



# بررسی ارتعاشات آزاد و کمانش تیر با خیز نسبتاً زیاد به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

فاطمه سوهانی<sup>۱</sup>، حمید رضا ایپکچی<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود  
۲- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود  
\* شاهرود، صندوق پستی ۳۱۶، web2-eipakchi@shahroodut.ac.ir

**چکیده-** در این مقاله معادلات حاکم بر ارتعاش تیر با خیز نسبتاً زیاد به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج شده است. این معادلات یک دستگاه معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی با ضرایب ثابت است که به یکدیگر کوپل هستند. پس از بی بعدسازی معادلات، از تئوری اغتشاشات برای تعیین فرکانس‌های طبیعی تیر و بار کمانش آن استفاده شده است. با انجام مطالعه پارامتری، اثر خواص مکانیکی و هندسی و همچنین تأثیر کرنش نرمال عرضی و بار محوری بر فرکانس طبیعی بررسی شده است. برخی از نتایج به دست آمده بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، هماهنگ با تئوری متداول تیرها بوده و برخی دیگر نیز نتایج متفاوتی را پیش‌بینی می‌کنند. فرمول‌بندی ارائه شده علاوه بر تعیین فرکانس‌های حرکت عرضی، می‌تواند فرکانس‌های حرکت محوری را نیز تعیین کند. فرکانس‌های طبیعی و بار کمانش با روش اجزای محدود و با به کارگیری المان‌های یک‌بعدی و سه‌بعدی تعیین و با نتایج تحلیلی مقایسه شده است.

**کلید واژگان:** تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، تحلیل فرکانسی، بار کمانش، تئوری اغتشاشات، خیز نسبتاً زیاد.

## A survey on free vibration and buckling of a beam with moderately large deflection using first order shear deformation theory

F. Sohani<sup>1</sup>, H.R. Eipakchi<sup>2\*</sup>

1- MSc Student, Mech. Eng., Shahrood Univ., Shahrood, Iran  
2- Assoc. Prof., Mech. Eng., Shahrood Univ., Shahrood, Iran  
\* P.O.B. 316, Shahrood, Iran. web2-eipakchi@shahroodut.ac.ir

**Abstract-**In this paper, the governing equations for a vibratory beam with moderately large deflection are derived using the first order shear deformation theory. These equations which are a system of nonlinear partial differential equations with constant coefficients are solved analytically with the perturbation technique and the natural frequencies and the buckling load of the system are determined. A parametric study is performed and the effects of the geometrical and material properties on the natural frequency and buckling load are investigated and the effect of normal transverse strain and axial load on natural frequency are examined. Some results based on the first order shear deformation theory are consistent with classic theories of beams and some yield different results. Formulation presented to calculate the transverse frequency, determines the axial frequency too. Also, the natural frequencies and buckling load are calculated with the finite elements method by applying one and three-dimensional elements and the results are compared with the analytical solution.

**Keywords:** First Order Shear Deformation Theory, Frequency Analysis, Buckling Load, Perturbation Technique, Moderately Large Deflection.

## ۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، گسترش سریع تحقیقات فضایی سبب انجام تحقیقات گسترده در دینامیک و کنترل سازه‌های فضایی منعطف مانند کنترل کننده‌های خورشیدی، آنتن‌ها، رادارها، خریاهای بزرگ، تلسکوپ‌های فضایی و ایستگاه‌های فضایی شده است. برای طراحی روند مناسب برای کنترل ارتعاشات سازه‌ها با دامنه بزرگ، نیاز به درک رفتار غیرخطی دینامیکی و استاتیکی سیستم‌ها، شامل کوپلینگ مدال (انتقال انرژی میان مدهای سازه) و ناپایداری دینامیکی و استاتیکی است و این‌ها، نیازمند مدل‌سازی صحیح سیستم‌های غیرخطی است. مقالات بسیاری در زمینه تحلیل تیرها و تعیین پاسخ تحلیلی دقیق با فرض خیز کوچک انجام شده است ولی تئوری‌های خطی برای زمانیکه شیب محور تیر قابل ملاحظه است مناسب نیستند و برای مدل‌سازی دقیق باید جملات غیرخطی مورد نیاز را نیز در مسأله وارد نمود.

با افزایش کاربرد تیرها تعیین پاسخ تیر با فرض خیز بزرگ نظر بسیاری از محققان را جلب کرد. لی [۱] مسأله تیر با فرض خیز بزرگ تحت بارگذاری‌های مرکب، ناشی از بار گسترده عرضی و بار متمرکز محوری را با روش عددی رانج کوتای مرتبه پنجم بررسی کرد. وگا پاسودا [۲] پاسخ و کمانش تیر با فرض خیز بزرگ را با در نظر گرفتن سطح مقطع متقارن با استفاده از روش‌های عددی انتگرال بیضوی و بسط تیلور تعیین کرد. بورگرین [۳] نوسانات آزاد تیر با تکیه‌گاه‌های مفصلی را بررسی نمود و پاسخ را برحسب توابع بیضوی ارائه کرد. درویزه و همکاران [۴] رفتار غیرخطی هندسی تیر، با فرض ثابت بودن خواص مادی را به کمک روش المان محدود و بادر نظر گرفتن المان‌های یک بعدی و دوبعدی بررسی کرده‌اند. میدان جابجایی ابتدا بر اساس دیدگاه مکانیک پیوسته، تعریف شده و سپس جملات مثلثاتی، با بسط تیلور خود جایگزین شده است. در این میدان جابجایی، حرکت انتقالی و چرخش مقطع، مد نظر قرار گرفته است. بازی و وینگارتن [۵] از روش المان محدود برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی تیر تحت بار نوسانی استفاده کردند. بکائیان [۶، ۷] تأثیر بار محوری کششی و فشاری را بر روی فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای تیر یکنواخت یک دهانه تحت بارگذاری‌های مختلف بررسی نمود. جتگانکار و چهیل [۸] فرکانس‌های طبیعی یک تیر با ضخامت

متغیر را با تعریف پارامترهای اینرسی معادل، سطح مقطع معادل و جرم معادل تعیین کردند. فریرا و فسشار [۹] فرکانس طبیعی تیر تیموشنکو با خیز کم را با روش‌های عددی به دست آورده‌اند. برای این منظور از توابع شکل جدیدی به همراه روش شبه طیفی استفاده شده است. یون و همکاران [۱۰] از روش اجزای محدود برای تعیین فرکانس‌های طبیعی تیرهای خمیده استفاده و نتایج را با مقالات دیگر مقایسه کردند. لین [۱۱] فرکانس‌های طبیعی یک تیر تیموشنکو چند دهانه را به دست آورده است. هر بخش تیر به صورت یک قسمت مستقل در نظر گرفته شده و با توجه به معلوم بودن حل تیر تیموشنکو و مونتاژ پاسخ‌های هر بخش، فرکانس تیر تعیین شده است. دینگ و چن [۱۲] با روش گالرکین به تحلیل فرکانسی و بررسی پایداری تیر متحرک محوری<sup>۱</sup> پرداخته‌اند. سو و ما [۱۳] پاسخ تحلیلی تیر تیموشنکو تحت بار ضربه‌ای را با روش‌های تبدیل لاپلاس و مدهای نرمال ارائه کردند.

در اکثر مقاله‌هایی که برای تیرها حل تحلیلی ارائه کرده‌اند، معادله تیر با فرض کوچک بودن جابجایی‌ها تعیین شده است که نتیجه آن، معادلات خطی است و تحقیقاتی که منجر به معادلات غیر خطی شده است معمولاً با روش‌های عددی حل شده‌اند و حل تحلیلی برای آنها ارائه نشده است. در این مقاله معادلات حاکم بر تیر با خیز نسبتاً زیاد<sup>۲</sup> به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج شده و با استفاده از حل تحلیلی و به کمک تئوری اغتشاشات<sup>۳</sup> به تحلیل فرکانسی و تعیین بار کمانش مسأله پرداخته شده است. همچنین فرکانس‌های طبیعی و بار کمانش تیر با نتایج روش اجزای محدود<sup>۴</sup> مقایسه شده است.

## ۲- استخراج معادلات

تیری مطابق شکل ۱، با طول  $l$ ، عرض  $b$ ، عمق  $h$ ، چگالی  $\rho$  مفروض است. تیر همگن و همسانگرد بوده و تحت بار محوری  $P$  قرار دارد، جابجایی‌ها بزرگ و روابط تنش- کرنش خطی<sup>۵</sup> فرض می‌شوند. برای فرمول‌بندی از سیستم مختصات کارتزین

1. Axially Moving Beam
2. Moderately large deflection
3. Perturbation theory
4. Finite elements
5. Small strain

کمیت‌ها در جهت ضخامت، خطی است. بدیهی است این رابطه تنها یک تقریب است و با در نظر گرفتن تعداد بیشتری از جملات سری، حل‌های دقیق‌تری را می‌توان به دست آورد که منجر به تعریف تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه بالا می‌شود. استفاده از تئوری تغییر شکل برشی در سینماتیک غیرخطی سازه‌های خمشی را می‌توان در بررسی کماتش پوسته‌ها توسط شن [۱۴] و مین لی و کیون لین [۱۵] نیز مشاهده کرد. با استفاده از فرض فون کارمن برای رابطه کرنش-جابجایی [۱۶]، کرنش‌ها به صورت رابطه (۲-الف) هستند.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (2-f)$$

با توجه به میدان جابجایی (۱)، میدان کرنش به صورت (۲-ب) تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_z &= w_1 + \frac{1}{2} w_1^2, \quad \varepsilon_y = 0, \\ \gamma_{xz} &= u_1 + (1 + w_1) \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial w_1}{\partial x} \right), \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (2-b)$$

بر اساس قانون هوک رابطه تنش-کرنش به شکل رابطه (۳) است.

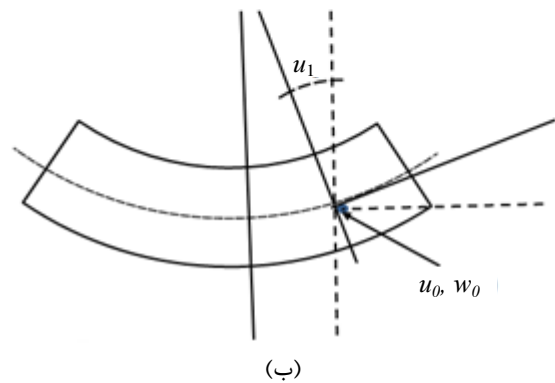
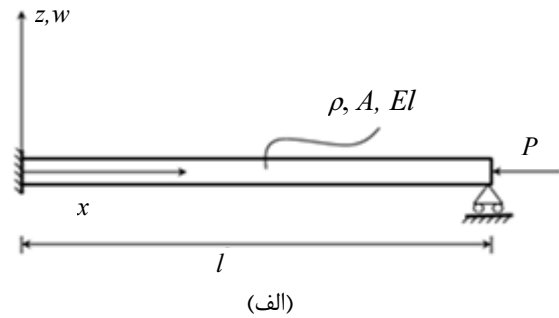
$$\begin{aligned} \sigma_x &= A \varepsilon_x + \lambda (\varepsilon_y + \varepsilon_z), \quad \tau_{xy} = \mu \gamma_{xy} \\ \sigma_y &= A \varepsilon_y + \lambda (\varepsilon_z + \varepsilon_x), \quad \tau_{yz} = \mu \gamma_{yz} \\ \sigma_z &= A \varepsilon_z + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad \tau_{xz} = \mu \gamma_{xz} \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن  $\mu$  و  $\lambda$  ثوابت لامه و  $A = \lambda + 2\mu$  است. چگالی انرژی کرنشی به شکل (۴-الف) تعریف می‌شود.

$$u^* = \frac{1}{2} \left( \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} \right) \quad (4-f)$$

تغییرات<sup>۲</sup> چگالی انرژی کرنشی  $u^*$  با جایگزینی مقادیر صفر

$(x, y, z)$  استفاده شده است که در آن  $x$  جهت محوری تیر،  $y$  در جهت پهنا و  $z$  در راستای عمق تیر بوده و مبدا در صفحه میانی است.



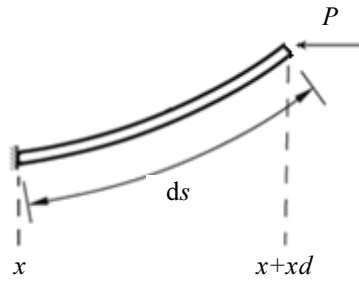
شکل ۱ الف- شماتیک سازه ب- تغییر شکل مقطع تیر

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول<sup>۱</sup>، میدان جابجایی به صورت رابطه (۱) تخمین زده شده است.

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u_0(x, t) + z u_1(x, t) \\ v(x, z, t) &= 0 \\ w(x, z, t) &= w_0(x, t) + z w_1(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $u, v, w$  مؤلفه‌های جابجایی در راستای  $x, y, z$  و  $w_0, w_1, u_0, u_1$  توابعی مجهول از  $x$  می‌باشند.  $u_1(x, t)$  چرخش خطوط عمود بر صفحه میانی و  $w_1(x, t)$  معرف کرنش نرمال عرضی است. مقدار  $u_1$  در شکل ۱ نشان داده شده است. با فرض حرکت به صورت حرکت صفحه‌ای، مؤلفه جابجایی در راستای  $y$  صفر در نظر گرفته شده است.

از نظر ریاضی، رابطه (۱) را می‌توان بسط تیلور تابع  $u(x, y, z, t)$  و  $w(x, y, z, t)$  حول  $z=0$  دانست که تنها دو جمله آن در نظر گرفته شده است. یعنی تغییرات این



شکل ۲ شماتیک یک بخش تیر تحت بار محوری

کار انجام شده توسط نیرو به شکل رابطه (۶) می‌باشد.

$$dW_p = (dP)(ds - dx) \quad (۶)$$

$$ds = dx \sqrt{1+y'^2} = dx \left(1 + \frac{1}{2}(\partial w / \partial x)^2\right)$$

است. با جایگذاری رابطه فوق در معادله (۶) و انتگرال‌گیری از تغییرات آن در راستای طول، تغییرات کار ناشی از نیروی محوری تعیین می‌شود.

$$\delta W_p = P \frac{\partial w_0}{\partial x} \delta w_0 \Big|_0^l - \int_0^l P \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \delta w_0 dx \quad (۷)$$

معادلات حرکت و شرایط مرزی با جایگذاری روابط (۷، ۵، ۴) در اصل همیلتون به صورت رابطه (۸) است.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U + W_p) dt = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} - \rho h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + Q_x - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( N_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + M_x \frac{\partial w_1}{\partial x} + Q_x (1+w_1) \right) - \rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - P \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( M_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + P_x \frac{\partial w_1}{\partial x} + M_{xz} (1+w_1) \right) + Q_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + M_{xz} \frac{\partial w_1}{\partial x} + N_z (1+w_1) - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0 \quad (۸)$$

با قرار دادن منته‌های تنش در معادلات فوق معادلات بر حسب مؤلفه‌های جابجایی به دست می‌آیند. این معادلات در پیوست (۱-۸) آورده شده است. شرایط مرزی برای این معادلات به شکل (۹) است.

$$N_x \delta u_0 \Big|_0 = 0, M_x \delta u_1 \Big|_0 = 0,$$

برخی از مؤلفه‌های تنش به صورت رابطه (۴-ب) است.

$$\delta u^* = \frac{1}{2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) \quad (۴-ب)$$

با جایگذاری معادله (۲) در معادله (۴-ب) و انتگرال‌گیری روی حجم، تغییرات انرژی کرنشی تعیین می‌شود.

المان حجم  $dxdydz$  و محدوده انتگرال‌گیری  $0 \leq x \leq l$  و  $-b/2 \leq y \leq b/2$  و  $-h/2 \leq z \leq h/2$  است:

$$\delta U = \int (N_x \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} + Q_x \delta w_1 \frac{\partial w_0}{\partial x} + Q_x \delta w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + (M_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + P_x \frac{\partial w_1}{\partial x} + M_{xz} (1+w_1)) \delta \frac{\partial w_1}{\partial x} + (N_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + M_x \frac{\partial w_1}{\partial x} + Q_x (1+w_1)) \delta \frac{\partial w_0}{\partial x} + Q_x \delta u_1 + M_x \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} + (w_1 + 1) N_z \delta w_1) dx \quad (۴-ج)$$

که در آن منته‌های تنش<sup>۱</sup> به صورت (۴-د) تعریف شده‌اند و در آن معرف تنش نرمال محوری،  $M_x$  گشتاور خمشی،  $N_z$  تنش نرمال عرضی،  $Q_x$  تنش برشی و  $M_{xz}$  گشتاور پیچشی است و  $P_x$  فاقد تعبیر فیزیکی است. منته‌های ذکر شده بر واحد ضخامت می‌باشند.

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz$$

$$P_x = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \sigma_x dz, \quad N_z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z dz$$

$$Q_x = \kappa \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad M_{xz} = \kappa \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xz} dz \quad (۴-د)$$

$\kappa$  ضریب تصحیح برشی است این ضریب وابسته به هندسه سازه و ضریب پواسون بوده و برای مقطع مستطیلی  $\pi^2/12$  است [۱۷]. انرژی جنبشی تیر با استفاده از مؤلفه‌های جابجایی تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به صورت رابطه (۵) است.

$$T = \frac{\rho b}{2} \int_0^l \left( h \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + h \left( \frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 + \frac{h^3}{12} \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \frac{h^3}{12} \left( \frac{\partial w_1}{\partial t} \right)^2 \right) dx \quad (۵)$$

مطابق شکل ۲ نیروی محوری  $P$  به صورت افقی به یک لبه وارد می‌شود.

### 1. Stress resultant

اغتشاشات [۱۸] استفاده می‌شود. در ابتدا مؤلفه‌های دامنه ارتعاشات به صورت بسطی یکنواخت از پارامتر کوچک  $\varepsilon$  تقریب زده می‌شود.

$$\begin{aligned} u_0^*(\eta, t^*; \varepsilon) &= \varepsilon(u_0^*(\eta, t^*) + \varepsilon u_1^*(\eta, t^*)) \\ u_1^*(\eta, t^*; \varepsilon) &= \varepsilon(u_2^*(\eta, t^*) + \varepsilon u_3^*(\eta, t^*)) \\ w_0^*(\eta, t^*; \varepsilon) &= \varepsilon(w_0^*(\eta, t^*) + \varepsilon w_1^*(\eta, t^*)) \\ w_1^*(\eta, t^*; \varepsilon) &= \varepsilon(w_2^*(\eta, t^*) + \varepsilon w_3^*(\eta, t^*)) \end{aligned} \quad (12)$$

با جایگذاری روابط (۱۲) در معادلات پیوست (۸-۲) و جداسازی معادلات بر اساس ضرایب  $\varepsilon$ ، معادلات مرتبه یک به صورت (۱۳) حاصل می‌شوند.

$$\begin{aligned} h^{*2} \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial \eta^2} + \theta_1 h^* \frac{\partial w_2^*}{\partial \eta} - 2eh^{*2} \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial t^{*2}} &= 0 \\ \frac{1}{12} h^{*2} \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial \eta^2} + \theta_2 \left( u_2^* + h^* \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \right) - \frac{eh^{*2}}{6} \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial t^{*2}} &= 0 \\ \theta_2 \left( h^* \frac{\partial u_2^*}{\partial \eta} + h^{*2} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial \eta^2} \right) - 2eh^{*2} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial t^{*2}} - P \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial \eta^2} &= 0 \\ \theta_1 h^* \frac{\partial u_0^*}{\partial \eta} + \frac{\theta_2 h^{*2}}{12} \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial \eta^2} + w_2^* - \frac{eh^{*2}}{6} \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial t^{*2}} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

برای تیر با تکیه گیردار- ساده شکل بی‌بعد شرایط مرزی به صورت (۱۴) است:

$$\begin{aligned} w_0^* = w_2^* = 0, \quad \eta = 0, \frac{1}{\varepsilon} \\ u_0^* = u_2^* = 0, \quad \eta = 0 \\ \frac{du_0^*}{d\eta} = \frac{du_2^*}{d\eta} = 0, \quad \eta = \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (14)$$

دستگاه معادلات (۱۳) شامل چهار معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم همگن بوده که دو به دو مستقل از یکدیگر می‌باشند. دستگاه معادله اول شامل معادلات دوم و سوم بر حسب  $u_2^* w_0^*$  است و از حل آن فرکانس‌های طبیعی عرضی تعیین می‌شوند، همچنین از حل معادلات اول و چهارم شامل متغیرهای  $u_0^* w_2^*$  فرکانس‌های طبیعی محوری تعیین می‌گردند. جهت یافتن فرکانس‌های طبیعی سیستم، پاسخ همگن دستگاه اول به صورت (۱۵) فرض می‌شود.

$$u_2^*(\eta, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} e^{\beta_n \eta} e^{i\omega t^*}$$

$$\begin{aligned} \left( N_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + Q_x (1+w_1) - P \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \delta w_0 \Big|_0^l = 0, \\ \left( M_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + P_x \frac{\partial w_1}{\partial x} + M_{xz} (1+w_1) \right) \delta w_1 \Big|_0^l = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

### ۳- حل معادلات

معادلات حاکم شامل مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای زمان و مکان هستند. برای حل این معادلات از تئوری اغتشاشات استفاده شده است. تئوری اغتشاشات یک روش تحلیلی برای حل معادلاتی است که در آنها یک پارامتر کوچک مانند  $\varepsilon$  وجود دارد. در این صورت حل مسأله بر حسب یک سری از این پارامتر کوچک در نظر گرفته شده و با جایگزینی در معادله و در نظر جملات با توان‌های یکسان  $\varepsilon$ ، حل معادله تعیین می‌شود [۱۸]. واضح است هر مسأله‌ای با این روش قابل حل نیست ولی ممکن است در حل معادلات غیرخطی و معادلات با ضرایب متغیر مفید باشد. تعیین پارامتر کوچک، مستلزم بی‌بعدسازی معادلات است. در ابتدا پارامترهای بی‌بعد زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} u_0^* = \frac{u_0}{h_0}, \quad w_0^* = \frac{w_0}{h_0} \\ x^* = \frac{x}{l}, \quad t^* = \frac{t}{t_0}, \quad h^* = \frac{h}{h_0} \end{aligned} \quad (10)$$

که  $x^*$  و  $t^*$  به ترتیب مکان و زمان بی‌بعد،  $u_0^*$  و  $w_0^*$  جایجایی‌های بی‌بعد و  $h^*$  ضخامت بی‌بعد است.  $t_0$  و  $h_0$  ضخامت و زمان شاخص نامیده شده و در ادامه تعیین می‌شوند. با اعمال پارامترهای بی‌بعد در معادلات پیوست (۸-۱)، شکل بی‌بعد معادلات به دست می‌آید. این معادلات در پیوست (۸-۲) آورده شده است که در آن پارامترهای بی‌بعد جدید به صورت (۱۱) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} \theta_1 = \frac{\lambda}{A}, \quad \theta_2 = \frac{\kappa \mu}{A}, \quad \varepsilon = \frac{h_0}{l}, \\ e = \frac{\rho h_0^2}{A t_0^2}, \quad \eta = \frac{x^*}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (11)$$

در نظر گرفته شده،  $c$  سرعت موج و به صورت  $c = \sqrt{A/\rho}$  تعریف می‌شود.  $\varepsilon$  پارامتری کوچک بوده و به عنوان پارامتر اغتشاش در نظر گرفته می‌شود. برای حل تقریبی معادلات فوق از روش بسط مستقیم در تئوری

(۱۷) کاهش می‌یابد که معادله اول مستقل بوده و تنها شامل مولفه محوری جابجایی می‌باشد و معادلات دوم و سوم بدون تغییر باقی خواهند ماند. روند حل مشابه حالت قبل است و با حل این معادلات، اثر کرنش نرمال عرضی بر فرکانس‌های طبیعی محوری مشخص می‌شود که در بخش نتایج به آن اشاره خواهد شد.

$$h^{*2} \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial \eta^2} - 2eh^{*2} \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial t^{*2}} = 0,$$

$$\frac{1}{12} h^{*2} \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial \eta^2} + \theta_2 \left( u_2^* + h^* \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \right) - \frac{eh^{*2}}{6} \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial t^{*2}} = 0,$$

$$\theta_2 \left( h^* \frac{\partial u_2^*}{\partial \eta} + h^{*2} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial \eta^2} \right) - 2eh^{*2} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial t^{*2}} - P \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial \eta^2} = 0$$

(۱۷)

### ۳-۲- بار کماتش

برای یافتن بار کماتش سیستم، پاسخ همگن دستگاه به صورت (۱۸) فرض می‌شود.

$$u_2^*(\eta, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} e^{\beta_n \eta}$$

$$w_0^*(\eta, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} e^{\beta_n \eta}$$

(۱۸)

با جایگذاری رابطه (۱۸) در معادلات دوم و سوم (۱۳)، معادله مشخصه سیستم به دست خواهد آمد. از حل این معادله،  $\beta_n$  بر حسب  $P$  تعیین و سپس بردارهای ویژه سیستم محاسبه می‌شود. این مقادیر در معادله (۱۸) جایگزین شده و شرط مرزی مساله اعمال می‌شود. با در نظر گرفتن شرط غیر صفر بودن حل، مقادیر بار کماتش به دست می‌آید.

### ۴- تحلیل عددی

برای حل اجزای محدود مسأله از نرم‌افزار انسیس استفاده شده است. المان مورد استفاده تیر ۱۸۹ می‌باشد. این المان که بر اساس تئوری تیر تیموشنکو فرمول‌بندی شده است دارای سه گره و هر گره آن، شش درجه آزادی دارد و برای مدل‌سازی تیرهای نازک تا نسبتاً ضخیم مناسب است. علاوه بر آن از المان مکعبی ۹۵ نیز برای مدل‌سازی سه بعدی تیر استفاده شده است. این المان دارای ۲۰ گره و هرگره آن سه درجه آزادی

$$w_0^*(\eta, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} e^{\beta_n \eta} e^{i \omega t^*} \quad (۱۵)$$

که در آن  $\omega$  فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌باشد. با جایگذاری رابطه (۱۵) در معادلات (۱۳)، معادله مشخصه سیستم به دست می‌آید. از حل این معادله،  $\beta_n$  بر حسب  $\omega$  تعیین و سپس بردارهای ویژه سیستم تعیین می‌شود. این مقادیر در معادله (۱۵) جایگزین شده و شرایط مرزی مسأله اعمال می‌شود. با در نظر گرفتن شرط غیر صفر بودن حل، مقادیر فرکانس‌های طبیعی به دست می‌آید. معادله اخیر یک معادله جبری پیچیده است که با تکنیک‌های عددی حل شده است. پس از تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای معادلات مرتبه یک، اکنون با در نظر گرفتن جملات با ضرایب  $\varepsilon^2$  معادلات مرتبه دوم به صورت (۱۶) خواهند بود:

$$h^{*2} \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \eta^2} + \theta_1 h^* \frac{\partial w_3^*}{\partial \eta} - 2eh^{*2} \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial t^{*2}} = k_1,$$

$$\frac{1}{12} h^{*2} \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial \eta^2} + \theta_2 \left( u_3^* + h^* \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \right) - \frac{eh^{*2}}{6} \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial t^{*2}} = k_2,$$

$$\theta_2 \left( h^* \frac{\partial u_3^*}{\partial \eta} + h^{*2} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial \eta^2} \right) - 2eh^{*2} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial t^{*2}} - P \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial \eta^2} = k_3,$$

$$\theta_1 h^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \eta} + \frac{\theta_2 h^{*2}}{12} \frac{\partial^2 w_3^*}{\partial \eta^2} + w_3^* - \frac{eh^{*2}}{6} \frac{\partial^2 w_3^*}{\partial t^{*2}} = k_4$$

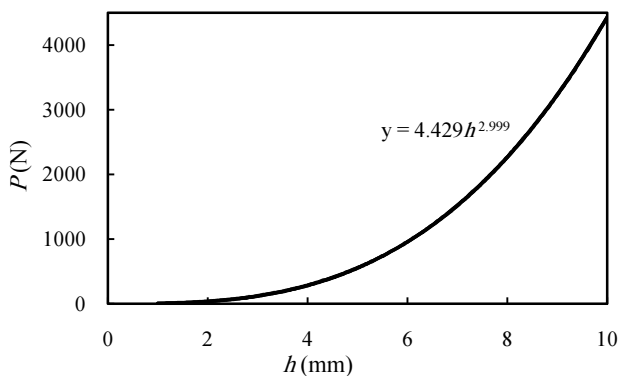
(۱۶)

که در آن  $k_1, k_2, k_3, k_4$  بخش‌های ناهمگن معادلات هستند که در پیوست (۸-۳) ارائه شده‌اند و در آن  $\omega_1$  فرکانس طبیعی تعیین شده از دستگاه معادله اول، شامل معادلات اول و چهارم و معرف فرکانس محوری تیر بوده و  $\omega_2$  فرکانس طبیعی عرضی تیر است که از حل معادلات دوم و سوم تعیین گردیده است. محاسبات فوق در قالب یک برنامه نرم‌افزاری در محیط میپل ۱۳ انجام شده است.

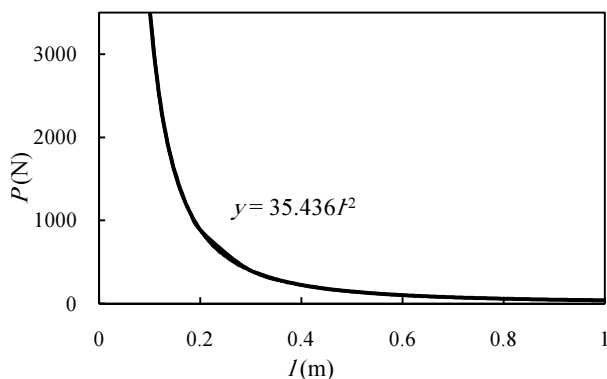
### ۳-۱- اثر کرنش نرمال عرضی

عبارت  $w_1(x)$  در معادلات، عامل ایجاد کرنش عرضی در مجموعه می‌باشد. برای بررسی اثر کرنش نرمال عرضی بر نتایج، این پارامتر از معادلات جابجایی حذف گردید. با صفر قرار دادن  $w_1(x)$  در رابطه (۱)، تعداد معادلات به سه معادله (معادلات

با بار کماتش است ظاهر نمی‌شود اما اختلافی که در تعریف رابطه تنش کرنش نرمال در راستای  $x$  وجود دارد نتایج را تغییر می‌دهد. مثلاً برای  $\nu = 0.25$ ، اختلاف مقادیر  $E, A$  و در نتیجه تنش نرمال حدود ۲۵ درصد است که این اختلاف در نتایج حل تئوری تغییر شکل برشی و تیموشنکو نیز مشاهده می‌شود. علاوه بر آن، نتایج تیر تیموشنکو و حل یک بعدی تیر، همان‌طور که انتظار است اختلاف ناچیزی دارند چون فرمول‌بندی حل عددی نیز بر اساس تئوری تیموشنکو است. بنابراین مقایسه نتایج حل تئوری تغییر شکل برشی با اجزای محدود مبتنی بر المان یک بعدی، خطای بیشتری دارد. برای بررسی کامل‌تر مسأله، می‌توان نتایج تئوری تغییر شکل برشی را با اجزای محدود سه بعدی نیز مقایسه کرد. جدول ۲ نشان می‌دهد نتایج تئوری تغییر شکل برشی به اجزای محدود سه بعدی نزدیک‌تر از تئوری تیموشنکو است. البته تحلیل سه بعدی تیر، به دلیل ابعاد ناهماهنگ تیر (طول زیاد و ضخامت کم)، تحلیلی زمان‌بر است چون نیاز به مش‌بندی ریز و در نتیجه تعداد المان زیاد دارد.



شکل ۳ تأثیر ضخامت بر بار کماتش ( $P=4.429 h^{2.999}$ )



شکل ۴ تأثیر طول بر بار کماتش ( $P=35.436/l^2$ )

دارد. در تحلیل، تکیه‌گاه تیر به صورت گیردار- ساده در نظر گرفته شده است. به علاوه آنالیز حساسیت اندازه‌ی مش برای مدل‌سازی یک‌بعدی و سه‌بعدی انجام شده است. در المان تیر ۱۸۹ مش بهینه به ازای ۳۸ گره حاصل شد و در المان مکعبی ۹۵ به ازای تعداد المان‌های بیشتر از ۱۳۰، تغییری در نتایج دیده نمی‌شود. تحلیل مدال و کماتش در انسیس در حالت خیز کوچک انجام می‌شود. مشخصات تیر تحلیل شده در جدول ۱ آورده شده است.

## ۵- بررسی نتایج

### ۵-۱- کماتش

در جدول ۲ مقادیر بار کماتش به دست آمده از تحلیل ریاضی و حل عددی برای سه مد آورده شده است.

حل تحلیلی با دو تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تیموشنکو انجام شده است. در تئوری تیموشنکو، در رابطه (۱)، مقادیر  $u_0 = w_1 = 0$  است. هم چنین رابطه تنش کرنش نرمال به صورت یک بعدی  $\sigma_x = E \varepsilon_x$  بوده و سایر مؤلفه‌های تنش صفر است به عبارت دیگر از اثر پواسون صرف‌نظر می‌شود در حالی که در تئوری تغییر شکل برشی، رابطه تنش کرنش با روابط سه بعدی الاستیسیته تعریف شده است یعنی (در این حالت خاص)  $\sigma_x = A \varepsilon_x + \lambda \varepsilon_z$  و علاوه بر آن  $\sigma_z$  نیز وجود دارد.

جدول ۱ مشخصات تیر

طول (m)	۱
ضخامت (m)	۰/۰۰۲
عمق (m)	۰/۰۲
مدول الاستیسیته (GPa)	۲۰۰
ضریب پواسون	۰/۳
چگالی ( $\text{kg/m}^3$ )	۷۸۰۰

جدول ۲ مقایسه حل تحلیلی و عددی کماتش (N)

شماره مد	۱	۲	۳
تغییر شکل برشی	۵۸/۳۱	۳۰/۱۲۶	۲۸۴/۲۰
اجزای محدود (۹۵)	۸۶/۲۸	۴۰/۱۱۵	۸۰/۲۵۹
تیموشنکو	۳۲/۲۶	۲۶/۱۰۵	۸۵/۲۳۶
اجزای محدود (۱۸۹)	۳۲/۲۶	۳۰/۱۰۵	۲۰/۲۳۷

هر چند اثر  $\sigma_z$  در معادلات دوم و سوم رابطه (۱۷) که مرتبط

شکل ۳ اثر تغییر ضخامت را بر روی بار کمانش نشان می‌دهد. این تحلیل و سایر شکل‌هایی که در ادامه آورده شده است بر اساس تئوری تغییر شکل برشی است. در تحلیل، تکیه‌گاه تیر به صورت گیردار-ساده در نظر گرفته شده است. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود با افزایش ضخامت بار کمانش افزایش می‌یابد و با توان سوم ضخامت رابطه مستقیم دارد که با تئوری ستون اولر سازگار است. شکل ۴ اثر طول را بر روی بار کمانش نشان می‌دهد. افزایش طول سبب کاهش بار کمانش در تیر خواهد شد و بار کمانش با  $1/l^2$  متناسب است.

### ۵-۲- تحلیل فرکانسی

در جدول ۳ مقادیر فرکانس‌های طبیعی به دست آمده از تحلیل ریاضی مربوط به مد های عرضی و حل عددی برای سه مد آورده شده است.

بر اساس جدول فوق اختلاف بین حل اوپلر برنولی، تیموشنکو و اجزای محدود یک‌بعدی وجود ندارد. فرمول‌بندی المان ۱۸۹ بر اساس روابط تیموشنکوست و بنابراین انتظار این است که این دو حل، اختلاف چندانی با هم نداشته باشند.

جدول ۳ مقایسه حل تحلیلی و عددی فرکانس‌های مد عرضی به

ازای بارهای محوری مختلف (Hz)

بار (N)	مد اول	مد دوم	مد سوم
تغییر شکل برشی	۴۲/۱۰	۸۴/۲۷	۹۸/۵۴
اجزای محدود (۹۵)	۱۱/۹۷	۸۴/۲۹	۹۱/۵۵
۱۰۰ تیموشنکو	۰۷/۱۰	۶۶/۲۵	۳۱/۴۹
اجزای محدود (۱۸۹)	۱۰/۰۷	۶۵/۲۵	۲۹/۴۹
اوپلر برنولی	۱۰/۰۷	۶۶/۲۵	۳۱/۴۹
تغییر شکل برشی	۷۲/۲۰	۳۷/۴۵	۸۸/۷۶
اجزای محدود (۹۵)	۱۹/۲۲	۵۷/۴۷	۵۵/۷۸
۵۰۰ تیموشنکو	۵۵/۲۰	۰۷/۴۴	۹۳/۷۲
اجزای محدود (۱۸۹)	۵۴/۲۰	۰۵/۴۴	۸۹/۷۲
اوپلر برنولی	۵۵/۲۰	۰۷/۴۴	۹۳/۷۲
تغییر شکل برشی	۸۲/۲۸	۶۰/۵۲	۹۷/۵۷
اجزای محدود (۹۵)	۳۰/۲۸	۶۲/۸۶	۹۹/۷۲
۱۰۰۰ تیموشنکو	۲۸/۶۹	۵۹/۵۵	۹۴/۴۹
اجزای محدود (۱۸۹)	۲۸/۶۸	۵۹/۵۲	۹۴/۴۴
اوپلر برنولی	۲۸/۶۹	۵۹/۵۵	۹۴/۴۹

همچنین در هندسه‌های خاص، مانند تیرهای بلند، رابطه

ویژگی فرمول‌بندی ارائه شده در این مقاله نسبت به تئوری تیر تیموشنکو و اوپلر برنولی، این است که در این فرمول‌بندی علاوه بر این که اختلاف نتایج با تئوری سه‌بعدی کاهش می‌یابد، فرکانس‌های حرکت محوری نیز قابل محاسبه است.

با چشم‌پوشی از کرنش نرمال عرضی فرکانس‌های طبیعی عرضی بی تغییر باقی می‌مانند در حالی که معادلات شامل جملات حرکت محوری تغییر کرده و حذف کرنش نرمال عرضی سبب تغییر فرکانس‌های طبیعی محوری خواهد شد. در جدول ۴ فرکانس طبیعی مربوط به سه مد اول حرکت محوری آورده شده است. نتایج با در نظر گرفتن اثر کرنش نرمال عرضی و چشم‌پوشی از آن حدود نه درصد با هم اختلاف دارند.

### ۵-۳- مطالعه تأثیر پارامترها بر فرکانس

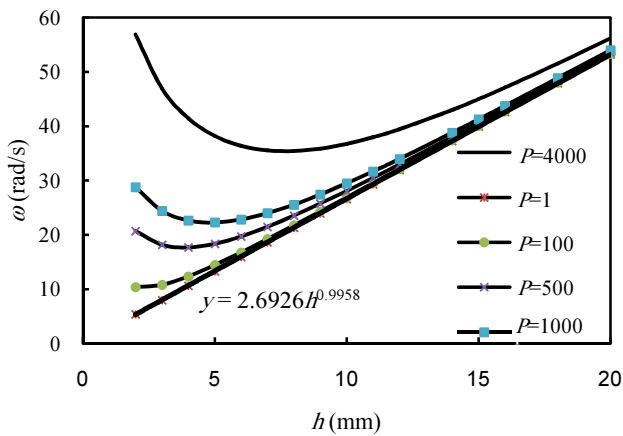
شکل ۵ اثر تغییر چگالی را بر روی فرکانس طبیعی نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود با افزایش چگالی فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. همچنین فرکانس با جذر چگالی رابطه عکس دارد و این رابطه با افزایش نیروی محوری تغییری نخواهد کرد. شکل ۶ اثر طول را بر روی فرکانس طبیعی نشان می‌دهد. بدون در نظر گرفتن نیروی محوری، افزایش طول سبب کاهش فرکانس طبیعی در تیر خواهد شد و فرکانس با طول رابطه عکس دارد در حالی که در تیر اوپلر برنولی، فرکانس با  $1/l^2$  متناسب می‌باشد [۱۹]، ولی با در نظر گرفتن نیروی محوری، مانند حالت قبل فرکانس با  $1/l$  رابطه ندارد.

جدول ۴ فرکانس‌های مد محوری (Hz)

شماره مد	۱	۲	۳
با کرنش نرمال عرضی	۲۶۵۴	۵۳۰۸	۷۹۶۳
بدون کرنش نرمال عرضی	۲۹۳۹	۵۸۷۸	۸۸۱۷



افزایش می‌یابد.



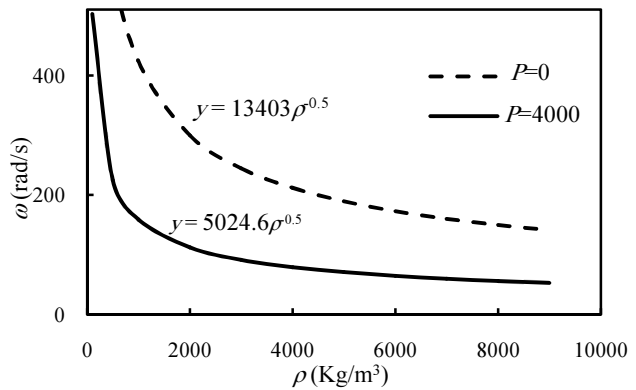
شکل ۷ تأثیر ضخامت بر فرکانس طبیعی

جدول ۵ مقایسه فرکانس‌ها با روش تحلیلی و عددی تیر با بار محوری ۱۰N به ازای ضرایب لاغری مختلف (Hz)

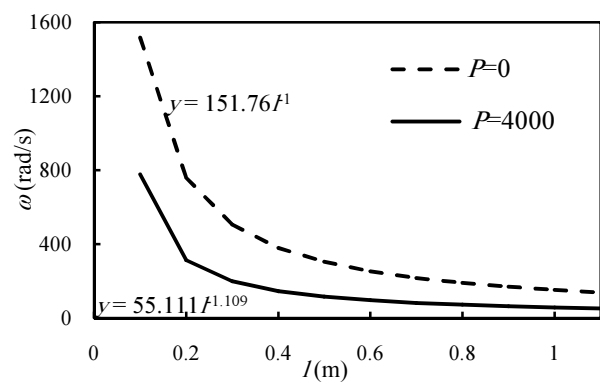
مد سوم	مد دوم	مد اول	تئوری	$l/h$
۲۸۷۹۸/۱۵	۱۳۲۰۱/۳۹	۳۴۶۱/۶۲	تغییر شکل برشی	۲۰
۲۹۸۷۵/۰۰	۱۴۶۷۸/۰۰	۴۶۶۷/۰۰	اجزای محدود (۹۵)	
۲۵۰۹۵/۰۰	۱۱۴۶۸/۰۰	۳۰۲۸/۰۰	اجزای محدود (۱۸۹)	۱۰۰
۲۶۰۱۸/۵۸	۱۱۶۵۹/۷۵	۳۰۴۱/۱۹	تیر اویلر برنولی	
۱۳۳۹/۳۱	۶۶۶/۳۷	۲۴۰/۵۳	تغییر شکل برشی	۳۰۰
۱۳۶۸/۰۰	۷۱۸/۴۹	۲۸۰/۲۹	اجزای محدود (۹۵)	
۱۱۹۴/۰۰	۶۰۸/۹۴	۲۳۰/۷۳	اجزای محدود (۱۸۹)	۵۰۰
۱۱۹۵/۶۸	۶۰۹/۵۳	۲۳۰/۸۷	تیر اویلر برنولی	
۲۴۰/۵۳	۱۴۶/۰۵	۶۸/۳۸	تغییر شکل برشی	۱۰۰
۲۴۵/۹۹	۱۵۲/۴۳	۷۲/۴۷	اجزای محدود (۹۵)	
۲۳۰/۷۳	۱۴۲/۸۶	۶۷/۹۳	اجزای محدود (۱۸۹)	۳۰۰
۲۳۰/۸۷	۱۴۲/۹۴	۶۷/۹۶	تیر اویلر برنولی	
۱۲۹/۳۸	۸۲/۸۹	۴۰/۴۱	تغییر شکل برشی	۵۰۰
۱۳۲/۰۳	۸۵/۳۸	۴۱/۸۸	اجزای محدود (۹۵)	
۱۲۷/۰۱	۸۲/۱۴	۴۰/۳۰	اجزای محدود (۱۸۹)	۱۰۰
۱۲۷/۰۰	۸۲/۱۴	۴۰/۲۹	تیر اویلر برنولی	

جدول ۶ فرکانس طبیعی چهار مد عرضی تیر با تکیه‌گاه‌های مختلف (Hz)

مد سوم	مد دوم	مد اول	SS	$P=1000(N)$
۹۷/۵۷	۶۰/۵۲	۲۸/۸۲	SS	$P=1000(N)$
۱۱۰/۴۲	۶۸/۶۹	۳۲/۸۴	CS	
۱۷۶/۵۷	۱۱۵/۲۷	۵۶/۸۹	SS	$P=4000(N)$
۱۸۷/۸۵	۱۲۲/۶۳	۶۰/۵۲	CS	



شکل ۵ تأثیر چگالی بر فرکانس طبیعی

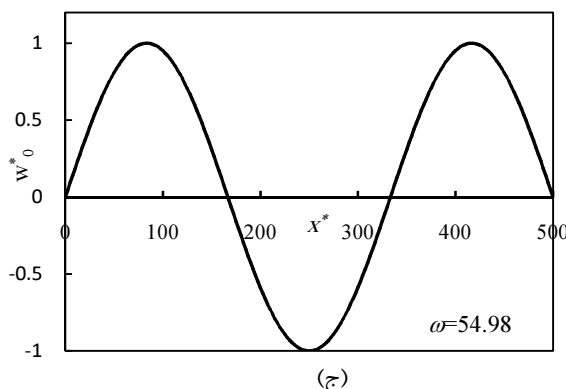
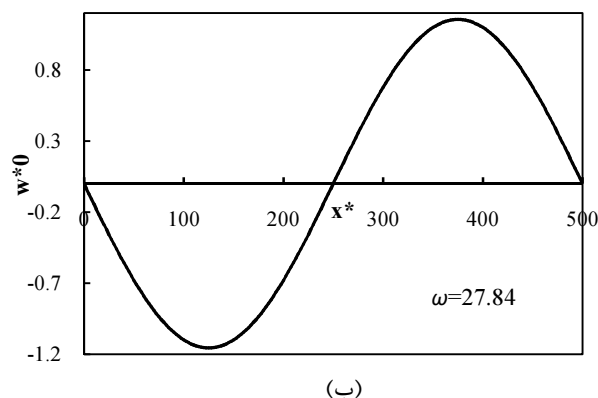
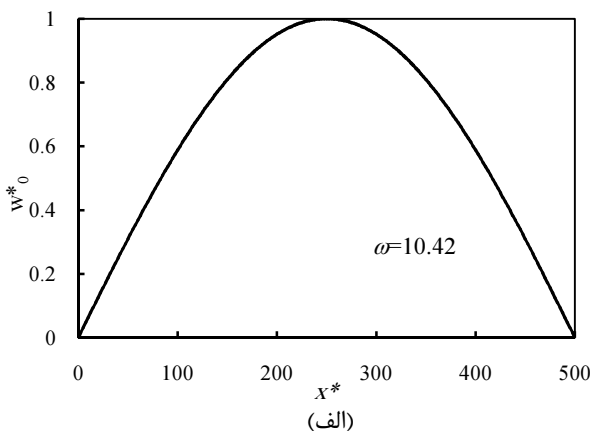


شکل ۶ تأثیر طول بر فرکانس طبیعی

شکل ۷ اثر ضخامت را بر روی فرکانس طبیعی اول نشان می‌دهد. نیروی محوری رابطه بین ضخامت و فرکانس طبیعی اول را تغییر می‌دهد. در غیاب نیروی محوری این رابطه خطی است؛ اما با افزایش نیروی محوری این رابطه تغییر کلی می‌کند. نمودارها فرکانس طبیعی حداقلی را نشان می‌دهند که به ازای یک ضخامت خاص در هر بار محوری، قابل محاسبه است.

در جدول ۵ نسبت  $l/h$  ضریب لاغری تعریف می‌شود. مقادیر کوچک این ضریب به معنی کوتاه و ضخیم بودن تیر است. فرکانس‌های محاسبه شده با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به نتایج انیسیس سه‌بعدی نزدیک‌تر است و در این محدوده نتایج اویلر اختلاف زیادی دارند. با افزایش ضریب لاغری نتایج تئوری‌ها به هم نزدیک‌تر خواهد بود که این نشان‌دهنده اهمیت پایین برش در تیرهای بلند و نازک است.

در جدول ۶ فرکانس طبیعی به ازای دو شرط مرزی، تکیه-گاه ساده (SS) و گیردار-ساده (CS) ارائه شده است. همان‌طور که انتظار است فرکانس‌های طبیعی تیر با تکیه‌گاه ساده کوچک‌تر از تیر گیردار است. هم‌چنین با افزایش بار، فرکانس



شکل ۸ الف- شکل مد اول ب- شکل مد دوم ج- شکل مد سوم

این معادلات علاوه بر جابجایی عرضی، اثر جابجایی طولی را نیز در فرمول‌بندی منظور می‌کند. نتایج با حل عددی یک و سه بعدی مقایسه و تحلیل پارامتریک نتایج ارائه گردید. تغییرات فرکانس طبیعی با چگالی، طول و مدول الاستیک رسم و با انطباق منحنی ضابطه آن به دست آمد. همچنین اثر کرنش نرمال عرضی بر نتایج بررسی شد. محاسبات نشان می‌دهد:

۱- هم‌خوانی نتایج تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با تئوری سه بعدی الاستیسیته بیشتر از سایر تئوری‌های بررسی شده است.

در جدول ۷ مقایسه‌ای بین فرکانس اول یک ورق [۱۷] با نتایج این مقاله آورده شده است.

مشخصات هندسی تیر فولادی تحلیل شده عبارتست از:  $b=0/62$  in,  $h=0/032$  in,  $l=33$  in [۱۷] مرجع  $\rho=0/28$  lb/in<sup>3</sup>,  $\nu=0/33$ ,  $E=30e6$  psi معادله حرکت تیر را برحسب طول قوس نوشته و این معادله غیرخطی را با روش المان محدود حل کرده است. یکی از دلایل عمده اختلاف نتایج تئوری مرتبه اول با نتایج مرجع [۱۷]، یکسان نبودن شرایط مرزی است. در تحلیل ما، یک لبه تیر گیردار و لبه دیگر تکیه‌گاه ساده فرض شده است. در مسائل خطی، اولین فرکانس تیر با تکیه‌گاه گیردار-ساده، حدود دو برابر تیر یک سرگیردار است [۱۹].

در شکل ۸ سه شکل مد، مربوط به حرکت عرضی تیر با تکیه‌گاه گیردار- ساده نشان داده شده است. محور افقی  $X^*$  معرف موقعیت بی‌بعد و محور قائم جابجایی بی‌بعد صفحه میانی است.

با دقت در معادلات مربوط به بخش‌های ناهمگن معادلات مرتبه دو ارائه شده در پیوست (۳-۸) مشخص می‌شود که در معادلات، جمله‌های سکولار<sup>۱</sup> [۱۸] ایجاد نخواهند شد بنابراین حل معادلات مرتبه دوم تأثیری در مقدار فرکانس‌های طبیعی نخواهند داشت ولی باعث اعوجاج در شکل مدها خواهد شد. بررسی انجام شده نشان می‌دهد اگر بسط تا مرتبه  $\epsilon^3$  ادامه یابد در معادلات مرتبه  $\epsilon^3$ ، جملات سکولار ظاهر خواهد شد در این صورت می‌توان وابستگی فرکانس به دامنه را با فرمول‌بندی مسأله با روش مقیاس چندگانه تعیین کرد.

## ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی تیر که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است استخراج شد. سپس به کمک تئوری اغتشاشات، فرکانس‌های طبیعی و بار کمانش سیستم تعیین شد.

جدول ۷ مقایسه فرکانس اول با تئوری‌های مختلف (Hz)

مرجع [۱۷]	تئوری مرتبه اول	تئوری اولر برنولی
۰/۹۵	۱/۸۷	۰/۹۶

### 1. Secular Terms

تنش‌های برشی (N/m <sup>2</sup> )	$\tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{yx}$
مقادیر ویژه	$\beta_i$
پارامتری بعدکوچک	$\varepsilon$
ضریب تصحیح برشی	$\kappa$
ثوابت لامه	$\lambda, \mu$
چگالی (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho$
ضریب پواسون	$\nu$
فرکانس طبیعی (rad/s)	$\omega$

۲- در بسط انتخاب شده، فرکانس‌های سیستم خطی و غیرخطی تا مرتبه  $\varepsilon^2$  یکسان است و در معادلات مرتبه  $\varepsilon^3$ ، جملات سکولار ظاهر خواهد شد در این صورت می‌توان وابستگی فرکانس به دامنه را با فرمول‌بندی مسأله با روش مقیاس چندگانه تعیین کرد.

۳- بر اساس جدول‌های ارائه شده، تئوری مرتبه اول بار کمانش را بیش از مقدار واقعی و فرکانس را کمتر از مقدار واقعی می‌دهد.

۴- با افزایش نیروی محوری میزان فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. در واقع افزایش نیروی محوری، متناظر با افزایش سفتی سازه است.

۵- اثر کرنش نرمال عرضی بر روی فرکانس عرضی بی تأثیر بوده و حذف آن نتایج فرکانس محوری را تغییر می‌دهد.

۶- در این فرمول‌بندی امکان محاسبه فرکانس محوری وجود داشت.

### ۸- پیوست‌ها

#### ۸-۱- معادلات حرکت بر حسب مؤلفه‌های جابجایی

$$\begin{aligned}
 & Ah \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + Ah \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{1}{12} Ah^3 \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \\
 & + \lambda h \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} + w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) - \rho h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0, \\
 & \frac{Ah^3}{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{Ah^3}{12} \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{Ah^3}{12} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \\
 & + \mu h \left( u_1 + (1+w_1) \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0, \\
 & Ah \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{Ah^3}{12} \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 & + \lambda h \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} (1+w_1) \right) \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 & + \frac{Ah^3}{12} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) \frac{\partial w_1}{\partial x} \\
 & + \mu h \left( u_1 + (1+w_1) \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \frac{\partial w_1}{\partial x} \\
 & + \left( Ah \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{Ah^3}{24} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right) \\
 & + \lambda h \left( w_1 + \frac{1}{2} w_1^2 \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
 & + \frac{Ah^3}{12} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \\
 & + \mu h \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} + (1+w_1) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) (1+w_1) \\
 & - \rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0
 \end{aligned}$$

#### ۷- فهرست علائم

پهنا (m)	$b$
مدول الاستیسیته (N/m <sup>2</sup> )	$E$
عمق تیر (m)	$h$
طول تیر (m)	$l$
منتجه‌های تنش	$N_x, M_x, P_x, N_z, M_{xz}, N_{xz}$
مساحت سطح مقطع (m <sup>2</sup> )	$S$
انرژی جنبشی (J)	$T$
مختصه زمانی (s)	$t$
چگالی انرژی جنبشی (J/m <sup>3</sup> )	$T^*$
انرژی کرنشی (J)	$U$
چگالی انرژی کرنشی (J/m <sup>3</sup> )	$U^*$
مؤلفه‌های جابه‌جایی (m)	$u, v, w$
مؤلفه‌های جابه‌جایی صفحه میانی (m)	$u_0, w_0$
توابع مجهول با بعد چرخش	$w_1, \mu_1$
مختصه‌های کارترین	$Z, Y, X$
کرنش‌های نرمال	$\varepsilon_z, \varepsilon_y, \varepsilon_x$
تنش‌های نرمال (N/m <sup>2</sup> )	$\sigma_z, \sigma_y, \sigma_x$
کرنش‌های برشی	$\gamma_{zy}, \gamma_{zx}, \gamma_{yx}$

$$\begin{aligned} & \frac{h^{*3}}{12} \left( \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \eta^2} + h^* \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial \eta^2} + h^* \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \\ & + \left( \frac{h^{*3}}{12} \left( \frac{\partial u_1^*}{\partial \eta} + h^* \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \right) \right) \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial \eta^2} + \frac{h^{*3}}{12} \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial \eta^2} \\ & + \frac{h^{*4}}{12} \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial \eta^2} + \frac{h^{*4}}{80} \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial \eta^2} \\ & + \frac{h^{*2}}{12} \theta_1 \left( \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} + \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} w_1^* \right) \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \\ & + \theta_2 h^* \left( u_1^* + (1+w_1^*) \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \right) \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \\ & + (1+w_1^*) \left( \frac{1}{12} \theta_2 h^{*2} (1+w_1^*) \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial \eta^2} \right) \\ & + (1+w_1^*) \left( \left( w_1^* + \frac{1}{2} w_1^{*2} \right) + \theta_1 h^* \frac{\partial u_0^*}{\partial \eta} + \frac{h^{*2}}{2} \right. \\ & \times \left. \left( \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{h^{*2}}{24} \theta_1 + \frac{1}{12} \theta_2 h^{*2} \right) \left( \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \right)^2 \right) \\ & + \left( \frac{h^{*3}}{12} \frac{\partial u_0^*}{\partial \eta} + \frac{h^{*4}}{24} \left( \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{h^{*4}}{160} \left( \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \right)^2 \right. \\ & + \left. \frac{h^{*2}}{12} \theta_1 \left( w_1^* + \frac{1}{2} w_1^{*2} \right) \right) \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial \eta^2} + \frac{1}{12} \theta_2 h^{*2} \\ & \times (1+w_1^*) \left( \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{12} \theta_2 h^{*2} (1+w_1^*) \left( \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \right)^2 \\ & - \frac{eh^{*2}}{12} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial t^{*2}} = 0 \end{aligned}$$

۸-۳- بخش ناهمگن معادلات مرتبه دوم

$$\begin{aligned} k_1 &= \left( \theta_1 w_2^*(X) \frac{dw_2^*(X)}{dX} + \frac{1}{12} h^{*2} \frac{d^2 w_2^*(X)}{dX^2} \right. \\ & \times \left. \frac{dw_2^*(X)}{dX} \right) e^{2I\omega_1 t_s} + \frac{d^2 w_0^*(X)}{dX^2} \frac{dw_0^*(X)}{dX} e^{2I\omega_2 t_s} \\ k_2 &= \left( \frac{1}{12} h^{*2} \frac{d^2 w_2^*(X)}{dX^2} \frac{dw_0^*(X)}{dX} + \frac{1}{12} h^{*2} \right. \\ & \times \left. \frac{d^2 w_0^*(X)}{dX^2} \frac{dw_2^*(X)}{dX} \right. \\ & \left. - \theta_2 w_2^*(X) \frac{dw_0^*(X)}{dX} \right) e^{I\omega_1 t_s + I\omega_2 t_s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{Ah^3}{12} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ & + \frac{Ah^3}{12} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ & + \mu h \left( u_1 + (1+w_1) \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ & + \frac{\mu h^3}{12} (1+w_1) \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{Ah^3}{12} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \right. \\ & + \left. \frac{Ah^5}{80} \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\lambda h^3}{12} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} (1+w_1) \right) \right) \frac{\partial w_1}{\partial x} \\ & + (1+w_1) \frac{\mu h^3}{12} \left( \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + (1+w_1) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) \\ & + \frac{\mu h^3}{12} (1+w_1) \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \\ & + (1+w_1) \left( Ah \left( w_1 + \frac{1}{2} w_1^2 \right) + \lambda h \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right) \right. \\ & \left. + \frac{\lambda h^3}{24} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$

۸-۲- شکل بی بعد معادلات حرکت تیر

$$\begin{aligned} & h^{*2} \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial \eta^2} + h^{*3} \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial \eta^2} + \frac{1}{12} h^{*3} \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial \eta^2} \\ & + \theta_1 h^* \left( \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} + w_1^* \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \right) - eh^{*2} \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial t^{*2}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{h^{*2}}{12} \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \eta^2} + \frac{h^{*3}}{12} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \right) \\ & + \theta_2 \left( u_1^* + (1+w_1^*) h^* \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \right) - \frac{eh^{*2}}{12} \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial t^{*2}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{h^{*3}}{12} \left( \frac{\partial u_1^*}{\partial \eta} + h^* \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial \eta^2} \\ & + \theta_2 h^* \left( u_1^* + h^* (1+w_1^*) \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \right) \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \\ & + \theta_2 h^* \left( \frac{\partial u_1^*}{\partial \eta} + h^* \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} + h^* (1+w_1^*) \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial \eta^2} \right) \\ & \times (1+w_1^*) - eh^{*2} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial t^{*2}} = 0 \end{aligned}$$

- Mechanics*, Vol. 37, pp. 439-443, 2002.
- [2] Vega-Posada C., Mauricio Areiza-Hurtadob J. Dario Aristizabal-Ochoa C.N., "Large-deflection and post-buckling behavior of slender beam-columns with non-linear end-estrains", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 46, pp. 79-95, 2011.
- [3] Burgreen D., "Free vibrations of a pin-ended column with constant distance between pin ends", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18, pp. 135-139, 1951.
- [4] Darvizeh M, Darvizeh A, Ansari R, Alijani A., "One and two-dimensional analysis of large deformations of beams using continuum mechanics theory", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 11, No. 4, pp. 40-33, 1390. (In Persian)
- [5] Busby H., Weingarten V.I., "Non-linear response of a beam to periodic loading", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 7, pp. 289-303, 1972.
- [6] Bokaian A., "Natural frequencies of beams under compressive axial loads", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 126, pp. 49-65, 1988.
- [7] Bokaian A., "Natural frequencies of beams under tensile axial loads", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 142, pp. 481-498, 1988.
- [8] Jategaonkar R., Chehil D.S., "Natural frequencies of a beam with varying section properties", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 133, pp. 303-322, 1989.
- [9] Ferreira A.J.M., Fasshauer G.E., "Computation of natural frequencies of shear deformable beams and plates by an RBF pseudospectral method", *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*, Vol. 196, pp. 134-146, 2006.
- [10] Yoon K.Y., Park N.H., Choi Y.J., Kang Y.J., "Natural frequencies of thin-walled curved beams", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 42, pp. 1176-1186, 2006.
- [11] Lin H.Y., "On the natural frequencies and mode shapes of a multi-span Timoshenko beam carrying a number of various concentrated elements", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 319, pp. 593-605, 2009.
- [12] Ding H., Chen L.Q., "Galerkin methods for natural frequencies of high-speed axially moving beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, pp. 3484-3494, 2010.
- [13] Su Y., Ma C., "Transient wave analysis of a cantilever Timoshenko beam subjected to impact loading by Laplace transform and normal mode methods", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 49, pp. 1158-1176, 2012.
- [14] Shen. H., "Torsional Buckling and Post Buckling of FGM Cylindrical Shell in Thermal Environment", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 44, pp. 644-657, 2009.

$$k_3 = \left( \frac{1}{12} h^{*3} \frac{d^2 u_2^*(X)}{dX^2} \frac{dw_2^*(X)}{dX} + \frac{1}{12} h^{*3} \right. \\ \times \frac{d^2 w_2^*(X)}{dX^2} \frac{du_2^*(X)}{dX} + h^* \frac{d^2 u_0^*(X)}{dX^2} \frac{dw_0^*(X)}{dX} \\ + h^* \theta_1 \frac{dw_2^*(X)}{dX} \frac{dw_0^*(X)}{dX} + h^* \theta_2 u_2^*(X) \frac{dw_2^*(X)}{dX} \\ + h^* \theta_1 w_2^*(X) \frac{d^2 w_0^*(X)}{dX^2} + 2h^* \theta_2 \frac{dw_2^*(X)}{dX} \\ \times \frac{dw_0^*(X)}{dX} + h^* \frac{d^2 w_0^*(X)}{dX^2} \frac{du_0^*(X)}{dX} \\ + h^* \theta_2 w_2^*(X) \frac{du_2^*(X)}{dX} \\ \left. + 2h^* \theta_2 \frac{d^2 w_0^*(X)}{dX^2} w_2^*(X) \right) e^{i\omega_1 t_s + i\omega_2 t_s}$$

$$k_4 = \left( \frac{1}{12} \theta_2 h^{*2} \left( \frac{dw_2^*(X)}{dX} \right)^2 + \frac{1}{24} \theta_1 h^{*2} \left( \frac{dw_2^*(X)}{dX} \right)^2 \right. \\ + \frac{1}{6} \theta_2 h^{*2} w_2^*(X) \frac{d^2 w_2^*(X)}{dX^2} \\ + \frac{1}{12} h^{*2} \frac{du_0^*(X)}{dX} \frac{d^2 w_2^*(X)}{dX^2} \\ + \frac{1}{12} \theta_1 h^{*2} w_2^*(X) \frac{d^2 w_2^*(X)}{dX^2} \\ + \frac{1}{12} h^{*2} \frac{d^2 u_0^*(X)}{dX^2} \frac{dw_2^*(X)}{dX} \\ \left. - \theta_1 w_2^*(X) \frac{du_0^*(X)}{dX} - \frac{3}{2} w_2^*(X)^2 \right) e^{2i\omega_1 t_s}$$

$$+ \left( \frac{1}{12} h^{*2} \frac{d^2 u_2^*(X)}{dX^2} \frac{dw_0^*(X)}{dX} \right. \\ + \frac{1}{12} h^{*2} \frac{d^2 w_0^*(X)}{dX^2} \frac{du_2^*(X)}{dX} - \theta_2 u_2^* \frac{dw_0^*(X)}{dX} \\ \left. - \theta_2 \left( \frac{dw_0^*(X)}{dX} \right)^2 - \frac{1}{2} \theta_1 \left( \frac{dw_0^*(X)}{dX} \right)^2 \right) e^{2i\omega_2 t_s}$$

## ۹- مراجع

- [1] Lee K., "Large deflections of cantilever beams of non-linear elastic material under a combined loading", *International Journal of Non-Linear*

- [17] Wang C.M., Reddy J.N., Lee K.H., "Shear Deformable Beams and Plates, Relationships with Classical Solutions", *Elsevier*, New York, 2000.
- [18] Nayfeh A.H., *Introduction to perturbation techniques*, John Wiley, New York, 1993.
- [19] Rao S.S., *Vibration of continuous systems*, John Wiley & Sons, New Jersey, 2007.
- [15] Li. Z.M., Lin. Z.Q., "Nonlinear Buckling and Post Buckling of Shear Deformable Anisotropic Laminated Cylindrical Shell Subjected to Varying External Pressure Load", *Composit Structure*, Vol. 92, pp. 553-567, 2010.
- [16] Tabaddor M., *Nonlinear vibration of beam and multibeam systems*, PhD Dissertation, Virginia, 1996.