = -\frac{S_x(x)}{|S_x(x)|} \tag{8}$$

در نظریه کارتر ناحیه چسبنده در بخش جلویی ناحیه تماس قرار گرفته است. جهت برقراری شرایط ناحیه چسبنده بحث شده در رابطه (7)، یک توزیع رانشی از ناحیه کلی رانش $q'$ کم می‌شود تا رابطه (9) بدست آید.

$$q_x(x) = q_x' - q_x'' \tag{9}$$

$q'$ و $q''$ به ترتیب در روابط (10) و (11) تعریف شده‌اند:

$$q_x'(x) = \mu p = \mu p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \qquad -a \le x \le a \tag{10}$$

$$q_x''(x) = \\ = \frac{c}{a}\mu p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x-(a-c)}{c}\right)^2} \qquad a - 2c \le x \le a \tag{11}$$

در روابط (10) و (11)، $a$ و $c$ به ترتیب نصف اندازه ناحیه تماس و نصف اندازه ناحیه چسبنده هستند. "شکل 3" توزیع ترکشن کارتر [5] را به خوبی نشان می‌دهد.

کرنش تماسی $\partial u_x/\partial x$، از توزیع ترکشن در ناحیه چسبنده به صورت رابطه (12) به‌دست می‌آید.

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{2(1-v^2)}{aE}\mu p_0 (a-c) \tag{12}$$

چنان‌چه پیشتر نیز اشاره شد، کرنش تماسی در ناحیه چسبنده مقداری ثابت است. جهت محاسبه طول ناحیه چسبنده لازم است، از تنش تماسی در تمامی طول ناحیه تماس انتگرال گرفته و برابر کل نیروی تماسی وارده، قرار گیرد. رابطه طول ناحیه چسبنده را پس از محاسبه با این روش نشان می‌دهد.

$$c = a\sqrt{1 - \frac{Q}{\mu N}} \tag{13}$$

در رابطه (13)، $N$ نیروی عمودی و $Q$ نیروی کل تماسی است که در مهندسی ریلی با عنوان نیروی خزش شناخته می‌شود. با استفاده از رابطه (13) و روابط هرتز، معادله (14) به‌دست می‌آید.

$$v_x = -\frac{\mu a}{R}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{Q}{\mu N}}\right) \tag{14}$$

در رابطه (14)، $R$ شعاع نسبی دو جسم است. نمایش بی‌بعد رابطه (14)، معادله (15) است (در "شکل 4" نیز نمایش داده شده است).

$$\frac{Q}{\mu N} = -\frac{2R}{\mu a}v_x + \frac{R^2}{\mu^2 a^2}v_x|v_x| \tag{15}$$

## 3- غلتش سه بعدی

مطالعه تماس غلتشی و محاسبه نیروی ترکشن بعد از کارتر توسط پژوهشگران دیگر ادامه داشت. جانسون تلاش کرد غلتش سه‌بعدی را مدل کند. جانسون در سال 1958 دو مقاله در ارتباط با غلتش الاستیک یک کره بروی یک صفحه صاف منتشر کرد. او در مقالاتش [6], [7] تاثیر چرخش را بر تماس غلتان بررسی کرد. جانسون به این نتیجه رسید که چرخش یک نیروی تماسی عرضی ایجاد می‌کند مانند یک ممان در جهت محور عمودی. در حل پیشنهادی جانسون، نیروی عرضی ایجاد شده ناشی از چرخش با نیروی عرضی حاصل از خزش عرضی مخالفت می‌کند.

در مقاله دیگری [6] او به بررسی خزش عرضی بدون حضور چرخش پرداخت. سرانجام این تحقیقات منجر به ارائه نظریه‌ای در باب ناحیه بیضوی تماس شد. براساس این تئوری، ناحیه چسبنده یک بیضی کوچکتر با نسبت اقطار مشابه در لبه جلویی ناحیه تماس است. این پدیده به خوبی در "شکل 5" مشاهده می‌شود.

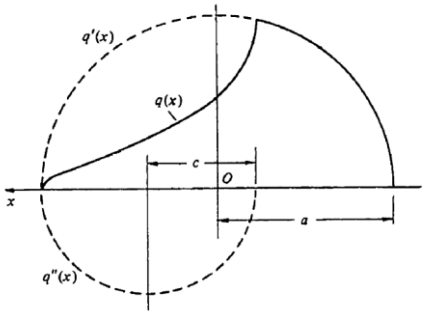



**Fig. 3** Traction distribution in Carter's theory [5]

**شکل 3** توزیع ترکشن در مدل کارتر [5]

[1] Stick (Adhesion)



[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12 ]

[ DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.8.8 ]

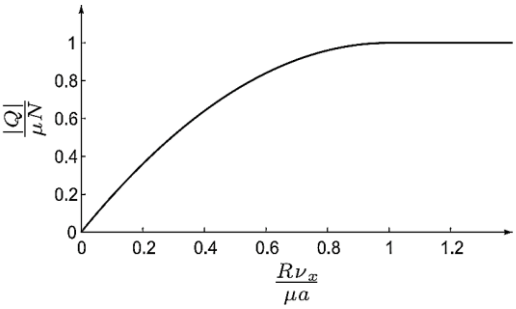



**Fig. 4** Carter's creep force-creepage curve [5]

**شکل 4** نمودار نیروی ترکشن بر حسب نیروی خزش (بی بعد) [5]

مدل تماس دیگری که ابتدا توسط هینز و اولرتون [8] پیشنهاد شد و بعدها توسط کالکر توسعه داده شد، بسط حل کارتر در ناحیه بیضوی تماس بود. در این حل که به نام نظریه نواری[1] مشهور است ناحیه تماس به نوارهای موازی با جهت غلتش تقسیم می‌شوند. سپس حل کارتر جهت هر نوار اعمال می‌شود. تنها نکته مهم در این مدل، نادیده گرفته شدن برهم‌کنش نوارها با یکدیگر است. در "شکل 5" توزیع ترکشن در هر نوار و شکل محدوده چسبنده فقط جهت لغزش طولی به تصویر کشیده شده است. در این نظریه در لبه جلویی ناحیه تماس، ترکشن حذف شده و ناحیه چسبنده به صورت لیمویی شکل همانند مشاهدات در آزمایشات تجربی، دیده می‌شود. با این که نظریه نواری حل بسیار دقیقتری نسبت به نظریه جانسون ارائه می‌دهد، اما زمانی که ناحیه تماس در راستای غلتش از راستای جانبی بزرگتر بوده یا مقدار چرخش نیز زیاد است، پاسخ راضی کننده‌ای ارائه نخواهد داد [9].

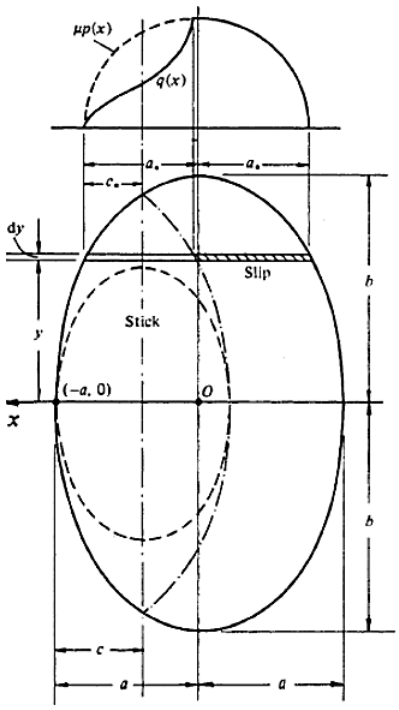



**Fig. 5** Contact area based on Vermeulen-Johnson (dashed line) and strip theory (dash-dot line) [8], [11]

**شکل 5** ناحیه تماس از منظر مدل جانسون-ورمولن (نمودار خط چین) و نظریه نواری (نمودار خط-نقطه) [8], [11]

[1] Strip Theory

کالکر بعدها به تحقیق روی مسئله؛ جهت توسعه یک نظریه با قابلیت کاربرد در مسائل با وجود چرخش و خزش، کار کرد. بالاخره تحقیقات او در این باب در سال 1979، منجر به نظریه کامل تماس غلتشی [10] شد. این نظریه برمبنای فرضیه جسم نیمه بی‌نهایت ارائه شده است.

در نظریه کالکر، روش تغییر جهت یافتن یک پاسخ یکتا مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش تغییرات کالکر در یک کد کامپیوتری با نام کانتکت[2] قرار گرفته است. در این کد کامپیوتری دو الگوریتم جهت حل قسمت عمودی و تماسی مسئله مورد استفاده قرار می‌گیرند. جهت حل مسئله یک ناحیه تماس انتخاب و به المان‌های مستطیلی تقسیم می‌شود. ناحیه تماس و توزیع فشار در آن با استفاده از الگوریتم عمودی محاسبه می‌شود. فشار در همه المان‌ها یکنواخت است. در هر گام[3] المان‌هایی که دارای فشار منفی هستند حذف می‌شوند تا در تمام ناحیه تماس فقط المان‌های دارای فشار مثبت باقی بمانند. بعد از محاسبه ناحیه تماس و توزیع فشار، ترکشن در هر المان با استفاده از الگوریتم تماسی محاسبه می‌شود.

در حالی‌که کالکر روش تغییرات را حلی دقیق می‌داند ولی این حل پاسخی دقیق برای هر مسئله‌ای فارغ از مفروضاتش نخواهد داشت. تئوری فوق الذکر دارای مفروضات محدود کننده‌ای به شرح زیر است:

- مواد همگن، الاستیک خطی (یا ویسکوالاستیک)
- فرضیه جسم نیمه بی‌نهایت (به معنی تماس غیرهمدیس)
- قانون اصطکاک کولمب [12]

در انتها ذکر این نکته نیز ضروری است که حتی با چشم پوشی از خطاهای ایجاد شده در گسسته‌سازی مسئله، هزینه‌های محاسبات با استفاده از کد کامپیوتری کالکر جهت شبیه‌سازی تماس چرخ و ریل نسبتا بالا به نظر می‌رسد [13].

## 4- مدل تیر

در بخش‌های گذشته تئوری‌های کلاسیک مکانیک تماس مورد بررسی قرار گرفته است، پاسخ صحیح و قابل قبول این دسته از تئوری ها در گستره‌ی 0 تا 0.2 درصد برای نرخ سایش است. این در حالی است که بسیاری از گزارشات آزمایش‌های عملی با نرخ لغزش بعد از اشباع نیروی چسبندگی ارائه می‌گردند. با توجه به مدل‌سازی به‌وسیله آنالیز عملکرد چسبندگی برای لوکوموتیوهای الکتریکی و شبیه‌سازی‌های ساده‌ی بدون لغزش، مدل‌های ناپیوسته؛ مشخصات اشباع نیروی چسبندگی را نادیده گرفته یا چسبندگی به‌طور کامل مشاهده نمی‌گردد. مدل ارائه شده در چنین تحقیقی غیرقابل قبول است.

در چنین شرایطی منطبق کردن یک نمودار بر نتایج آزمایشات تجربی توصیه می‌گردد که از این رهگذر می‌توان به مشخصات لغزش- چسبندگی مدل دست یافت. همچنین به‌دست آوردن ضرایب خاص در همه شرایط چسبندگی امری ضروری است حال آن‌که روابط تشکیل شده اغلب از نظر فیزیکی بی‌معنی هستند.

تا بحال نظریاتی که مورد بررسی قرار گرفت تئوری‌های رایج در مهندسی راه آهن جهت تماس چرخ و ریل هستند. ولی در این بخش مدل تیر که از تئوری‌های مهم مهندسی خودرو است نیز بررسی خواهد شد.

تکنیک‌های متفاوتی جهت مدل کردن عملکرد تایر و مشخصات ترمزگیری تایرهای خودرو وجود دارد. ولی خوشبختانه پارمترهای پیچیده‌ای نظیر

[2] Contact
[3] Iteration



[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12 ]
[ DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.8.8 ]

لاستیک تایر در تماس چرخ و ریل وجود ندارد. در نتیجه ما از نظریه تیر دایروی –که تنها توانایی شبیه‌سازی حرکت طولی را دارد- بهره می‌بریم. تئوری‌های کلاسیک جهت مطالعه پدیده پیش-لغزش برای مقایسه نتایج عملی در حالت تماس خشک، به‌کار گرفته می‌شود. اما در این تحقیق؛ تمام گستره حرکت در مدل نیروی چسبندگی مطالعه خواهد شد [14].

در مدل تیر چرخ مانند یک تیر دایروی فرض می‌شود که با فنرها نگه‌داشته شده‌اند. پارامتر $p$ فشار تماسی بین چرخ و ریل است در حالی که $f_x$ مشتق نیروی چسبندگی با توجه به جابجایی از ابتدای ناحیه تماس می‌باشد. "شکل 6" شماتیک مدل تیر را به خوبی نمایش می‌دهد.

در این مدل؛ فشار ایجاد شده در ناحیه تماس مستطیلی با رابطه (16) محاسبه شده است:

$$p = \frac{6N}{l^3}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \left(x_c - \frac{l}{2}\right)^2\right] \tag{16}$$

در رابطه (16) $l$ طول ناحیه، $w$ عرض ناحیه، $N$ نیروی عمودی و $X_c$ فاصله از ابتدای ناحیه است. "شکل 7" توزیع ترکشن در ناحیه تماس را نشان می‌دهد.

## 5-مدل بریستل (مویی)

دو سطح در تماس همواره دارای ناصافی‌هایی در مقیاس میکروسکوپی‌اند که تماس بر روی آن‌ها اتفاق می‌افتد. به عبارت بهتر با اعمال نیرو زبری‌ها مانند فنر به‌صورت الاستیک تغییر شکل می‌دهند. "شکل 8" این موضوع را به خوبی نشان می‌دهد. در "شکل 8" جهت ساده‌سازی سطح زیرین صلب فرض شده است.

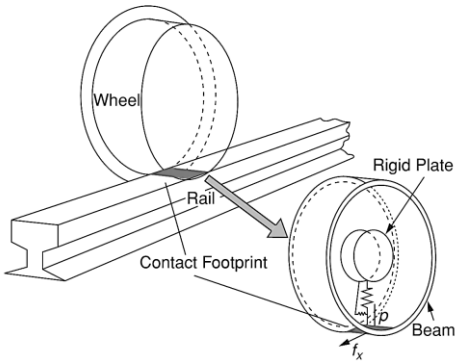



**Fig. 6** The Beam Model [15]

**شکل6** مدل تیر [15]

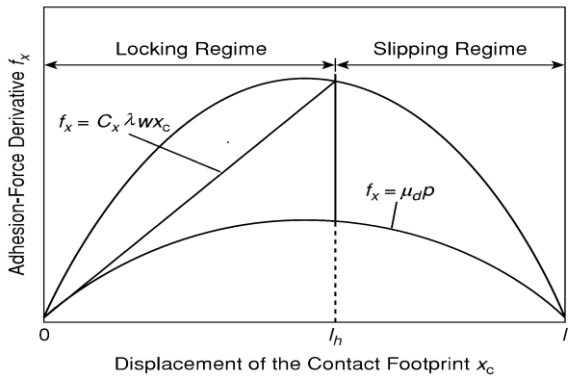



**Fig. 7** Distribution of the tangential force in contact area: Beam model [15]

**شکل7** توزیع نیروی مماسی در ناحیه تماس از منظر مدل تیر [15]

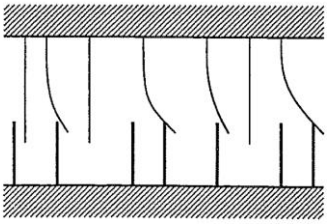


**Fig. 8** The friction interface between two surfaces is thought of as a contact between bristles [16]

**شکل8** فرض می‌شود که دو سطح از طریق زبری‌ها تماس خود را برقرار می‌کنند.

جهت نگارش روابط زبری‌ها ابتدا از مدل دال[1] [17], [18] استفاده می‌شود. اما از آن‌جا که مدل دال پدیده استریبک[2] را در بر نمی‌گیرد روابط تئوری لوگر[3] که برگرفته از مدل دال است مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

در ابتدا تغییر شکل زبری‌های سطوح با استفاده از رابطه (17) محاسبه خواهد شد.

$$\frac{dz}{dt} = \sigma - \frac{\alpha|\sigma|}{g(\sigma)}z \tag{17}$$

در رابطه (17)؛ $z$ ضریب اصطکاک داخلی، $\sigma$ سرعت نسبی، $\alpha$ ضریب سفتی است. تابع $g(\sigma)$ نیز جهت وارد کردن اثر استریبک به رابطه اضافه شده است که از رابطه (18) محاسبه می‌شود.

$$g(\sigma) = F_c + (F_s - F_c)e^{-(\sigma/v_s)^2}z \tag{18}$$

در مدل لوگر، $Z$ تغیر شکل متوسط زبری‌ها، $v_s$ سرعت استریبک و $F_s$ نیروی اصطکاک ایستایی است. همچنین؛ $\alpha$ ضریب سفتی، $\alpha_1$ ضریب استهلاک زبری و $\alpha_2$ ضریب دمپینگ ویسکوز می‌باشد. در نهایت جهت یافتن نرخ تغییرات متوسط زبری‌ها رابطه (19) ارائه می‌شود (برای اطلاعات بیشتر به [16] مراجعه شود).

$$\dot{Z} = \sigma[1 - \alpha h(\sigma)z] \tag{19}$$

علت استفاده از مدل بریستل در این تحقیق، پایه‌گذاری این مدل براساس حرکت دینامیکی است. بدین معنی که دیگر مدل‌های ارائه شده به صورت ایستا مسئله را مورد بررسی قرار می‌دادند ولی تئوری بریستل از همان ابتدا با نرخ تغییر شکل حل مسئله را بیان می‌کند.

## 6- آنالیز المان محدود

در این تحقیق مسئله پس از بررسی تحلیلی با استفاده از مدل‌های ارائه شده، شبیه‌سازی مدل واقعی چرخ و ریل در نرم‌افزار آباکوس انجام می‌شود.

در این بخش ابتدا چرخ با یک سرعت اولیه روی ریل حرکت می‌کند، سپس متناسب با سرعت اولیه یک ممان ترمزی به چرخ اعمال شده و ناحیه تماس مورد بررسی قرار می‌گیرد. نکته بسیار مهم در آنالیز المان محدود نحوه مش‌بندی و نوع المان انتخاب شده است. نحوه المان‌بندی باید به گونه‌ای اعمال شود که در نزدیکی محل تماس (در این تحقیق) مش‌بندی ریزتری وجود داشته باشد. از آن‌جا که هدف اصلی این تحقیق بررسی حرکت غلتشی است، مش‌بندی ریزتری در طول غلتش ایجاد شده است.

المان‌بندی در این بخش از نوع C3D8R بوده که جهت مدل‌های تماسی پیشنهاد می‌گردد [19].

جدول 1 نشان‌دهنده همگرایی جواب‌ها به مش‌بندی انجام شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، بهینه‌ترین مدل، مدل شماره 3 است.

[1] Dahl Model
[2] Stribeck
[3] LuGre



[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12 ]
[ DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.8.8 ]

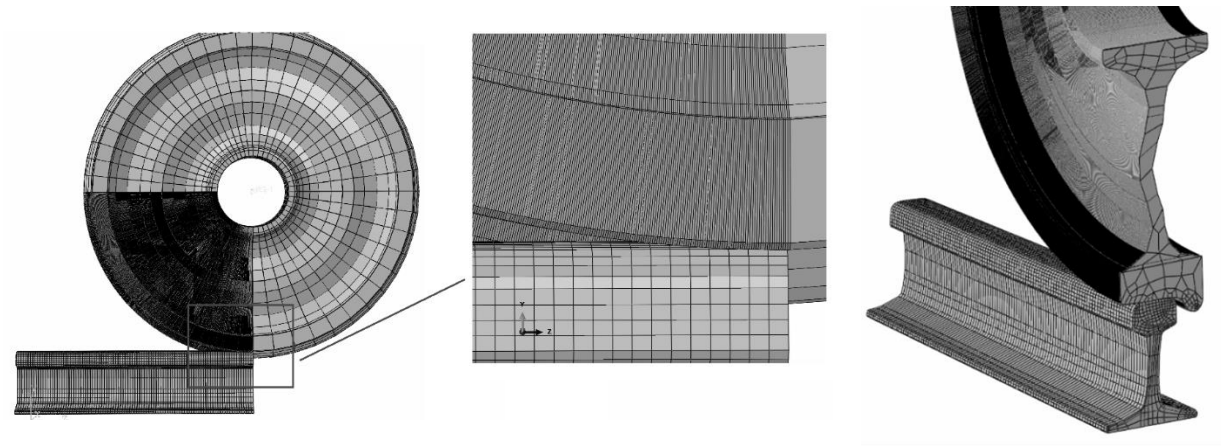


**Fig. 9** Discretization of the wheel-rail contact

**شکل9** مش‌بندی محل تماس چرخ و ریل (مدل شماره 3)

**جدول 1** وابستگی جواب‌ها به مش‌بندی

**Table 1** Mesh dependency on the results

| مدل | تعداد المان‌های چرخ | تعداد المان‌های ریل | مقدار خطای شبیه‌سازی (درصد) | مدت زمان اجرای شبیه‌سازی |
|---|---|---|---|---|
| شماره یک | 5120 | 10300 | -26.37 | 12ساعت |
| شماره دو | 7384 | 25400 | -10.06 | 2روز |
| شماره سه | 91000 | 25400 | 2.69 | 7روز |
| شماره چهار | 388000 | 25400 | 5.62 | 12روز |

## 7- ارزیابی مدل هرتز

در بخش نتایج ابتدا به بررسی مدل هرتز به شیوه عددی می‌پردازیم. از آنجا که مدل هرتز برای تماس عمودی جوابی منطبق بر واقعیت دارد اعتبارسنجی آنالیز المان محدود با این مدل انجام خواهد گرفت.

مدل هرتز ناحیه تماس را به صورت بیضی با اقطار $a$ و $b$ در نظر گرفته است. رابطه (20) جهت محاسبه اقطار بیضی هرتز به کار می‌رود.

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{m}\right)^3 = \left(\frac{b}{n}\right)^3 = \frac{3F(\delta_1+\delta_2)}{A+B} \\ a = 5.964\ \text{mm} \quad b = 5.776\ \text{mm} \end{cases} \tag{20}$$

در رابطه (20)؛ $F$ نیروی اعمالی، $A$ و $B$ معکوس شعاع‌های معادل دو جسم در محل تماس، $m$ و $n$ از جدول هرتز استخراج می‌شود و $\delta$ مربوط به جنس اجسام در تماس است.

پس از یافتن اندازه اقطار بیضی هرتز، حداکثر فشار هرتز در ناحیه بدست می‌آید که معادل 478.1 مگاپاسکال است. مقدار مذکور از شبیه‌سازی المان محدود 491 مگاپاسکال به‌دست می‌آید که نشان‌دهنده 3 درصد خطا در جواب المان محدود است. مقدار خطای یاد شده مناسب به نظر می‌رسد.

توزیع تنش فشاری در ناحیه به نحوی است که در هر بیضی (در این مسئله دایره) به مرکزیت تماس، تنش فشاری ثابت است. "شکل 10 و 11" این موضوع را به خوبی نمایش می‌دهد. همچنین تنش‌های فشاری روی دایره‌های مرتبط نوشته شده‌اند. در "شکل 10" دوایر ممتد نتایج حل تحلیلی و مربع‌های متصل شده با خطوط شکسته، نتایج شبیه‌سازی المان محدود هستند. "شکل‌های 11 و 12" نتایج شبیه‌سازی المان محدود را نمایش می‌دهد. نکته بسیار مهمی که در "شکل‌های 11 و 12" دیده می‌شود توزیع تنش در خارج ناحیه تماس است بدین معنی که در خارج ناحیه تماس یک قسمت کششی وجود دارد که تاثیر گرفته از فشار وارده در داخل ناحیه است. از آن‌جا که نظریه هرتز بیرون ناحیه را در نظر نمی‌گیرد، مزیت روش‌های دیگر برای تحلیل خارج ناحیه دیده می‌شود. لازم به ذکر است در "شکل 11" با نزدیک شدن به مرکز همانند "شکل 10" تنش‌ها افزایش داشته و هر بیضی اطراف مرکز مکان هندسی نقاط هم فشار است.

## 8-تماس غلتشی

آنچه در هنگام ترمزگیری جهت عدم لغزش چرخ اهمیت دارد، چسبندگی است که جهت سهولت و بی‌بعد بودن پارامتر مورد بحث از ضریب چسبندگی استفاده خواهد شد.

دستگاه تست در این مرحله اهمیت زیادی دارد تا نتایج قابل اعتمادی جهت اعتبارسنجی به‌دست آید. جهت تست لغزش، ریل به‌صورت دوار طراحی شده و رانش چرخ توسط آن انجام می‌گیرد. پس از رسیدن چرخ به سرعت موردنظر بعد از 4.5 ثانیه، نیروی ترمزی اعمال می‌شود. چنانچه در هنگام اعمال نیروی ترمزی لغزش به بیش از 50 درصد برسد، گشتاور ترمزی کاهش خواهد یافت. همان‌طور که در "شکل 13" نیز دیده می‌شود، دو عدد فلایول جهت یکنواخت کردن تغییرات موجود به ریل متصل شده‌اند. فلایویل‌های مذکور نماینده سرعت واگن نیز هستند.

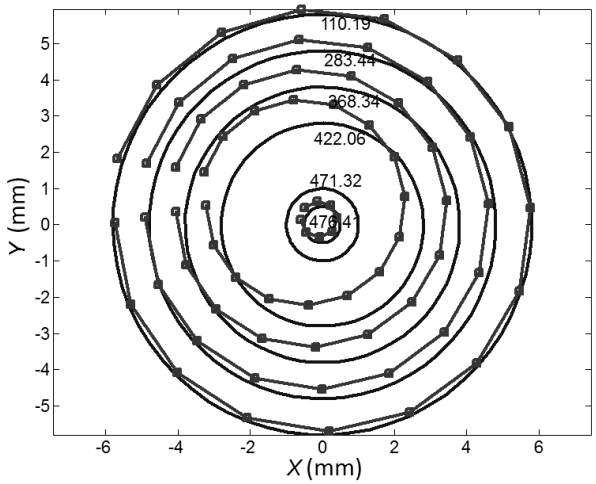



**Fig. 10** Hertz contact area circles

**شکل 10** دوایر تنش فشاری هرتز در ناحیه تماس



[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12 ]
[ DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.8.8 ]

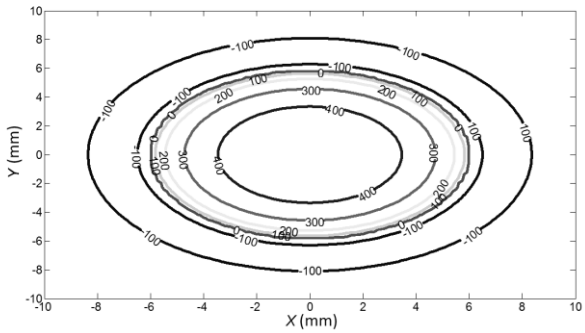



**Fig. 11** Hertz pressure contour in and out of the contact area (MPa)

**شکل 11** کانتور تنش هرتز در داخل و خارج ناحیه تماس (مگاپاسکال)

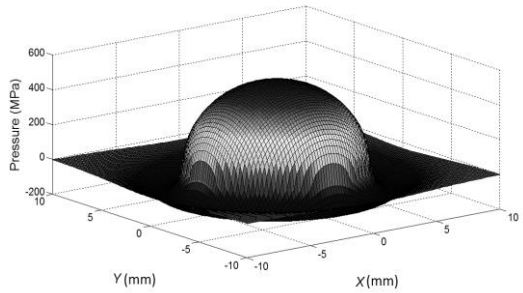


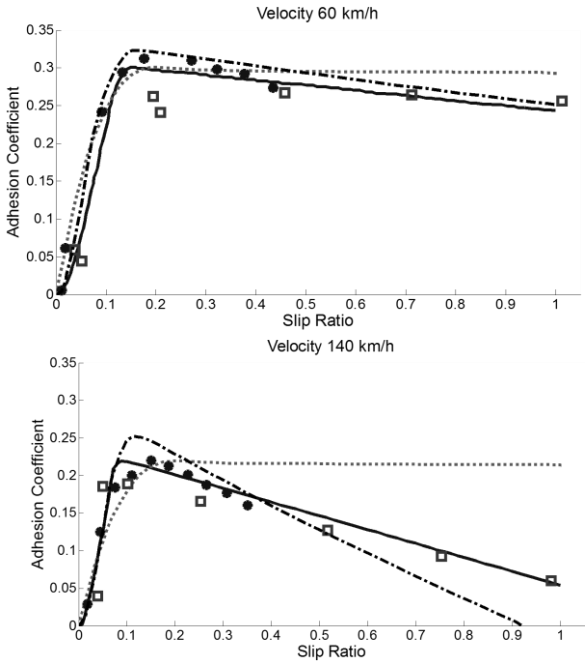

**Fig. 12** Hertz pressure distribution in and out of the contact area

**شکل 12** توزیع تنش هرتز در داخل و خارج ناحیه تماس

"شکل 14" نمودار نتایج تست لغزش را در سرعت 140 کیلومتر بر ساعت نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، به هنگام افزایش لغزش در لحظه 6.38 ثانیه، گشتاور اعمالی جهت ایمنی دستگاه رو به کاهش می‌رود.

## 8- اعتبارسنجی مدل‌های غلتشی

در این بخش تمامی مدل‌ها و شبیه‌سازی‌های انجام شده با آزمایشات عملی




**شکل 15** نتایج شبیه‌سازی و آزمایشات عملی برای چهار سرعت اولیه متفاوت

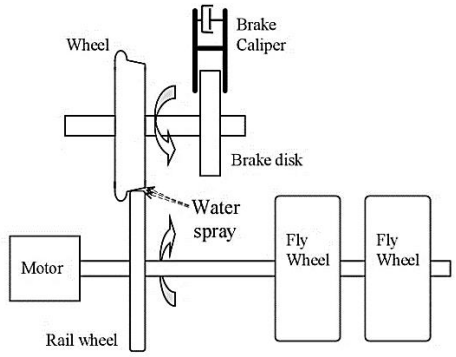



**Fig. 13** Schematic Wheel-rail test rig

**شکل13** شکل شماتیک دستگاه تست

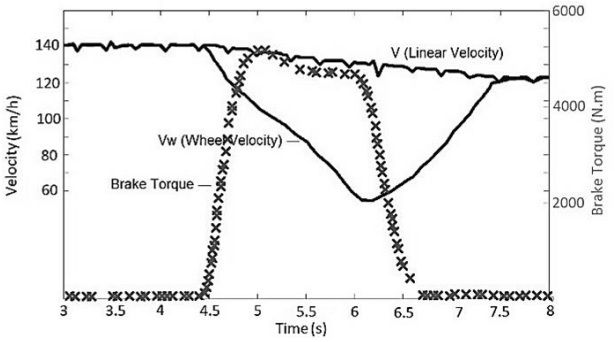



**Fig. 14** Experimental wheel-rail slip results for 140 km/h speed

**شکل 14** نتایج آزمایش عملی لغزش چرخ ریل برای سرعت 140 کیلومتر

مورد سنجش قرار خواهند گرفت. نکته مهمی که در فرآیند شبیه‌سازی و آزمایشات عملی مورد توجه قرار گرفته است، حداقل ضریب اصطکاک ایستایی اعمال شده است. اعمال این مورد در آزمایشات عملی با استفاده از اسپری کردن آب (همان‌گونه که در "شکل 13" نیز دیده می‌شود) و در شبیه‌سازی نرم‌افزاری وارد کردن مقدار موردنظر که در این تحقیق 0.1 بوده است. در "شکل 15"، خط ممتد، نظریه تیر، خط‌چین نظریه کالکر، خط-

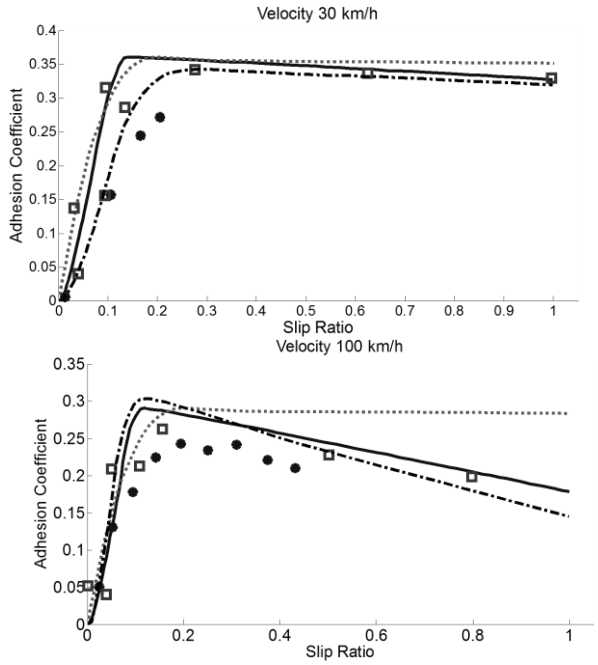



**Fig. 15** Experimental and simulation results for four different initial velocities



[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12 ]
[ DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.8.8 ]

نقطه، نظریه بریستل، علامت‌های ستاره‌ای نتایج آزمایشات عملی و نشان‌های مربع نتایج حاصل از آنالیز المان محدود را نمایش می‌دهند.

## 9- شبیه‌سازی المان محدود

در المان محدود نوع مش‌بندی تاثیر زیادی در حل مسئله و جواب نهایی دارد تا جایی که می‌تواند حتی جواب‌های متوالی را واگرا از جواب اصلی نشان دهد. از آنجا که تحلیل تماس مماسی یا همان ترکشن در نرم‌افزارهای المان محدود بسیار مشکل بوده تا جایی که پژوهشگران تحلیل با استفاده از مدل‌های کلاسیک را ترجیح می‌دهند، طبیعی‌ست در این مرحله عدم انطباق‌هایی در جواب‌های المان محدود وجود داشته باشد.

چنانچه در "شکل 15" مشاهده می‌گردد المان محدود رفتار تماس را در قبل و بعد از پیک نمودار با اختلاف پیش‌بینی کرده که دلیل این اختلاف می‌تواند اول عدم وجود نتایج ازمایشگاهی کافی بعد از پیک باشد و دیگری در ابتدای تست امکان وجود نویزهای گذرا در دستگاه باشد. اما نکته قابل توجه و بسیار مهم، تطابق خوب تحلیل المان محدود در حوالی پیک نمودار است که به جهت انتخاب ضریب چسبندگی حائز اهمیت است. با این حال میانگین اختلافات المان محدود 15.18 درصد (جدول 2) است که برای یک روش ارزان قیمت، بسیار مناسب است. همچنین طبق جدول 2، خطای آنالیز المان محدود با بیشتر شدن سرعت، کم می‌شود در نتیجه برای سرعت‌های بالا که انجام آزمایشات عملی پرهزینه خواهد بود این روش جایگزین خوبی می‌باشد.

## 10- مدل تیر

در قسمت ابتدایی ناحیه چسبندگی، همانند دو تئوری دیگر عمل کرده و با تقریب خوبی می‌توان هر سه نمودار را مشابه در نظر گرفت. طبق پیش‌بینی‌های صورت گرفته، بهترین مدل جهت چرخ با ممان منفی یا ترمزی مدل تیر است که در صنعت خودرو نیز آزموده شده است. همان‌طور که در "شکل 15" و جدول 2 مشاهده می‌گردد، میانگین درصد خطای پیش‌بینی تماس تا 11.81 درصد کاهش یافته که نشان می‌دهد مدل حاضر، در زمینه ترمزگیری و اشباع ناحیه تماس مورد اعتماد خواهد بود. نکته مهمی که در "شکل 13" دیده می‌شود، بالا رفتن میزان خطا در اطراف پیک منحنی است که نشان عدم اطمینان به مدل تیر در نواحی موردنظر خواهد شد. در این زمینه پیشنهاد میشود در نواحی ذکر شده، تحلیل المان محدود جایگزین شود. خوشبختانه مدل تیر در سرعت اولیه 140 کیلومتر خطای کمی را داشته که نشان‌دهنده قابلیت به کارگیری تئوری مذکور در سرعت‌های بالا است.

## 11- مدل بریستل

مدل بریستل برمبنای لغزش ارائه شده و طبیعی است که در این مسئله جواب‌های قابل قبولی ارائه کند. همان‌طور که در "شکل 15" دیده می‌شود در مجموع بهترین مدل طرح شده برای زمان ترمزگیری این تئوری است. نکته قابل توجه و مهم اختلاف جزیی درصد خطای تئوری تیر و بریستل است. این مسئله با توجه به "شکل 15"، مفهوم‌تر خواهد بود. جهت درک بهتر موضوع با توجه به قسمت ناپایدار نمودار سرعت 140 کیلومتر "شکل 15" شیب هماهنگ نتایج عملی با تئوری بریستل بخوبی مشاهده می‌شود حال آن‌که نمودار تیر از میان داده‌های عملی گذشته است. بدین معنی که خطای تئوری تیر و بریستل تقریبا یکسان است اما هماهنگی بهتر و منسجم‌تری بین مدل بریستل و نتایج عملی دیده می‌شود.

همان‌طور که جدول 2 نشان می‌دهد با اندکی اغماض می‌توان گفت مدل بریستل مستقل از سرعت اولیه واگن جهت ترمزگیری عمل می‌کند و در مجموع با 11.05 درصد خطا بهترین مدل برای مسئله ترمزگیری محسوب می‌شود.

**جدول 2** خطاهای موجود در مدل‌های ارائه شده

**Table 2** Errors in the proposed models

| مدل | 30 کیلومتر بر ساعت | 60 کیلومتر بر ساعت | 100 کیلومتر بر ساعت | 140 کیلومتر بر ساعت | میانگین |
|---|---|---|---|---|---|
| مدل بریستل | 14.58 | 8.67 | 15.42 | 5.55 | 11.05 |
| مدل تیر | 20.45 | 6.45 | 14.71 | 5.62 | 11.81 |
| مدل کالکر | 73.96 | 13.15 | 27.67 | 17.60 | 35.61 |
| تحلیل المان محدود | 17.73 | 18.21 | 11.99 | 12.79 | 15.18 |

## 12- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

این تحقیق به بررسی لغزش در حرکت چرخ قطار هنگام ترمزگیری پرداخته است. پروفیل چرخ مورد استفاده S1002 بود که بروی چرخ UIC60 قرار گرفته است. تحلیل در 4 سرعت ابتدایی 30، 60، 100 و 140 کیلومتر بر ساعت انجام شد. ابتدا با استفاده از تئوری هرتز تنش‌های عمودی تحلیل گردید و سپس در قسمت تنش غلتشی مدل کالکر، تیر، بریستل و آنالیز المان محدود جهت بررسی مسئله به کار گرفته شد. از آنجا که مدل کالکر از مدل‌های کلاسیک بوده و نیاز غلتش را در ناحیه اشباع به خوبی بررسی نکرده است، نتایج آزمایشات عملی خطای 35.61 درصد را برای این تئوری محاسبه کرده است. آنالیز المان محدود به لحاظ دور بودن از هرگونه نویز و یا خطای اضافی (به جز خطای مش‌بندی)، توانست خطای میانگین 15.18 درصد را نمایش دهد. اما با دقت به توزیع خطای این مدل، دیده می‌شود که در حوالی پیک نمودار بهتر عمل کرده است. دلیل این موضوع ارائه حداکثر ضریب چسبندگی به نرم‌افزار به‌صورت پیش‌فرض است. مدل‌های تیر و بریستل در مهندسی خودرو کاربرد دارد. از آن‌جا که در مهندسی خودرو، تایر با ضرایب لغزش زیادی روبروست، این مدل‌ها بخوبی توانسته‌اند خطایی معادل 11.18 و 11.05 درصد را داشته باشند. نکته مهم در ارتباط با مدل‌های مهندسی خودرو پیش‌بینی بسیار خوب در ناحیه اشباع لغزش است. لازم به توضیح است که مدل بریستل هماهنگی بسیار مناسب‌تری نسبت به مدل تیر داشته و بخوبی توانسته نرخ و رفتار لغزش را در ناحیه اشباع ارائه کند.

## 13- مراجع


[1] E. Winkler, *The Theory of Elasticity and Strength*, pp. 77-93, Prague: Dominicus, 1867.

[2] T. Telliskivi, U. Olofsson, Contact mechanics analysis of measured wheel–rail, *Rail Rapid Transit*, Vol. 215, No. 2, pp. 65–73, 2005.

[3] M. S. Sichani, R. Enblom, M. Berg, Comparison of non-elliptic contact models: Towards fast and accurate modelling of wheel–rail contact, *Wear*, Vol. 314, No. 1–2, pp. 111–117, 2014.

[4] F. D. Fischer, W. Yan, Applicability of the Hertz contact theory to rail–wheel contact problem, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 70, No. 4, pp. 255–268, 2000.

[5] F. W. Carter, On the action of a locomotive driving wheel, *Proceedings of the Royal Society of London*, Vol. 112, No. 760, pp. 151–157, 1926.

[6] K. L. Johnson, The effect of a tangential contact force upon the rolling motion of an elastic sphere on a plane, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 80, No. 9, pp. 339–346, 1958.


[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12 ]

[ DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.8.8 ]

[7] K. L. Johnson, The effect of spin upon the rolling motion of an elastic sphere on a plane, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 80, No. 12, pp. 332–338, 1958.
[8] D. J. Haines, E. Ollerton, E. Ollerton, Contact stress distributions on elliptical contact surfaces subjected to radial and tangential forces, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 177, No. 1, pp. 95–114, 1963.
[9] M. Sh. Sichani, R. Enblom, M. Berg, A novel method to model wheel–rail normal contact in vehicle dynamics simulation, *Vehicle System Dynamics*, Vol. 52, No. 12, pp. 1752–1764, 2014.
[10] J. J. Kalker, *Rolling Contact Phenomena : Linear Elasticity*, Critical Incident Stress Management Courses Lectures, pp. 1–84, 2000.
[11] P. J. Vermeulen, K. L. Johnson, Contact of nonspherical elastic bodies transmitting tangential forces, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 31, No. 2, pp. 338, 1964.
[12] S. Iwnicki, T. Dahlberg, *Handbook of Railway Vehicle Dynamics*, pp. 213-251, Crc press, Taylor & Francis group, 2006.
[13] M. Sh. Sichani, R. Enblom, M. Berg, An alternative to FASTSIM for tangential solution of the wheel–rail contact, *Vehicle System Dynamics*, Vol. 54, No. 6, pp. 748–764, 2016.
[14] S. H. Park, J. S. Kim, J. J. Choi, Reference slip ratio generation and adaptive sliding mode control for railway rolling stocks, *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, Vol. 10, No. 2, pp. 39–44, 2009.
[15] H. Sakai, *Tire Engineering*, pp. 44-51, Tokyo: Grand Prix, 1987.
[16] C. de Wit, H. Olsson, K. J. Astrom, P. Lischinsky, A new model for control of systems with friction, *Automatic Control, IEEE Transactions*, Vol. 40, No. 3. pp. 419–425, 1995.
[17] T. Piatkowski, *Dahl and Lugre Dynamic Friction Models the Analysis of Selected Properties*, Vol. 73, Elsevier Ltd, pp. 91-100, 2014.
[18] V. Van Geffen, A Study of Friction Models and Friction Compensation, 2nd Edition, pp. 22-30, Technische Universiteit Eindhoven, 2009.
[19] D. H. Lee, J. W. Seo, S. J. Kwon, H. Y. Choi, Three-dimensional transient rolling contact analysis of similar elastic cylinders, *Procedia Engineering*, Vol. 10, No. 112, pp. 2633–2638, 2011.

[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12 ]

[ DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.8.8 ]