مجله مهندسی مکانیک مدرس، تیر 1394، دوره 15، شماره 4، ص‌ص 214-220

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

کنترل گسترده معادله برگر غیرخطی

بهروز رحمانی[1*]، امین موسائی[1]، احمد منصوریان‌طبائی[2]

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج، یاسوج

2- دانشجوی کارشناسی‌ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج، یاسوج

* یاسوج، صندوق پستی 75914-353، b_rahmani@yu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 25 مهر 1393

پذیرش: 13 دی 1393

ارائه در سایت: 11 اسفند 1393

کلید واژگان:

معادله برگر غیرخطی

روش فازی تاکاگی- ساجینو

تبدیل فوریه سریع

جبران‌سازی موازی توزیع‌یافته

چکیده

در این مقاله، روشی برای کنترل گسترده معادله برگر غیرخطی پیشنهاد شده است. در این روش، ابتدا معادله مشتق جزئی غیرخطی حاکم بر سیستم با استفاده از روش خطی‌سازی تاکاگی- ساجینو به دو معادله مشتق جزئی خطی تبدیل می‌شود؛ به‌گونه‌ای که ترکیب فازی آن‌ها به‌صورت دقیق معادله غیرخطی اصلی را بازیابی می‌کند. این فرآیند به‌منظور پیش‌گیری از پدیده اختلال فرکانسی یا آلیاسینگ صورت می‌پذیرد. سپس هرکدام از این معادلات با به‌کار بردن تبدیل فوریه سریع به مجموعه‌ای از معادلات مشتق معمولی تبدیل می‌شود؛ بنابراین می‌توان گفت که ترکیب دو روش تاکاگی- ساجینو و تبدیل فوریه سریع، به دو معادله مشتق معمولی برای هر نقطه شبکه‌ای منجر می‌شود. در این راستا، برای پایدارسازی دینامیک هر کدام از این نقاط، از روش جبران سازی توزیع‌یافته موازی استفاده می‌شود. پایداری روش کنترلی پیشنهادی با استفاده از قضیه دوم لیاپانوف برای سیستم‌های فازی اثبات‌شده و بر آن اساس بهره‌های کنترلی پایدارساز طراحی شده است. شبیه‌سازی‌های عددی کارایی روش پیشنهادی نسبت به پژوهش‌های همانند را نشان می‌دهد، که از آن جمله می‌توان به مشخصه‌های بهتر پاسخ گذرا، خطای حالت ماندگار کوچک و مقاوم بودن نسبی آن در مقابل نویزهای اندازه‌گیری اشاره کرد.

Distributed control of nonlinear Burger's equation

Behrooz Rahmani*, Amin Moosaie, Ahmad Mansourian Tabaei

Department of Mechanical Engineering, Yasouj University, Yasouj, Iran
*P.O.B. 75914-353, Yasouj, Iran, b_rahmani@yu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 17 October 2014
Accepted 03 January 2015
Available Online 02 March 2015

Keywords:
Nonlinear Burger's equation
Takagi-Sugeno fuzzy method
fast Fourier transform
parallel distributed compensation

ABSTRACT

In this paper, a method for distributed control of nonlinear Burger's equation is proposed. In this method, first the nonlinear partial differential equation governing the system is transformed into two linear partial differntial equations using the Takagi-Sugeno linearization; such that their fuzzy composition exactly recovers the original nonlinear equation. This is done to alleviate the aliasing phenomenon occuring in nonlinear equations. Then, each of the two linear equations is converted to a set of ordinary differential equations using the fast Fourier transform (FFT). Thus, the combination of Takagi-Sugeno method and FFT technique leads to two ordinary differential equation for each grid point. For the stabilization of the dynamics of each grid point, the use is made of the parallel distributed compensation method. The stability of the proposed control method is proved using the second Lyapunov theorem for fuzzy systems. In order to solve the nonlinear Burger equation, a combination of FFT and finite difference methodologies is implemented. Simulation studies show the performance of the proposed method, for example the smaller settling time and overshoot and also its relatively robustness with respect to the measurement noises.

1- مقدمه

در دو دهه اخیر، پژوهش‌گران توجه زیادی به مدل‌سازی و کنترل دینامیک سیالات، یا به عبارت دیگر کنترل جریان سیال کرده‌اند. برای نمونه می‌توان به کنترل حلقه بسته آشفتگی به‌منظور کاهش نیروی درگ، پایدارسازی سیستم‌های در معرض سقوط سیال، کنترل میزان تولید آلاینده‌ها در فرآیند احتراق، کنترل صوت تولیدشده توسط جریان (آیروآکوستیک)، اندرکنش بین جریان و سازه و همچنین کنترل فرآیندهای شکل‌دهی توسط سیال اشاره کرد، اما معادلات دیفرانسیلی مشتق جزئی[1] غیرخطی حاکم بر دینامیک سیال (معادلات ناویر- استوکس)، بسیار پیچیده هستند و به‌کار بردن یک الگوریتم کنترلی مناسب برای آن‌ها بسیار چالش برانگیز است [2،1].

هر چند تا به حال از روش‌های کاهش مرتبه برای بهبود پایداری این معادلات بهره برده شده، ولی این تحقیقات هنوز در دوران طفولیت به سر برده و به تکامل لازم برای پیاده‌سازی در عمل نزدیک نشده است. براین‌اساس، توجه بسیاری از محققان بر یک مدل ساده شده فضایی یک‌بعدی که دارای عبارت پیچیده‌کننده غیرخطی جابه‌جایی[2] موجود در معادلات ناویر- استوکس، متمرکز شده است [3،4]. این معادله که برگر[3] نام‌گذاری شده است، علاوه‌بر خاصیت گفته‌شده، توانایی مدل‌سازی رفتار جریان‌های مافوق صوت پیرامون ایرفویل‌ها، موج‌های شوک[4] و همچنین جریان‌های ترافیکی را دارد [5]. در این مقاله، روشی برای کنترل گسترده معادله برگر

1- Partial differential equation: PDE

2- Nonlinear convective term
3- Burgers' equation
4- Shock waves

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

B. Rahmani, A. Moosaie, A. Mansourian Tabaei, Distributed control of nonlinear Burger's equation, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 4, pp. 214-220, 2015 (In Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-18]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.23.5]

غیرخطی پیشنهاد شده است. هدف نهایی این تحقیق کنترل گسترده و مرزی جریان آشفته سیال برای اهدافی مانند کاهش درگ و بهبود اختلاط است. از آن‌جا که جریان آشفته یک دینامیک سه‌بعدی، به‌شدت غیرخطی و آشوبناک با تعداد درجات آزادی بسیار بالاست، کنترل آن موضوعی بسیار پیچیده است. به همین دلیل ابتدا از یک مدل نسبتاً ساده یک‌بعدی که ویژگی‌های اساسی معادلات ناویر- استوکس را از خود بروز می‌دهد یعنی معادله برگر آغاز کرده و پس از توسعه روش‌های کنترلی مورد نیاز، به مرور بر پیچیدگی‌های مسأله افزوده می‌شود تا به معادلات کامل ناویر- استوکس سه‌بعدی رسید. در ادامه، به‌طورمختصر به بررسی کارهای پیشین در زمینه کنترل معادله برگر پرداخته می‌شود.

اسماوی، از تجزیه متعامد مناسب یا پی-اُ-دی[1] برای محاسبه مدهای بهینه استفاده کرد و سپس با به‌کارگیری آن در کنار روش گالرکین، به مجموعه کاهش یافته‌ای از معادله‌های دیفرانسیلی معمولی غیرخطی دست یافت؛ همچنین، از خطی‌سازی بازخورد برای پایداری آن‌ها استفاده شد [4].

کانیش و وولکوین از روش پی-اُ-دی برای ایجاد مدل کاهش‌مرتبه یافته معادله برگر استفاده کرده و سپس از روش بازخورد حالت کنترل برای پایدارسازی بهره بردند [6]. در این راستا، کانیش و ژای با استفاده از روش ژاکوبی- بلمن، کنترل‌کننده‌ای بهینه طراحی کردند [7]. هاینز و وولکوین [8] با گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل حاکم و استفاده از روش کنترلی بازخورد حالت بهینه دیجیتال، به پایدارسازی سیستم پرداختند. کینگ و همکارشان از تنظیم‌کننده خطی مرتبه دو برای طراحی کنترل‌کننده سیستم رتبه کاسته استفاده کردند [9]. پارک و همکارش با به‌کارگیری روش‌های پی-اُ-دی، گالرکین و گرادیان مزدوج به پایدارسازی سیستم پرداختند [3]. وولکوین استفاده از کنترل بهینه گسترده که با استفاده از روش بهینه‌سازی لاگرانژین-اس کیو پی[2] طراحی می‌شود را پیشنهاد کرد [10]. بیکر و همکاران از روش بازخورد حالت مبتنی بر رویتگر بهره بردند [2]. گورنر و همکاران از کنترل پیش‌بینی که به وسیله روش خطی مرتبه دوم گوسی[3] طراحی شد، استفاده کردند [11].

در این مقاله، روشی برای کنترل گسترده میدان سرعت در معادله برگر پیشنهاد شده است. در این روش، ابتدا معادله مشتق جزئی غیرخطی حاکم بر سیستم با استفاده از روش خطی‌سازی تاکاگی- ساجینو به دو معادله مشتق جزئی خطی تبدیل شده، در حالی که ترکیب فازی آن‌ها به‌صورت دقیق معادله اصلی را بازیابی می‌کند. این فرآیند به‌منظور پیشگیری از پدیده اندرکنش مودهای فوریه صورت پذیرفته است. زیرا وقتی آنالیز فوریه برای سیستم‌های غیرخطی به‌کار رود، به دلیل اندرکنش مودها، در معادله مشتق معمولی مربوط به ضریب هر مود، ضرایب مودهای دیگر هم ظاهر می‌شوند. در نتیجه آنالیز فوریه ابزار مفیدی برای تحلیل سیستم‌های غیرخطی نیست. روش خطی‌سازی فازی تاکاگی- ساجینو با خطی کردن معادلات از این مشکل جلوگیری می‌کند. سپس هر کدام از معادلات خطی شده با به‌کار بردن تبدیل فوریه سریع به مجموعه‌ای از معادلات مشتق معمولی تبدیل می‌شود؛ بنابراین می‌توان گفت که ترکیب دو روش تاکاگی- ساجینو و تبدیل فوریه سریع، به دو معادله مشتق معمولی برای هر نقطه شبکه‌ای منجر می‌شود. سپس برای پایدارسازی دینامیک هر کدام از این نقاط، از روش جبران‌سازی توزیع‌یافته موازی استفاده می‌شود. پایداری روش کنترلی پیشنهادی با استفاده از قضیه دوم لیاپانوف برای سیستم‌های فازی اثبات‌شده و بر آن اساس بهره‌های کنترلی پایدارساز طراحی شده است. شبیه‌سازی‌های عددی کارایی روش پیشنهادی نسبت به پژوهش‌های همانند را نشان می‌دهد، که از آن جمله می‌توان به مشخصه‌های بهتر پاسخ گذرا، خطای حالت ماندگار کوچک، مقاوم بودن نسبی آن در مقابل نویزهای اندازه‌گیری و همچنین عدم‌قطعیت‌های پارامتری اشاره کرد. نوآوری این مقاله نسبت به کارهای پیشین را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد: الف) ترکیب دو روش تاکاگی- ساجینو و تبدیل فوریه سریع برای کنترل گسترده معادله برگر غیرخطی؛ ب) ارائه روشی ساده برای اثبات پایداری و در نتیجه طراحی کنترل‌کننده پایدارساز معادلات دیفرانسیل جزئی.

در ادامه، نخست در بخش 2 به بیان مدل ریاضی سیستم مورد بحث پرداخته و سپس در بخش 3 مقدمات لازم برای بیان روش پیشنهادی ارائه خواهد شد. در بخش 4 و 5 روش کنترلی پیشنهادی تشریح و روشی برای بررسی پایداری آن پیشنهاد می‌شود. روش مورد استفاده برای حل عددی معادله مشتق جزئی غیرخطی برگر در بخش 6 تشریح می‌شود. با انجام چند شبیه‌سازی در بخش 7، کارایی روش پیشنهادی نشان داده می‌شود.

2- نمادهای به‌کاررفته

در ادامه‌ی این نوشتار، R^n و $R^{m\times n}$ به‌ترتیب بیان‌گر فضای اقلیدسی n بعدی و مجموعه تمامی ماتریس‌های حقیقی $m\times n$ است. همچنین، نماد $p>0$ ($p\geq 0$) نشان‌دهنده (نیمه) مثبت معین و متقارن بودن ماتریس p است و برای ماتریس p، p^{T} بیان‌گر ترانهاده آن است. I و 0 به‌ترتیب نشان‌دهنده ماتریس‌های همانی و صفر با اندازه مناسب است.

3- بیان مسأله

در پژوهش پیش‌رو، کنترل معادله برگر لزج غیرخطی، که به‌صورت رابطه (1) است، در نظر گرفته می‌شود:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+F(x,t) \qquad (1)$$

که در آن تابع $u(x,t)$ سرعت در یک نقطه فضایی x و در زمان t، $F(x,t)$ نیروی بدنی و خارجی فعال بر سیال و پارامتر ν لزجت سینماتیکی است. همچنین عبارت‌های $\partial u/\partial t$، $u\partial u/\partial x$ و $\nu\partial^2 u/\partial x^2$ به‌ترتیب بیان‌گر شتاب محلی، شتاب جابه‌جایی و عبارت نفوذ است.

این معادله توصیف‌کننده ساده‌ترین مدل معادلات غیرخطی جابه‌جایی نفوذ[4] است که بسیاری از ویژگی‌های معادلات ناویر- استوکس را در حین سادگی حفظ می‌کند؛ بنابراین معادله برگر مدل مناسبی برای مطالعه خواص ریاضی معادلات ناویر- استوکس و از جمله کنترل آن‌هاست.

4- مقدمات لازم برای ارائه روش پیشنهادی

4-1- رهیافت مدل‌سازی فازی تاکاگی- ساجینو [12-14]

مدل‌های فازی تاکاگی- ساجینو توانایی تشریح بسیار دقیق رفتار هر مدل غیرخطی که درون یک مجموعه محدب قرار گیرد، را دارند (شرط غیرخطی ناحیه‌ای). در این راستا، هر بخش غیرخطی سیستم تحت کنترل، به‌صورت مجموع وزن داده شده دو بخش خطی که بر تابع غیرخطی محیط هستند، نوشته می‌شود. براین‌اساس، معادلات سیستم غیرخطی به تعدادی زیرسیستم خطی با درجه عضویت مشخص تفکیک می‌شود؛ به‌گونه‌ای که تلفیق فازی این زیرسیستم‌ها به بازیابی دقیق مدل غیرخطی سیستم منجر می‌شود؛ بنابراین برتری استفاده از این مدل را می‌توان این‌گونه بیان کرد که استفاده از منطق فازی، امکان به‌کار بردن قضیه‌های کنترلی بسط داده‌شده برای

1- Proper orthogonal decomposition: POD
2- Lagrangian-SQP
3- Linear quadratic Gaussian
4- Advection-diffusion

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-18]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.23.5]

سیستم‌های خطی را در سیستم‌های غیرخطی فراهم می‌سازد.

فرض کنید که مدل دینامیکی یک دستگاه چند- ورودی و چند- خروجی، غیرخطی و نامتغیر با زمان به‌صورت رابطه (2) است:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(x,u)\\ y(t)=x(t)\end{cases} \quad (2)$$

که در آن $x(t)\in R^n$ و $u(t)\in R^m$ به‌ترتیب بیان‌گر بردار حالت و ورودی است. اگر عبارت‌های غیرخطی موجود در معادله (2)، یعنی درایه‌های بردار $f(x,u)$ شرط غیرخطی ناحیه‌ای را ارضا کند، قانون فازی متناظر با زیرسیستم i^{th} را برای $i=1,2,...,r$ می‌توان این گونه نوشت:

قانون i^{th}: اگر $z_1(t)$ برابر با M_{i1}، $z_2(\mathrm{t})$ برابر با M_{i2}، ... و $z_p(t)$ برابر با M_{ip} باشد، آن‌گاه در رابطه (3) خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\dot{x}(t) &= A_i x(t)+B_i u(t)\\ y(t) &= x(t)\end{cases} \quad (3)$$

که در آن M_{ij} به‌ازای $j=1,2,...,p$ مشخص‌کننده مجموعه‌های فازی، p تعداد متغیرهای تصمیم (یا عبارت‌های غیرخطی در نظر گرفته شده)، $r=2^p$ تعداد قانون‌های مدل (یا تعداد زیرسیستم‌های فازی) و $A_i\in R^{n\times n}$ و $B_i\in R^{n\times m}$ است. همچنین $z_1(t),z_2(t),...,z_p(t)$ معرف متغیرهای تصمیم تابع ورودی، اغتشاش خارجی و یا متغیرهای حالت است که از معادله (2) قابل محاسبه است. از این پس، $z(t)=\begin{bmatrix}z_1(t) & z_2(t) & ... & z_p(t)\end{bmatrix}$ معرف بردار متغیرهای تصمیم است که برای سادگی نوشتار، در ادامه نماد زمان آن حذف می‌شود. همچنین $M_{ij}(z_j)$ بیانگر درجه عضویت z_j در مجموعه فازی M_{ij} است و هر سیستم خطی که با $A_i x(t)+B_i u(t)$ نشان داده می‌شود یک زیرسیستم نامیده می‌شود.

براین‌اساس و با تلفیق فازی زیرسیستم‌های خطی، خروجی نهایی سیستم فازی به‌صورت روابط (4) و (5) بیان می‌شود.

$$\dot{x}(t)=\frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(z)\{A_i x(t)+B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z)}=\sum_{i=1}^{r} h_i(z)\left(A_i x(t)+B_i u(t)\right) \quad (4)$$

$$y(t)=C_i x(t) \quad (5)$$

که در آن روابط (6) و (7) را به‌صورت زیر داریم.

$$h_i(z(t))=\frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))} \quad (6)$$

$$w_i(z(t))=\prod_{j=1}^{l} M_{ij}(z_j(t)) \quad (7)$$

همچنین برای هر زمان t و $i=1,2,\ldots,r$ می‌توان رابطه (8) را اثبات کرد.

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{r} h_i(z)=1\\ h_i(z)\geq 0\\ \sum_{i=1}^{r} \omega_i(z)>0\\ \omega_i(z)\geq 0\end{cases} \quad (8)$$

اکنون با استفاده از مدل فازی تاکاگی- ساجینو می‌توان با ترکیبی از ضرایب بهره، یک کنترل‌کننده دینامیکی پایدارساز سیستم غیرخطی ساخت. چنین روش طراحی سیستم کنترلی، جبران‌سازی توزیع‌یافته موازی[1] نام‌گذاری شده که در آن از تلفیق بهره‌های بازخورد حالت پایدارساز $K_i, i=1,2,\ldots,r$ متناظر با هر زیرسیستم، برای طراحی کنترل‌کننده بازخورد حالت برآیند (کلی) سیستم غیرخطی استفاده می‌شود. ساختار کلی این کنترل‌کننده را می‌توان این‌گونه نوشت:

قانون i^{th}: اگر $z_1(t)$ برابر با M_{i1}، $z_2(\mathrm{t})$ برابر با M_{i2}، ... و $z_p(t)$ برابر با M_{ip} باشد، آن‌گاه کنترل‌کننده به‌صورت رابطه (9) خواهد بود.

$$u=-\frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(z)K_i x(t)}{\sum_{i=1}^{r} w_i}=-\sum_{i=1}^{r} h_i K_i x(t) \quad (9)$$

توجه به این نکته ضروری است که مدل فازی تاکاگی- ساجینو و کنترل‌کننده موازی توزیع‌یافته موازی دارای شمار مساوی قوانین فازی هستند و همچنین از توابع عضویت یکسان استفاده می‌کنند.

4-2- تبدیل فوریه سریع

با توجه به پیچیدگی و غیرخطی بودن معادله (1) و غیرممکن‌بودن محاسبه پاسخ تحلیلی آن در حالت کلی، استفاده از روش‌های تقریبی عددی منطقی به نظر می‌رسد، که یکی از آن‌ها روش تبدیل فوریه سریع یا اف اف تی[2] است. همان‌گونه که در ادامه تشریح می‌شود، دلیل این گزینش، دقت، سرعت، سادگی و هزینه محاسباتی به نسبت پایین این روش نسبت به روش‌های مشابه است. با استفاده از روش اف اف تی می‌توان معادلات دیفرانسیلی مشتق جزئی با شرط مرزی پریودیک را به شمار محدودی معادله دیفرانسیلی معمولی تبدیل کرد [15]. اف اف تی که یکی از روش‌های طیفی است، از دقت بسیار بالایی برخوردار است و همچنین حجم محاسبات لازم را به‌صورت چشم‌گیری کاهش می‌دهد. اگر N تعداد نقاط گرهی یا تعداد مودهای فوریه باشد، این روش نسبت به روش تبدیل گسسته مستقیم فوریه حجم محاسبات را از $4N^2$ به $N\log_2 N$ کاهش می‌دهد که این مسأله خود سبب سرعت بخشیدن به محاسبه پاسخ در کدهای محاسباتی می‌شود.

فرم کلی تبدیل فوریه سریع تابع $f(x,t)$ در جهت پریودیک x به‌صورت رابطه (10) است.

$$f(x,t)=\sum_{k=1}^{N} \hat{f}_k(t)e^{ikx} \quad (10)$$

که در آن k عدد موج، $i^2=-1$ و $\hat{f}_k(t)$ نیز ضرایب فوریه برای اعداد موج مختلف بوده که فقط تابع زمان است. به این ترتیب، به کمک این تبدیل تابعیت پاسخ از مختصات فضایی به‌صورت توابع هارمونیک e^{ikx} در نظر گرفته می‌شود و تنها تابعیت زمانی ضرایب توابع هارمونیک $\hat{f}_k(t)$ مجهول است. یعنی معادلات را به فضای زمانی برده و تبدیل به معادلات مشتق معمولی کرده که در این تحقیق مطلوب است.

مشابه با هر روش عددی دیگر، استفاده از تکنیک اف اف تی با مشکلاتی همراه است که یکی از آن‌ها پیدایش خطای آلیاسینگ[3] است؛ این خطا در مواقعی که عبارت غیرخطی در معادله وجود دارد، به دلیل اندرکنش مودهای فوریه با اعداد موج مختلف که ناشی از عمل ضرب در عبارت غیرخطی است به وجود می‌آید. برای نمونه، چنان‌چه عبارت غیرخطی معادله برگر بر یک مود فوریه با عدد موج k یعنی e^{ikx} عمل کند، می‌توان نوشت $\partial u/\partial x=e^{ikx}ike^{ikx}=ike^{2ikx}$. یعنی از عدد موج k عدد موج $2k$ ساخته می‌شود. فرض کنید که تعداد کل نقاط گرهی 128 و k نیز برابر با 100 باشد. در این صورت از عبارت غیرخطی

1- Parallel distributed compensation: PDC

2- Fast Fourier transform: FFT
3- Aliasing error

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-18]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.23.5]

معادله برگر، عدد موج $2k$ برابر با 200 ساخته می‌شود که نمی‌توان آن را بر شبکه نشان داد زیرا از 128 بزرگ‌تر است. بدین‌ترتیب خطایی در محاسبه عبارت غیرخطی معادله برگر ایجاد می‌شود که آن را خطای آلیاسینگ می‌نامند.

همچنین استفاده از روش اف اف تی دارای محدودیت‌هایی مانند پریودیک بودن شرایط مرزی و یکنواخت بودن شبکه[1] محاسباتی است. البته روش کنترل پیشنهادی در این مقاله محدود به استفاده از روش طیفی اف اف تی نبوده و برای دیگر روش‌های گسسته‌سازی عددی مانند روش تفاضل محدود نیز قابل توسعه است که در کارهای آینده به آن پرداخته خواهد شد.

5- روش کنترلی پیشنهادی

همان‌گونه که در بخش 2 بیان شد، معادله برگر از نوع مشتق جزئی است؛ بنابراین برای طراحی کنترل‌کننده کمینه مرتبه مناسب، ابتدا باید معادلات دیفرانسیل زمانی معمولی سیستم رتبه کاسته را به‌دست آورد. برای دست‌یابی به این هدف، با توجه به این‌که شرایط مرزی پریودیک و شبکه‌بندی نیز یکنواخت در نظر گرفته شده، از روش اف اف تی می‌توان بهره برد، اما از آن‌جایی که معادله (1) غیرخطی است، استفاده از اف‌اف‌تی با خطای آلیاسینگ همراه است. برای حل این مشکل، راه‌کار پیشنهادی بر پایه به‌کارگیری روش تاکاگی- ساجینو برای خطی کردن معادله دیفرانسیل مشتق جزئی برگر و به‌دست‌آوردن دو زیرسیستم مشتق جزئی خطی استوار است؛ به‌گونه‌ای که تلفیق فازی آن‌ها به بازیابی دقیق مدل غیرخطی سیستم منجر می‌شود.

معادله (11) که بازنویسی شده (1) است را در نظر بگیرید.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t) \qquad (11)$$

همان‌گونه که مشاهده می‌شود، عبارت نخست سمت راست این معادله غیرخطی است. برای برطرف کردن خطای الیاسینگ در به‌کارگیری روش اف اف تی، ابتدا سعی می‌شود با بهره گرفتن از روش تاکاگی- ساجینو این عبارت خطی شود. برای رسیدن به این هدف، بخشی از عبارت غیرخطی مدل به‌عنوان متغیر تصمیم z_1، به‌صورت رابطه (12) در نظر گرفته می‌شود.

$$z_1 = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \qquad (12)$$

براین‌اساس، رابطه (11) را می‌توان به‌صورت رابطه (13) بازنویسی کرد.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -z_1 u(x,t) + \nu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t) \qquad (13)$$

با توجه به این‌که سرعت $u(x,t)$ در صورت پایداری سیستم، نسبت به متغیر مکانی x پیوسته است، شرط غیرخطی ناحیه‌ای برای z_1 برقرار بوده و می‌توان آن را به‌صورت $z_1 \in [C_2, C_1]$ بین دو کران بالای C_1 و کران پایین C_2 محدود کرد (شکل 1)؛ با توجه به اینکه با ترکیب این دو مقدار در هر لحظه می‌توان z_1 را به‌صورت دقیق، رابطه (14)، ساخت.

$$z_1 = C_1 M_1 + C_2 M_2 = \sum_{j=1}^{2} C_j M_j \qquad (14)$$

M_1 و M_2 بیانگر وزن‌های فازی ترکیب است و فرض می‌شود که به‌صورت رابطه (15) به‌هم مربوط باشد.

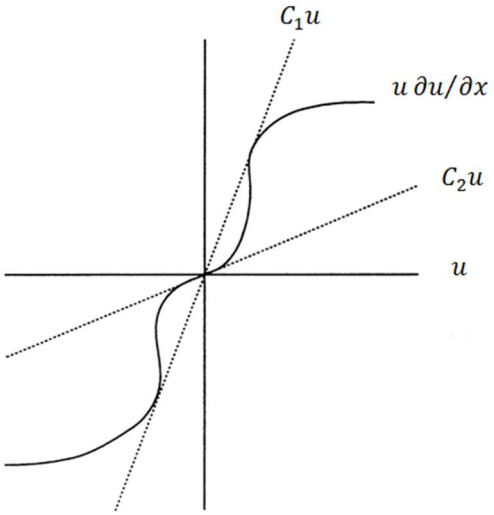
$$M_1(z_1(t)) + M_2(z_1(t)) = 1 \qquad (15)$$

براین‌اساس، این وزن‌ها به‌صورت روابط (17،16) محاسبه می‌شود.

$$M_1(z_1(t)) = \frac{z_1(t) - C_2}{C_1 - C_2} \qquad (16)$$

$$M_2(z_1(t)) = 1 - M_1(z_1(t)) \qquad (17)$$

1- Mesh



شکل 1 نمایش شرط غیرخطی ناحیه‌ای برای عبارت $u\partial u/\partial x$

با جای‌گذاری رابطه (14) در (13) می‌توان رابطه (18) را نوشت.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t)\sum_{j=1}^{2} C_j M_j + \nu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t) \qquad (18)$$

با توجه به این‌که فقط عبارت نخست سمت راست معادله (18) به اندیس j وابسته است، آن را می‌توان به صورت رابطه (19) بازنویسی کرد:

$$\sum_{j=1}^{2} M_j \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -C_j u(x,t) + \nu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t)\right] \qquad (19)$$

معادله (19) که معرف تلفیق فازی دو معادله مشتق جزئی خطی است، به‌صورت دقیق معادله مشتقی جزئی غیرخطی رابطه (11) را بازیابی می‌کند. در حقیقت، معادله برگر به‌صورت دو زیرسیستم فازی رابطه (20 و 21) قابل بیان است.

قانون نخست: اگر z_1 بزرگ باشد، آن‌گاه رابطه (20) را به‌صورت زیر داریم.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -C_1 u(x,t) + \nu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t) \qquad (20)$$

قانون دوم: اگر z_1 کوچک باشد، آن‌گاه رابطه (21) را به‌صورت زیر داریم.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -C_2 u(x,t) + \nu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t) \qquad (21)$$

اکنون با استفاده از تبدیل اف اف تی، سیستم پیوسته رابطه (19) به یک سیستم رتبه کاسته با شمار محدودی از معادلات دیفرانسیل معمولی با دقت مناسبی تقریب زده می‌شود. در این راستا، با درنظر گرفتن روابط $u(x,t) = \sum_{k=1}^{N} e^{ikx}\hat{u}_k(t)$ و $F(x,t) = \sum_{k=1}^{N} e^{ikx}\hat{f}_k(t)$ می‌توان رابطه (22) را نوشت.

$$\sum_{j=1}^{2} M_j \left[\sum_{k=1}^{N} e^{ikx}\dot{\hat{u}}_k(t) = -\nu \sum_{k=1}^{N} k^2 e^{ikx}\hat{u}_k(t) - C_j \sum_{k=1}^{N} e^{ikx}\hat{u}_k(t) + \sum_{k=1}^{N} e^{ikx}\hat{f}_k(t)\right] \qquad (22)$$

که به صورت رابطه (23) قابل ساده‌سازی است.

$$\sum_{k=1}^{N} e^{ikx}[\dot{\hat{u}}_k(t) = \sum_{j=1}^{2} M_j((-\nu k^2 - C_j)\hat{u}_k(t) + \hat{f}_k(t))] \qquad (23)$$

پس برای هر نقطه شبکه‌ای $k = 1,2,...,N$، تلفیق فازی دو زیرسیستم خطی $A_{kj}\hat{u}_k(t) + B_{kj}\hat{f}_k(t)$، معرف دینامیک آن به صورت رابطه (24) است.

$$\dot{\hat{u}}_k(t) = \sum_{j=1}^{2} M_j(A_{kj}\hat{u}_k(t) + B_{kj}\hat{f}_k(t)) \qquad (24)$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-18]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.23.5]

که در آن $A_{kj}=-\nu k^2-C_j$ و $B_{kj}=1$ است. برای پایدارسازی رابطه (24)، از کنترل‌کننده توزیع‌یافته موازی (25) استفاده می‌شود. به‌این‌ترتیب، می‌توان معادله سیستم حلقه بسته را در هر نقطه شبکه‌ای به‌صورت روابط (25) و (26) نوشت.

$$\hat{f}_k=-\sum_{r=1}^{2}M_rK_{kr}\hat{u}_k(t) \tag{25}$$

$$\dot{\hat{u}}_k(t)=\sum_{r=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}M_rM_j(A_{kj}-B_{kj}K_{kr})\hat{u}_k(t) \tag{26}$$

در این رابطه K_{kr} معرف بهره کنترلی متناظر با r^{th} زیرسیستم نقطه شبکه‌ای k^{th} است.

برای ردگیری یک ورودی مرجع، اضافه کردن یک عبارت پیش‌خوراند به ورودی پایدارساز سیستم پیشنهاد می‌شود. برای این منظور، با مشخص بودن ورودی مرجع $u_{ref}(x,t)$ در فضای مکانی مورد بررسی و گرفتن اف اف تی از آن، می‌توان ضرائب فوریه مطلوب $u_k^{ref}(t)$ متناظر با آن را در اعداد موج مختلف به‌دست آورد؛ بنابراین سیستم (24) درشرایط تعادلی مطلوب قرار می‌گیرد در صورتی‌که رابطه (27) ارضا شود.

$$\begin{bmatrix}0\\ u_k^{ref}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_k & B_k\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{u}_k^*(t)\\ \hat{f}_k^*(t)\end{bmatrix} \tag{27}$$

پس مقادیر سرعت و ورودی نامی برای این سیستم فازی به‌صورت رابطه (28) محاسبه می‌شود.

$$\begin{bmatrix}\hat{u}_k^*(t)\\ \hat{f}_k^*(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_k & B_k\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ u_k^{ref}(t)\end{bmatrix} \tag{28}$$

که در این رابطه $A_k=\sum_{j=1}^{2}M_jA_{kj}$ و $B_k=\sum_{j=1}^{2}M_jB_{kj}$ است. از سوی دیگر، در حالی‌که اثبات شده است مدل‌های فازی تاکاگی- ساجینو به‌صورت بسیار دقیق هر تابع غیرخطی که در شرط غیرخطی ناحیه‌ای صدق می‌کند را تشریح می‌نماید، پس نقطه کار معادله غیرخطی برگر و مدل فازی تاکاگی- ساجینوی آن یکسان است؛ بنابراین ورودی کنترلی به‌صورت (29) اصلاح می‌شود.

$$\hat{f}_k(t)=-\sum_{r=1}^{2}M_rK_{kr}\left(\hat{u}_k(t)-\hat{u}_k^*(t)\right)+\hat{f}_k^*(t) \tag{29}$$

ملاحظه 1. با توجه به این‌که ورودی کنترلی $\hat{f}_k(t)$ در فضای فوریه بیان شده است، با استفاده از تبدیل معکوس (10) به فضای فیزیکی منتقل می‌شود.

6- اثبات پایداری روش کنترلی پیشنهادی

از آن‌جایی که روش تاکاگی-ساجینو به‌صورت دقیق سیستم غیرخطی را به ترکیبی از زیرسیستم‌های خطی تبدیل کرده و همچنین تبدیل فوریه سریع با دقت بالا نسبت به روش‌های دیگر به حل معادله دیفرانسیل جزئی می‌پردازد، طراحی کنترل‌کننده برای سیستم‌های (1) و (24) معادل است. در ادامه با استفاده از معیار پایداری لیاپانوف برای سیستم‌های فازی و حل مجموعه‌ای از نامعادله‌های ماتریسی خطی، بهره‌های کنترلی محلی K_{kr} طراحی می‌شود.

قضیه 1. سیستم حلقه بسته (26) با نرخ کاهش α پایدار نمایی کلی است، اگر ماتریس‌های $X_k>0$ و ماتریس‌های M_{kr} به‌ازای $j=r=\{1,2\}$ و $k=\{1,2,...,N\}$ وجود داشته باشد، به‌صورت روابط (30) و (31) است.

$$-X_kA_{kr}^T-A_{kr}X_k+M_{kr}^TB_{kr}^T+B_{kr}M_{kr}-2\alpha X_k>0, \tag{30}$$

$$\begin{aligned}&-X_kA_{kr}^T-A_{kr}X_k-X_kA_{kj}^T-A_{kj}X_k+M_{kr}^TB_{kr}^T\\&+B_{kr}M_{kr}+M_{kj}^TB_{kj}^T+B_{kj}M_{kj}-4\alpha X_k\geq 0,\\&r<j \text{ such that } h_r\cap h_j\neq\varphi\end{aligned} \tag{31}$$

در این‌صورت، بهره‌های کنترل‌کننده بازخورد حالت فازی برابر با رابطه (32) خواهد بود.

$$K_{kr}=M_{kr}(X_k)^{-1} \tag{32}$$

اثبات. از آن‌جا که در این‌جا هدف بررسی پایداری داخلی است، ورودی مرجع $y_k^{ref}(t)$ برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود. برای این‌منظور، با فرض مثبت معینی ماتریس متقارن P_k، کاندید لیاپانوف رابطه (33) را در نظر گرفت.

$$V_k(t)=\hat{u}_k^T(t)P_k\hat{u}_k(t) \tag{33}$$

پایداری نمایی کلی رابطه (26) تضمین می‌شود در صورتی‌که برای هر $\hat{u}_k(t)\neq 0$ و $\alpha>0$، رابطه (34)، داشته باشیم [13]:

$$\dot{V}_k(t)=\dot{\hat{u}}_k^T(t)P_k\hat{u}_k(t)+\hat{u}_k^T(t)P_k\dot{\hat{u}}_k(t)<-2\alpha V_k(t) \tag{34}$$

با جای‌گذاری از معادله (26) در رابطه (34)، رابطه (35) را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)&=\sum_{r=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}M_rM_j\hat{u}_k^T(t)[(A_{kr}-B_{kr}K_{kj})^TP_k\\&+P_k(A_{kr}-B_{kr}K_{kj})]\hat{u}_k(t)\\&=\sum_{r=1}^{2}M_r^2\hat{u}_k^T(t)[G_{rr}^TP_k+P_kG_{rr}]\hat{u}_k(t)\\&+\sum_{r=1}^{2}\sum_{r<j}2M_rM_j\hat{u}_k^T(t)[(\frac{G_{rj}+G_{jr}}{2})^TP_k\\&+P_k(\frac{G_{rj}+G_{jr}}{2})]\hat{u}_k(t)<-2\alpha\hat{u}_k^T(t)P_k\hat{u}_k(t)\end{aligned} \tag{35}$$

درحالی‌که $G_{rj}=A_{kr}-B_{kr}K_{kj}$ است. نامساوی (35) برقرار است درصورتی‌که دو نامساوی روابط (36) و (37) برقرار باشد.

$$(A_{kr}-B_{kr}K_{kr})^TP_k+P_k(A_{kr}-B_{kr}K_{kr})+2\alpha P_k<0 \tag{36}$$

$$\begin{aligned}&(A_{kr}-B_{kr}K_{kj}+A_{kj}-B_{kj}K_{kr})^TP_k\\&+P_k(A_{kr}-B_{kr}K_{kj}+A_{kj}-B_{kj}K_{kr})+4\alpha P_k\leq 0\end{aligned} \tag{37}$$

با ضرب از چپ-راست طرفین نامساوی‌های روبط (36) و (37) در $X_k=P_k^{-1}$ و سپس در -1، همچنین فرض $K_{kr}=M_{kr}X_k^{-1}$ می‌توان به روابط (30) و (31) رسید.

7- روش پیشنهادی برای محاسبه پاسخ معادله برگر

برای شبیه‌سازی معادله‌ی برگر، از تبدیل فوریه سریع برای تقریب مشتق‌های فضایی استفاده می‌شود. در این روش، عبارت لزج و نیروی حجمی به راحتی قابل تقریب هستند، اما عبارت غیرخطی جابه‌جایی مشکل ایجاد می‌کند. به همین دلیل عبارت جابه‌جایی به‌جای فضای فوریه در فضای فیزیکی محاسبه شده است. در هر گام انتگرال‌گیری زمانی، از طریق تبدیل فوریه سریع معکوس (IFFT) می‌توان u را از $\hat{u}_k$، $\partial u/\partial x$ را از $ik\hat{u}_k$ به‌دست آورد. سپس ضرب را در فضای فیزیکی انجام داده و $v=u\partial u/\partial x$ را محاسبه کرد. آن‌گاه از v تبدیل فوریه سریع گرفت و $\hat{v}_k$ را به‌دست آورد. $\hat{v}_k$ به‌دست‌آمده را در سمت راست معادله برگر قرار داد. به همین دلیل محاسبه عبارت غیرخطی از نظر محاسباتی گران‌تر از محاسبه عبارت خطی است، زیرا در هر گام زمانی نیازمند تبدیل فوریه مستقیم و معکوس است. در حالی که عبارت خطی به‌طور مستقیم به صورت رابطه (38) محاسبه می‌شود.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-18]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.23.5]

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{d\hat{u}_k}{dt}e^{ikx}=\sum_{k=1}^{n}\hat{f}_k e^{ikx}-\nu\sum_{k=1}^{n}k^2\hat{u}_k e^{ikx}-\sum_{k=1}^{n}\hat{v}_k e^{ikx} \quad (38)$$

که با استفاده از خواص سیگما به صورت رابطه (39) داریم:

$$\frac{d\hat{u}_k}{dt}=\hat{f}_k-\nu k^2\hat{u}_k-\hat{v}_k \quad (39)$$

سمت چپ معادله با یک روش انتگرال‌گیری زمانی درنظر گرفته می‌شود. برای نمونه با روش صریح اویلر به صورت رابطه (40) می‌توان نوشت.

$$\frac{\hat{u}_k(t)-\hat{u}_k(t-1)}{dt}=\hat{f}_k-\nu k^2\hat{u}_k-\hat{v}_k \quad (40)$$

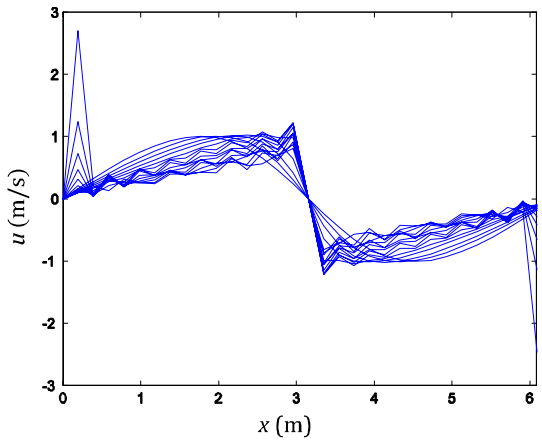
در کار حاضر، از روش صریح رونگه-کوتای مرتبه چهارم برای انتگرال‌گیری زمانی با دقت بالا استفاده شده است. هر گام این روش از چهار زیرگام تشکیل شده که هر کدام از زیرگام‌ها مشابه یک گام صریح اویلر رابطه (40) است.

8- شبیه‌سازی عددی

در این بخش، کارایی روش پیشنهادی به کمک شبیه‌سازی عددی و کنترل رفتار دینامیکی معادله برگر بررسی می‌شود. در این‌جا لزجت ν برابر با 0/0007، گام زمانی برابر با 0/001 و طول دامنه حل برابر با 2π در نظر گرفته می‌شود. همان‌گونه که در شکل 2 مشاهده می‌شود، سیستم حلقه باز ناپایدار بوده و این مسأله ایجاد موج‌های شوک در میدان سرعت را سبب می‌شود. در ادامه هدف این است که پاسخ معادله برگر از هر پروفایل اولیه سرعت به هر پروفایل مطلوب، در کمترین زمان ممکن تبدیل شود. در این راستا، اسماوی در پژوهش [4] و وولکوین [10]، روش‌هایی ارائه کردند که در آن‌ها، به‌ترتیب پس از گذشت حدود سی ثانیه و یک ثانیه، نمایه سرعت به حد مطلوب رسید.

اکنون از روش کنترلی پیشنهادی برای طراحی کنترل‌کننده‌های پایدارساز و ردگیر استفاده می‌شود. در این راستا، نرخ کاهش α برابر با 1000 و $-2.5<C_j<2.5$ فرض شده و سپس جعبه ابزار ال-ام-آی[1] نرم‌افزار متلب به‌کار برده می‌شود. برای نمایش کارایی روش پیشنهادی، چند شبیه‌سازی انجام شده که در ادامه به بررسی آن‌ها پرداخته می‌شود.

در شبیه‌سازی نخست، پایدارسازی یا به صفر رساندن یک نمایه سرعت سینوسی با دوره تناوبی 2π مدنظر است. همان‌گونه که در شکل 3 مشاهده می‌شود، با اعمال ورودی کنترلی نشان داده شده در شکل 4 که براساس معادله (25) ایجاد شده، سرعت پس از گذشت چهار گام زمانی به صفر می‌رسد.

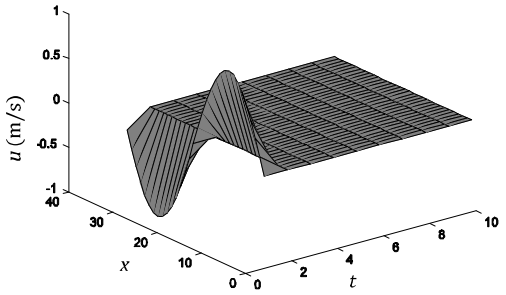


شکل 2 پاسخ سیستم حلقه باز به شرایط اولیه غیرصفر سینوسی

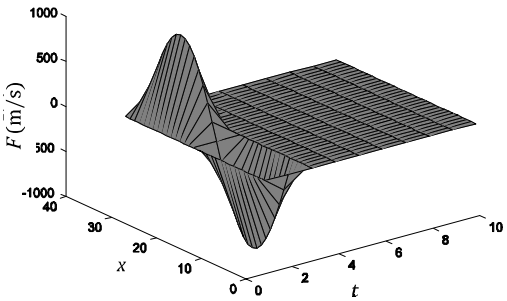
1- Linear matrix inequality: LMI

خاطر نشان می‌شود که در شکل‌های سه‌بعدی، t برحسب گام زمانی و x مشخص‌کننده نقاط گرهی است.

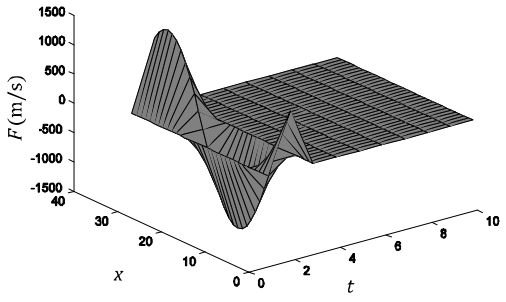
همان‌گونه که در بخش 4 گفته شد، برای رساندن سرعت $u(x,t)$ به یک مقدار ثابت مطلوب یا ردگیری یک تابع متغیر با زمان، با اضافه کردن یک عبارت پس‌خوراند به رابطه (25)، ورودی کنترلی به‌صورت رابطه (29) اصلاح می‌شود. برای نشان دادن کارایی ردگیری یا تنظیم روش پیشنهادی، در شبیه‌سازی دوم هدف رساندن نمایه سرعت از یک تابع سینوسی به یک تابع کسینوسی است. برای این کار، ورودی کنترلی شکل 5 اعمال می‌شود. همچنین همان‌گونه که در شکل 6 دیده می‌شود، شرط $-2.5<\partial u/\partial x=C_j<2.5$ برای این سیستم برقرار است. شکل 7 نشان می‌دهد که پس از چهار گام زمانی سرعت به نمایه مطلوب می‌رسد.



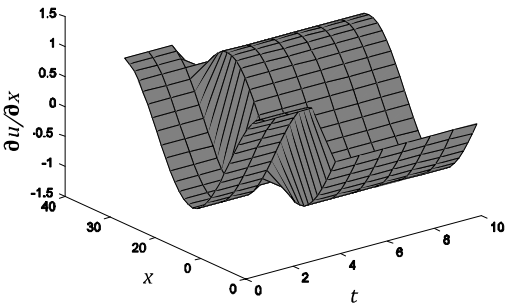
شکل 3 پاسخ سیستم حلقه بسته به شرایط اولیه غیرصفر سینوسی



شکل 4 ورودی پایدارساز اعمال شده برای ایجاد نمایه پایدار شکل 3

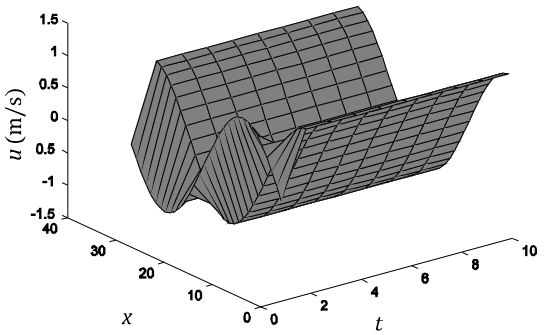


شکل 5 ورودی ردگیر اعمال‌شده در شبیه‌سازی حلقه بسته دوم

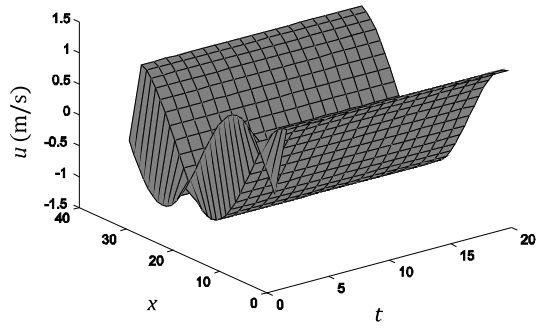


شکل 6 نمایش $\partial u/\partial x$ در تغییر نمایه سرعت از سینوسی به کسینوسی

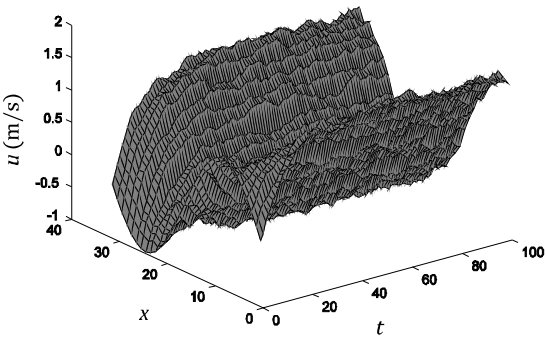
[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-18]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.23.5]



شکل 7 نمایش چگونگی تغییر نمایه سرعت از سینوسی به کسینوسی



شکل 8 نمایش چگونگی تغییر نمایه سرعت از سینوسی به کسینوسی در حالت نامعینی مقدار دقیق لزجت



شکل 9 نمایش چگونگی تغییر نمایه سرعت از سینوسی به کسینوسی در حالت وجود نویز اندازه‌گیری

در شبیه‌سازی بعد، مقاوم بودن کنترل‌کننده در برابر عدم‌قطعیت‌های مدل‌سازی بررسی می‌شود. برای این منظور فرض می‌شود کنترل‌کننده طراحی‌شده در این بخش به معادله برگر با $0 \le \nu \le 1$ اعمال شود. همان‌گونه که در شکل 8 نشان داده شده است، روش پیشنهادی در مقابل این عدم قطعیت نیز جواب خوبی دارد.

در شبیه‌سازی آخر، برای نشان دادن مقاوم‌بودن نسبی روش پیشنهادی در مقابل نویز حساسه‌ها، فرض می‌شود که نویزی با دامنه 0/1 در اندازه‌گیری سرعت هر نقطه شبکه‌ای وجود داشته باشد. همان‌گونه که در شکل 9 آشکار است، روش پیشنهادی با وجود این نویز نیز تا حدی قادر به رساندن نمایه سرعت به حد مطلوب است.

9- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روشی برای کنترل گسترده نمایه سرعت در معادله برگر غیرخطی لزج و رساندن آن با هر شرایط اولیه‌ای به شرایط نهایی دلخواه پیشنهاد شده است. این روش، بر مبنای ترکیب روش‌های فازی تاکاگی-ساجینو و تبدیل فوریه سریع استوار است، که به دو معادله مشتق معمولی برای هر نقطه شبکه‌ای منجر می‌شود. سپس برای پایدارسازی دینامیک هر کدام از این نقاط، از روش جبران‌سازی توزیع‌یافته موازی استفاده می‌شود. پایداری روش کنترلی پیشنهادی با استفاده از قضیه دوم لیاپانوف برای سیستم‌های فازی اثبات شده و برآن اساس بهره‌های کنترلی پایدارساز طراحی شده‌اند. شبیه‌سازی‌های عددی کارایی روش پیشنهادی نسبت به پژوهش‌های همانند را نشان می‌دهد، که از آن جمله می‌توان به مشخصه‌های بهتر پاسخ گذرا، خطای حالت ماندگار کوچک و مقاوم بودن نسبی آن در مقابل نویزهای اندازه‌گیری اشاره کرد.

10- مراجع

[1] H. Emdad, A. R. Mostofizadeh, S. A. Mousavinia, Optimal control of vortex shedding around square cylinder via reduced order model, *Modares Mechanical Engineering,* pp. 53-55, 1391.(In Persian)

[2] J. Baker, A. Armaou, P. D. Christofides, Nonlinear control of incompressible fluid flow: application to Burgers equation and 2d channel flow, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* vol. 252, pp. 230-255, 2000.

[3] H. M. Park, Y. D. Jang, Control of Burgers equation by means of mode reduction, *International Journal of Engineering Science,* vol. 38, pp. 275-805, 2003.

[4] N. Smaoui, Boundry and distributed control of the viscous Burger equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics,* Vol. 182, pp. 91-104, 2005.

[5] S. M. Hashemi, H. Werner, Gain-scheduled controller synthesis for a nonlinear PDE, *International Journal of Control,* vol. 85, pp. 88-97, 2012.

[6] K. Kunisch, S. Volkwein, Control of the Burgers equation by a reduced-order approach using proper orthogonal decomposition, *Journal of Optimization Theory and Applications,* vol. 102, pp. 345-371, 1999.

[7] K. Kunisch, L. Xie, POD-based feedback control of the Burgers equation by solving the evolutionary HJB equation, *Computers and Mathematics with Applications,* vol. 49, pp. 1113-1126, 2005.

[8] M. Hinze, S. Volkwein, Analysis of instantaneous control for the Burgers equation, *Nonlinear Analysis,* vol. 50, pp. 1-26, 2002.

[9] B. B. King, D. A. Kreuger, Burgers' equation: Galerkin least-squares approximations and feedback control, *Mathematical and Computer Modelling,* vol. 38, pp. 1075-1085, 2003.

[10] S. Volkwein, Distributed control problems for the Burgers equation, *Computational Optimization and Applications,* vol. 18, pp. 115-140, 2001.

[11] S. Gorner, P. Benner, MPC for the Burgers equation based on an LQG design, *Proceedings of Applied Mathematics and Mechanics,* vol. 6, pp. 781-782, 2006.

[12] T. Takagi, M. Sugeno, Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics,* vol. 15, pp. 116-132, 1985.

[13] K. Tanaka, H. Wang, *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach,* Wiley, 2001.

[14] M. Seidi, A. H. Markazi, Performance-oriented parallel distributed compensation, *Journal of the Franklin Institute,* vol. 348, no. 7, pp. 1231-1244, 2011.

[15] P. Moin, *Fundamentals of Engineering Nummerical Analysis,* Cambridge, Cambridge University Press, 2010.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-18]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.23.5]