



## مطالعه رفتار وابسته به اندازه در یک میکروتیر تحت اثر یک فشار الکترواستاتیکی غیر خطی

مرتضی صادقی<sup>1</sup>، محمد فتحعلی‌لو<sup>2</sup>، قادر رضازاده<sup>3\*</sup>

- 1- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز  
 2- دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز  
 3- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه  
 \* ارومیه، صندوق پستی 57169-33111 g.rezazadeh@urmia.ac.ir

### چکیده

رفتار وابسته به اندازه مواد موقعی بروز پیدا می‌کند که اندازه ضخامت یک سازه نزدیک به مقدار پارامتر مشخصه طولی ماده باشد. در چنین مواردی نادیده گرفتن این رفتار ممکن است به نتایج نادرستی منجر شود. در این مقاله اثر شدید وابستگی به اندازه روی رفتار استاتیکی و دینامیکی میکروتیرهای با تحریک الکترواستاتیکی مطالعه شده است. نقاط تعادلی میکروتیرهای با جنس طلا و نیکل تعیین شده و نشان داده شده است که به ازاء یک ولتاژ استاتیکی داده شده، اختلاف قابل توجهی بین نقاط تعادلی به دست آمده با تئوری‌های کلاسیک و تنش کوپل اصلاح شده وجود دارد. از سوی دیگر نشان داده شده است که ولتاژهای پولین استاتیکی و دینامیکی محاسبه شده با تئوری تنش کوپل چندین برابر ولتاژهای به دست آمده با تئوری کلاسیک می‌باشند. برخی از محققین گذشته از تئوری کلاسیک استفاده نموده و برای پوشش اختلاف قابل توجه نتایج تجربی با تئوری، از مقدار قابل توجهی تنش پسماند کششی فرضی در مدل خود استفاده نموده‌اند. ولی نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که با استفاده از تئوری تنش کوپل اختلاف نتایج تئوری و تجربی به میزان قابل توجهی کاهش می‌یابد.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
 دریافت: 24 آذر 1392  
 پذیرش: 07 دی 1392  
 ارائه در سایت: 30 مهر 1393  
 کلید واژگان:  
 میکروتیر  
 الکترواستاتیکی  
 تنش کوپل  
 پولین  
 پارامتر مشخصه طولی

## Study on the Size Dependent Behavior of a Micro-beam Subjected to a Nonlinear Electrostatic Pressure

Morteza Sadeghi<sup>1</sup>, Mohammad Fathalilou<sup>1</sup>, Ghader Rezazadeh<sup>2\*</sup>

- 1- Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran  
 2- Department of Mechanical Engineering, Urmia University, Urmia, Iran  
 \* P.O.B. 57169-33111 Urmia, Iran, g.rezazadeh@urmia.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
 Received 15 December 2013  
 Accepted 28 December 2013  
 Available Online 22 October 2014

**Keywords:**  
 Microbeam  
 Electrostatic  
 Couple Stress  
 Pull-in  
 Length Scale Parameter

### ABSTRACT

Size dependent behavior of materials appears for a structure when the characteristic size such as thickness or diameter is close to its internal length-scale parameter. In these cases, ignoring this behavior in modeling may lead to incorrect results. In this paper, strong effects of the size dependence on the static and dynamic behavior of the electrostatically actuated micro-beams have been studied. The equilibrium positions or fixed points of the gold and nickel micro-beams have been determined and it is shown that for a given DC voltage, there is a considerable difference between the fixed points gained using the classic beam theory and the modified couple stress theory. In addition, it is also seen that the static and dynamic pull-in voltages gained using the couple stress theory are several times higher than those gained using the classic beam theory. Some previous studies have applied the classic beam theory in their models and introduced a considerable hypothetical value of residual stress to match their experimental and incorrect theoretical results. Using the modified couple stress theory considerably decreases the difference with the experimental results.

### 1- مقدمه

موقعی قابل ملاحظه می‌گردد که اندازه ضخامت یا قطر ماده قابل مقایسه با پارامتر مشخصه طولی<sup>3</sup> ماده گردد [9]. تئوری‌های کلاسیک الاستیسیته به دلیل در نظر نگرفتن این پارامتر قادر به تفسیر این رفتار نمی‌باشند و باید از تئوری‌های غیر کلاسیک استفاده نمود [10]. ویت اولین کسی بود که سعی کرد تا نقایص تئوری کلاسیک الاستیسیته را رفع نماید. وی فرض کرد که تراکنش بین دو رویه از یک المان صفحه‌ای داخل جسم علاوه بر یک بردار

میکروتیرها به شکل گسترده‌ای در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی (MEMS) به کار می‌روند [1-5]. بسیاری از مطالعات نشان می‌دهند که در این ساختارها، مواد حین تغییر شکل، رفتار وابسته به اندازه<sup>2</sup> از خود بروز می‌دهند [6-8]. رفتار وابسته به اندازه یکی از ویژگی‌های ذاتی یک ماده است که

- 1- MEMS  
 2- Size dependence

Please cite this article using:

M. Sadeghi, M. Fathalilou, Gh. Rezazadeh, Study on the Size Dependent Behavior of a Micro-beam Subjected to a Nonlinear Electrostatic Pressure, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 137-144, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

نیرو، به وسیله یک بردار کوپل نیز انجام می‌شود [11]. تئوری کامل الاستیسیته نامتقارن در سال 1909 به وسیله کسرات توسعه یافت [12]. این تئوری که در آغاز غیرخطی بود بر این فرض استوار است که یک نقطه مادی در حین تغییر شکل ماده علاوه بر جابه‌جایی می‌تواند به شکل مستقل دوران نیز نماید. بعد از حدود پنجاه سال تئوری کسرات مورد توجه محققین زیادی قرار گرفت [13-22]. در مطالعات تمامی آن‌ها متغیر سینماتیکی وابسته به دوران یک نقطه در نظر گرفته شده بود، ولی نه به عنوان یک متغیر مستقل. بعدها ارینگن با پیروی از الاستیسیته کسرات، تئوری میکروپلار را ارائه داد که در آن بردار میکرو دوران، مستقل از بردار جابه‌جایی المان در نظر گرفته شده است [23]. تعمیم بیشتر تئوری‌های غیر کلاسیک منجر به پیدایش تئوری میکرومورفیک شد که این تئوری فرض می‌کند که یک جسم مادی مجموعه پیوسته‌ای از تعداد زیادی ذره تغییر شکل‌پذیر است که هر ذره اندازه بسیار کوچک و ساختار داخلی مربوط به خود را دارد [24]. با فرض تغییر شکل‌های بسیار کوچک و حرکت‌های آهسته ذرات تئوری میکرومورفیک تبدیل به تئوری میکروساختار میندیلین می‌شود [25]. هنگامی که میکروساختار یک ماده، صلب فرض شود، تئوری میندیلین تبدیل به تئوری میکروپلار ارینگن می‌شود [23]. با یکسان فرض کردن حرکت ماکروی یک المان با حرکت میکروی ساختار داخلی آن، تئوری تنش کوپل ایجاد می‌گردد [19,18]. در نهایت اگر ذره به عنوان یک نقطه مادی فرض شود در این صورت تمامی تئوری‌ها تبدیل به تئوری کلاسیک معمولی الاستیسیته می‌شوند.

تئوری عمومی میندیلین شامل سه فرم معادل است که اختلاف آن‌ها در عبارت چگالی انرژی کرنشی می‌باشد [25]. عبارت اول شامل گرادیان جابه‌جایی، عبارت دوم شامل گرادیان کرنش و عبارت سوم شامل گرادیان چرخش است. تئوری تنش کوپل بر اساس سومین عبارت از چگالی انرژی کرنشی است، درحالی‌که دومین عبارت منجر به پیدایش تئوری گرادیان الاستیسیته شده است.

در این مقاله، رفتار وابسته به اندازه یک میکروتیر با تحریک الکترواستاتیکی با استفاده از تئوری‌های کلاسیک و تنش کوپل اصلاح شده مدل می‌شود. معادلات استاتیکی و دینامیکی حاکم، به ترتیب با استفاده از روش خطی سازی گام به گام<sup>3</sup> و روش مدل کاهش مرتبه یافته مبتنی بر گالری حل می‌شوند. جهت اطمینان از صحت روش‌های ارائه شده، ولتاژ پولین برای میکروتیر سیلیکونی ارائه شده با نتایج موجود در کارهای گذشته مقایسه می‌شود. سپس ولتاژ پولین برای میکروتیرهای ساخته شده از طلا و نیکل محاسبه شده و اختلاف بین تئوری‌های کلاسیک و تنش کوپل اصلاح شده در این زمینه نشان داده می‌شود. با مقایسه نتایج حاصل برای میکروتیر ساخته شده از طلا با نتایج تجربی موجود، نشان داده می‌شود که سهم تنش پسماند کمتر از مقداری است که برای تطابق نتایج تئوری با تجربی در برخی از مقالات ارائه شده است.

## 2- شرح مدل و معادلات حاکم

شکل 1، یک میکروتیر دوسرگیردار اولر-برنولی را تحت تأثیر فشار یکنواخت الکترواستاتیکی نشان می‌دهد. زمانی که یک ولتاژ بین الکترودهای بالا و پایین اعمال گردد، نیروی الکتریکی حاصل، تیر متحرک بالایی را به سمت پایین می‌کشد.

بر طبق نظریه تنش کوپل اصلاح شده یانگ و همکارانش [10]، معادله ارتعاش عرضی میکروتیر و شرایط مرزی آن در  $x = 0$  و  $x = L$  به صورت

در روابط ظاهر می‌شود [25].

برخی از محققین رفتار استاتیکی و دینامیکی سازه‌ها را بر اساس تئوری تنش کوپل مطالعه کرده‌اند [26,27]. در سال 2002 یانگ و همکارانش تئوری تنش کوپل اصلاح شده را معرفی کردند که در آن تانسور تنش کوپل یک تانسور متقارن در نظر گرفته شده و در نتیجه فقط یک پارامتر مشخصه طولی در روابط ظاهر شده است [10]. با استفاده از این تئوری پارک و همکارانش رفتار استاتیکی یک تیر ساخته شده از اپوکسی را مطالعه نموده‌اند [28]. کونگ و همکارانش معادلات حاکم و شرایط مرزی حاکم بر یک تیر اولر-برنولی را با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده به دست آورده و گزارش کردند که سفتی تیر یک ویژگی وابسته به اندازه است [9].

سیستم‌های میکروالکترومکانیکی در سال‌های اخیر جایگاه ویژه‌ای در تکنولوژی مدرن برای خود پیدا کرده‌اند. عمده کاربرد این سیستم‌ها را می‌توان در فشارسنج‌ها [3]، ژيروسکوپ‌ها [2]، میکرو پمپ‌ها [29]، شتاب‌سنج‌ها [30] و غیره پیدا کرد. کاربرد وسیع این سیستم‌ها عمدتاً به دلیل کوچکی اندازه، کم هزینه بودن و مصرف پایین انرژی است.

میکروتیرهای با تحریک الکترواستاتیکی از جمله پرکاربردترین سازه‌ها در این‌گونه سیستم‌ها هستند. هنگامی که یک میکروتیر بین نیروی الکترواستاتیکی و نیروی الاستیک سازه در حال تعادل قرار می‌گیرد، با

1- Pull-in  
2- Saddle-node  
3- SSLM

روابط (1) و (2) استخراج می‌شوند:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (\bar{E}I + GA l^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q(x, t) \quad (1)$$

$$w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial w}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (2)$$

یک مجموعه از معادلات جبری غیرخطی می‌شود. در این مقاله، روشی ارائه شده است که از دو مرحله تشکیل شده است. در گام اول، روش خطی سازی گام به گام [1] اعمال شده و در گام دوم، روش گالریکین برای حل معادله خطی به دست آمده از مرحله اول به کار گرفته می‌شود. در گام اول، فرض می‌شود که  $\hat{w}_s^k$  تغییر شکل تیر به ازاء ولتاژ اعمالی  $V^k$  باشد. در این صورت با افزایش ولتاژ اعمالی به مقدار جدید تغییر شکل در مرحله جدید به شکل رابطه (8) نوشته می‌شود:

$$\hat{w}_s^{k+1} = \hat{w}_s^k + \delta \hat{w} = \hat{w}_s^k + \psi(\hat{x}) \quad (8)$$

درحالی که در رابطه (9) داریم:

$$V^{k+1} = V^k + \delta V \quad (9)$$

بنابراین معادله استاتیکی حاکم در مرحله  $k + 1$  می‌تواند به شکل رابطه (10) نوشته شود:

$$(1 + \alpha) \frac{d^4 \hat{w}_s^{k+1}}{d\hat{x}^4} = \beta \left( \frac{V^{k+1}}{1 - \hat{w}_s^{k+1}} \right) \quad (10)$$

با در نظر گرفتن مقدار کوچک  $\delta V$ ،  $\psi(\hat{x})$  به اندازه کافی کوچک خواهد بود، بنابراین با استفاده بسط تیلور حول در معادله 10 و در نظر گرفتن جمله اول سری به ازاء مقدار کوچک  $\delta V$  می‌توان به دقت مناسب دست یافت. معادله خطی شده برای محاسبه  $\psi(\hat{x})$  به شکل رابطه (11) بیان می‌شود:

$$(1 + \alpha) \frac{d^4 \psi}{d\hat{x}^4} - 2\beta \frac{(V^k)^2}{(1 - \hat{w}_s^k)^3} \psi - 2\beta \frac{V^k \delta V}{(1 - \hat{w}_s^k)^2} = 0 \quad (11)$$

حال معادله خطی به دست آمده می‌تواند به روش گالریکین حل شود. به این منظور  $\psi(\hat{x})$  به صورت جمع توابع متعامد به شکل رابطه (12) نوشته می‌شود:

$$\psi(\hat{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \phi_j(\hat{x}) \quad (12)$$

در این مقاله  $\phi_j(\hat{x})$  به عنوان  $z$  امین شکل مود طبیعی میکروتیر انتخاب شده است. حال تابع  $\psi(\hat{x})$  با قطع سری به  $n$  جمله به شکل رابطه (13) تقریب زده می‌شود:

$$\psi(\hat{x}) \approx \sum_{j=1}^n a_j \phi_j(\hat{x}) \quad (13)$$

با جایگذاری معادله 13 در معادله 11 و ضرب طرفین معادله در  $\phi_j(\hat{x})$  به عنوان تابع وزنی در روش گالریکین و نهایتاً انتگرال گیری از حاصل از صفر تا یک مجموعه‌ای از معادلات جبری خطی به شکل رابطه (14) تولید می‌شود:

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} a_j = F_i \quad i = 1, \dots, n \quad (14)$$

که در این معادله  $K_{ij}^m = K_{ij}^m - K_{ij}^e$  و طبق رابطه (15) داریم:

$$K_{ij}^m = (1 + \alpha) \int_0^1 \phi_i \phi_j^{iv} d\hat{x}, \quad K_{ij}^e = 2\beta \frac{(V^k)^2}{(1 - \hat{w}_s^k)^3} \int_0^1 \phi_i \phi_j d\hat{x}, \quad F_i = 2\beta \frac{V^k \delta V}{(1 - \hat{w}_s^k)^2} \int_0^1 \phi_i d\hat{x} \quad (15)$$

به منظور مطالعه پاسخ دینامیکی میکروتیر، یک مدل کاهش مرتبه یافته مبتنی بر روش گالریکین مورد استفاده قرار می‌گیرد [1]. به دلیل غیرخطی بودن نیروی الکترواستاتیک، اعمال مستقیم روش گالریکین منجر به ایجاد  $n$  معادله دیفرانسیل کوپل شده می‌شود که حل را بسیار پیچیده می‌کند. برای

$\rho$  و  $A$  به ترتیب چگالی و مساحت سطح مقطع می‌باشند.  $\bar{E}$  برای تیر باریک، همان مدول الاستیسیته ( $E$ ) و برای تیر عریض،  $E/(1 - \nu^2)$  است و  $\nu$  نسبت پواسون ماده تیر می‌باشد [34]. در معادله (1) به صورت واضح دیده می‌شود که سفتی خمشی تیر از دو قسمت تشکیل می‌شود،  $\bar{E}I$  نماینده سفتی خمشی تئوری کلاسیک و  $GA l^2$  در ارتباط با نظریه تنش کوپل اصلاح شده می‌باشد. در این معادله پارامتر مشخصه طولی ( $l$ )، بیانگر رفتار وابسته به اندازه تیر می‌باشد. واضح است که اگر اثر میکروساختار صرف نظر شود یعنی  $l = 0$ ، تئوری تنش کوپل اصلاح شده به تئوری کلاسیک به معادله (3) تبدیل می‌شود:

$$\bar{E}I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (3)$$

در میکروتیرهای با تحریک الکترواستاتیکی، بار گسترده خارجی در واحد طول  $q(x, t)$ ، به صورت رابطه (4) نوشته می‌شود [34]:

$$q(x, t) = \frac{ebV^2(t)}{2(d-w)^2} \quad (4)$$

که  $V(t)$  ولتاژ اعمالی بین الکترودهای ساکن و متحرک می‌باشد. لازم به ذکر است که تیرهای دوسرگیردار، وقتی که تحت خمش قرار می‌گیرند در معرض نیروی کششی محوری غیرخطی قرار می‌گیرند. در مدل مورد استفاده، به دلیل کوچک بودن فاصله دو تیر و در نتیجه پایین بودن میزان کشش لایه میانی از این اثر صرف نظر شده است. برای راحتی تحلیل، معادله 1 می‌تواند به شکل بی بعد نوشته شود. لذا  $w$  و  $x$  به ترتیب با روابط  $\hat{w} = w/d$  و  $\hat{x} = x/L$  نرمالیزه شده‌اند. زمان نیز به وسیله پریود مشخصه سیستم به صورت  $\hat{t} = t/t^*$  بی بعد می‌شود که در آن  $t^* = (\rho b h L^4 / \bar{E}I)^{1/2}$ . با جایگذاری این پارامترهای بی بعد در معادله 1، معادله به فرم بی بعد زیر نوشته می‌شود (معادله 5):

$$(1 + \alpha) \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \hat{x}^4} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2} = \beta \left( \frac{V_s(t)}{1 - \hat{w}(\hat{x}, \hat{t})} \right)^2 \quad (5)$$

پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  به شکل رابطه (6) تعریف می‌شوند:

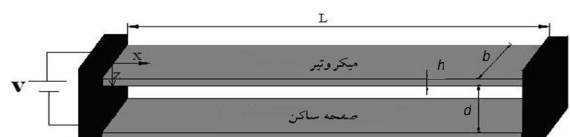
$$\alpha = \frac{GA l^2}{\bar{E}I} \quad \text{و} \quad \beta = \frac{6eL^4}{Eh^3 d^3} \quad (6)$$

معادله استاتیکی نیز با حذف ترم‌های وابسته به زمان از معادله دینامیکی به فرم رابطه (7) نوشته می‌شود:

$$(1 + \alpha) \frac{d^4 \hat{w}_s}{d\hat{x}^4} = \beta \left( \frac{V}{1 - \hat{w}_s} \right) \quad (7)$$

### 3- آنالیز عددی

به دلیل غیرخطی بودن معادله استاتیکی حاکم، حل آن پیچیده و زمان‌بر خواهد بود. اعمال مستقیم روش گالریکین یا تفاضل محدود منجر به ایجاد



شکل 1 یک میکروتیر دو سرگیردار با تحریک الکترواستاتیک

نتایج تئوری و آزمایشگاهی هونگ و همکارانش [40] به ازاء مقادیر مختلف ولتاژ پله اعمالی مقایسه شده است. زمان پولین زمانی است که به ازاء آن صعود ناگهانی در پاسخ ارتعاشی میکروتیر به ولتاژ پله رخ می‌دهد [34]. همان‌طور که در شکل 2 مشخص است نتایج محاسبه شده، در تطابق خوبی با نتایج تئوری و تجربی موجود قرار دارند. همچنین شکل 2 نشان می‌دهد که برای حالت بدون میرایی برای ولتاژهای کوچک‌تر از 8/18 V ناپایداری پولین اتفاق نمی‌افتد. بنابراین این ولتاژ پله به عنوان ولتاژ پولین دینامیکی برای تیر داده شده معرفی می‌شود. در بررسی صحت نتایج استاتیکی و دینامیکی، جنس تیرهای مورد مطالعه از سیلیکون بود که همان‌گونه که قبلاً نیز اشاره شد دارای پارامتر مشخصه طولی بسیار کوچک در مقایسه با ضخامت تیر می‌باشد [39]. بنابراین تئوری‌های کلاسیک و تنش کوپل منجر به محاسبه ولتاژ پولین یکسان برای تیر داده شده می‌شوند. اما موقعی که پارامتر مشخصه طولی در مقایسه با ضخامت تیر قابل ملاحظه باشد چه اتفاقی می‌افتد؟ انتظار می‌رود که اختلاف ولتاژ پولین محاسبه شده بین دو تئوری قابل ملاحظه باشد. در این حالت برخی از محققین برای تطابق نتایج تجربی با نتایج تئوری کلاسیک مجبور به در نظر گرفتن مقدار فرضی زیادی برای تنش پسماند در مدل خود شده‌اند [35-37].

به عنوان مثال بالسترا و همکارانش [35] برای یک میکروتیر ساخته شده از طلا مقدار فرضی 30 MPa را به عنوان تنش پسماند برای تطابق نتایج تجربی با تئوری کلاسیک در نظر گرفته‌اند. به علاوه آن‌ها گزارش کرده‌اند که با افزایش ضخامت میکروتیر مقدار تنش پسماند کم‌تر شده و تطابق نتایج تجربی با تئوری کلاسیک بیشتر می‌شود. به عنوان مثال دیگر، پاچو و همکارانش [37] برای میکروتیر ساخته شده از نیکل گزارش کرده‌اند که ولتاژ پولین تجربی حدود نه برابر ولتاژ پولین محاسبه شده با تئوری کلاسیک است. آن‌ها فرض کرده‌اند که بخش اعظم این اختلاف به دلیل وجود تنش پسماند در پروسه ساخت تیر بوده است که آن را حدود 150 MPa تخمین زده‌اند. برای نشان دادن جزئیات بیشتر، دو میکروتیر طلا و نیکل با مشخصات هندسی میکروتیر طلای ساخته شده به وسیله بالسترا و همکارانش [35] در نظر گرفته می‌شود. سایر مشخصات این دو میکروتیر در جدول 3 آمده است. شکل 3 موقعیت‌های تعادلی میکروتیرهای داده شده را بر حسب ولتاژ استاتیکی اعمالی به عنوان یک پارامتر کنترلی نشان می‌دهد. همان‌طور که در

حل این پیچیدگی، ترم نیرو را در معادله 5 در هر مرحله از انتگرال‌گیری زمانی مقدار ثابتی می‌گیریم که این مقدار ثابت برابر مقدار نیرو در مرحله قبلی خواهد بود. انتخاب گام‌های زمانی بسیار کوچک باعث می‌شود این فرض با خطای بسیار ناچیزی همراه شود. برای به دست آوردن مدل کاهش مرتبه یافته  $\hat{w}(\hat{x}, \hat{t})$  به شکل رابطه (16) تقریب زده می‌شود:

$$\hat{w}(\hat{x}, \hat{t}) = \sum_{j=1}^n T_j(\hat{t}) \phi_j(\hat{x}) \quad (16)$$

با جایگذاری معادله 16 در معادله 5 و ضرب طرفین در  $\phi_j(\hat{x})$  به عنوان تابع وزنی و انتگرال‌گیری از حاصل از صفر تا یک، مدل کاهش یافته مبتنی بر روش گال‌کین به شکل رابطه (17) ایجاد می‌شود:

$$\sum_{j=1}^n M_{ij} \ddot{T}_j(\hat{t}) + \sum_{j=1}^n K_{ij} T_j(\hat{t}) = F_i \quad (17)$$

در این معادله  $M$  و  $K$  به ترتیب بیانگر ماتریس‌های جرم و سفتی سیستم می‌باشند. همچنین بردار نیرو را معرفی می‌کند. بردار و ماتریس‌های مذکور به شکل رابطه (18) تعریف می‌شوند:

$$M_{ij} = \int_0^1 \phi_i \phi_j d\hat{x}, \quad K_{ij} = (1 + \alpha) \int_0^1 \phi_i \phi_j^{iv} d\hat{x}, \quad F_i = \int_0^1 \phi_i F(V, \hat{w}) d\hat{x} \quad (18)$$

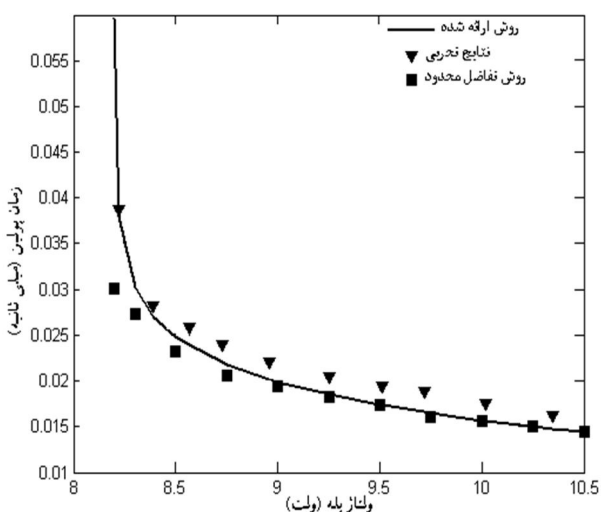
حال معادله 17 می‌تواند با روش‌های مختلف مانند روش رانگ-کوتا روی زمان انتگرال‌گیری شود درحالی‌که  $\hat{w}(\hat{x}, \hat{t})$  در هر مرحله از انتگرال‌گیری زمانی مقدار مرحله قبلی را به خود می‌گیرد.

#### 4- ارائه نتایج

به منظور بررسی صحت روش عددی ارائه شده در آنالیز استاتیکی، یک میکروتیر سیلیکونی دو سرگردار با مشخصات هندسی و فیزیکی ارائه شده در جدول 1 در نظر گرفته می‌شود.

در جدول 2 ولتاژ پولین محاسبه شده در این مقاله با نتایج موجود گذشته برای تیر با مشخصات جدول 1 مقایسه گردیده است. همان‌گونه که مشخص است نتایج به دست آمده در تطابق خوبی با کارهای گذشته است.

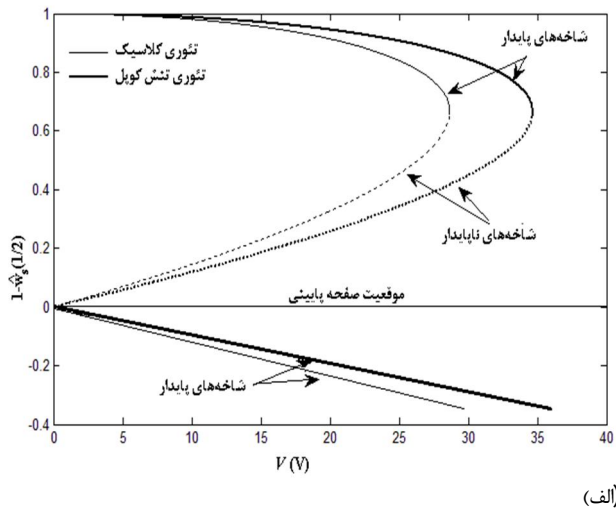
برای بررسی صحت نتایج دینامیکی با کارهای گذشته، یک میکروتیر دو سرگردار که در مرجع [40] به عنوان فشارسنج مورد استفاده قرار گرفته است، مطالعه می‌شود. در شکل 2 زمان پولین محاسبه شده در این مقاله با



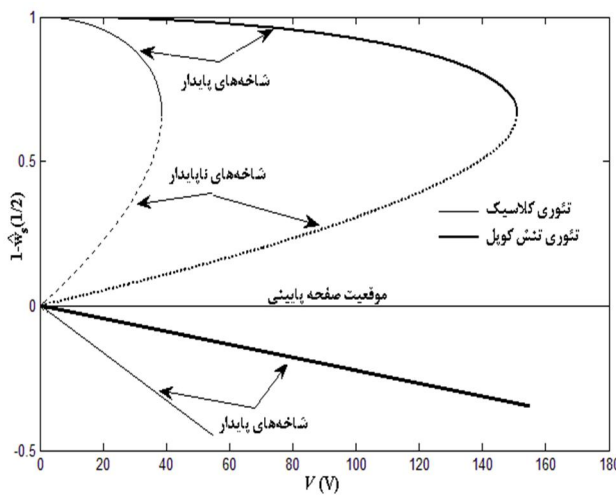
شکل 2 مقایسه زمان پولین محاسبه شده با نتایج قبلی

مقدار	متغیر طراحی
50 $\mu\text{m}$	$b$
3 $\mu\text{m}$	$h$
1 $\mu\text{m}$	$d$
169 GPa	$E$
2330 $\text{kg/m}^3$	$\rho$
8/85 PF/m	$\epsilon$
0/06	$\nu$

طول	نتایج مقاله حاضر	روش انرژی [3]	MEMCAD [3]
350 $\mu\text{m}$	20/1v	20/2v	20/3 v
250 $\mu\text{m}$	39/5 v	39/5 v	40/1 v



(الف)



(ب)

شکل 3 تغییرات فاصله مرکزی دو صفحه بر حسب ولتاژ اعمالی (الف. میکروتیر طلا و ب. میکروتیر نیکل)

نتایج نادرست خواهد شد و تئوری تنش کوپل اصلاح شده موجب بهبود نتایج می‌شود. در شکل 7 پدیده پولین دینامیکی برای میکروتیر طلا نشان داده شده است. همان طور که مشخص است با اعمال تئوری کلاسیک، پولین در ولتاژ 26.33V اتفاق می‌افتد؛ درحالی‌که با در نظر گرفتن تئوری تنش کوپل اصلاح شده، در این ولتاژ پولین اتفاق نیفتاده و میکروتیر همچنان به ارتعاش خود ادامه خواهد داد. در شکل 8-الف و 8-ب صفحات فازی برای میکروتیر به ازاء شرایط اولیه صفر و ولتاژهای پله متفاوت ترسیم شده است. همچنین در این شکل نشان داده شده است که پاسخ میکروتیر به ولتاژ پله کوچک، یک پاسخ هارمونیک است و با افزایش مقدار ولتاژ اعمالی، به دلیل ماهیت وابسته به تغییر شکل نیروی الکترواستاتیک غیر خطی و کاهش مقدار سفتی معادل، پیرو ارتعاشات افزایش یافته و یک شکست متقارن در منحنی حرکت روی می‌دهد. به علاوه همان طور که در شکل‌های 8-الف و 8-ب نشان داده شده است، در این حالت نیز اختلاف قابل توجهی بین دو تئوری وجود دارد.

همان طور که نتایج نشان می‌دهد در میکروتیرهای طلا و نیکل که پارامتر مشخصه طولی قابل ملاحظه‌ای نسبت به ضخامتشان دارند، اعمال تئوری کلاسیک می‌تواند منجر به نتایج نادرستی شود، پس بنابراین تئوری‌های غیر کلاسیک مانند تنش کوپل باید مورد استفاده قرار گیرد. در

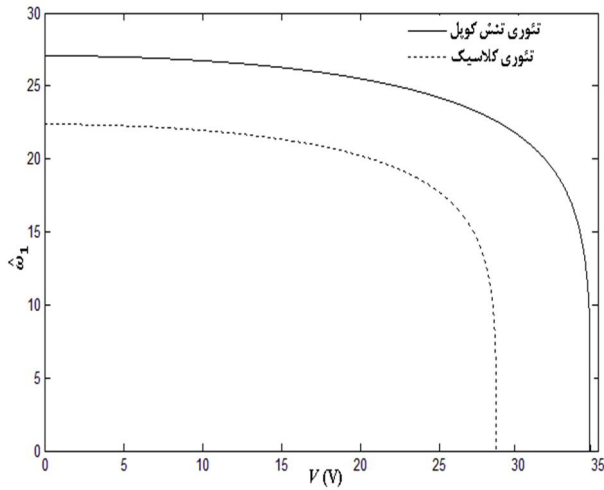
این شکل نشان داده شده است برای یک ولتاژ داده شده، میکروتیر دارای سه نقطه تعادلی می‌باشد که برای تشخیص پایداری یا ناپایداری این نقاط باید به صفحات فازی مراجعه نمود. شکل 4 صفحه فازی را برای میکروتیر طلا به ازاء ولتاژ داده شده و شرایط اولیه مختلف نشان می‌دهد. با توجه به شکل 4 می‌توان فهمید که به ازاء یک ولتاژ داده شده، نقطه تعادل اول یک نقطه پایدار سنتر<sup>1</sup>، نقطه دوم یک نقطه ناپایدار سدل و سومی از نظر ریاضی یک نقطه پایدار سنتر است که از نظر فیزیکی به دلیل وجود صفحه ثابت پایینی امکان پذیر نیست. همان‌گونه که در این شکل نشان داده شده است دو حوضه جاذب<sup>2</sup> برای سنتر پایدار و یک حوضه دافع<sup>3</sup> برای سدل وجود دارد. حوضه اول جاذب یک حوضه محدود و دومی یک حوضه نامحدود است. بسته به محل شرایط اولیه، سیستم می‌تواند پایدار یا ناپایدار باشد. به علاوه، در شکل 3 شاخه‌های پایدار و ناپایدار نقاط تعادلی با افزایش ولتاژ اعمالی هم دیگر را در نقطه بایفورکیشن<sup>4</sup> سدل ملاقات می‌کنند. ولتاژ متناظر با این نقطه همان ولتاژ ناپایداری یا همان ولتاژ پولین در ادبیات ممر است. به بیان دیگر، وقتی که ولتاژ اعمالی برابر با ولتاژ پولین استاتیکی باشد هیچ حوضه جاذب پایدار در بالای صفحه پایینی برای تیر متحرک وجود نخواهد داشت و میکروتیر به ازاء تمامی شرایط اولیه ناپایدار خواهد بود.

از سوی دیگر در شکل‌های 3-الف و 3-ب مقایسه‌ای بین دو تئوری کلاسیک و تنش کوپل به ترتیب برای میکروتیرهای طلا و نیکل صورت گرفته است. همان طور که نشان داده شده است اعمال تئوری تنش کوپل باعث انتقال نقطه بایفورکیشن سدل به سمت راست و در نتیجه افزایش ولتاژ پولین سیستم می‌شود. و نیز به وضوح دیده می‌شود که اختلاف بین دو تئوری در مورد نیکل به مراتب بیشتر از طلاست، زیرا در نیکل نسبت ضخامت به پارامتر مشخصه طولی ( $h/l$ ) از طلا کمتر است. همان طور که در معادلات نیز نشان داده شد، اختلاف بین دو تئوری ارتباط مستقیم با نسبت  $h/l$  دارد. در شکل 5 نشان داده شده است که با افزایش نسبت  $h/l$ ، نسبت ولتاژ پولین محاسبه شده با تئوری تنش کوپل ( $V$ ) به ولتاژ محاسبه شده با تئوری کلاسیک ( $V$ ) کم‌تر شده و به سمت یک میل می‌کند، اما برای مقادیر کم نسبت  $h/l$ ، تفاوت دو تئوری قابل ملاحظه‌تر می‌شود. شکل 6 (الف و ب) تغییرات فرکانس طبیعی اول بی بعد میکروتیرهای طلا و نیکل را نسبت به ولتاژ استاتیکی اعمالی از صفر تا ولتاژ پولین نشان می‌دهد. همان طور که در شکل نشان داده شده است به کارگیری تئوری کلاسیک در این موارد منجر به

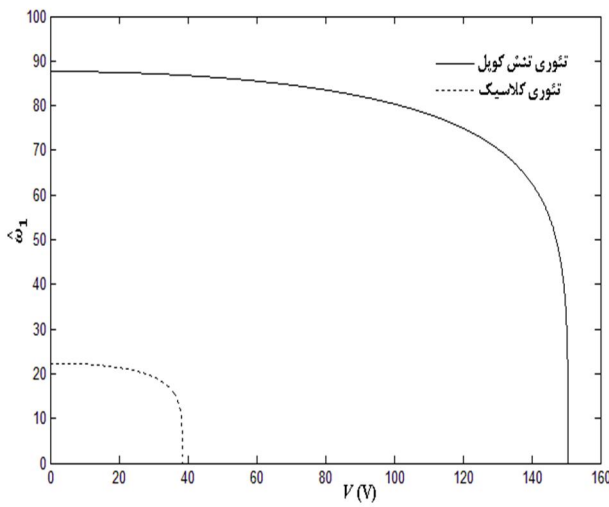
جدول 3 مشخصات هندسی و فیزیکی میکروتیرهای طلا و نیکل

متغیر طراحی	طلا	نیکل
$L$	541/8 $\mu\text{m}$	541/8 $\mu\text{m}$
$b$	32/2 $\mu\text{m}$	32/2 $\mu\text{m}$
$h$	2/68 $\mu\text{m}$	2/68 $\mu\text{m}$
$d$	2/83 $\mu\text{m}$	2/83 $\mu\text{m}$
$E$	98/5 GPa	200 GPa
$G$	27 GPa	76 GPa
$\rho$	19300 $\text{kg/m}^3$	8900 $\text{kg/m}^3$
$l$	1/12 $\mu\text{m}$	5 $\mu\text{m}$
$\nu$	0/44	0/31

1- Centre point  
2- Basin of attraction  
3- Repulsive  
4- Bifurcation point

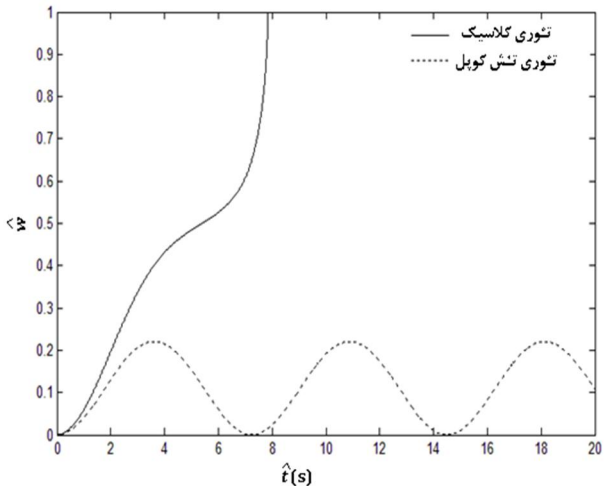


(الف)



(ب)

شکل 6 تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد میکروتیر بر حسب ولتاژ اعمالی (الف) - میکروتیر طلا و ب - میکروتیر نیکل



شکل 7 پاسخ میکروتیر طلا به ولتاژ پله (V=26.33V)

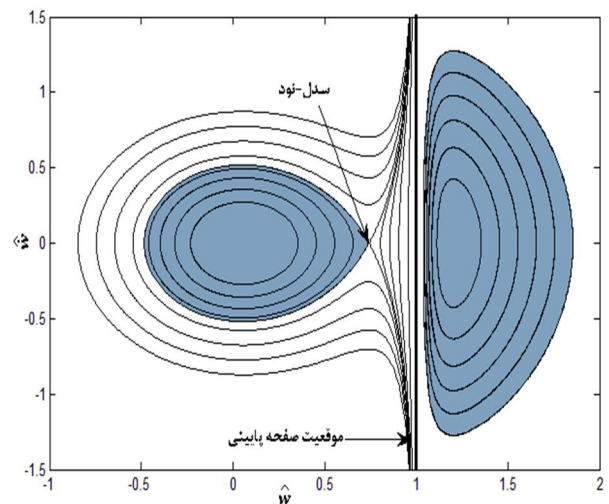
5- نتیجه گیری

در مقاله حاضر، رفتار وابسته به اندازه میکروتیرهای با تحریک الکترواستاتیکی مطالعه شد. معادله حاکم بر تغییر شکل استاتیکی تیر با استفاده از روش

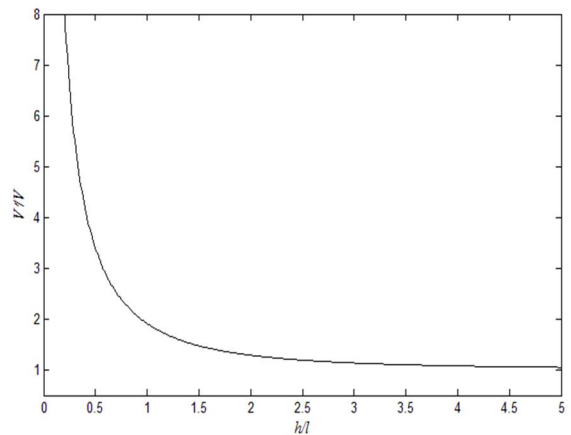
نهایت در جدول 4 ولتاژهای پولین استاتیکی و دینامیکی برای چند ماده مختلف با استفاده از هر دو تئوری ارائه و مقایسه می شود. نتایج این جدول برای میکروتیرهایی با مشخصات هندسی جدول 3 ارائه می شود.

جدول 4 مقایسه ولتاژهای پولین استاتیکی و دینامیکی برای چند ماده

فلز	مشخصات ماده	کلاسیک	تنش کوپل	تجربی
طلا	$E=98/5 \text{ GPa}, G=27 \text{ GPa}, \rho=19300 \text{ kg/m}^3, \nu=0/44, l=1/12 \mu\text{m}$	28/57 v	34/55 v	57 v
نیکل	$E=200 \text{ GPa}, G=76 \text{ GPa}, \rho=89000 \text{ kg/m}^3, \nu=0/31, l=0/5 \mu\text{m}$	38/44 v	150/60 v	-
جیوه	$E=83 \text{ GPa}, G=30 \text{ GPa}, \rho=10490 \text{ kg/m}^3, \nu=0/37, l=0/2 \mu\text{m}$	25/35 v	25/61 v	-
مس	$E=110 \text{ GPa}, G=48 \text{ GPa}, \rho=8920 \text{ kg/m}^3, \nu=0/34, l=3/7 \mu\text{m}$	28/83 v	90/33 v	-



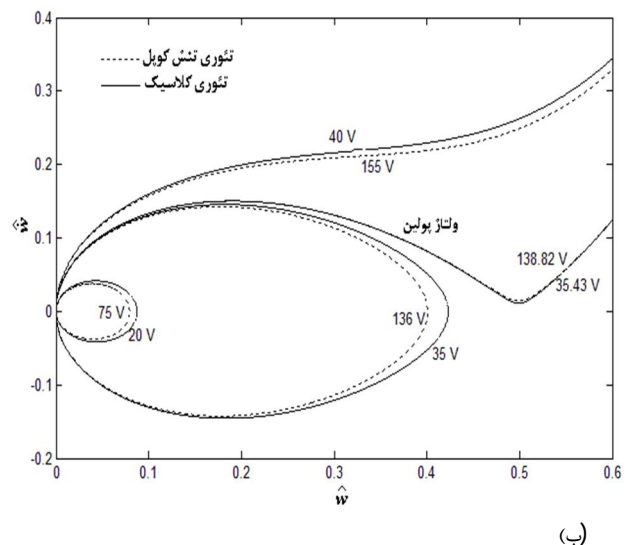
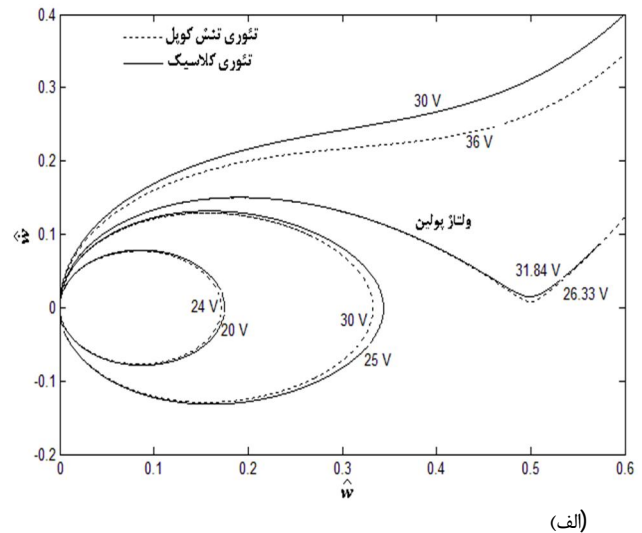
شکل 4 صفحه فازی برای میکروتیر طلا به ازاا شرایط اولیه مختلف



شکل 5 تغییرات نسبت ولتاژ پولین بر حسب h/l

## 6- مراجع

- [1] S. Talebian, G. Rezaadeh, M. Fathalilou, B. Toosi, Effect of temperature on pull-in voltage and natural frequency of an electrostatically actuated microplate, *Journal of Mechatronics*, Vol. 20, No. 6, pp. 666-673, 2010.
- [2] M.H. Salah, M.L. McIntyre, D.M. Dawson, J.R. Wagner, E. Tatlicioglu, Sensing of the time-varying angular rate for MEMS Z-axis gyroscopes, *Journal of Mechatronics*, Vol. 20, No. 6, pp. 720-727, 2010.
- [3] P. M. Osterberg, S. D. Senturia "M-TEST: a test chip for MEMS material property measurement using electrostatically actuated test structures", *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 6, pp. 107-118, 1997.
- [4] G. Rezaadeh, M. Fathalilou, R. Shabani, Static and Dynamic Stabilities of a Microbeam Actuated by a Piezoelectric Voltage, *Journal of Microsystem Technologies*, Vol. 15, pp. 1785-1791, 2009.
- [5] G. Rezaadeh, A. Tahmasebi, Nonlinear Electrostatic Behavior for Two Elastic parallel Fixed-Fixed and Cantilever microbeams, *Journal of Mechatronics*, Vol. 19, pp. 840-846, 2009.
- [6] M. Asghari, M.T. Ahmadian, M.H. Kahrobaian, M. Rahaeifard, On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams, *Materials and Design*, Vol. 31, pp. 2324-2329, 2010.
- [7] M.H. Kahrobaian, M. Asghari, M. Rahaeifard, M.T. Ahmadian, Investigation of the size-dependent dynamic characteristics of atomic force microscope microcantilevers based on the modified couple stress theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, pp. 1985-1994, 2010.
- [8] W. Xia, L. Wang, L. Yin, Nonlinear non-classical microscale beams: Static bending, postbuckling and free vibration, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, pp. 2044-2053, 2010.
- [9] S. Kong, S. Zhou, Z. Nie, K. Wang, The size-dependent natural frequency of Bernoulli-Euler micro-beams, *Journal of Engineering Science*, Vol. 46, pp. 427-437, 2008.
- [10] F. Yang, A.C.M. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, pp. 2731-2743, 2002.
- [11] W. Voigt, Theoretische studien über die elastizitäts verhältnisse der krystalle, *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft*, Vol. 34, pp. 3-51, 1887.
- [12] E. Cosserat, F. Cosserat, *Theorie des Corps Deformables*, Hermann et Fils, Paris, 1909.
- [13] W. Gunther, Zurstatik und kinematik des cosseratschen kontinuum, *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft*, Vol. 10, pp. 195-213, 1958.
- [14] G. Grioli, Elasticità asimmetrica, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, Vol. 50, pp. 389-417, 1960.
- [15] E. S. Rajagopal, The existence of interfacial couples in infinitesimal elasticity, *Annalen der Physik*, Vol. 6, pp. 192-201, 1960.
- [16] V. A. Palmov, Basic equations of the theory of asymmetric elasticity, *Priklad naya Matematika i Mekhanika*, Vol. 28, pp. 401-408, 1964.
- [17] E. L. Aero, and E. V. Kuvshinskii, Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles, *Fizika Tverdogo Tela*, Vol. 2, pp. 1399-1409, 1960.
- [18] R. D. Mindlin, and H. F. Tiersten, Effects of couple-stresses in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics Analysis*, Vol. 11, pp. 415-448, 1962.
- [19] R. A. Toupin, Elastic materials with couple stresses, *Archive for Rational Mechanics Analysis*, Vol. 11, pp. 385-414, 1962.
- [20] A. C. Eringen, *Nonlinear Theory of Continuous Media*, McGraw-Hill, New York, 1962.
- [21] W. T. Koiter, Couple-stresses in the linear theory of elasticity, *Proceedings Konin Klijje Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, Vol. 67, pp. 17-29, 1964.
- [22] W. Nowacki, Micropolar Elasticity, International Center for Mechanical Sciences, *Courses and Lectures*, Udine, Springer-Verlag, Wien-New York, No. 151, 1974.
- [23] A. C. Eringen, Linear theory of micropolar elasticity, *Journal of Mathematics and Mechanics*, Vol. 15, pp. 909-924, 1966.
- [24] A. C. Eringen, Theory of micropolar fluids, *Journal of Mathematics and Mechanics*, Vol. 16, pp. 1-18, 1966.
- [25] R. D. Mindlin, Micro-structure in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 16, pp. 51-78, 1964.
- [26] X. Kang, Z. W. Xi, size effect on the dynamic characteristic of a micro beam based on cosserat theory, *J. Engineering Strength*, Vol. 29, No. 1, pp. 1-4, 2007.



شکل 8 صفحه فازی به ازاء ولتاژهای پله متفاوت (الف). میکروتیر طلا و ب. میکروتیر نیکل

خطی سازی گام به گام و معادله حرکت دینامیکی با استفاده از مدل کاهش مرتبه یافته مبتنی بر گالرکین حل شدند. همان طور که نتایج نشان می‌دهند، در میکروتیرهای از جنس طلا، نیکل و مواد دیگر که پارامتر مشخصه طولی قابل ملاحظه‌ای در مقایسه با ضخامتشان دارند، به کار بردن تئوری کلاسیک منجر به نتایج نادرست می‌شود و باید تئوری‌های غیر کلاسیک مانند تنش کوپل مورد استفاده قرار گیرد. به علاوه نتایج نشان دادند که اثر رفتار وابسته به اندازه به صورت قابل ملاحظه‌ای با کاهش نسبت ضخامت به پارامتر مشخصه طولی میکروتیر بالا می‌رود. همچنین نشان داده شد که نقش واقعی تنش پسماند در بعضی کارهای گزارش شده بسیار پایین‌تر از مقدار فرض شده است. البته، باید تأکید نمود که ممکن است تمامی اختلاف باقی‌مانده بین ولتاژ پولین به دست آمده با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده و نتایج تجربی گزارش شده به دلیل تنش‌های پسماند موجود نباشد و استفاده از تئوری‌های الاستیسیته غیر کلاسیک دیگر از قبیل تئوری الاستیسیته گرادیان می‌تواند نتایج تئوری را بهبود بخشیده و تفاوت بین نتایج تئوری و تجربی را کاهش دهد. نتایج به دست آمده می‌توانند در طراحی و مدل‌سازی دقیق میکروساختارها مفید باشند.

- Electrostatically-Actuated Microbeams in terms of Lumped Model Pull-in Voltage Using Novel Design Corrective Coefficients, *Sensing and imaging: An International Journal*, Vol. 12, No. 3, pp. 117-131, 2011.
- [35] E. Ballestra, G. Brusa, M. De Pasquale, Gh. Munteanu, A. Soma, FEM modelling and experimental characterization of microbeams in presence of residual stress, *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, Vol. 63, pp. 477-488, 2010.
- [36] K. Vummidi, M. Khater, E. Abdel-Rahman, A. Nayfeh, S. Raman, Dynamic Pull-in of Shunt Capacitive MEMS Switches, *Procedia Chemistry*, Vol. 1, 622-625, 2009.
- [37] S. P. Pacheco, L. P. B. Katehi, and C. T. C. Nguyen, Design of Low Actuation Voltage RF MEMS Switch, *Microwave Symposium Digest, 2000 IEEE MTT-S International*, 2000.
- [38] D. Son, J. Kim, J. Kim, D. Kwon, Tensile properties and fatigue crack growth in LIGA nickel MEMS structures, *Materials Science and Engineering A*, Vol. 406, pp. 274-278, 2005.
- [39] W. D. Nix, H. Gao, Indentation size effects in crystalline materials: a low for strain gradient plasticity, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 46, No. 3, pp. 411-425, 1998.
- [40] E. S. Hung, S. D. Senturia, Generating efficient dynamical models for Microelectromechanical systems from a few finite-element simulations runs, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 8, pp. 280-289, 1999.
- [27] S. J. Zhou, and Z. Q. Li, Length scales in the static and dynamic torsion of a circular cylindrical micro-bar, *Journal of Shandong University of Technology*, Vol. 31, No. 5, pp. 401-407, 2001.
- [28] S. K. Park, and X. L. Gao, Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory, *Journal of Micromech Microeng*, Vol. 16, No. 11, pp. 2355-2359, 2006.
- [29] G. Rezazadeh, M. Fathalilou, R. Shabani, S. Tarverdilo, S. Talebian, Dynamic characteristics and forced response of an electrostatically actuated microbeam subjected to fluid loading, *Journal of Microsystem Technologies*, Vol. 15, pp. 1355-1363, 2009.
- [30] M. Bao, W. Wang, Future of Microelectromechanical Systems (MEMS), *Sensors and Actuators A, Physics*, Vol. 56, pp. 135-141, 1996.
- [31] Y. Zhang, Y. Zhao, Numerical and analytical study on the pull-in instability of micro-structure under electrostatic loading, *Journal of Sensors and Actuators A, Physics*, Vol. 127, pp. 366-367, 2006.
- [32] A. Nayfeh, M.I. Younis, Dynamics of MEMS resonators under superharmonic and subharmonic excitations, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 15, pp. 1840-1847, 2005.
- [33] M. I. Younis, R. Miles, D. Jordy, Investigation of the response of microstructures under the combined effect of mechanical shock and electrostatic forces, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 16, pp. 2463-2474, 2006.
- [34] G. Rezazadeh, M. Fathalilou, M. Sadeghi, Pull-in Voltage of