

## روشی نوین برای تحلیل کمانشی تیر هدفمند دوجهته اویلر با ضخامت متغیر دلخواه واقع بر بستر الاستیک هیتنی

عباس حیدری<sup>۱</sup>، عبدالرحیم جلالی<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی دکتری، مهندسی عمران، دانشگاه تبریز، تبریز

۲- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه تبریز، تبریز

\*تبریز، صندوق پستی ۵۱۶۶۶۱۶۴۷۱

### چکیده

در این مقاله برای اولین بار، تحلیل کمانشی تیر هدفمند دوجهته (BFG) اویلر با ضخامت متغیر دلخواه واقع بر بستر الاستیک هیتنی ارائه شده است. به علاوه، روشی جدید بر پایه حساب تغییرات و روش طیفی هم آرایی برای تبدیل مسئله کمانشی تیزبور به یک سیستم معادلات جبری پیشنهاد داده شده است. روش پیشنهادی منجر به حصول معادله مشخصه کمانشی شده و در نتیجه امکان حصول برآهی کمانشی اولین مودها فراهم می‌شود. به منظور بررسی میزان انتطاق پذیری روش پیشنهادی با شرایط مختلف، تغییرات خواص مکانیکی در امتداد ضخامت و محور تیر، تغییرات دلخواه ضخامت، پی ارتجاعی هیتنی، شرایط مرزی خاص مانند مفصل برشی و ممچین شرایط مرزی کلاسیک مانند دوسرگیردار، ساده، یکسر گیردار-یکسر مفصل و کنسول در نظر گرفته شده است. سرعت همگرانی زیاد و انتطاق پذیری با شرایط مختلف از جمله مزایای روش پیشنهادی هستند. با توجه به عدم وجود نتایج تحقیقات مشابه، از روش طیفی ریتز به منظور اعتبارسنجی نتایج استفاده شده است. در روش طیفی ریتز از پایه مشابه با روش پیشنهادی استفاده شده است. صحت نتایج روش پیشنهادی با توجه به انتطاق کامل بین نتایج روش شناخته شده طیفی ریتز و نتایج تحقیق حاضر، تصدیق می‌شود.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دراфт: ۱۰ مهر ۱۳۹۵

پذیرش: ۰۸ آذر ۱۳۹۵

ارائه در سایت: ۱۵ دی ۱۳۹۵

کلید واژگان:

تحلیل کمانشی

تیر هدفمند دوجهته با ضخامت متغیر

روش‌های طیفی

حساب تغییرات

حساب تغییرات

بستر الاستیک هیتنی

## A new scheme for buckling analysis of bidirectional functionally graded Euler beam having arbitrary thickness variation rested on Hetenyi elastic foundation

Abbas Heydari, Abdolrahim Jalali\*

Mechanical Engineering Department, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran.

\*P.O.B. 5517910179 Tehran, Iran, maligoodarz@srttu.edu

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 01 October 2016

Accepted 28 November 2016

Available Online 04 January 2017

#### Keywords:

Buckling analysis

Tapered BFG beam

Spectral methods

Calculus of variations

Hetenyi elastic foundation

### ABSTRACT

In current work, for the first time buckling analysis of bidirectional functionally graded (BFG) Euler beam having arbitrary thickness variation rested on Hetenyi elastic foundation is presented. Moreover, a new scheme based on calculus of variations and collocation method for converting the buckling problem to an algebraic system of equations is proposed. The mentioned scheme leads to obtaining the buckling characteristic equation of beam and therefore the first buckling loads are obtained. Various conditions including variation of mechanical properties across the thickness and through the axis, arbitrary thickness variation, Hetenyi elastic foundation, special boundary conditions like the shear hinge and classical boundary conditions like the clamped, simply supported, clamped-simply supported and cantilever beams are considered to show the compatibility of proposed scheme with the various circumstances. The fast convergence and compatibility with the various circumstances are the advantages of the proposed technique. Due to lack of similar studies in the literature, the same exercises are conducted by using the Spectral Ritz method for pursuing the validity of the proposed scheme. The same basis is used for Spectral Ritz and proposed methods. Excellent agreement is found between the results of well-known Spectral Ritz method and the results of proposed scheme, which validates the outcome of the proposed technique.

علاوه بر این، مقاومت در برابر سایش، کاهش تمرکز تنش نسبت به کامپوزیت‌های متعارف، کنترل محل شکست و تسلیم، استحکام اتصال و کاهش رشد طول و عرض ترک در محل اتصال نسبت به کامپوزیت‌های معمولی و اکسایش کمتر نسبت به اعضای فلزی، از جمله مزایای این مواد هستند. همچنین امکان ایجاد دو خاصیت متفاوت که همزمان در یک ماده

اصطلاح مواد هدفمند برای اولین بار در سال ۱۹۸۷ میلادی توسط نینو و همکاران در آزمایشگاه ملی هوافضای ژاپن با هدف تولید ماده‌ای مقاوم در برابر حرارت ۲۰۰۰ درجه کلوین (معادل ۱۷۲۶.۸۵ درجه سلسیوس) و گردایان دمای ۱۰۰۰ درجه کلوین برای ضخامت یک سانتیمتر، پیشنهاد شد.

### -۱- مقدمه

Please cite this article using:

A. Heydari, A. Jalali, A new scheme for buckling analysis of bidirectional functionally graded Euler beam having arbitrary thickness variation rested on Hetenyi elastic foundation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 1, pp. 47-55, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

انتگرال‌های بیضوی به صورت عددی حل شده‌اند. با توجه به نتایج حل عددی، هنگامی که بار به مقدار بحرانی می‌رسد، طی یک جهش، مسیر تعادل تغییر می‌کند. وزار و پاتل [13] به بررسی رفتار پس‌کمانشی سازه‌های لاغر به کمک روابط دوخطی لنگر - اتحانه پرداخته‌اند. منحنی دو خطی برای سازه‌هایی که دارای سطح مقطع پیچیده بوده یا از مصالحی خاص تشکیل شده‌اند، به کار می‌رود.

در این مقاله برای اولین بار، به بررسی رفتار کمانشی تیر هدفمند دوچهته اولیر با ضخامت متغیر دلخواه واقع بر بستر الاستیک هیتنی پرداخته شده است. به علاوه جهت حل مسئله کمانشی مذکور، روش نوین بر پایه حساب تغییرات و روش طیفی هم‌آرایی ارائه شده است. روش مزبور، برای اولین بار توسط یکی از مولفین مقاله حاضر، به منظور تحلیل کمانشی تیرهای مستطیلی و حلقه‌ای هدفمند اولیر بدون وجود تغییرات ضخامت یا تغییرات خواص مکانیکی در امتداد محور تیر و بدون حضور پی ارتجاعی [14] و همچنین برای تحلیل کمانشی صفحات دور هدفمند کیرشهف با ضخامت ثابت بدون حضور بستر الاستیک استفاده شده است [15]. در دو تحقیق مزبور روش حساب تغییرات بدون استفاده از روش طیفی هم‌آرایی برای حصول پاسخ‌های تحلیلی استفاده شده است. در تحقیقی دیگر، رفتار کمانشی صفحات هدفمند با ضخامت متغیر واقع بر بستر الاستیک پاسترنک بر پایه نظری کلاسیک به کمک ترکیبی از روش‌های حساب تغییرات و طیفی هم‌آرایی، توسط مولفین مقاله حاضر بررسی شده است [16]. نتایج کلیه تحقیقات مزبور با نتایج سایر تحقیقات انطباق کاملی داشته‌اند. با انجام هر چه بیشتر تحلیل‌های کمانشی تحت شرایط پیچیده‌تر، قابلیت روش پیشنهادی بیش از پیش مشخص شده است. در این مقاله وجود شرایطی از قبیل تغییرات دلخواه ضخامت و خواص مکانیکی متغیر در امتداد محور تیر در کنار تغییرات خواص مکانیکی در امتداد ضخامت، شرایط مرزی خاص مانند وجود مفصل برشی و به ویژه استفاده از مدل بستر الاستیک هیتنی که نسبت به مدل‌های دیگر مانند مدل بستر الاستیک پاسترنک پیچیده‌تر است، مجموعه عواملی هستند که روش پیشنهادی را به چالش خواهند کشید. سرعت همگرایی مناسب و انطباق‌پذیری با شرایط مختلف از جمله مزایای روش پیشنهادی است. با توجه به عدم وجود نتایج تحقیقات مشابه، از روش طیفی ریتز به منظور صحت سنجی نتایج استفاده شده است. پایه‌ی مشابه با روش پیشنهادی و توابع فرعی (چسبنده) مناسب برای اراضی شرایط مرزی در روش طیفی ریتز استفاده شده‌اند. صحت نتایج حاصل از روش پیشنهادی با توجه به انطباق کامل بین نتایج حاصل از روش طیفی ریتز و نتایج تحقیق حاضر تصدیق شده است.

## 2- بستر الاستیک هیتنی

دو رویکرد کلی برای در نظر گرفتن تاثیر خاک زیر سازه وجود دارد. یک رویکرد، در نظر گرفتن محیطی پیوسته به عنوان بستر غیر ایزوتروپیک و ناهمگن مشکل از چند لایه بوده که در آن نیاز به تحلیل‌های الاستیک، الاستوپلاستیک و هایپولاستیک وجود دارد. رویکرد دیگر استفاده از مدل‌های ریاضی ساده شده است. وینکلر در سال 1867 میلادی، خاک را با فرها ای انتقالی الاستیک خطی مستقل از هم مدل نمود. محدود شدن تغییرشکل به ناحیه بارگذاری، عدم در نظر گرفتن مساحت بارگذاری و نیز عدم در نظر گرفتن پیوستگی تغییرشکل خاک از جمله نارسایی‌های مدل وینکلر هستند. در مدل هیتنی، بخشی از نارسایی‌ها به کمک در نظر گرفتن یک صفحه (یا تیر) رابط بین فنرا که تنها مجاز به تغییرشکل خمی است،

یافت نمی‌شود، در مواد هدفمند وجود دارد. به مواد گرادیان نیز گفته می‌شود؛ زیرا تغییر پیوسته خواص مکانیکی در میکروساختار یا در ابعاد اتمی، امکان تعیین خواص مکانیکی هر نقطه از ماده را بحسب موقعیت آن نقطه فراهم می‌کند. مواد گرادیان دارای تغییرات حجمی یا تغییرات سطحی (به عنوان نمونه در محلهای اتصال یا پوشش‌ها) می‌باشند. در تیر هدفمند دوچهته، تغییرات پیوسته در هر دو جهت طولی و عرضی وجود دارد. اگر ضخامت بخشی از تیر به دلیل محدودیت‌های موجود، نسبت به سایر نقاط کم باشد، با استفاده از مواد هدفمند دارای خواص مکانیکی متغیر در امتداد محور، می‌توان به طور بهینه صلبیت خمی مورد نیاز را تأمین نمود. استفاده در دیوار داخلی راکتورهای هسته‌ای، سیلندرهای موتور خودرو، تیغه‌های توربین، فیبرهای نوری، مدارهای کامپیوتر و ابزارهای برش از جمله کاربردهای عملی و کاربردهای بالقوه مواد هدفمند هستند [1].

کارایی سازه‌های هدفمند، محققین زیادی را به انجام مطالعه در مورد رفتار این نوع از سازه‌ها ترغیب کرده است. به عنوان نمونه، تعدادی از تالیفات یکی از مولفین مقاله حاضر در زمینه تحلیل مخازن کروی و استوانه‌ای هدفمند، ارجاء داده شده است [4-2]. تعدادی از محققین نیز به بررسی رفتارهای کمانشی و پس‌کمانشی سازه‌ها پرداخته‌اند [5-7]. هوانگ و لی [8] در تحقیقی تحلیل پایداری تیر و ستون‌های هدفمند با مقطع دایره، همراه با تغییر شکل برشی را مطالعه نموده‌اند. در تحقیق مزبور، براساس شرایط سطح عاری از کشش، معادلات حاکم کوپله دوگانه برای دوران و خیز و یک معادله حاکم اضافی به دست آمده است. علاوه بر این تاثیر گرادیان شعاعی بر بارهای کمانشی ستون‌های الاستیک مدور بررسی شده است. همچنین در تحقیق مزبور، تنش بحرانی تیوب‌های دو جداره نانوکربنی محاسبه شده و با تئوری‌های تیموشنکو و ردی - بیکفورد مقایسه شده است. هوانگ و کاردموتیس [9] به بررسی رفتار کمانشی و پس‌کمانشی تیرهای منشوری ساندویچی تحت برش عرضی پرداخته‌اند. آنها راه حل بسته‌ای جهت محاسبه بار بحرانی، جابجایی وسط تیر و کوتاه شدگی طول تیر در ابتدای مرحله پس‌کمانش ارائه کرده‌اند. مونتینو و باراکو [10] در یک تحقیق، رفتار پس‌کمانشی تیر لاغر تحت فشار و یک لنگر پیچشی، که در داخل تیوب استوانه‌ای قرار گرفته است را بررسی کرده‌اند. فرض شده است تیر نسبت طول به عرض زیادی دارد و تحت بار فشاری کوچکی کمانش می‌کند. رفتار پس‌کمانشی همراه با در نظر گرفتن اصطکاک و بدون در نظر گرفتن اصطکاک بررسی شده است. این تحقیق در زمینه‌ی بررسی رفتار مته‌های داخل سوراخ استوانه‌ای جهت حفاری سنگ‌های بستر در عمق زیاد اهمیت پسیاری دارد. همچنین تحقیق مزبور جهت بررسی رفتار کابل‌های همگن قرار گرفته در یک مجرای صلب مدور افقی تحت فشار محوری در صنعت نفت به ویژه برای حفاری گمانه‌های چاهی در جهت افقی یا مورب کاربرد دارد. لی و پاترا [11] به بررسی کمانش و پس‌کمانش حرارتی تیرهای اولیر-برنولی در یک بستر الاستیک غیرخطی پرداخته‌اند. در تحقیق مذکور برای بررسی رفتار پس‌کمانشی، مسئله غیرخطی به مسئله مقدار اولیه تبدیل شده است. همچنین شرایط تکیه‌گاهی به صورت مفصلی و گیردار مفروض بوده است و تحلیل غیر خطی هندسی برای تیر قرار گرفته در یک بستر الاستیک غیرخطی به کمک روش شوتینگ انجام شده است. ژائو و همکاران [12] به بررسی رفتار پس‌کمانشی و پدیده فروجهش تیرهای لاغر پرداخته‌اند. براساس نئوری تغییرشکل‌های بزرگ غیرخطی، معادلات دیفرانسیل حاکم مربوط به مرحله‌ی پس‌کمانشی با شرایط تکیه‌گاهی گیردار برای تیرهای مورب بدست آمده است. با بکارگیری شرایط سازگاری ضمنی، معادلات غیرخطی توسط

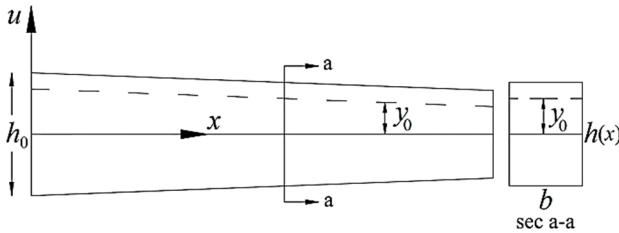


Fig. 1 The geometrical properties of tapered beam

شکل ۱ مشخصات هندسی تیر با مقطع متغیر

$$U_b = \frac{A_0}{2} \int_0^L e^{\frac{\alpha x}{L}} (w^{(2)})^2 \left(1 + \beta \left(\frac{x}{L}\right)\right)^{\gamma} \left[ \phi_1 \left(1 + \beta \left(\frac{x}{L}\right)\right)^{2\gamma} + \phi_2 \left(1 + \beta \left(\frac{x}{L}\right)\right)^{\gamma} y_0 + \phi_3 y_0^2 \right] dx \quad (6)$$

پارامتر  $A_0$  سطح مقطع تیر در مبدا مشخص است. پارامترهای  $\phi_1$  الی  $\phi_3$  ضرایب ثابت هستند که در معادلات (7) معرفی شده‌اند.

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{h_0^2 (3E_c(n^2 + n + 2) + nE_m(n^2 + 3n + 8))}{12(n+1)(n+2)(n+3)} \\ \phi_2 &= -\frac{nh_0(E_c - E_m)}{(n+1)(n+2)} \\ \phi_3 &= \frac{(nE_m + E_c)}{n+1} \end{aligned} \quad (7)$$

برای محاسبه انرژی ذخیره شده در تیر نیاز به محاسبه پارامتر  $u$  وجود دارد. به این منظور تعادل استاتیکی تیر در نظر گرفته می‌شود. معادله (8) تعادل نیروهای محوری در تیر هدفمند دوچهته اویلر را بیان می‌کند. سمت راست تساوی در مشخصات میان‌تار با استفاده از تعویض متغیر  $y_0$  در میان‌تار قرار محسوبه شده است. مبدا محور  $u$  در تارخنی و مبدا محور  $u$  در میان‌تار قرار دارد.

$$\int_{-\frac{h}{2}-y_0}^{\frac{h}{2}-y_0} E(y) \varepsilon_x(y) dy = -w'' \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (u - y_0) E(u - y_0) du = 0 \quad (8)$$

با توجه به سمت راست معادله (8)، فرمول مربوط به پارامتر مجهول  $y_0$  در مشخصات میان‌تار محاسبه می‌شود.

$$y_0 = \frac{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (E_c - E_m) \left(\frac{u}{h} + \frac{1}{2}\right)^n + E_m u du}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (E_c - E_m) \left(\frac{u}{h} + \frac{1}{2}\right)^n + E_m du} \quad (9)$$

انتگرال‌های صورت و مخرج در معادله (9) با توجه به شرط  $0 \leq n \leq m$  محاسبه شده و معادله (4) در آن جایگذاری می‌شود.

$$y_0 = \frac{h_0 n (E_c - E_m)}{2(n+2)(nE_m + E_c)} \left(1 + \beta \left(\frac{x}{L}\right)\right)^{\gamma} \quad (10)$$

با توجه به معادله (10)، فاصله بین تارخنی و میان‌تار، خود تابعی از فاصله از مبدا مشخص است. معادله (10) مشخص می‌کند، بار محوری که در مبدا مشخصات بر تارخنی اثر داده می‌شود نسبت به بار محوری موثر بر تارخنی در انتهای راست تیر دارای خروج از مرکزیت است. لنگر خمنشی ناشی از خروج از مرکزیت بار فشاری، قبل از رسیدن بار محوری به مقدار بحرانی، باعث ایجاد تغییرشکل‌های پیش‌کمانشی می‌شود. بنابراین می‌توان تیر کامل همراه با لنگر مزبور را معادل یک تیر ناکامل بدون لنگر فرض کرد. آزمایش‌ها نشان می‌دهند که بین بار کمانشی تیرها (یا صفحات) نازک کامل و بار کمانشی تیرها (یا صفحات) نازک ناکامل با شرایط تکیه‌گاهی، ابعاد هندسی و

مرتفع شده است. پاسخ بستر الاستیک به فرم معادله (1) می‌باشد که در آن  $D$  صلبیت خمنشی صفحه (تا تیر) فرضی رابط،  $k$  ثابت وینکلر و  $w$  تغییرشکل خمنشی است. با توجه به این که توان نابل (7) زوج است، ترم دوم یک مقدار اسکالار می‌باشد.

$$f = kw + D\nabla^4 w \quad (1)$$

### ۳- معادله دیفرانسیل حاکم

انرژی کرنشی خمنشی ذخیره شده در تیر هدفمند دوچهته اویلر به صورت رابطه (2) می‌باشد.

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}-y_0}^{\frac{h}{2}-y_0} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} E \varepsilon_x^2 dz dy dx \quad (2)$$

در معادله (2)، پارامترهای  $b$ ،  $h$  و  $E$  به ترتیب عرض، ارتفاع، طول، کرنش محوری و مدول ارجاعی تیر هستند. پارامتر  $y_0$  فاصله بین تارخنی و میان‌تار است که تابعی از  $x$  می‌باشد. نحوه توزیع خواص مکانیکی در سازه‌های مختلف هدفمند، متفاوت است. به عنوان نمونه، تانکرهای استوانه‌ای هدفمند و تیرهای حلقوی یا مدور هدفمند دارای قانون توزیع خواص مکانیکی یکسانی هستند. نوع توزیع خواص مکانیکی در تیرهای مستطیلی هدفمند مشابه توزیع خواص مکانیکی صفحات هدفمند است. رابطه (3) توزیع مدول الاستیسیته در سراسر طول تیر هدفمند دوچهته را در مشخصات منطبق بر محور خمنشی نمایش می‌دهد.

$$E = e^{\frac{\alpha x}{L}} \left( (E_c - E_m) \left( \frac{y + y_0}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + E_m \right) \quad (3)$$

در معادله (3)، پارامترهای  $E_c$ ،  $E_m$  و  $\alpha$  به ترتیب ضرایب یانگ سرامیک و فلز و ثابت‌های ماده ( $n$  یک عدد نامنفی و  $\alpha$  یک عدد حقیقی) می‌باشند. با توجه به معادله (3)، سطوح تحتانی و فوقانی در تیر هدفمند دوچهته برخلاف تیرهای معمول، جزء در سایر نقاط فلز و سرامیک خالص نیست. تغییرات ارتفاع مقطع تیر به فرم رابطه (4) مفروض است.

$$h = h_0 \left(1 + \beta \left(\frac{x}{L}\right)\right)^{\gamma} \quad (4)$$

در معادله (4)، پارامترهای  $h_0$  و  $\beta$  به ترتیب ارتفاع تیر در مبدا مشخصات و ضریب تغییرات ارتفاع (یک عدد حقیقی) هستند. پارامتر  $\gamma$  نوع تغییرات ارتفاع مقطع را مشخص می‌کند. برای  $\gamma = 1$ ، تغییر ارتفاع خطی و برای مقادیر بزرگتر از یک، تغییر ارتفاع غیرخطی است. "شکل ۱"، مشخصات هندسی تیر را در مشخصات منطبق بر میان‌تار نمایش می‌دهد.

با جایگذاری معادله (3) در معادله (2) و همچنین با قراردادن عبارت  $y = w^{(2)}$  به جای کرنش محوری، معادله (5) حاصل می‌شود. عبارت  $w^{(2)}$  تعریف تیر بوده که برابر با مشتق دوم جایجاوی خمنشی تیر  $w$ ، نسبت به  $x$  است.

$$U_b = \frac{b}{2} \int_0^L e^{\frac{\alpha x}{L}} (w^{(2)})^2 \int_{-\frac{h}{2}-y_0}^{\frac{h}{2}-y_0} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (E_c - E_m) \left( \frac{y + y_0}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + E_m y^2 dy dx \quad (5)$$

در حالت کلی اگر از  $y^m E$  که در آن  $m$  یک عدد طبیعی است انتگرال بگیریم، حاصل برای  $n = 1, 2, \dots, (m+1)$  مقداری موهومی است. در معادله (5) حاصل انتگرال روی محور قائم، با توجه به شرط  $0 \leq n \leq m$  مقداری حقیقی است. پس از محاسبه انتگرال مزبور، معادله (4) در آن جایگذاری و حاصل به صورت معادله (6) بازنویسی شده است.

$$\varphi_4 = 12\tilde{\varphi}_1 L^4 I_0 \left(1 + \beta \left(\frac{x}{L}\right)\right)^{3\gamma+2} e^{\frac{\alpha x}{L}} + 12\tilde{\varphi}_3 (\beta x + L)^2 L^2 EI \quad (16)$$

پارامتر  $I_0$ , ممان اینرسی تیر در مبدا مختصات است. پارامترهای مجهول در معادلات (16), در معادلات (17) بیان شده‌اند.

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1 &= 12E_c^2 + E_m(4n^3 + 16n^2 + 28n)E_c + \\ &\quad (n^4 + 4n^3 + 7n^2)E_m^2 \\ \tilde{\varphi}_2 &= \beta^2(yL^2(9\gamma - 3) + 6\alpha\gamma Lx + \alpha^2 x^2) + \\ &\quad \alpha^2 L(2\beta x + L) + 6\alpha\beta\gamma L^2 \\ \tilde{\varphi}_3 &= (n + 3)(n + 2)^2(nE_m + E_c) \end{aligned} \quad (17)$$

#### 4- تحلیل کمانشی

معادله دیفرانسیل (15) فاقد حل تحلیلی است. برای حل آن, بسط تیلورتابع جابجایی عرضی (با فرض عدم وجود جابجایی عرضی در مبدا) در نظر گرفته می‌شود.

$$w = \sum_{r=1}^m \frac{w^{(r)}(0)}{r!} x^r = \sum_{r=1}^m a_r x^r \quad (18)$$

مطابق با روش طیفی هم آرایی, تعداد  $m$  نقطه روی تیر به عنوان نقاط نمونه انتخاب می‌شود. با جایگذاری معادله (18) در معادله دیفرانسیل (15), تابع باقیمانده به فرم معادله (19) حاصل می‌شود. به صورت دلخواه نقاط نمونه در حالتی که از پایه‌های متعامد به عنوان پاسخ احتمالی مسئله استفاده شود, ریشه‌های بدل نوع اول در نظر گرفته می‌شوند. در این مسئله, نقاط انتخابی به فاصله برابر از هم در نظر گرفته شده است. نقاط نمونه به فرم  $x = iL/m$  هستند که در آن  $i$  یک عدد طبیعی بین یک تا  $m-c$  می‌باشد (c) تعداد معادلات مرزی, طبیعی یا شرطی است). شرط مرزی در انتهای آزاد وجود نداشته و در محل تکیه‌گاه گیردار با برابر صفر قرار دادن شبی و جابجایی عرضی ارضا می‌شود. شرایط طبیعی در محل مفصل برشی با برابر صفر قرار دادن مشتق سوم جابجایی عرضی و در محل مفصل خمشی با برابر صفر قرار دادن مشتق دوم جابجایی عرضی ارضا می‌شود. همچنین معادله شرایط طبیعی در انتهای آزاد کنسول مشابه مفصل خمشی در نظر گرفته می‌شود. جابجایی عرضی در مبدا صفر فرض شده است, لذا برای تیر دوسر مفصل, دو سر گیردار, یک انتهای مفصل - یک انتهای گیردار و یک انتهای گیردار - یک انتهای مفصل برشی, c برابر با 3 و برای تیر کنسول c برابر با 2 می‌باشد.

$$R_{ir} = \left[ \hat{\varphi}_1 + \left( \frac{\tilde{\varphi}_3}{\hat{\varphi}_2} \right)^4 \sum_{j=0}^4 \phi_j \left( \frac{iL}{m} \right)^{r-j} \right] a_r \quad (19)$$

ضرایب موجود در معادله (19), در معادلات (20) نمایش داده شده‌اند.

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= L^2(P\beta^2 r(r-1) + kL^2)\hat{\varphi}_2 + \\ &\quad I_0\alpha^2\beta^2 r(r-1) \\ \Phi_1 &= 2L^3 P\beta r(r-1)\hat{\varphi}_2 + \\ &\quad 2I_0 La\beta r(r-1)(\alpha + (3\gamma + r - 2)\beta) \\ \Phi_2 &= I_0 r(r-1)L^2 \hat{\varphi}_3 + L^2 \hat{\varphi}_2 r(r-1) \\ &\quad (\beta^2(r^2 - 5r + 6)EI + PL^2) \\ \Phi_3 &= 2L^3 EI\beta r(r-1)(r-2)(r-3)\hat{\varphi}_2 + \\ &\quad 2I_0 L^3(\alpha + (3\gamma + r - 3)\beta)r(r-1)(r-2) \\ \Phi_4 &= r(r-1)(r-2)(r-3)(L^4 EI\hat{\varphi}_2 + I_0 L^4) \end{aligned} \quad (20)$$

ثابت‌های معادلات (19) و (20), در معادلات (20) ارائه شده‌اند.

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_1 &= kL^3 \beta \tilde{\varphi}_3 \left( \frac{iL}{m} \right)^{r+1} \left( 2 + \beta \left( \frac{i}{m} \right) \right) \\ \hat{\varphi}_2 &= e^{-\left(\frac{\alpha i}{m}\right)} \left( \frac{\tilde{\varphi}_3}{\tilde{\varphi}_1} \right) \left( 1 + \beta \left( \frac{i}{m} \right) \right)^{-3\gamma} \\ \hat{\varphi}_3 &= \beta^2(9\gamma(\gamma + 6r - 15) + r(r-5) + 6) + \\ &\quad \alpha(\alpha - 8\beta) + 2\alpha\beta(3\gamma + 2r) \end{aligned} \quad (21)$$

خصوصیات مکانیکی یکسان, تفاوتی وجود ندارد [17]. به عنوان مثال, در تحلیل کمانشی صفحات نازک هدفمند با ضخامت متغیر, لنگری که منجر به ایجاد فشار غیریکنواخت و تغییر شکل پیش‌کمانشی می‌شود, نادیده گرفته شده است [18]. انرژی کرنشی بستر الاستیک به فرم رابطه (11) می‌باشد. پارامتر  $EI$  صلبیت خمشی تیر رابطه فرضی و  $w^{(4)}$  مشتق چهارم  $w$  نسبت به  $x$  است.

$$U_f = \frac{1}{2} \int_0^L (kw + EIw^{(4)}) w dx \quad (11)$$

کار نیروی خارجی  $F$ , برابر با حاصل ضرب نیرو در تغییر طول تیر است. با استفاده از دو جمله اول بسط تیلور, انرژی هدر رفته  $\Omega$  یا منفی کار نیروی خارجی, به صورت معادله (12) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \Omega &= F \int_0^L \left( 1 - \sqrt{1 + (w^{(1)})^2} \right) dx = \\ &\quad - \frac{F}{2} \int_0^L (w^{(1)})^2 dx \end{aligned} \quad (12)$$

انرژی پتانسیل کل برابر با مجموع انرژی‌های ذخیره شده و هدر رفته است.

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^L [\phi e^{\frac{\alpha x}{L}} (w^{(2)})^2 \left( 1 + \beta \left( \frac{x}{L} \right) \right)^{3\gamma} + \\ &\quad (kw + EIw^{(4)}) w - F(w^{(1)})^2] dx \end{aligned} \quad (13)$$

ثبت  $\phi$  به صورت معادله (14) بر حسب ثابت‌های ارائه شده در معادلات (7) بیان می‌شود.

$$\phi = A_0 \left( \phi_1 - \frac{\phi_2^2}{4\phi_3} \right) \quad (14)$$

در هنگام کمانش انرژی پتانسیل کل صفر می‌شود؛ لذا می‌توان معادله تعادل را با صفر قرار دادن  $\Pi$  در رابطه (13) محاسبه کرد. اما در این تحقیق به جای محاسبه معادله تعادل, از اصل لیاپانو استفاده می‌شود. طبق اصل لیاپانو, چنانچه به یک سیستم, اغتشاشی کوچک اعمال گردد و سیستم در مجاورت وضعیت قبلی خود باقی بماند, تعادل خنثی وجود دارد و اگر به حالت اولیه خود باز گردد, سیستم پایدار است. اگر  $\Pi$  در معادله (13) برابر با صفر قرار داده شود, تعادل خنثی ایجاد خواهد شد. در این تحقیق, مقدار  $\Pi$  در رابطه (13) کمینه می‌شود. بدین منظور, تابع جابجایی عرضی  $(x)$  با  $w$  در رابطه (13) گیری می‌شود. پس از استفاده از انتگرال گیری جزء  $w(x) + \mu L(x)$  جایگزین می‌شود. تابع پیوسته و حداقل یک بار مشتق‌پذیر  $(x)$  اغتشاش بوده که با میل دادن  $\mu$  به صفر کوچک بودن اغتشاش اعمالی تضمین می‌شود. از سویی برای کمینه شدن انرژی پتانسیل کل, از  $\Pi$  نسبت به  $\mu$  مشتق می‌گیریم. پس از استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء و اعمال شرایط مرزی الزامی ( $\lambda(L) = 0$ )، معادله اولیر-لاگرانژ تعیین یافته به دست می‌آید. درنهایت معادله دیفرانسیل حاکم کمانش تیر هدفمند دو جهته اولیر با ارتفاع متغیر دلخواه واقع بر بستر الاستیک هیتی به فرم رابطه (15) حاصل می‌شود.  $w^{(4)}$  مشتق  $i$  ام  $w$  نسبت به  $x$  است.

$$2kw + \sum_{i=2}^4 \varphi_i w^{(i)} = 0 \quad (15)$$

ضرایب معادله دیفرانسیل (15) تابعی از  $x$  هستند. ضرایب مذبور در معادلات (16) نمایش داده شده‌اند.

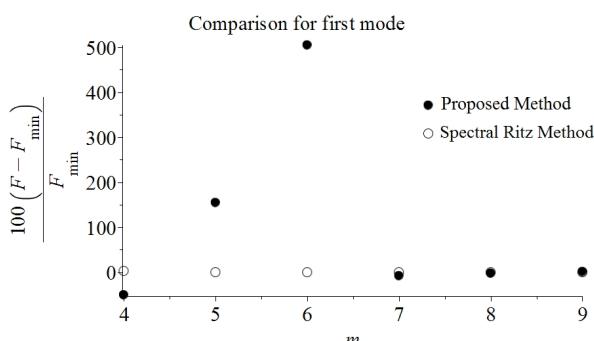
$$\begin{aligned} \varphi_2 &= 12\tilde{\varphi}_1 \tilde{\varphi}_2 I_0 \\ &\quad \left( 1 + \beta \left( \frac{x}{L} \right) \right)^{3\gamma} e^{\frac{\alpha x}{L}} + 12\tilde{\varphi}_3 FL^2(\beta x + L)^2 \\ \varphi_3 &= 12\tilde{\varphi}_1 I_0 (3L\beta\gamma + \alpha\beta x + L\alpha) \left( 1 + \beta \left( \frac{x}{L} \right) \right)^{3\gamma} e^{\frac{\alpha x}{L}} \end{aligned}$$

## 6-نتایج عددی

برای بی بعد سازی نتایج، در تمامی شکل‌ها و جدول‌ها پارامترهای  $I_0$  و  $L$  برابر با یک واحد مفرض هستند. "شکل 2" همگرایی روش پیشنهادی و درصد خطا را برای مود اول (بار کمانشی بحرانی) در تیر ساده نمایش می‌دهد. همچنین مقایسه بین نتایج حاصل از روش پیشنهادی با نتایج روش طیفی ریتز در "شکل 2" ارائه شده است. برای ترسیم "شکل 2"، ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  برابر با 0.1، ضرایب  $\gamma$  و  $n$  برابر با 3 و 1، نسبت  $E_c/E_m$  برابر با 2 و نسبت  $E_{mI_0}/EI_0$  برابر با 0.5 مفروض هستند. مطابق با نتایج "شکل 2"، با انتخاب تعداد کوچکی از ترم‌ها، نتایجی با دقت مناسب حاصل خواهد شد.

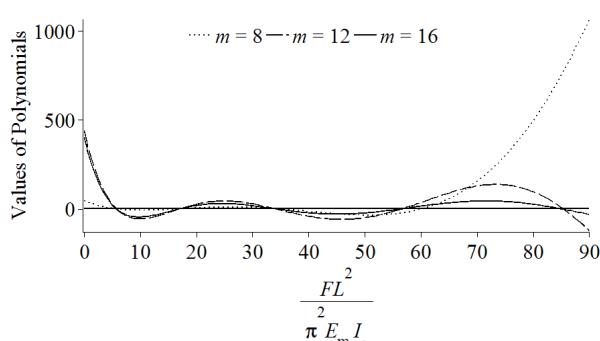
همگرایی روش پیشنهادی با ترسیم معادله مشخصه مربوط به تیر یک انتهای گیردار و یک انتهای مفصلی (تکیه‌گاه مفصلی در مبدأ مختصات قرار دارد) برای تعداد مختلفی از ترم‌های پایه در "شکل 3" نمایش داده شده است. برای ترسیم "شکل 3"، از مشخصات هندسی و مکانیکی مشابه با تیر مربوط به "شکل 2" استفاده شده است. با افزایش تعداد ترم‌های پایه، ریشه‌های معادله مشخصه (بارهای کمانشی در اولین مودها) به سمت مبدأ حرکت می‌کنند. درجه چند جمله‌ای‌های مشخصه برابر با  $m-c$  است. بنابراین با به کار بردن  $m$  ترم، حداقل  $m-c$  بار کمانشی متناظر به اولین مودها محاسبه می‌شود.

"شکل 4"، بارهای کمانشی دو مود اول را برای مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $\beta$  در تیر ساده نمایش می‌دهد. در "شکل 4"، ضرایب  $\gamma$  و  $n$  و نسبت  $E_c/E_m$  برابر با 2 و نسبت  $E_{mI_0}/EI_0$  برابر با 1 مفروض هستند. محور قائم سمت چپ مربوط به بار کمانشی بی بعد بحرانی و محور قائم سمت راست مربوط به بار کمانشی بی بعد مود دوم است. با افزایش ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  بار کمانشی در هر



شکل 2 همگرایی روش پیشنهادی  
Fig. 2 The convergence of proposed method

شکل 2 همگرایی روش پیشنهادی



شکل 3 ریشه‌های چندجمله‌ای‌های مشخصه  
Fig. 3 The roots of characteristic polynomials

رابطه (19) باید در تمام نقاط انتخابی برابر با صفر باشد. ضرایب  $a_r$  برای شرایط مرزی و طبیعی به صورت ماتریس [B.C.] مرتب می‌شوند. شرط صفر بودن مشتق اول، مشتق دوم یا مشتق سوم جابجایی به ترتیب در تکیه‌گاه‌های گیردار، مفصلی یا گیردار غلتکی (مفصل برشی) در مبدأ مختصات به ترتیب به صفر شدن  $a_1$ ،  $a_2$  یا  $a_3$  منجر می‌شود که در تشکیل ماتریس کلی ضرایب (شامل معادلات متناظر به نقاط نمونه و شرایط مرزی) باعث کاهش مرتبه ماتریس از  $m-1$  به  $m$  می‌شود. بنابراین شرط مرزی یا طبیعی در مبدأ در ماتریس [B.C.] تاثیر داده نمی‌شوند. برای حصول حل غیرتکراری باید دترمینان ضرایب برابر با صفر باشد.

$$\left| \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_1 + \left( \frac{\hat{\varphi}_3}{\hat{\varphi}_2} \right) \sum_{j=0}^4 \varphi_j \left( \frac{iL}{m} \right)^{r-j} \\ [B.C.]_{(c-1) \times (m-1)} \end{bmatrix}_{(m-c) \times (m-1)} \right| = 0 \quad (22)$$

دترمینان 22، منجر به حصول معادله مشخصه تیر هدفمند دوچهته اولیر با ضخامت متغیر دلخواه واقع بر بستر الاستیک هیتني می‌شود. پاسخ‌های این معادله به ترتیب کوچک به بزرگ، بار کمانشی اولین مودها می‌باشند.

## 5-روش طیفی ریتز

روش طیفی ریتز در سیاری از جهات مشابه روش اجزاء محدود است. اما در روش طیفی ریتز برخلاف روش اجزاء محدود به جای مختصات‌های محلی از یک مختصات عمومی استفاده می‌شود. همچنین به جای استفاده از توابع شکل که به جزء محدوده کوچکی در سایر نقاط صفر هستند، از پایه‌هایی استفاده می‌شود که در سراسر طول تیر جز در نقاطی که شرایط مرزی ایجاب کند، غیرصفر می‌باشند. برای افزایش سرعت همگرایی در مسائل پیچیده‌تر، از پایه‌های متعامد استفاده می‌شود. به این ترتیب می‌توان به کمک روش گالرکین فرم ضعیف شده‌ای از معادلات را محاسبه نمود. قنادپور و همکاران برای تحلیل کمانشی تیر هدفمند غیرمحلي اولیر با ضخامت و صلیبت ثابت در امتداد محور از پایه‌ی متعامد چیزیش استفاده نموده‌اند [19]. محمدی مهر و همکاران [20] نیز از روش پیشنهادی قنادپور و همکاران [19] استفاده کردند. در تحقیق حاضر جهت بررسی صحت نتایج، از روش ریتز با پایه‌ی غیر متعامد تیلور (معادله 18) استفاده می‌شود. در تحقیق حاضر، سرعت همگرایی مناسب نیاز به استفاده از پایه‌های متعامد را برطرف می‌سازد. با ضرب کردن توابع فرعی مناسب به معادله (18) شامل چند جمله‌ای‌هایی که مقدار آن‌ها یا مشتق آن‌ها در تکیه‌گاه‌ها صفر هستند، شرایط مرزی برآورده می‌شود [22, 21, 19].

$$w = \prod_{i=1}^n (x - x_k)^{s_i} \sum_{r=1}^m a_r x^r \quad (23)$$

پارامتر  $s$  در تکیه‌گاه گیردار برابر با دو و در تکیه‌گاه ساده برابر با یک است. همچنین  $x_k$  فاصله تکیه‌گاه از مبدأ است. به جای این کار، می‌توان ابتدا ضرایب  $a_1$  الی  $a_c$  را پس از ارضا شدن معادلات مرزی و طبیعی برحسب باقی ضرایب بسط تیلور جابجایی خمی (از  $a_m$  الی  $a_{c+1}$ ) در معادله (18) محاسبه و در معادله (18) قرار داد. سپس با جایگذاری معادله (18) در معادله (13) و پس از محاسبه دترمینان ماتریس ضرایب مجموعه معادلات (24)، معادله مشخصه کمانشی تیر هدفمند دوچهته اولیر با ضخامت دلخواه واقع بر بستر هیتني حاصل می‌شود.

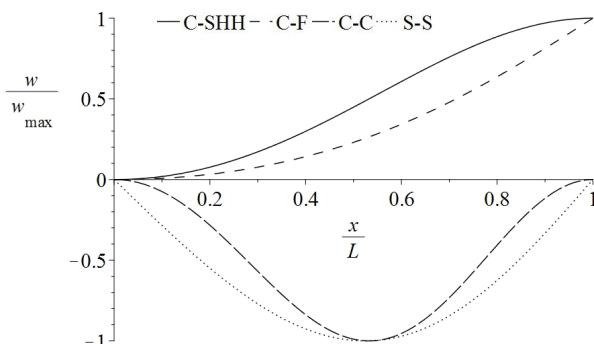
$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_k} = 0, \quad k = c+1, c+2, \dots, m \quad (24)$$

ماده یا کاهش نسبت مدول ارجاعی سرامیک بر مدول ارجاعی فلز، بار بحرانی کمانشی کاهش می‌یابد. با توجه به رابطه (3)، هر اندازه ثابت ماده بزرگتر باشد مدول ارجاعی و در نتیجه صلبیت خمشی تیر هدفمند، نسبت به تیر همگن سرامیکی کمتر خواهد بود.

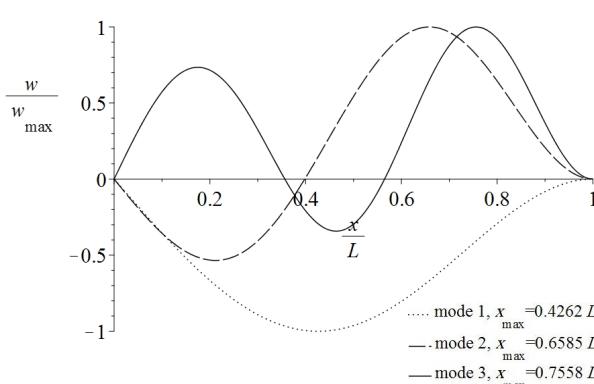
تغییر شکل کمانشی بی بعد (نمال شده نسبت به تغییر شکل بیشینه) مربوط به اولین مود کمانشی برای شرایط مرزی مختلف در "شکل 7" ترسیم شده است. نمادهای C, F, S, SHH به ترتیب مربوط به شرایط مرزی گیردار، ساده، آزاد و مفصل برشی (گیردار غلتکی) هستند. برای ترسیم "شکل 7" فرض شده است که ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  برابر با -0.2 و ضرایب  $\gamma$  و  $n$  برابر با 0.2، نسبت  $E_c/E_m$  برابر با 3 و ضرایب  $k$  و  $EI$  مربوط به مدل خاک برابر با صفر هستند.

"شکل 8" تغییر شکل کمانشی بی بعد مربوط به سه مود اول تیر یک انتهای گیردار و یک انتهای مفصلی را نمایش می‌دهد. مفروض است که انتهای مفصلی در مبدأ مختصات قرار دارد. در "شکل 8" برای هر مود فاصله محل حداکثر جایجاپی کمانشی از مبدأ نمایش داده است. برای ترسیم "شکل 8" از مشخصات هندسی و مکانیکی تیر "شکل 7" استفاده شده است، اما ضرایب  $k$  و  $EI$  مربوط به مدل خاک به ترتیب تقسیم بر  $E_m$  و  $E_m I_0$  برابر با 1 مفروض می‌باشند.

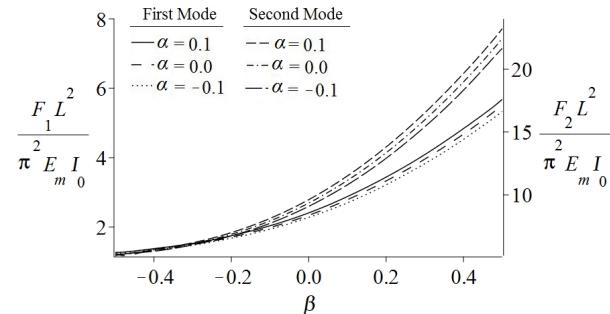
با توجه به این که تیر دارای ضخامت متغیر و خواص مکانیکی تغییر در امتداد محور طولی است، با تعویض محل تکیه گاههای نا مشابه در دو انتهای تیر، بارهای کمانشی متفاوت و همچنین تغییر شکل‌های کمانشی متفاوتی حاصل خواهد شد. در "شکل 9"، تیری با مشخصات هندسی و مکانیکی مشابه با تیر مربوط به "شکل 8" در نظر گرفته شده است. برای ترسیم



شکل 7 تغییر شکل کمانشی برای شرایط مرزی مختلف



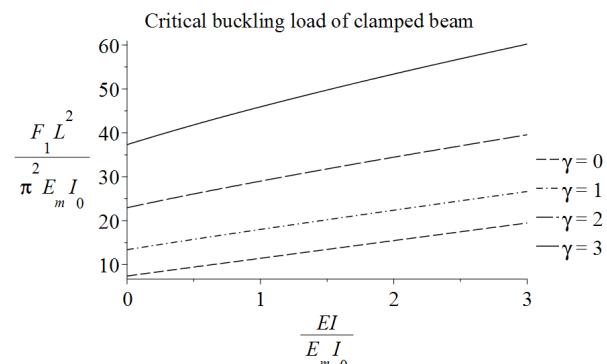
شکل 8 تغییر شکل کمانشی در سه مود اول



شکل 4 تاثیر ثابت ماده در امتداد محور و ضریب ارتفاع بر بارهای کمانشی

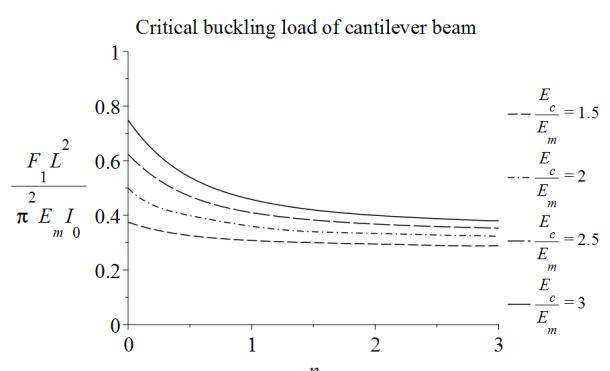
دو مود ازدیاد می‌یابد. تاثیر ثابت ماده در امتداد طولی بر بار کمانشی دو مود نخست، زمانی که ضریب ارتفاع بزرگتر باشد، بیشتر است. تاثیر صلبیت خمشی تیر رابط فرضی بر بار کمانشی بحرانی تیر دو سر گیردار برای الگوهای مختلف تغییر ارتفاع در "شکل 5" نمایش داده شده است. ضرایب  $\alpha$ ،  $\beta$  برابر با 0.5، نسبت  $E_c/E_m$  برابر با 2 و مقدار  $n$  برابر با 0.5 مفروض هستند.

"شکل 6"، تاثیر ضریب ثابت ماده و نسبت مدول ارجاعی سرامیک بر مدول ارجاعی فلز را بر بار بحرانی کمانشی تیر کتسول نمایش می‌دهد. تغییرات ارتفاع کنسول به صورت خطی مفروض است ( $\gamma = 1$ ). ضرایب  $k$  و  $EI$  به بستر ارجاعی برابر با صفر قرار داده شده است ( $k = EI = 0$ ). همچنین ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  برابر با صفر مفروض هستند. با ازدیاد ضریب ثابت



شکل 5 تاثیر صلبیت خمشی تیر رابط در مدل هیتنی بر بار کمانشی بحرانی

شکل 5 تاثیر صلبیت خمشی تیر رابط در مدل هیتنی بر بار کمانشی بحرانی



شکل 6 تاثیر ثابت ماده و نسبت مدول ارجاعی سرامیک بر فلز بر بار کمانشی بحرانی

جدول 2 بارهای کمانشی بحرانی بی بعد برای مقادیر مختلف  $n$  و  $\gamma$ Table 2 The dimensionless critical buckling loads for various amounts of  $n$  and  $\gamma$ 

$\frac{F_1 L^2}{\pi^2 E_m I_0}$	$\gamma$	$n$
8.41019	0	
9.08665	1	0
9.86834	2	
7.21536	0	
7.71020	1	1
8.25268	2	
6.98535	0	
7.44479	1	2
7.97061	2	
6.89609	0	
7.33735	1	3
7.85134	2	
6.83983	0	
7.27231	1	4
7.77648	2	

جدول 3 بارهای کمانشی بحرانی بی بعد برای مقادیر مختلف  $k$  و  $EI$ Table 3 The dimensionless critical buckling loads for various amounts of  $k$  and  $EI$ 

$\frac{F_1 L^2}{\pi^2 E_m I_0}$	$EI$	$k$
$\frac{F_1 L^2}{\pi^2 E_m I_0}$	$E_c/E_m$	$E_c/E_m$
1.8126	0.0	
2.8780	0.5	0
3.9206	1.0	
1.9024	0.0	
2.9657	0.5	10
4.0073	1.0	
1.9472	0.0	
3.0095	0.5	15
4.0506	1.0	
1.9920	0.0	
3.0533	0.5	20
4.0939	1.0	
2.0367	0.0	
3.0970	0.5	25
4.1372	1.0	

جابجایی عرضی از میدا ( $x_{max}$ ) مربوط به سه مود اول نیز نمایش داده شده است. با فرض یکسان بودن مشخصات مکانیکی و هندسی، بار کمانشی سه مود اول در تیر ساده و در تیر یک انتهای گیردار و انتهای دیگر گیردار غلتکی، با ضخامت ثابت ( $\gamma = 0$ ) با هم برابر هستند؛ در حالی که برای ضخامت متغیر چنین نیست.

جدول 4 بارهای کمانشی بی بعد سه مود اول برای شرایط مرزی مختلف

Table 4 The dimensionless buckling loads corresponding to the first three modes for various boundary conditions

$\frac{F_M L^2}{\pi^2 E_m I_0}$	$\frac{x_{max}}{L}$	$M$	$BC$
2.449701	0.453513	1	
9.838913	0.696079	2	S-S
22.15479	0.789138	3	
5.036821	0.345492	1	
14.89217	0.559702	2	S-C
29.67200	0.667076	3	
9.866719	0.447232	1	
20.15208	0.437645	2	C-C
39.42513	0.635137	3	
0.474046	1.000000	1	
5.403795	0.605882	2	C-F
15.25673	0.330255	3	
2.525223	1.000000	1	
9.916483	0.421922	2	C-SHH
22.23277	1.000000	3	

"شکل 9" فرض شده است که تکیه گاه گیردار در میدا و تکیه گاه مفصلی در انتهای دیگر تعییه شده است. فاصله محل حداکثر تغییر شکل کمانشی از تکیه گاه گیردار در "شکل 8" و "شکل 9" برای هر سه مود اول تقریباً یکسان است.

در جدول 1 بارهای کمانشی بی بعد بحرانی (منتظر به اولین مود) تیر یک انتهای مفصل و یک انتهای گیردار برای مقادیر مختلف ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  ارائه شده است. مفروض است که ضرایب  $n$  و نسبت های  $E_c/E_m$  و  $E_c/E_m$  با  $EI/(E_m I_0)$  هستند. همچنین مفروض است که تکیه گاه گیردار در میدا قرار دارد.

در جدول 2 مقادیر مربوط به بارهای کمانشی بحرانی بی بعد تیر کنسول (تکیه گاه در میدا مختصات قرار دارد) برای مقادیر مختلف ضرایب  $n$  و  $\gamma$  نمایش داده شده است. مفروض است که ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  برابر با 0.1 و  $E_c/E_m$  و  $E_c/E_m$  با  $EI/(E_m I_0)$  هستند.

جدول 3 مقادیر مربوط به بارهای کمانشی بحرانی بی بعد با شرایط مرزی ساده را برای مقادیر مختلف نسبت های  $EI/(E_m I_0)$  و  $k/E_m$  نمایش می دهد. مفروض است که ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  برابر با -0.1 و نسبت  $E_c/E_m$  و  $\gamma$  برابر با 3 هستند.

در جدول 4 تاثیر شرایط مرزی (BC) بر بار کمانشی سه مود اول نمایش داده شده است. فرض می شود که تیر بر روی بستر الاستیک قرار ندارد (پارامترهای  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $n$ ,  $E_c/E_m$  و  $\gamma$  به ترتیب برابر با 2, 2, 0.15, 2 و 3 مفروض آند. پارامتر  $F_M$  بار کمانشی مود  $M$  می باشد. محل حداکثر

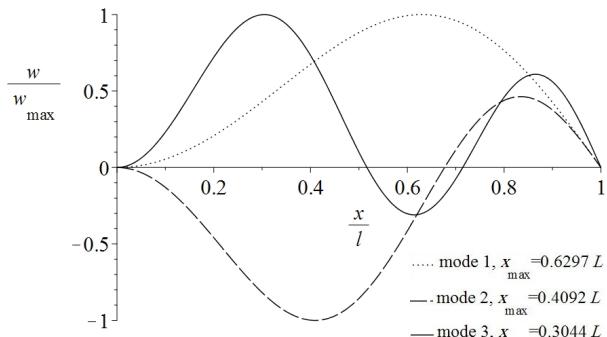


Fig. 9 Buckling deformation for first three modes after replacing supports

شکل 9 تغییر شکل کمانشی در سه مود اول بعد از تعویض تکیه گاهها

جدول 1 بارهای کمانشی بحرانی بی بعد برای مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $\beta$ Table 1 The dimensionless critical buckling loads for various amounts of  $\alpha$  and  $\beta$ 

$\frac{F_1 L^2}{\pi^2 E_m I_0}$	$\beta$	$\alpha$
11.6849	0.3	
7.45603	0.0	0.4
5.42100	-0.3	
11.0008	0.3	
7.13375	0.0	0.2
5.32170	-0.3	
10.3674	0.3	
6.84441	0.0	0.0
5.23364	-0.3	
9.78317	0.3	
6.58544	0.0	-0.2
5.15546	-0.3	
9.24646	0.3	
6.35429	0.0	-0.4
5.08599	-0.3	

**7- نتیجه گیری**

صلبیت خمی در مدل هیئتی	$D$	در این مقاله برای اولین بار، تحلیل کمانشی تیر هدفمند دوچهته اوبلر واقع بر بستر الاستیک هیئتی بررسی شده است. به علاوه روشی نوین برای حل مسئله کمانشی مزبور ارائه شده است. درجه چند جمله‌ای‌های مشخصه حاصل در این روش برابر با $m \cdot c$ است؛ که پارامتر $m$ تعداد جملات در سری محدود مربوط به تقریب جابجایی خمی و $c$ تعداد معادلات مرزی است.
مدول ارتجاعی تیر هدفمند دوچهته	$E$	بنابراین با به کار بردن $m$ ترم، حداکثر $m \cdot c$ بار کمانشی متناظر به اولین مودها محاسبه می‌شود. انطباق نتایج عددی حاصل از روش پیشنهادی با نتایج حاصل از روش شناخته شده طیفی ریتز، حاکی از دقت و سرعت همگرایی مناسب و همچنین انطباق‌پذیری روش جدید با شرایط مرزی و طبیعی مختلف است. بنابراین روش پیشنهادی می‌تواند برای بررسی پایداری اعضای سازه‌ای هدفمند دوچهته با ضخامت متغیر واقع بر بستر ارتجاعی مناسب باشد. در این مقاله با توجه به قانون مخلوط‌ها، توزیع خواص مکانیکی به نحوی است که هر اندازه ثابت ماده بزرگ‌تر باشد، ضریب یانگ و در نتیجه صلبیت خمی تیر هدفمند، نسبت به تیر همگن سرامیکی کمتر خواهد بود.
مدول ارتجاعی سرامیک	$E_c$	تفییرات خواص مکانیکی در امتداد ضخامت و محور تیر، تغییرات دلخواه ضخامت با الگوهای خطی و غیرخطی، بی ارتجاعی هیئتی، شرایط مرزی خاص مانند مفصل برشی و همچنین شرایط مرزی کلاسیک مانند دوسرگیردار، ساده، یکسر گیردار-یکسر مفصل و طره در نظر گرفته شده است. بارهای کمانشی، شکل‌های بی بعد کمانشی و محل حداکثر جابجایی عرضی برای سه مود اول ارائه شده است. نتایج در قالب نمودارها و جداول ارائه شده‌اند. برای بیان نتایج جامع، تمامی نمودارها با محورهای بی بعد ترسیم شده‌اند. نتایج مزبور نشان می‌دهند که کاهش ثابت ماده در امتداد عرضی و یا افزایش ثابت ماده در امتداد طولی، از دیاد ثابت‌های محل هیئتی شامل ضریب وینکلر و صلبیت خمی تیر رابط فرضی و همچنین افزایش ثابت ارتفاع تیر هدفمند دوچهته باعث از دیاد بار کمانشی در مودهای مختلف می‌شود. تاثیر ثابت ماده در امتداد طولی بر بار کمانشی، برای ضریب ارتفاع بزرگ‌تر، بیشتر است. در حالتی که ثابت ارتفاع مثبت باشد، از دیاد ضریب الگوی تغییر ارتفاع، باعث از دیاد بار کمانشی خواهد شد. نتایج نشان می‌دهند که با کاهش نسبت مدول الاستیستیه سرامیک بر مدول ارتجاعی فلز، بار بحرانی کمانشی کاهش می‌یابد. به علاوه با بررسی نتایج مشاهده شد که با فرض وجود ضخامت غیرمتغیر و با فرض یکسان بودن مشخصات مکانیکی و هندسی، بار کمانشی سه مود اول در تیر ساده با بار کمانشی سه مود نخست در تیر یک انتهای گیردار و انتهای دیگر گیردار غلتکی (مفصل برشی در محل تکیه‌گاه)، برابر هستند؛ در حالی که در مورد تیر هدفمند دارای ضخامت متغیر یا در مورد تیر هدفمند دوچهته چنین نیست. با توجه به این که تیر دارای ضخامت و خواص مکانیکی متغیر در امتداد محور طولی است، با تعویض محل تکیه‌گاه‌های نامشابه در دو انتهای تیر، بارهای کمانشی متفاوت و همچنین تغییرشکل‌های کمانشی متفاوتی حاصل شد.
صلبیت خمی تیر رابط فرضی	$E_l$	
مدول ارتجاعی فلز	$E_m$	
نیروی محوری فشاری	$F$	
پاسخ بستر ارتجاعی	$f$	
بار کمانشی مود $i$	$F_i$	
ارتفاع تیر	$h$	
ارتفاع تیر در مبدا	$h_0$	
ممان اینرسی مقطع در مبدا	$I_o$	
ضریب وینکلر	$k$	
طول تیر	$L$	
تعداد جملات بسط تیلور	$m$	
ثابت ماده در امتداد عرضی	$n$	
انرژی کرنشی خمی تیر ارتجاعی	$U_b$	
انرژی کرنشی بستر ارتجاعی	$U_f$	
جابجایی عرضی تیر	$w$	
مختصات منطبق بر میان‌تار	$x, u, z$	
مختصات منطبق بر تار خنثی	$x, y, z$	
فاصله بین تار خنثی و میان‌تار	$y_0$	
<b>علامه یونانی</b>		
ثابت ماده در امتداد طولی	$\alpha$	
ثابت ارتفاع	$\beta$	
ثابت الگوی تغییرشکل	$\gamma$	
کرنش محوری	$\epsilon_x$	
اغتشاش	$\lambda$	
ضریب اغتشاش	$\mu$	
انرژی پتانسیل کل	$\Pi$	
انرژی هدر رفته	$\Omega$	

**9- مراجع**

- M. S. EL-Wazery, A. R. EL-Desouky, A review on Functionally Graded Ceramic-Metal Materials, *Journal of Materials and Environmental Science*, Vol. 6, No. 5, pp. 1369-1376, 2015.
- A. Heydari, M. T. Kazemi, Elasto-Plastic analysis of thick-walled FG reservoirs subjected to internal pressure, *International Journal of Advanced Design and Manufacturing Technology*, Vol. 3, No. 1, pp. 11-18, 2009. (in Persian)
- A. Heydari, M. T. Kazemi, Thermo-Elasto-Plastic Analysis of Functionally Graded Spherical Reservoirs Subjected to Temperature Gradient, *10th International Congress on Civil Engineering*, University of Tabriz, 2015.
- A. Heydari, Spreading of plastic zones in functionally graded spherical tanks subjected to internal pressure and temperature gradient combinations, *Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of the ISME*, Vol. 16, No. 2, pp. 5-25, 2015.
- M. Dezyani, H. Dalayeli, S. Yousefi, H. Farrokhfal, Optimum design of compression stiffened panel under buckling constraint using Gaussian surrogate model, *Modares Mechanical Engineering Journal*, Vol. 16, No. 6, pp. 205-216, 1395. (in Persian)
- S. A. M. Ghannadpour, M. A. Mehrpouya, P. Kiani, Post-buckling of laminated plates using collocation method and Legendre basis functions, *Modares Mechanical Engineering Journal*, Vol. 16, No. 4, pp. 213-220, 1395. (in Persian)
- M. Livani, K. Malekzadeh Fard, S. Shokrollahi, Buckling and flutter analyses of composite sandwich panels under supersonic flow *Modares Mechanical Engineering Journal*, Vol. 16, No. 7, pp. 99-110, 1395. (in Persian)

**8- فهرست علاوه**

سطح مقطع در مبدا	$A_0$
ضرایب بسط تیلور	$a_r$
عرض تیر	$b$
مجموعه معادلات مرزی، طبیعی یا شرطی	$B.C.$
تعداد معادلات مرزی، طبیعی یا شرطی	$c$

- International Journal of Advanced Design and Manufacturing Technology*, Vol. 6, No. 4, pp. 41-47, 2013.
- [16] A. Heydari, A. Jalali, A. Nemati, Buckling analysis of circular functionally graded plate under uniform radial compression including shear deformation with linear and quadratic thickness variation on the Pasternak elastic foundation, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 41, pp. 494-507, 2017.
- [17] E. Ventsel, T. Krauthammer, *Thin Plates and Shells. Theory, Analysis, and Applications*, pp. 556-557, New York: Marcel Dekker, Inc, 2001.
- [18] M. H. Naei, A. Masoumi, A. Shamekhi, Buckling analysis of circular functionally graded material plate having variable thickness under uniform compression by finite-element method, *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 221, No. 11, pp. 1241-1247, 2007.
- [19] S. A. M. Ghannadpour, B. Mohammadi, J. Fazilati, Bending, buckling and vibration problems of nonlocal Euler beams using Ritz method, *Composite Structures*, Vol. 96, pp. 584-589, 2013.
- [20] M. Mohammadimehr, M. Salemi, H. Nasiri, H. Afshari, Thermal effect on deflection, critical buckling load and vibration of nonlocal Euler-Bernoulli beam on Pasternak foundation using Ritz method, *Modares Mechanical Engineering Journal*, Vol. 13, No. 11, pp. 64-76, 1392. (in Persian)
- [21] A. Nemati, S. Yousefi, F. Soltanian, J. Saffar Ardabili, An efficient numerical solution of fractional optimal control problems by using the ritz method and bernstein operational matrix, *Asian Journal of Control*, Vol. 19, No. 1, pp. 1-11, 2017.
- [22] A. Nemati, S. Yousefi, A numerical method for solving fractional optimal control problems using Ritz method, *ASME, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. 11, No. 5, p. 051015-1, 2016.
- [8] Y. Huang, X. F. Li, Buckling of functionally graded circular columns including shear deformation, *Materials and Design*, Vol. 31, No. 7, pp. 3159-3166, 2010.
- [9] H. Huang, G. A. Kardomateas, Buckling and Initial Postbuckling Behavior of Sandwich Beams Including Transverse Shear, *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 11, pp. 2331-2335, 2002.
- [10] M. G. Munteanu, A. Barraco, Post-Buckling Behaviour of a compressed slender beam constrained to a cylindrical tube, *8th. World Congress on Computational Mechanics (WCCM), 5th. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS)*, Venice, Italy, 2008.
- [11] S. R. Li, R. C. Batra, Thermal Buckling and Postbuckling of Euler-Bernoulli Beams Supported on Nonlinear Elastic Foundations, *AIAA Journal*, Vol. 45, No. 3, pp. 712-720, 2007.
- [12] J. Zhao, J. Jia, X. He, H. Wang, Post-buckling and Snap-Through Behavior of Inclined Slender Beams, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 75, No. 4, p. 041020 -1, 2008.
- [13] M. A. Vaz, M. H. Patel, Post-buckling behaviour of slender structures with a bi-linear bending moment - curvature relationship, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 42, No. 3, pp. 470-483, 2007.
- [14] A. Heydari, Buckling of Functionally Graded Beams with Rectangular and Annular Sections Subjected to Axial Compression, *International Journal of Advanced Design and Manufacturing Technology*, Vol. 5, No. 1, pp. 25-31, 2011.
- [15] A. Heydari, Analytical Solutions for Buckling of Functionally Graded Circular Plates under Uniform Radial Compression using Bessel Function,