

حل کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن FG با استفاده از نظریه الاستیسیته مستوی

غلامحسین رحیمی^{۱*}، مهدی قنّاد^۲، سیامک اسماعیلزاده خادم^۳

۱- دانشیار بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۲- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۳- استاد بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

*تهران، صندوق پستی ۱۴۳-۱۴۱۱۵، rahimi_gh@modares.ac.ir

چکیده- در این مقاله با استفاده از الاستیسیته مستوی (PET)، معادله حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن FG در حالت کلی استخراج شده و سپس تنش‌های شعاعی و محیطی و نیز جابه‌جایی شعاعی استوانه‌های به‌ازای ریشه‌های حقیقی، ریشه‌های مضاعف و ریشه‌های مختلط معادله مشخصه با در نظر گرفتن شرایط انتهایی متفاوت استوانه: دو سر باز، دو سر بسته و مقید و دو سر بسته و نامقید، به‌صورت تحلیلی (حل دقیق) به‌دست آمده است. تنش‌ها و جابه‌جایی با تغییرات ضرایب ناهمگنی مطالعه و با حالت استوانه جدار ضخیم همگن مقایسه شده است. در این مقاله، روابط تحلیلی در وضعیت‌های متفاوت، به‌دست آمده و سپس با تنها وضعیت تحلیل شده توسط یکی از پژوهشگران مقایسه و اشتباه مقاله ایشان تصحیح و تکمیل شده است. جنس استوانه، ماده ناهمگن و همسانگرد با تغییرات مدول الاستیسیته در راستای شعاعی به‌صورت توانی و با نسبت پواسون ثابت است.

کلیدواژگان: استوانه جدار ضخیم، ماده ناهمگن FG، الاستیسیته مستوی.

General Solution of Plane Elasticity of Axisymmetric Functionally Graded Thick Cylindrical Shells

G. H. Rahimi^{1*}, M. Ghannad², S. Esmailzadeh Khadem³

1- Assoc. Prof. of Mechanical Eng. Dept., Tech. and Eng. Faculty, Tarbiat Modarres Univ.

2- Ph.D. Student of Mechanical Eng. Dept., Tech. and Eng. Faculty, Tarbiat Modarres Univ.

3- Prof. of Mechanical Eng. Dept., Tech. and Eng. Faculty, Tarbiat Modarres Univ.

*P.O.B. 14115-143, Tehran, Iran, rahimi_gh@modares.ac.ir

Abstract- In this paper, an analytical formulation of FGM axisymmetric thick-walled cylinders, based on the plane elasticity theory is presented. The stress and displacements in thick cylindrical shell are calculated using the real, double and complex roots of characteristic equation. Solutions are obtained under generalized plane stress, plane strain and closed-ends cylinder assumptions. It is assumed that the material is isotropic and heterogeneous with constant Poisson's ratio and radially varying elastic modulus. The results have been compared with findings of the researcher (2001) [hoop stress is incorrect], and we have present corrected version as well as supplementary findings.

Keywords: Thick-Walled Cylinder, FGM, Plane Elasticity.

۱- مقدمه

پوسته‌ها به‌طور کلی، سازه‌هایی خمیده هستند که در برابر نیروها و لنگرهای وارد شده، مطلوبیت ویژه‌ای دارند. مطالعه این رفتار از گذشته‌های نه چندان دور مورد پژوهشگران قرار گرفته و به دلیل کاربرد فراوان، این توجه همچنان ادامه دارد. از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌های جدار نازک و جدار ضخیم، اهمیت ویژه‌تری دارند و همواره پژوهشگران در پی اعمال تغییراتی بر روی ضخامت و ماده این پوسته‌ها بوده‌اند تا بتوانند مقاومت آنها را در برابر نیروهای وارد شده افزایش و در صورت امکان، وزن آنها را کاهش دهند.

لامه^۱ نخستین بار در سال ۱۸۵۲ [۱] با استفاده از نظریه الاستیسیته^۲ مستوی، حل دقیق استوانه‌های ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت از ماده همگن و همسانگرد تحت فشار یکنواخت را ارائه کرد و توزیع تنش را در استوانه توخالی به‌دست آورد که آن در حل مسایل مختلف مهندسی استفاده شده و در کتب درسی گنجانیده شد [۲].

لخنیسکی^۳ در سال ۱۹۵۰ [۳] نظریه الاستیسیته اجسام مرکب^۴ را فرمول‌بندی کرد. در پوسته‌های ساخته شده از مواد مرکب به‌دلیل تغییر ناگهانی ساختار ماده و یا ترکیب دو ماده ناهم‌ساز در کنار یکدیگر و در نتیجه تغییر ناگهانی در رفتار مواد، مسایل و نواقصی در پوسته به‌وجود می‌آید که تمرکز تنش و گسستگی در مرز لایه‌ها ایجاد می‌شود. مواد با تغییر تدریجی خواص (مکانیکی، حرارتی، مغناطیسی) یا FGM^۵ توسط نینو^۶ و همکاران در ۱۹۸۴ [۴] مطرح شد که پس از آن در سال‌های آخر قرن بیستم و شروع قرن جدید، مطالعات تحلیلی قابل توجهی بر روی سازه‌های ساخته شده از این مواد در نقاط مختلف جهان انجام شد.

فوکویی و یاماناکا^۷ در ۱۹۹۲ [۵] روابط الاستیک حاکم بر لوله‌های جدار ضخیم FGM تحت فشار داخلی را در حالت کرنش صفحه‌ای^۸ به‌کمک معادله‌های لامه استخراج و آنها را به‌روش عددی رانگ-کوتا حل کردند. اباتا و نودا^۹ در ۱۹۹۴ [۶] تنش‌های حرارتی پایدار را در استوانه و کره توخالی FGM استخراج و ماده بهینه را به‌دست آوردند. هورگان و چان^{۱۰} در ۱۹۹۹ [۷] معادله‌های حاکم بر استوانه توخالی FGM را در حالت کرنش صفحه‌ای با توزیع توانی مدول الاستیسیته در راستای شعاعی به‌کمک معادله‌های لامه استخراج کردند و توزیع تنش را به‌ازای توان‌های مثبت به‌دست آوردند. هورگان و چان با همین منطق، تنش‌ها را در دیسک‌های دوار نیز بررسی کردند [۸].

توتونچو و اُزترک^{۱۱} در ۲۰۰۱ [۹] حل دقیق مخازن تحت فشار استوانه‌های و کروی جدار ثابت FGM را ارائه کردند. ایشان استوانه را در حالت کرنش صفحه‌ای با توزیع توانی مدول الاستیسیته $E = E_0 r^\beta$ در راستای شعاعی، تحلیل و توزیع تنش شعاعی و محیطی را به‌ازای توان‌های مثبت و منفی ضریب ناهمگنی در محدوده $2 \leq \beta \leq -2$ به‌ازای ریشه‌های مثبت معادله مشخصه بررسی کردند. در مقاله ایشان رابطه و کردار مربوط به تنش محیطی و کردار تنش شعاعی اشتباه دارد که در برخی از پژوهش‌های بعدی استفاده شده است. جباری، سهراب‌پور و اسلامی در ۲۰۰۳ [۱۰] حل کلی تنش‌های مکانیکی و حرارتی در یک استوانه توخالی تحت بارهای پایدار نامتقارن محوری را با توزیع توانی خواص مکانیکی و حرارتی ارائه کردند. ارسلان و آکیز^{۱۲} در ۲۰۰۶ حل محور و دیسک توپر دوار را در حالت‌های تنش صفحه‌ای^{۱۳} و کرنش صفحه‌ای با خواص پیوسته مکانیکی به‌صورت نمایی و سهمی [۱۱] و

7. Fukui & Yamanaka
8. Plane Strain
9. Obata & Noda
10. Horgan & Chan
11. Tutuncu & Ozturk
12. Eraslan & Akis
13. Plane Stress

1. Lamé
2. Plane Elasticity Theory (PET)
3. Lekhnitskii
4. Composite Bodies
5. Functionally Graded Materials
6. Niino

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (2)$$

و روابط سینماتیک در حالت تقارن محوری.

$$\epsilon_r = \frac{du_r}{dr} \quad \text{و} \quad \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \quad (3)$$

و روابط رفتاری برای مواد ناهمگن و همسانگرد.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = E(r) \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (4)$$

A و B تابع نسبت پواسون ($\nu = \text{const.}$) هستند و براساس شرایط انتهایی استوانه تعریف می‌شوند. مدول الاستیک به صورت توانی، تابعی از شعاع فرض می‌شود.

$$E(r) = E_i \left(\frac{r}{r_i}\right)^\beta = E_i \bar{r}^\beta \quad \text{و} \quad \bar{r} = \frac{r}{r_i} \quad (5)$$

E_i و r_i مدول الاستیک و شعاع در سطح داخلی استوانه و β ضریب ناهمگنی ماده آن است. بدیهی است که اگر $\beta = 0$ باشد، مدول الاستیک ثابت می‌ماند، یعنی ماده همگن است.

با جایگزینی روابط (۳ و ۴) در رابطه (۲).

$$\frac{d}{dr} \left[E(r) \left(A \frac{du_r}{dr} + B \frac{u_r}{r} \right) \right] + \frac{1}{r} \left[E(r)(A - B) \left(\frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r} \right) \right] = 0 \quad (6)$$

$$E(r) \neq 0$$

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + (\beta + 1)r \frac{du_r}{dr} + \left(\beta \frac{B}{A} - 1 \right) u_r = 0 \quad (7)$$

معادله (۷) یک معادلهٔ اویلر-کوشی است.

حل الاستیک-پلاستیک لوله تحت فشار را در حالت کرنش صفحه‌ای [۱۲] بررسی کردند. ژیفای و هونگ‌جون^۱ در ۲۰۰۶ [۱۳] حل دقیق استوانه‌های توخالی با تغییرات خطی خواص مکانیکی در راستای شعاعی را با روش چند لایه‌ای کردن استوانه، که هر کدام از لایه‌ها به صورت همگن با خواص مکانیکی ثابت (همگن و همسانگرد) در نظر گرفته شده‌اند، ارائه کردند. ایشان در ۲۰۰۷ [۱۴] همانند گذشته با در نظر گرفتن تغییرات خواص مکانیکی به صورت خطی و توانی، استوانه FGM را با روش چند لایه‌ای کردن استوانه، تحلیل و با حل توتونچو (۲۰۰۱) مقایسه کردند و در نتیجه به دلیل تفاوت کردارها، پی به اشتباه مقاله مورد نظر بردند. توتونچو در ۲۰۰۷ [۱۵] مشابه مقاله پیشین اما با در نظر گرفتن تغییرات مدول الاستیسیته به صورت نمایی، توزیع تنش‌ها را در یک استوانه ناهمگن به دست آورد. در مقاله حاضر، تنش‌ها و جابه‌جایی در استوانه‌های جدار ضخیم FGM متقارن محوری تحت فشار یکنواخت داخلی در حالت‌های مختلف به دست آمده است.

۲- روابط اساسی

در نظریه الاستیسیتهٔ مستوی، فرض می‌شود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌مانند. تغییر شکل‌های ایجاد شده نسبت به محور استوانه، متقارن می‌باشند و مقدارشان در امتداد طول استوانه تغییر نمی‌کند. تغییر مکان شعاعی در امتداد محیط ثابت است ولی در راستای شعاعی تغییر می‌کند، به عبارت دیگر، تغییر مکان شعاعی فقط تابع شعاع $u_r(r)$ است. بنابراین تنش طولی σ_x و کرنش طولی ϵ_x دارای مقادیر ثابتند و تنش‌های عمودی، تنش‌های اصلی هستند.

$$\sigma_\theta > \sigma_x > \sigma_r \quad (1)$$

معادله تعادل تنش در غیاب نیروهای حجمی برابر است با:

1. Zhifei & Hongjun

$$A = \frac{1-v}{(1+v)(1-2\nu)} \quad \text{و} \quad B = \frac{\nu}{(1+v)(1-2\nu)} \quad (12)$$

$$\Rightarrow v^* = \frac{B}{A} = \frac{\nu}{1-\nu}$$

(ب) استوانه بسته^۱ (استوانه با دو سر بسته - نامقید):

$$\sigma_x \neq 0 \quad \text{و} \quad \varepsilon_x \neq 0$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-2\nu} \varepsilon_x \quad (13)$$

$$A = \frac{2-\nu}{2(1+v)(1-2\nu)} \quad \text{و} \quad B = \frac{3\nu}{2(1+v)(1-2\nu)} \quad (14)$$

$$\Rightarrow v^* = \frac{B}{A} = \frac{3\nu}{2-\nu}$$

۴- حل استوانه‌های ناهمگن

اکنون معادله (۷) را با در نظر گرفتن ریشه‌های حقیقی، مضاعف و مختلط و لحاظ کردن شرایط انتهایی استوانه، حل کرده و در هر کدام از حالت‌های به دست آمده، روابط پارامتری تنش شعاعی، تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی را استخراج می‌کنیم.

۴-۱- ریشه‌های حقیقی

اگر در رابطه (۱۰)، $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای ریشه‌های حقیقی می‌شود.

$$m_1 = -\frac{\beta}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{و} \quad m_2 = -\frac{\beta}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad (15)$$

$$\Delta = \beta^2 - 4(\beta v^* - 1)$$

پاسخ معادله (۸) در این حالت:

$$u_r(r) = C_1 r^{m_1} + C_2 r^{m_2} \quad (16)$$

1. Closed Cylinder

$$r^2 u_r'' + (b+1) r u_r' + (b n^* - 1) u_r = 0 \quad (8)$$

مقدار $v^* = \frac{B}{A}$ براساس شرایط انتهایی استوانه تعریف می‌شود. اگر در معادله (۷) مقدار $u_r(r) = r^m$ گذاشته شود، معادله زیر به دست می‌آید:

$$m^2 + \beta m + (\beta v^* - 1) = 0 \quad (9)$$

و ریشه‌های معادله:

$$m_{1,2} = \frac{1}{2}(-\beta \pm \sqrt{\Delta}) \quad \& \quad \Delta = \beta^2 - 4(\beta v^* - 1) \quad (10)$$

براساس مقادیر مختلف Δ ریشه‌های معادله، ممکن است: ۱ ریشه‌های حقیقی، ۲ ریشه‌های مضاعف و ۳ ریشه‌های مختلط باشند که در هر کدام از این حالت‌ها، شرایط انتهایی استوانه می‌تواند: (الف) تنش صفحه‌ای، (ب) کرنش صفحه‌ای و (پ) استوانه بسته باشد.

۳- شرایط انتهایی استوانه

دو سر استوانه با حفظ شرایط نظریه الاستیسیته مستوی (تحلیل دوبعدی مسایل) می‌تواند باز یا بسته باشد، یعنی تنش و کرنش طولی، مقداری ثابت دارند.

(الف) تنش صفحه‌ای (استوانه با دو سر باز):

$$\sigma_x = 0 \quad \text{و} \quad \varepsilon_x \neq 0$$

$$A = \frac{1}{1-\nu^2} \quad \text{و} \quad B = \frac{\nu}{1-\nu^2} \quad (11)$$

$$\Rightarrow v^* = \frac{B}{A} = \nu$$

(ب) کرنش صفحه‌ای (استوانه با دو سر بسته - مقید):

$$\sigma_x \neq 0 \quad \text{و} \quad \varepsilon_x = 0$$

ملاحظه می‌شود که σ_r به‌طور مستقیم به A و B وابسته نیست، اما به v^* و ضریب ناهمگنی β بستگی دارد. σ_θ و u_r به A و B وابستگی مستقیم دارند. اکنون معادله‌های (۲۰) با توجه به شرایط انتهایی استوانه، به‌صورت زیر نوشته می‌شوند.
(الف) تنش صفحه‌ای:

$$v^* = v$$

$$\sigma_\theta = \frac{P\bar{r}^{\beta-1}}{k^{m_\gamma} - k^{m_\alpha}} \left[\frac{1 + vm_\alpha}{m_\alpha + v} k^{m_\alpha} \bar{r}^{m_\alpha} - \frac{1 + vm_\gamma}{m_\gamma + v} k^{m_\gamma} \bar{r}^{m_\gamma} \right] \quad (1-21)$$

$$u_r = \frac{Pr_i(1-v^\gamma)}{E_i(k^{m_\alpha} - k^{m_\gamma})} \left[\frac{1}{m_\alpha + v} k^{m_\alpha} \bar{r}^{m_\alpha} - \frac{1}{m_\gamma + v} k^{m_\gamma} \bar{r}^{m_\gamma} \right] \quad (2-21)$$

(ب) کرنش صفحه‌ای:

$$v^* = \frac{v}{1-v}$$

$$s_q = \frac{P\bar{r}^{\beta-1}}{k^{m_\alpha} - k^{m_\gamma}} \left[\frac{(1-n) + nm_\alpha}{(1-n)m_\alpha + n} k^{m_\alpha} \bar{r}^{m_\alpha} - \frac{(1-n) + nm_\gamma}{(1-n)m_\gamma + n} k^{m_\gamma} \bar{r}^{m_\gamma} \right] \quad (1-22)$$

$$u_r = \frac{Pr_i(1+n)(1-\gamma n)}{E_i(k^{m_\alpha} - k^{m_\gamma})} \left[\frac{1}{(1-n)m_\alpha + n} k^{m_\alpha} \bar{r}^{m_\alpha} - \frac{1}{(1-n)m_\gamma + n} k^{m_\gamma} \bar{r}^{m_\gamma} \right] \quad (2-22)$$

ϵ_r و ϵ_θ را با استفاده از معادله‌های (۳) به‌دست آورده و در معادله (۴) می‌گذاریم.

$$\sigma_r = E_i \bar{r}^\beta \left[C_1 (Am_\alpha + B) r^{m_\alpha-1} + C_2 (Am_\gamma + B) r^{m_\gamma-1} \right] \quad (17)$$

با اعمال بارگذاری در سطح داخلی و خارجی استوانه:

$$s_r \Big|_{r=r_i} = -P \quad \text{و} \quad s_r \Big|_{r=r_o} = 0 \quad (18)$$

در نتیجه ثابت‌های C_1 و C_2 به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{Pk^{m_\alpha} r_i^{(1-m_\alpha)}}{E_i (Am_\alpha + B)(k^{m_\alpha} - k^{m_\gamma})} \\ k = \frac{r_o}{r_i} \\ C_2 = \frac{Pk^{m_\gamma} r_i^{(1-m_\gamma)}}{E_i (Am_\gamma + B)(k^{m_\gamma} - k^{m_\alpha})} \end{cases} \quad (19)$$

C_1 و C_2 را در معادله‌های (۱۶ و ۱۷) قرار می‌دهیم:

$$s_r = \frac{P\bar{r}^{\beta-1}}{k^{m_\alpha} - k^{m_\gamma}} (k^{m_\alpha} \bar{r}^{m_\alpha} - k^{m_\gamma} \bar{r}^{m_\gamma}) \quad (1-20)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P\bar{r}^{\beta-1}}{k^{m_\alpha} - k^{m_\gamma}} \left(\frac{A + Bm_\alpha}{Am_\alpha + B} k^{m_\alpha} \bar{r}^{m_\alpha} - \frac{A + Bm_\gamma}{Am_\gamma + B} k^{m_\gamma} \bar{r}^{m_\gamma} \right) \quad (2-20)$$

$$u_r = \frac{Pr_i}{E_i(k^{m_\alpha} - k^{m_\gamma})} \left(\frac{1}{Am_\alpha + B} k^{m_\alpha} \bar{r}^{m_\alpha} - \frac{1}{Am_\gamma + B} k^{m_\gamma} \bar{r}^{m_\gamma} \right) \quad (3-20)$$

(ب) استوانه بسته:

ε_r و ε_θ را با استفاده از معادله‌های (۳) به دست آورده و در معادله (۴) می‌گذاریم.

(۲۶)

$$s_r = E_i \bar{r}^b \{C_1(Am+B) + C_2[A + (Am+B)\ln r]\} r^{m-1}$$

با اعمال شرایط بارگذاری (رابطه ۱۸)، در نتیجه ثابت‌های C_1 و C_2 به دست می‌آیند.

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{P[A + (Am+B)\ln r_o]}{E_i(Am+B)^{\gamma}(\ln k)r_i^{m-1}} \\ k = \frac{r_o}{r_i} \\ C_2 = \frac{P}{E_i(Am+B)(\ln k)r_i^{m-1}} \end{cases} \quad (27)$$

C_1 و C_2 را در معادله‌های (۲۵) و (۴) قرار می‌دهیم:

$$\sigma_r = -\frac{P\bar{r}^{-(m+\beta-1)}}{\ln k} \left(\ln \frac{k}{\bar{r}} \right) \quad (1-28)$$

(۲-۲۸)

$$s_q = \frac{P\bar{r}^{-(m+\beta-1)}}{\ln k} \left[\frac{B^{\gamma} - A^{\gamma}}{(Am+B)^{\gamma}} - \frac{A+Bm}{Am+B} \ln \frac{k}{\bar{r}} \right]$$

$$u_r = -\frac{Pr_i \bar{r}^m}{E_i(Am+B)\ln k} \left(\frac{A}{Am+B} + \ln \frac{k}{\bar{r}} \right) \quad (3-28)$$

ملاحظه می‌شود که مشابه حالت پیشین σ_r مستقیماً به A و B وابسته نیست، اما به v^* و ضریب ناهمگنی β بستگی دارد. σ_θ و u_r به A و B وابستگی مستقیم دارند. اکنون معادله (۲۸) با توجه به شرایط انتهایی استوانه، به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$v^* = \frac{3V}{2-V}$$

$$s_q = \frac{P\bar{r}^{-b-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}} \left[\frac{(\gamma-n) + 3nm_1}{(\gamma-n)m_1 + 3n} k^{m_1} \bar{r}^{m_1} - \frac{(\gamma-n) + 3nm_2}{(\gamma-n)m_2 + 3n} k^{m_2} \bar{r}^{m_2} \right] \quad (1-23)$$

$$u_r = \frac{2Pr_i(1+n)(1-2n)}{E_i(k^{m_1} - k^{m_2})} \left[\frac{1}{(\gamma-n)m_1 + 3n} k^{m_1} \bar{r}^{m_1} - \frac{1}{(\gamma-n)m_2 + 3n} k^{m_2} \bar{r}^{m_2} \right] \quad (2-23)$$

مرجع [۹] تنش شعاعی و تنش محیطی را فقط به‌ازای $\Delta > 0$ در حالت کرنش صفحه‌ای به دست آورده است. σ_r (رابطه ۹ مقاله) را درست و σ_θ (رابطه ۱۰ مقاله) را نادرست به دست آورده است. برای تصحیح رابطه، به جای $\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\beta}$ باید $\left(\frac{rR}{a}\right)^{\beta-1}$ را براساس نمادهای مقاله مذکور قرار داد. کردار (۲) مرجع مذکور اشتباه است که در انتهای این مقاله، صحیح آن نشان داده می‌شود.

۲-۴- ریشه‌های مضاعف

اگر در رابطه (۱۰)، $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای ریشه‌های مضاعف می‌شود.

$$m_1 = m_2 = m = -\frac{\beta}{\gamma} \quad (24)$$

پاسخ معادله (۸) در این حالت:

$$u_r(r) = (C_1 + C_2 \ln r) r^m \quad (25)$$

۳-۴- ریشه‌های مختلط

(الف) تنش صفحه‌ای:

اگر در رابطه (۱۰)، $\Delta < 0$ باشد، معادله دارای ریشه‌های مختلط می‌شود.

$$s_q = -\frac{P\bar{r}^{(m+b-1)}}{\ln k} \left[\frac{1-n^\gamma}{(m+n)^\gamma} + \frac{1+nm}{m+n} \ln \frac{k}{\bar{r}} \right] \quad (1-29)$$

(۳۲)

$$m_\gamma = z + iy \quad \text{و} \quad m_\gamma = z - iy$$

$$z = -\frac{\beta}{\gamma} \quad y = \frac{\sqrt{-\Delta}}{\gamma} \quad \& \quad \Delta = \beta^\gamma - \varepsilon(\beta v^* - 1)$$

$$u_r = -\frac{Pr_i \bar{r}^m (1-v^\gamma)}{E_i (m+v) \ln k} \left(\frac{1}{m+v} + \ln \frac{k}{\bar{r}} \right) \quad (2-29)$$

پاسخ معادله (۸) در این حالت:

(ب) کرنش صفحه‌ای:

$$u_r(r) = [C_1 \cos(y \ln r) + C_2 \sin(y \ln r)] r^z \quad (33)$$

(۱-۳۰)

ε_θ و ε_r را با استفاده از معادله (۳) به دست آورده و در معادله (۴) قرار می‌دهیم.

$$s_q = -\frac{P\bar{r}^{(m+b-1)}}{\ln k} \left\{ \frac{1-\gamma n}{[(1-n)m+n]^\gamma} + \frac{(1-n)+nm}{(1-n)m+n} \ln \frac{k}{\bar{r}} \right\}$$

(۳۴)

$$s_r = E_i \bar{r}^b \{ C_1 [(Az+B) \cos(y \ln r) - Ay \sin(y \ln r)] + C_2 [(Az+B) \sin(y \ln r) + Ay \cos(y \ln r)] \} r^{z-1}$$

(۲-۳۰)

از اعمال شرایط بارگذاری (رابطه ۱۸)، در نتیجه ثابت‌های C_1 و C_2 به دست می‌آیند.

$$u_r = -\frac{Pr_i \bar{r}^m (1+n)(1-\gamma n)}{E_i [(1-n)m+n] \ln k} \left[\frac{1-n}{(1-n)m+n} + \ln \frac{k}{\bar{r}} \right]$$

(پ) استوانه بسته:

(۳۵)

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{Pr_i^{(1-z)}}{E_i D} [(Az+B) \sin(y \ln r_0) + Ay \cos(y \ln r_0)] \\ C_2 = \frac{Pr_i^{(1-z)}}{E_i D} [(Az+B) \cos(y \ln r_0) - Ay \sin(y \ln r_0)] \end{cases}$$

(۳۶)

$$s_q = -\frac{P\bar{r}^{(m+b-1)}}{\ln k} \left\{ \frac{\varepsilon(1+n)(1-\gamma n)}{[(\gamma-n)m+\gamma n]^\gamma} + \frac{(\gamma-n)+\gamma nm}{(\gamma-n)m+\gamma n} \ln \frac{k}{\bar{r}} \right\} \quad (1-31)$$

$$k = \frac{r_0}{r_i} \quad \text{و} \quad D = [(Az+B)^\gamma + A^\gamma y^\gamma] \sin(y \ln k)$$

(۲-۳۱)

C_1 و C_2 را در معادله‌های (۳۳) و (۴) قرار می‌دهیم:

$$u_r = -\frac{\gamma Pr_i \bar{r}^m (1+n)(1-\gamma n)}{E_i [(\gamma-n)m+\gamma n] \ln k} \left[\frac{\gamma-n}{(\gamma-n)m+\gamma n} + \ln \frac{k}{\bar{r}} \right]$$

(۱-۳۹)

$$s_q = - \frac{P\bar{r}^{-(z+b-1)}}{\left[[(1-n)z+n]^y + (1-n)^y y^y\right] \sin(y \ln k)} \times \left\{ (1-2n)y \cos\left(y \ln \frac{k}{r}\right) + \left[n(1-n)(z^y + y^y + 1) + (1-2n + 2n^y)z\right] \sin\left(y \ln \frac{k}{r}\right) \right\} \quad (2-39)$$

$$u_r = - \frac{Pr_i \bar{r}^{-z} (1+\nu)(1-2\nu)}{E_i \left[[(1-\nu)z+\nu]^y + (1-\nu)^y y^y\right] \sin(y \ln k)} \times \left\{ [(1-\nu)z+\nu] \sin\left(y \ln \frac{k}{r}\right) + (1-\nu)y \cos\left(y \ln \frac{k}{r}\right) \right\}$$

(ب) استوانه بسته:

(۱-۴۰)

$$\sigma_\theta = - \frac{P\bar{r}^{-(z+\beta-1)}}{\left[[(\nu-1)z+3\nu]^y + (\nu-1)^y y^y\right] \sin(y \ln k)} \times \left\{ 4(1+\nu)(1-2\nu)y \cos\left(y \ln \frac{k}{r}\right) + [3\nu(\nu-1) + (z^y + y^y + 1) + 2(\nu-2\nu+5\nu^y)z] \sin\left(y \ln \frac{k}{r}\right) \right\} \quad (2-40)$$

$$u_r = - \frac{2Pr_i \bar{r}^{-z} (1+\nu)(1-2\nu)}{E_i \left[[(\nu-1)z+3\nu]^y + (\nu-1)^y y^y\right] \sin(y \ln k)} \times \left\{ [(\nu-1)z+3\nu] \sin\left(y \ln \frac{k}{r}\right) + (\nu-1)y \cos\left(y \ln \frac{k}{r}\right) \right\}$$

۵- حل استوانه‌های همگن

در استوانه‌های همگن و همسانگرد، مدول الاستیک و نسبت پواسون، هر دو ثابت هستند. اگر در معادله (۵) مقدار $\beta = 0$ گذاشته شود، ماده همگن به دست می‌آید.

$$\sigma_r = - \frac{P\bar{r}^{-(z+\beta-1)}}{\sin(y \ln k)} \sin\left(y \ln \frac{k}{r}\right) \quad (1-37)$$

$$\sigma_\theta = - \frac{P\bar{r}^{-(z+\beta-1)}}{D} \left\{ (A^y - B^y)y \cos\left(y \ln \frac{k}{r}\right) + [AB(z^y + y^y + 1) + (A^y + B^y)z] \sin\left(y \ln \frac{k}{r}\right) \right\} \quad (2-37)$$

$$u_r = - \frac{Pr_i \bar{r}^{-z}}{E_i D} \left[(Az + B) \sin\left(y \ln \frac{k}{r}\right) + Ay \cos\left(y \ln \frac{k}{r}\right) \right]$$

ملاحظه می‌شود که σ_r مستقیماً به A و B وابسته نیست، اما به ν^* و ضریب ناهمگنی β بستگی دارد. σ_θ و u_r به A و B وابستگی مستقیم دارند. اکنون معادله‌های (۳۷) با توجه به شرایط انتهایی استوانه، به صورت زیر نوشته می‌شوند.
(الف) تنش صفحه‌ای:

(۱-۳۸)

$$s_q = - \frac{P\bar{r}^{-(z+b-1)}}{\left[(z+n)^y + y^y\right] \sin(y \ln k)} \left\{ (1-n^y)y \cos\left(y \ln \frac{k}{r}\right) + [n(z^y + y^y + 1) + (1+n^y)z] \sin\left(y \ln \frac{k}{r}\right) \right\}$$

(۲-۳۸)

$$u_r = - \frac{Pr_i \bar{r}^{-z} (1-\nu^y)}{E_i \left[(z+\nu)^y + y^y\right] \sin(y \ln k)} \left[(z+\nu) \sin\left(y \ln \frac{k}{r}\right) + y \cos\left(y \ln \frac{k}{r}\right) \right]$$

(ب) کرنش صفحه‌ای:

ملاحظه می‌شود که σ_r و σ_θ به A و B وابسته نیست و نیز به E وابستگی ندارد. در حقیقت تنش شعاعی و تنش محیطی ایجاد شده برای استوانه‌های همگن و همسانگرد با مدول الاستیک متفاوت تحت فشار ثابت و هندسه یکسان، به یک میزان است که این مقدار مستقل از شرایط انتهایی استوانه است. اما u_r به A و B و نیز E وابستگی مستقیم دارد، یعنی مقدار جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ها با شرایط بالا، با تغییر مدول الاستیک و شرایط انتهایی، یکسان نیست. اکنون معادله (۳-۴۶) را در شرایط انتهایی استوانه، به صورت زیر می‌نویسیم.

(الف) تنش صفحه‌ای:

$$u_r^H = \frac{Pr_i \bar{r}}{E(k^\gamma - 1)} \left[(1-\nu) + (1+\nu) \frac{k^\gamma}{\bar{r}^\gamma} \right] \quad (47)$$

(ب) کرنش صفحه‌ای:

$$u_r^H = \frac{Pr_i \bar{r}(1+\nu)}{E(k^\gamma - 1)} \left[(1-2\nu) + \frac{k^\gamma}{\bar{r}^\gamma} \right] \quad (48)$$

(پ) استوانه بسته:

$$u_r^H = \frac{Pr_i \bar{r}}{E(k^\gamma - 1)} \left[(1-2\nu) + (1+\nu) \frac{k^\gamma}{\bar{r}^\gamma} \right] \quad (49)$$

۶- بررسی نتایج

برای مطالعه موردی و بررسی کردارهای به‌دست آمده از نتایج عددی، استوانه‌ای جدار ضخیم با مشخصات زیر را با توزیع متغیر مدول الاستیک در امتداد جدار در نظر می‌گیریم. استوانه جدار ثابت با شعاع داخلی $r_i = 40 \text{ mm}$ و شعاع خارجی $r_o = 60 \text{ mm}$ تحت فشار یکنواخت

$$E = E_i = \text{const.} \quad (41)$$

و معادله اویلر-کوشی:

$$r^\gamma u_r'' + \gamma r u_r' - u_r = 0 \quad (42)$$

معادله مشخصه و ریشه‌های آن.

$$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \pm 1 \quad (43)$$

مشاهده می‌شود که ریشه‌های معادله مشخصه، حقیقی می‌باشند و از این رو پاسخ‌ها در مجموعه $\Delta > 0$ قرار می‌گیرند. اگر در معادله (۱۶) و بقیه معادله‌ها، به جای $m_1 = +1$ و $m_2 = -1$ گذاشته شود، همان روابط شناخته شده استوانه‌های همگن به‌دست می‌آیند.

$$u_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (44)$$

با اعمال شرایط بارگذاری، نتیجه می‌شود:

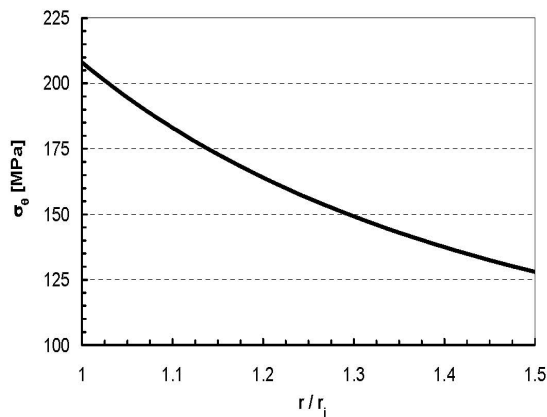
$$\begin{cases} C_1 = \frac{P}{E(A+B)(k^\gamma - 1)} \\ C_2 = \frac{Pr_o^\gamma}{E(A-B)(k^\gamma - 1)} \end{cases} \quad (45)$$

C_1 و C_2 را در معادله‌های (۴۴) و (۴) قرار می‌دهیم:

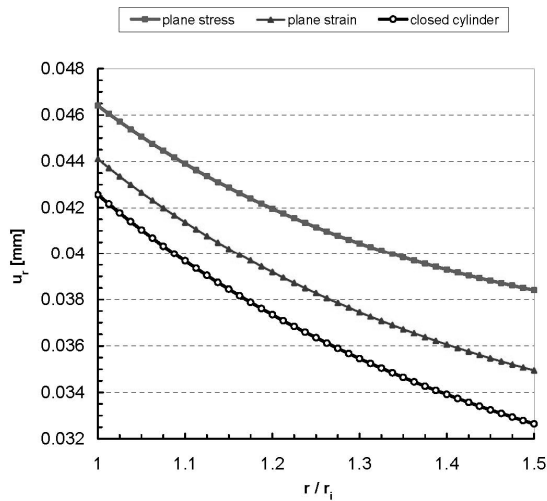
$$\sigma_r^H = \frac{P}{k^\gamma - 1} \left(1 - \frac{k^\gamma}{\bar{r}^\gamma} \right) \quad (1-46)$$

$$\sigma_\theta^H = \frac{P}{k^\gamma - 1} \left(1 + \frac{k^\gamma}{\bar{r}^\gamma} \right) \quad (2-46)$$

$$u_r^H = \frac{Pr_i \bar{r}}{E(k^\gamma - 1)} \left[\frac{1}{A+B} + \left(\frac{1}{A-B} \right) \frac{k^\gamma}{\bar{r}^\gamma} \right] \quad (3-46)$$



شکل ۲ توزیع تنش محیطی در استوانه همگن



شکل ۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه همگن

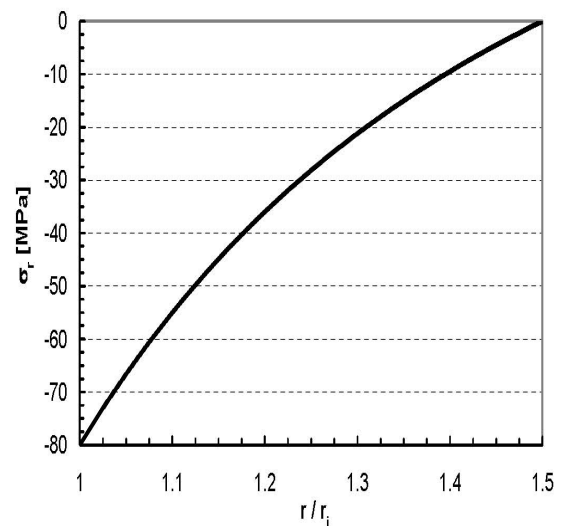
۲-۶- استوانه ناهمگن

در استوانه‌های ناهمگن و همسانگرد، تنش‌های شعاعی و محیطی و نیز جابه‌جایی شعاعی، مستقل از خواص مکانیکی و شرایط انتهایی استوانه نیستند، بلکه از طریق β و $\nu^* = \frac{B}{A}$ به خواص مکانیکی و شرایط دو سر استوانه وابسته می‌شوند. مدول الاستیک استوانه در راستای شعاع با تابع توانی $E(r) = E_i \bar{r}^\beta$ تعریف که β در محدوده $-2 \leq \beta \leq 2$ [۱۳، ۱۴، ۱۵، ۹] در نظر گرفته می‌شود. شکل

داخلی $P = 80 \text{ MPa}$ قرار گرفته است. مدول الاستیک سطح داخلی استوانه برابر $E_i = 200 \text{ GPa}$ و نسبت پواسون برابر $\nu = 0.3$ است.

۱-۶- استوانه همگن

تنش‌های شعاعی و محیطی در استوانه‌های همگن و همسانگرد مستقل از خواص مکانیکی و شرایط انتهایی استوانه هستند، اما جابه‌جایی شعاعی به آنها وابسته است. شکل ۱ توزیع تنش شعاعی فشاری را براساس رابطه (۱-۴۶) و شکل ۲ توزیع تنش محیطی کششی را براساس رابطه (۲-۴۶) در استوانه نسبت به شعاع بی‌بعد $\bar{r} = \frac{r}{r_i}$ نشان می‌دهد. جابه‌جایی شعاعی در شکل ۳ براساس روابط ۴۷، ۴۸ و ۴۹ در همان استوانه، نشانگر آن است که مقدار جابه‌جایی شعاعی در استوانه باز (تنش صفحه‌ای) بیشترین و در استوانه بسته (نامقید) کمترین است.



شکل ۱ توزیع تنش شعاعی در استوانه همگن

است و به ازای $\beta > 0$ برعکس در نیمه داخلی جدار، کمتر از ماده همگن و در نیمه خارجی جدار، بیشتر از ماده همگن است. تنش محیطی (تنش بیشینه) در حالت $\beta = 1$ در طول جدار تقریباً ثابت می ماند که از نظر کنترل تنش در استوانه جدار ضخیم، می تواند امتیاز ویژه ای باشد. در محدوده لایه میانی استوانه، رفتار تنش محیطی مانند رفتار ماده همگن می شود.

شکل ۷ توزیع نرمال جابه جایی شعاعی استوانه ناهمگن را نسبت به استوانه همگن نشان می دهد. این نسبت به ازای β های مختلف در هیچ حالتی یک نمی شود. به ازای $\beta < 0$ جابه جایی استوانه نسبت به ماده همگن بیشتر است و به ازای $\beta > 0$ کمتر می شود، اما این نسبت در طول جدار تقریباً ثابت می ماند، یعنی تغییرات جابه جایی در ماده ناهمگن مشابه تغییرات جابه جایی در ماده همگن است و میزان تفاوت به مقدار $|\beta|$ بستگی دارد.

۷- نتیجه گیری

می توان نتیجه گرفت که به ازای β مثبت یا منفی، تنش محیطی در یک نیمه، کاهش و در نیمه دیگر افزایش می یابد. به ازای β مثبت، تنش شعاعی افزایش و جابه جایی شعاعی کاهش نشان می دهد و به ازای β منفی، تنش شعاعی کاهش و جابه جایی شعاعی افزایش می یابد (در شرایط تنش صفحه ای، کرنش صفحه ای و استوانه بسته) و هر چقدر $|\beta|$ بزرگتر باشد، تغییرات بیشتر مشاهده می شود. بنابراین به ازای $\beta = \pm 1$ حدود ۲۰٪ تغییرات در رفتار ماده نسبت به ماده همگن مشاهده می شود که برحسب نیاز به کاهش جابه جایی یا تنش در استوانه ناهمگن، می توان از مقدار مثبت یا منفی آن استفاده کرد.

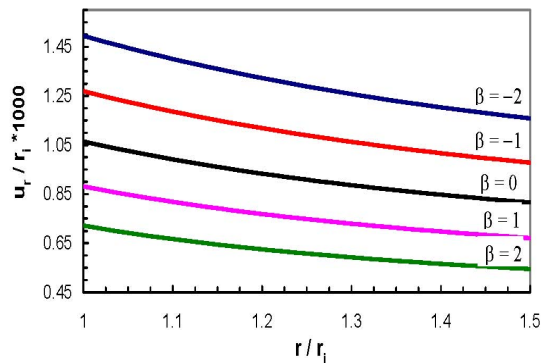
۴ توزیع مدول الاستیک را نسبت به شعاع استوانه $\frac{E}{E_i} = \left(\frac{r}{r_i}\right)^\beta$ به ازای مقادیر صحیح β نشان می دهد. نسبت پواسون استوانه، ثابت $0.5 < \nu < 0$ است که براساس آن $1 < \nu^* < 0$ می شود. در این مقاله، $\nu = 0.3$ در نظر گرفته شده که مقدار ν^* براساس شرایط انتهایی برابر است با:

$$\nu^* = \begin{cases} 0.3 & \text{تنش صفحه ای} \\ 0.4286 & \text{کرنش صفحه ای} \\ 0.5294 & \text{استوانه بسته} \end{cases} \quad (50)$$

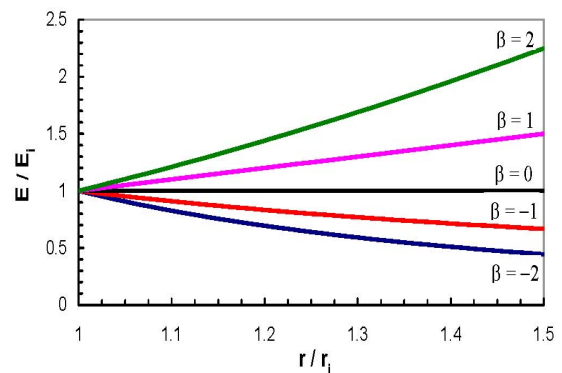
توزیع نرمال تنش ها و جابه جایی در شرایط انتهایی مختلف، تفاوت قابل ملاحظه ای با یکدیگر ندارند، از این رو کردارهای اشکال ۴ تا ۷ برای حالت استوانه بسته ترسیم شده که نتایج مانند نتایج دو حالت دیگر است.

شکل ۵ توزیع نرمال تنش شعاعی استوانه ناهمگن را نسبت به استوانه همگن نشان می دهد. این نسبت در لایه داخل و لایه خارج استوانه یک است (در [۹] و [۱۴]) در لایه خارجی یک ترسیم نشده است)، یعنی رفتار ماده ناهمگن همانند رفتار ماده همگن است. در جدار استوانه به ازای $\beta < 0$ تنش شعاعی، کاهش و به ازای $\beta > 0$ تنش شعاعی افزایش می یابد. میزان کاهش یا افزایش تنش به مقدار $|\beta|$ بستگی دارد.

شکل ۶ توزیع نرمال تنش محیطی استوانه ناهمگن را نسبت به استوانه همگن نشان می دهد. این نسبت در لایه داخل استوانه یک نیست (در [۹]) این کردار مشابه کردار تنش شعاعی ترسیم شده اما در [۱۴] اصلاح شده است). تنش محیطی به ازای $\beta < 0$ در نیمه داخلی جدار، بیشتر از ماده همگن و در نیمه خارجی جدار، کمتر از ماده همگن



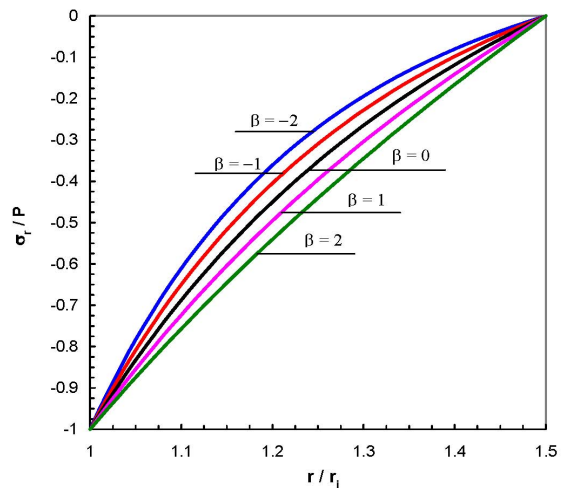
شکل ۷ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه ناهمگن



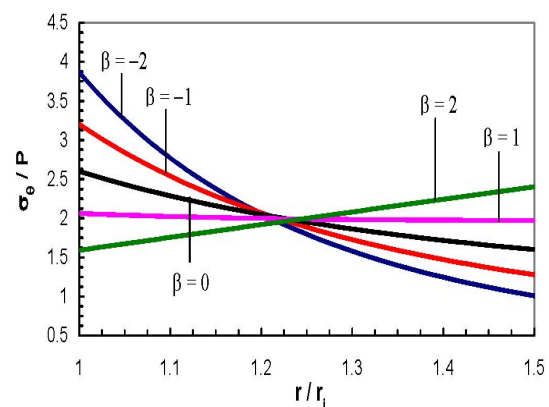
شکل ۸ توزیع مدول الاستیک در راستای شعاعی

۸- منابع

- [1] Timoshenko S.P.; Strength of Materials: Part II (Advanced Theory and Problems), 3rd ed., New York, Van Nostrand Reinhold Co., 1976.
- [2] Timoshenko S.P., Goodier J.N.; Theory of Elasticity, 3rd ed., New York, McGraw-Hill, 1983.
- [3] Lekhnitskii S.G.; Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, Moscow, Mir Pub., 1981.
- [4] Koizumi M.; FGM activities in Japan, Composites: Part B(Engineering); vol. 28, 1997, 1-4.
- [5] Fukui Y., Yamanaka N.; Elastic analysis for thick-walled tubes of functionally graded material subjected to internal pressure, JSME Int. J. Ser. I: Solid Mech.; vol. 35(4),1992, 379-385.
- [6] Obata Y., Noda N.; Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a sphere of a functionally graded material, J. Thermal Stresses; vol.17(3),1994, 471-487.
- [7] Horgan C.O., Chan A.M.; The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials, J. Elasticity; vol. 55,1999, 43-59.
- [8] Horgan C.O., Chan A.M.; The stress response of functionally graded isotropic linearly elastic rotating disks, J. Elasticity; vol. 55,1999, 219-230.



شکل ۹ توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن



شکل ۱۰ توزیع تنش محیطی در استوانه ناهمگن

- [13] Hongjun X., Zhifei S., Taotao Z.; Elastic analyses of heterogeneous hollow cylinders, *Mech. Res. Comm.*; vol. 33, 2006, 681-691.
- [14] Zhifei S., Taotao Z., Hongjun X.; Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders, *J. Composite Struc.*; vol. 79, 2007, 140-147.
- [15] Tutuncu N.; Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties, *J. Eng. Struc.*; vol. 29, 2007, 2032-2035.
- [9] Tutuncu N., Ozturk M.; Exact solution for stresses in functionally graded pressure vessels, *composites: Part B(Engineering)*; vol. 32, 2001, 683-686.
- [10] Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R.; General solution for mechanical and thermal stresses in a nonaxisymmetric steady-state loads, *J. App. Mech.*; vol. 70, 2003, 111-118.
- [11] Eraslan A.N., Akis T.; On the plane strain and plane stress solution of functionally graded solid shaft and solid disk problems, *Acta Mechanica*; vol. 181, 2006, 43-63.
- [12] Eraslan A.N., Akis T.; Plane strain analytical solutions for a functionally graded elastic-plastic pressurized tube, *Int. J. Pressure Vessels & Piping*; vol. 83, 2006, 635-644.