



## ارتعاشات اجباری غیر خطی تیر متحرک محوری تیموشنکو در محیط حرارتی با استفاده از روش تعادل هارمونیک

امیر نوروززاده<sup>1</sup>، رضا انصاری خلخالی<sup>2\*</sup>، منصور درویزه<sup>3</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

3- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

\* رشت، صندوق پستی 3756، r\_ansari@guilan.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 02 خرداد 1393

پذیرش: 04 تیر 1393

ارائه در سایت: 06 مهر 1393

کلید واژگان:

تیر متحرک محوری تیموشنکو

ارتعاشات اجباری غیر خطی

محیط حرارتی

روش تریب دیفرانسیلی تعمیم یافته

روش تعادل هارمونیک

### چکیده

تیرهای متحرک محوری بطور گسترده‌ای در صنایع مختلف حضور داشته و در بسیاری از مسائل مهندسی مکانیک از اهمیت خاصی برخوردار هستند. در این مقاله، ارتعاشات اجباری غیرخطی تیر متحرک محوری تحت اثر نیروی هارمونیک و در محیط حرارتی مورد بررسی قرار گرفته است. از تئوری تیر تیموشنکو برای مدل‌سازی تیر متحرک محوری بهره گرفته شده است تا بتوان اثرات تغییر شکل برشی عرضی و همین‌طور اینرسی چرخشی را لحاظ کرد. معادلات غیرخطی حاکم بر رفتار سیستم با کمک اصل همپلتون استخراج شده‌اند. سپس این معادلات و شرایط مرزی مورد نظر با روش تریب دیفرانسیلی تعمیم یافته و با استفاده از اپراتورهای ماتریسی مشتق‌گیر آن گسسته‌سازی شده و معادلات مشتقات جزئی موجود به معادلات دیفرانسیلی معمولی تبدیل شده‌اند. به منظور مطالعه پاسخ فرکانسی سیستم از روش تعادل هارمونیک برای حل معادلات گسسته‌سازی شده استفاده شده است. همچنین پاسخ‌های زمانی تیر متحرک محوری با روش رانگ‌کوتا بدست آمده است. در یک بررسی موردی، تأثیر پارامترهای مختلف اعم از سرعت محوری، نیروی عرضی وارد بر تیر، ضریب میرایی و اختلاف دما در پاسخ‌های فرکانسی تیر متحرک محوری با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در دو انتها بررسی شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که رفتار دینامیکی سیستم تحت تأثیر هر یک از عوامل ذکر شده تغییرات قابل توجهی از خود نشان می‌دهد.

## Nonlinear forced vibration of axially moving Timoshenko beam in thermal environment via the harmonic balance method

Amir Norouzzadeh, Reza Ansari Khalkhali\*, Mansour Darvizeh

Department of Mechanical Engineering, Guilan University, Rasht, Iran

\* P.O.B. 3756, Rasht, Iran, r\_ansari@guilan.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 23 May 2014  
Accepted 25 June 2014  
Available Online 28 September 2014

**Keywords:**  
Axially Moving Timoshenko Beam  
Nonlinear Forced Vibrations  
Thermal Environment  
Generalized Differential Quadrature Method  
Harmonic Balance Method

### ABSTRACT

Axially moving beams are extensively involved in various industries and have significant importance in many mechanical engineering problems. In this paper, the nonlinear forced vibrations of axially moving beam under harmonic force and thermal environment have been studied. In order to considering the effects of transverse shear deformation and rotary inertia, the Timoshenko beam theory has been used to model the axially moving beam. The nonlinear governing equations are derived with the help of Hamilton's principle. Then the equations and boundary conditions are discretized through generalized differential quadrature method (GDQ) and its differential matrix operators, and accordingly the partial differential equations are converted into the ordinary differential equations. To study the frequency response of the system, the harmonic balance method is used. Also the time responses of the axially moving beam are obtained by the Runge-Kutta method. In a case study, the effects of various parameters such as the axial speed, transverse force acting on the beam, damping coefficient and temperature change on the frequency responses of the axially moving beam with both end simply supported boundary conditions are discussed. The results show that the dynamic behavior of system is significantly affected by any of the mentioned factors.

### 1- مقدمه

مغناطیسی، فیبرهای پیچ در پیچ و کابل‌های آسانسور به کار می‌روند. با وجود مزیت‌های فراوان این دستگاه‌ها، ارتعاشات موجود در آن‌ها کاربردشان را محدود ساخته است. به همین دلیل، توجه بسیاری از محققان به بررسی ارتعاشات سازه‌های متحرک محوری معطوف شده است. معادلات مربوط به تیرهای متحرک محوری برای نخستین بار توسط

تیرهای متحرک محوری<sup>1</sup> در بسیاری از دستگاه‌های مهندسی از قبیل نوارهای انتقال قدرت، کابل‌های هوایی ترموا<sup>2</sup>، اره‌های نواری، اره‌های تسمه‌ای، نوارهای

1- Axially Moving Beams  
2- Tramway

Please cite this article using:

A. Norouzzadeh, R. Ansari Khalkhali, M. Darvizeh, Nonlinear forced vibration of axially moving Timoshenko beam in thermal environment via the harmonic balance method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 11, pp. 137-143, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

در این تئوری اشکالات ذکر شده در تئوری تیرهای اویلر برنولی وجود نداشته و نتایج حاصل از آن، از نسبت‌های کوچک طول به ابعاد سطح مقطع تا نسبت‌های بزرگ آن قابل قبول بوده و از دقت خوبی برخوردار هستند. روابط مربوط به تیرهای متحرک محوری تیموشنکو در ابتدا توسط سیمپسون [7] توسعه داده شده است.

در معادلات غیرخطی مربوط به تیرهای متحرک محوری تیموشنکو مدل شده‌اند، عمدتاً از روش‌های تحلیلی به منظور مطالعه رفتار فرکانسی سیستم استفاده شده است. به عنوان مثال پاسخ حالت پایدار تیر متحرک محوری تیموشنکو و همچنین سرعت‌های بحرانی سیستم در حضور یک نیروی عرضی ثابت با استفاده از روش تبدیل لاپلاس<sup>15</sup> بررسی شده است [8].

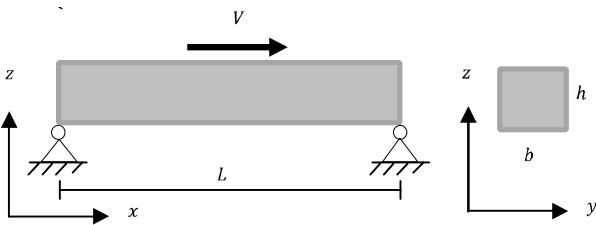
در تنها مقاله موجود در این زمینه که در آن اثر تغییرات دما در رفتار سیستم لحاظ شده است، ارتعاشات آزاد سیستم به کمک روش مقیاس‌های چندگانه<sup>16</sup> بدست آمده است [9].

با توجه به مباحث ذکر شده لزوم انجام پژوهش‌های بیشتر در زمینه تیرهای متحرک محوری تیموشنکو و با استفاده از روش‌های عددی قوی مشهود است. به این منظور پژوهش حاضر به بررسی پاسخ‌های زمانی و فرکانسی تیرهای متحرک محوری تیموشنکو در حضور میدان حرارتی<sup>17</sup> و یک بستر<sup>18</sup> خارجی پرداخته است. در ابتدا با استفاده از روابط تنش کرنش و به کارگیری اصل همپلتون<sup>19</sup>، معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر رفتار سیستم استخراج شده است. سپس با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم یافته<sup>20</sup> و اپراتورهای ماتریسی این روش به گسسته‌سازی<sup>21</sup> دامنه پرداخته شده است. در انتها نیز با روش‌های تعادل هارمونیک<sup>22</sup> و رانگ کوتا<sup>23</sup> به ترتیب پاسخ‌های فرکانسی و زمانی تیر متحرک محوری تیموشنکو بدست آمده است.

## 2- معادلات غیرخطی حاکم بر رفتار سیستم

شکل 1 تصویر یک تیر متحرک محوری را نشان می‌دهد که دارای سطح مقطع  $A$  با عرض  $b$  و ارتفاع  $h$  بوده و طول آن  $L$  می‌باشد. همچنین این تیر دارای چگالی  $\rho$  و مدول الاستیسیته  $E$  است و با سرعت ثابت  $V$  حرکت می‌کند. این تیر تحت تنش اولیه  $P$  قرار گرفته و نیروی عرضی  $F$  به آن وارد می‌شود. تیر مورد نظر در دو انتها دارای تکیه‌گاه‌های ساده و ثابت است.

با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو که فرضیات ایجاد یک شیب کوچک پس از تغییر شکل و همچنین امکان تغییر شکل محدود در جهت عرضی را مطرح می‌کند، روابط غیرخطی کرنش-جابجایی برای ارتعاشات با دامنه بزرگ به صورت رابطه (1) به دست می‌آید [10]:



شکل 1 تیر متحرک محوری و مشخصات هندسی آن

تارمن و مته [1] به دست آمد. مطالعات اولیه در این زمینه بیشتر به بررسی تجربی و تحلیلی روابط خطی در تیرها یا رشته‌های<sup>1</sup> متحرک محوری پرداخته‌اند. تیرها و رشته‌ها به دلیل وجود نیروهای کریولیس<sup>2</sup> و موج‌های متحرک<sup>3</sup> در یک کلاس کلی با عنوان سیستم‌های ژيروسکوپی<sup>4</sup> شناخته می‌شوند.

معادلات غیرخطی مربوط به تیرهای متحرک محوری توسط ویکرت [2] توسعه داده شده است. جنبه‌های مختلف ارتعاشات تیرهای متحرک محوری از قبیل ارتعاشات آزاد و اجباری بررسی شده‌اند. همچنین ارتعاشات و پایداری سیستم‌های متحرک محوری مورد آزمایش قرار گرفته و نشان داده شده است که در یک سرعت محوری مشخص که به عنوان سرعت بحرانی<sup>5</sup> شناخته می‌شود، اولین فرکانس طبیعی سیستم صفر شده و پایداری سیستم از بین می‌رود. به سرعت‌های پایین‌تر از سرعت بحرانی رژیم سرعت‌های زیر بحرانی<sup>6</sup> و به سرعت‌های بالاتر از آن رژیم سرعت‌های فوق بحرانی<sup>7</sup> گفته می‌شود [3]. پاسخ‌های زمانی تیرهای متحرک محوری اویلر برنولی<sup>8</sup> در سه دسته کلی معادلات کوپل<sup>9</sup>، معادلات دیفرانسیلی و معادلات انتگرالی دیفرانسیلی با روش‌های عددی بررسی شده و مشخص گردیده است که معادلات انتگرالی دیفرانسیلی تقریب بهتری برای معادلات کلی کوپل هستند. همچنین ارتعاشات آزاد این سیستم‌ها نیز مورد مطالعه قرار گرفته است [4,5].

مشاهدات انجام گرفته در رفتار تیرهای متحرک محوری نشان داده است که چنانچه در سیستم عیوب کوچک هندسی یا دینامیکی وجود داشته باشد، سرعت تیر همواره ثابت نبوده و در طول حرکت تغییر می‌کند؛ چنین سیستم‌هایی به عنوان تیرهای شتابدار محوری<sup>10</sup> شناخته می‌شوند [6].

در بیشتر مطالعات صورت گرفته در زمینه تیرهای متحرک محوری از تئوری تیرهای اویلر برنولی استفاده شده است که در آن‌ها اثرات تغییر شکل برشی عرضی و همینطور اینرسی چرخشی نادیده گرفته می‌شود و لذا در حالتی که ابعاد سطح مقطع نسبت به طول کوچک نباشد، نتایج خطای قابل ملاحظه‌ای خواهند داشت.

در مسائل گوناگونی که در صنایع مختلف از تیرهای متحرک محوری برای مدل‌سازی سیستم مورد مطالعه استفاده می‌شود، علاوه بر تیرهای لاغر تیرهای ضخیم نیز کاربرد دارند. از جمله این موارد که در آن استفاده از تئوری تیر تیموشنکو به تئوری اویلر برنولی ارجحیت دارد می‌توان به بازوی ربات<sup>11</sup> اشاره کرد. مثال دیگر [7] یک اره نواری است که مابین دو راهنما<sup>12</sup> که در فاصله کوتاهی از هم نصب شده‌اند در حال حرکت می‌باشد. همچنین، شمش‌ها و صفحاتی که در کارخانه‌های ذوب آهن نورد<sup>13</sup> می‌شوند از جمله این مواردند. آنها به تدریج طی مراحل مختلف به تسمه‌های نازک تبدیل می‌شوند اما این تسمه‌ها در مراحل ابتدایی کاملاً ضخیم هستند. در این موارد، سیستم‌ها بایستی با استفاده از تئوری تیرهای ضخیم مدل شوند.

علی‌رغم حجم بالای تحقیقات انجام شده در زمینه تیرهای متحرک محوری، تعداد بسیار کمی از آن‌ها از تئوری تیر تیموشنکو<sup>14</sup> استفاده کرده‌اند.

- 1- Strings
- 2- Coriolis Forces
- 3- Traveling Waves
- 4- Gyroscopic Systems
- 5- Critical Speed
- 6- Subcritical
- 7- Supercritical
- 8- Euler-Bernoulli
- 9- Coupled Equations
- 10- Axially Accelerating Beams
- 11- Robot Arm
- 12- Guide
- 13- Roll
- 14- Timoshenko

- 15- Laplace Transform Method
- 16- Multiple Scales Method
- 17- Thermal Environment
- 18- Medium
- 19- Hamilton's Principle
- 20- Generalized Differential Quadrature Method (GDQ)
- 21- Discretization
- 22- Harmonic Balance Method (HBM)
- 23- Runge-Kutta Method

$$\xi = \frac{x}{L}, (u, w) = \frac{(U, W)}{L}, \psi = \Psi, \tau = \frac{t}{L} \sqrt{\frac{P}{\rho A}}$$

$$\Omega = \omega L \sqrt{\frac{\rho A}{P}}, v = V \sqrt{\frac{\rho A}{P}}, \bar{N}_T = \frac{N_T}{P}, f_0 = \frac{F_0 L}{P}$$

$$(v_1^2, v_2^2, v_3^2) = \left( \frac{A_{11}}{P}, \frac{A_{55}}{P}, \frac{AL^2 A_{55}}{PI} \right) \quad (10)$$

معادلات حرکت بدون بعد تیر متحرک محوری به دست می‌آید (روابط (11)):

$$(v_1^2 - v^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2v \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \tau} - \mu \frac{du}{d\tau} + \bar{Z}_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (الف-11)$$

$$(1 - v^2) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + v_2^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) - \bar{N}_T \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2v \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} - \mu \frac{dw}{d\tau} + \bar{Z}_2 + f_0 \cos(\Omega \tau) = \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \quad (ب-11)$$

$$(v_1^2 - v^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + v_3^2 \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} - \psi \right) - 2v \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \tau} - \mu \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} \quad (ج-11)$$

که در آن روابط (12) برقرارند:

$$\bar{Z}_1 = v_1^2 \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \quad (الف-12)$$

$$\bar{Z}_2 = v_1^2 \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{3}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) \quad (ب-12)$$

در رابطه (11) ضریب دمینگ بدون بعد  $\mu$  برای حرکت سیستم در نظر گرفته شده که ناشی از بستر خارجی است که با سرعتی برابر سرعت تیر حرکت می‌کند.

در اینجا تیر دارای تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها در نظر گرفته می‌شود، شرایط مرزی مربوطه مطابق روابط (13) نوشته می‌شوند:

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \quad (الف-13)$$

$$w|_{x=0} = w|_{x=1} = 0 \quad (ب-13)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \Big|_{x=1} = 0 \quad (ج-13)$$

### 3- روند حل

#### 3-1- روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم یافته

بر اساس روش تربیع دیفرانسیل تعمیم یافته [11]، مشتق  $r$  تابعی مانند  $f(x)$  به صورت جمع خطی مقادیر تابع در نقاط دامنه آن محاسبه می‌شود (رابطه (14)):

$$\frac{\partial^r f(x)}{\partial x^r} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^n D_{ij}^r f(x_j) \quad (14)$$

که در آن  $n$  تعداد کل نقاط استفاده شده در جهت  $x$  است. این رابطه را می‌توان به شکل برداری معرفی شده در رابطه (15) نیز بیان نمود:

$$\frac{\partial^r}{\partial x^r} F = D^r F \quad (15)$$

در این رابطه  $F$  برداری شامل مقادیر تابع در نقاط مختلف بوده و  $D^r$  اپراتور ماتریسی مشتق‌گیر مرتبه  $r$  است و به ترتیب طبق روابط (16) و (17) تعریف می‌شوند:

$$F_{n+1} = [F_1 F_2 \dots F_n]^T = [F(x_1) F(x_2) \dots F(x_n)]^T \quad (16)$$

$$D_{ij}^{(1)} = \frac{\prod_{k=1, k \neq i}^n (x_i - x_k)}{(x_i - x_j) \prod_{k=1, k \neq j}^n (x_j - x_k)}, \quad i = j = 1, 2, \dots, n, i \neq j \quad (الف-17)$$

$$D_{ij}^{(r)} = r \left( D_{ii}^{(r-1)} D_{ij}^{(1)} - \frac{D_{ij}^{(r-1)}}{(x_i - x_j)} \right), \quad i = j = 1, 2, \dots, n, i \neq j, r = 2, 3, \dots, n-1; \quad (ب-17)$$

#### 3-2- گسسته‌سازی دامنه

برای گسسته‌سازی دامنه نقاط بر اساس رابطه چبیشف-گاوس-لباتو<sup>1</sup> در نظر

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} - z \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \quad (الف-1)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} - \Psi \right) \quad (ب-1)$$

که در آن  $U(x, t)$ ،  $W(x, t)$  و  $\Psi(x, t)$  به ترتیب نشان‌دهنده جابجایی طولی و عرضی تیر و زاویه چرخش سطح نسبت به محور عمودی هستند. همچنین روابط تنش-جابجایی از رابطه (2) بدست می‌آیند:

$$\sigma_{xx} = E \left( \frac{\partial U}{\partial x} - z \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - E \alpha \Delta T \quad (الف-2)$$

$$\sigma_{xz} = G \left( \frac{\partial W}{\partial x} - \Psi \right) \quad (ب-2)$$

که  $\alpha$  ضریب انبساط حرارتی و  $\Delta T$  میزان اختلاف دما است. حال می‌توان انرژی کرنشی سیستم را با توجه به تنش اولیه  $P$  از رابطه (3) محاسبه کرد:

$$\Pi_s = \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} N(x, t) \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} M(x, t) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} Q(x, t) \left( \frac{\partial W}{\partial x} - \Psi \right) + P \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) \right\} dx \quad (3)$$

که در آن روابط (4) برقرارند:

$$N(x, t) = A_{11} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - N_T \quad (الف-4)$$

$$Q(x, t) = A_{55} \left( \frac{\partial W}{\partial x} - \Psi \right) \quad (ب-4)$$

$$M(x, t) = EI \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad (ج-4)$$

در روابط (4)، می‌توان روابط (5) را نوشت:

$$A_{11} = EA, A_{55} = k_s GA, N_T = EA \alpha \Delta T \quad (5)$$

$k_s$  ضریب تصحیح برشی است.

انرژی جنبشی تیر متحرک محوری و کار ناشی از نیروی خارجی  $F$  به ترتیب با رابطه (6) و رابطه (7) بیان می‌شوند.

$$\Pi_T = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \rho A \left( \frac{\partial U}{\partial t} + V \left( 1 + \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right)^2 + \rho A \left( \frac{\partial W}{\partial t} + V \frac{dw}{dx} \right)^2 + \rho I \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} + V \frac{d\Psi}{dx} \right)^2 \right\} dx \quad (6)$$

$$\Pi_F = \int_0^L F(x, t) W dx \quad (7)$$

معادلات حرکت سیستم با به کارگیری اصل همپلتون از رابطه (8) به دست می‌آیند:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\Pi_T - \Pi_s + \Pi_F) dt = 0 \quad (8)$$

با جایگذاری روابط (3)، (6) و (7) در رابطه (8) و گرفتن تغییرات نسبت به  $U$ ،  $W$ ،  $\Psi$ ، انتگرال‌گیری جز به جز و قرار دادن ضرایب  $\delta U$ ،  $\delta W$ ،  $\delta \Psi$  مساوی با صفر، می‌توان معادلات حاکم بر سیستم را با رابطه (9) تعیین کرد:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\rho AV \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \rho AV^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (الف-9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( N \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial Q}{\partial x} + P \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + F(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2\rho AV \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + \rho AV^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (ب-9)$$

$$Q + \frac{\partial M}{\partial x} = \rho I \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + 2\rho IV \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial t} + \rho IV^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (ج-9)$$

در اینجا فرض می‌شود که نیروی عرضی به صورت هارمونیک  $F(x, t) = F(x) \cos(\omega t)$  وارد می‌شود و  $F(x)$  نیز در طول تیر مقدار ثابت  $F_0$  را داراست ( $F(x) = F_0$ ).

با معرفی متغیرها و پارامترهای بی‌بعد به صورت رابطه (10)،

1- Chebyshev-Gauss-Lobatto

گرفته می‌شود:

$$x_i = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{i-1}{n-1} \pi \right); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

بنابراین بردارهای  $u$ ,  $w$  و  $\Psi$  را طبق رابطه (19) تعریف می‌شود:

$$u_{n+1} = [u_1 u_2 \dots u_n]^T \quad (19-الف)$$

$$w_{n+1} = [w_1 w_2 \dots w_n]^T \quad (19-ب)$$

$$\Psi_{n+1} = [\psi_1 \psi_2 \dots \psi_n]^T \quad (19-ج)$$

حال با به کارگیری روش GDQ، شکل گسسته شده معادلات غیرخطی حاکم و همینطور معادلات مربوط به شرایط مرزی بدست می‌آید (روابط (20)):

$$(v_1^2 - v^2) D^{(2)} u - 2v D^{(1)} \dot{u} - \mu \dot{u} + \bar{Z}_1 = \ddot{u} \quad (20-الف)$$

$$(1 - v^2) D^{(2)} w + v_2^2 (D^{(2)} w - D^{(1)} \psi) - \bar{N}_T D^{(2)} w - 2v D^{(1)} \dot{w} - \mu \dot{w} + Z_2 + f_0 \cos(\Omega \tau) = \ddot{w} \quad (20-ب)$$

$$(v_1^2 - v^2) D^{(2)} \psi + v_3^2 (D^{(1)} w - \psi) - 2v D^{(1)} \dot{\psi} - \mu \dot{\psi} = \ddot{\psi} \quad (20-ج)$$

در روابط (20)، روابط (21) برقرارند:

$$\bar{Z}_1 = v_1^2 (D^{(1)} w) \circ (D^{(2)} w) \quad (21-الف)$$

$$Z_2 = v_1^2 \left( (D^{(1)} u) \circ (D^{(2)} w) + (D^{(2)} u) \circ (D^{(1)} w) + \frac{3}{2} (D^{(1)} w) \circ (D^{(1)} w) \circ (D^{(2)} w) \right) \quad (21-ب)$$

در رابطه (20)،  $f_0$  برداری شامل مقادیر ثابت  $f_0$  بوده در رابطه (21)، عملگر ماتریسی هادامارد<sup>1</sup> است که عمل ضرب درایه به درایه در بردارها را انجام می‌دهد.

به طریق مشابه شرایط مرزی را نیز می‌توان با روابط (22) گسسته‌سازی کرد:

$$u(1) = u(n) = 0 \quad (22-الف)$$

$$w(1) = w(n) = 0 \quad (22-ب)$$

$$\psi'(1) = \psi'(n) = 0 \quad (22-ج)$$

که در آن  $\psi' = D^{(1)} \psi$ .

### 3-3- پاسخ‌های فرکانسی با روش تعادل هارمونیک

به منظور بدست آوردن پاسخ‌های فرکانسی سیستم از روش تعادل هارمونیک استفاده می‌شود. با به کارگیری این روش، معادلات دیفرانسیل غیرخطی بدست آمده به دسته معادلات جبری غیرخطی تبدیل می‌شوند. با توجه به نوع معادلات موجود، رابطه (23) به عنوان پاسخ سیستم تعیین می‌شود:

$$u = \sum_{i=1}^m U_{1i} \cos(i\Omega t) + \sum_{i=1}^m U_{2i} \sin(i\Omega t) \quad (23-الف)$$

$$w = \sum_{i=1}^m W_{1i} \cos(i\Omega t) + \sum_{i=1}^m W_{2i} \sin(i\Omega t) \quad (23-ب)$$

$$\psi = \sum_{i=1}^m \Psi_{1i} \cos(i\Omega t) + \sum_{i=1}^m \Psi_{2i} \sin(i\Omega t) \quad (23-ج)$$

با جایگذاری پاسخ‌های در نظر گرفته شده رابطه (23) در رابطه (20) و برابر قرار دادن جملات مشابه هارمونیک، معادلات مورد نظر بدست می‌آیند. این معادلات به ازای مقدار مشخصی از فرکانس تحریک ( $\Omega$ ) حل شده و مقادیر بردارهای  $U_{1i}$ ,  $U_{2i}$ ,  $W_{1i}$ ,  $W_{2i}$ ,  $\Psi_{1i}$  و  $\Psi_{2i}$  و در نتیجه متغیرهای جابجایی  $u$ ,  $w$  و  $\Psi$  بدست می‌آیند.

### 3-4- پاسخ‌های زمانی با روش رانگ-کوتا

برای بدست آوردن پاسخ زمانی سیستم، معادلات موجود در رابطه (20) کاهش مرتبه داده شده و شش معادله دیفرانسیل مرتبه اول استخراج می‌شوند و سپس به کمک روش رانگ-کوتا حل خواهند شد. همچنین لازم

به ذکر است که از حل استاتیکی سیستم در لحظه صفر به عنوان شرایط اولیه استفاده می‌شود.

### 4- نتایج و تفسیر آن‌ها

به منظور بررسی عددی مدل معرفی شده و تأثیر پارامترهای مختلف در ارتعاشات تیر متحرک محوری تیموشنکو، تیر فولادی با مدول الاستیسیته 108 گیگاپاسکال، چگالی 8450 کیلوگرم بر مترمکعب، تنش اولیه 8450 نیوتن و سطح مقطع با عرض و ارتفاع برابر 1 سانتی‌متر در نظر گرفته شده است [4]. همچنین ضریب انبساط حرارتی در نظر گرفته شده در مطالعه حاضر  $17 \times 10^{-6}$  بر درجه سلسیوس است.

در ابتدا جهت اطمینان از صحت نتایج به دست آمده در مطالعه حاضر، روند همگرایی پاسخ‌های GDQ برای اولین فرکانس طبیعی خطی سیستم  $\omega_L$  در جدول 1 بررسی شده و همچنین نتایج پژوهش حاضر با نتایج حاصل از مرجع [12] در شکل‌های 2 و 3 اعتبارسنجی شده است. در [12] حاج‌قایش و همکاران، ارتعاشات تیر متحرک محوری اوپلر برنولی را بررسی نموده‌اند. معادلات حاکم را با روش گلرکین<sup>2</sup> گسسته‌سازی کرده و سپس پاسخ‌های فرکانسی سیستم را با نرم‌افزار اتو<sup>3</sup> بدست آورده‌اند.

در روش گلرکین پاسخ سیستم به عنوان تجزیه زمانی-مکانی در نظر گرفته می‌شود؛ به این صورت که جابجایی‌های سیستم به صورت توابع پایه هارمونیک در بعد مکان و با ضرایب متغیر با زمان فرض شده و از خاصیت تعامد این توابع پایه برای بدست آوردن دسته معادلات دیفرانسیلی معمولی استفاده می‌شود. در حالی که ایده اصلی در روش تربیع دیفرانسیلی بدست آوردن مشتقات یک تابع در هر نقطه دلخواه با استفاده از همه نقاط گسسته-سازی شده در دامنه است. به این ترتیب با استفاده از ماتریس‌های اپراتوری مشتق‌گیر این روش، دسته معادلات دیفرانسیلی معمولی مورد نظر بدست می‌آیند. بنابراین در روش گلرکین برای سیستم در بعد مکان رفتار هارمونیک فرض می‌شود در حالی که در روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم یافته برای رفتار سیستم قیدی لحاظ نشده است.

برای مقایسه هرچه بهتر و کاهش اختلاف نتایج حاصل از تئوری‌های مختلف (تئوری تیموشنکو در مطالعه حاضر و تئوری اوپلر برنولی در [12])، نسبت طول به ارتفاع سطح مقطع 20 در نظر گرفته شده است؛ همچنین سرعت محوری 10 متر بر ثانیه، نیروی عرضی 1000 نیوتن بر متر، ضریب دمپینگ بی‌بعد 0/05 و اختلاف دما صفر لحاظ شده است (مقادیر ذکر شده منجر به پارامترهای بدون بعد  $f_0$  برابر 0/0237،  $v$  برابر 0/1،  $v_1$ ،  $v_2$  و  $v_3$  به ترتیب برابر 35/7506، 23/0769 و 1598/8 می‌شود. همچنین در [12] برای  $v_f$  مقدار 0/5160 بدست می‌آید).

جدول 1 مقادیر فرکانس طبیعی خطی سیستم را به ازای تعداد نقاط مختلف گسسته‌سازی شده در روش GDQ نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود دقت نتایج بدست آمده با افزایش تعداد نقاط بالا رفته و برای تعداد نقاط بیش از 12، نتایج کاملاً همگرا می‌شوند. لذا در طول محاسبات تعداد نقاط گسسته‌سازی شده، 12 نقطه لحاظ می‌شود.

شکل 2 نمودار پاسخ فرکانسی تیر متحرک محوری تیموشنکو را نشان می‌دهد. محور افقی نسبت فرکانس تحریک سیستم به اولین فرکانس طبیعی خطی آن ( $\Omega/\omega_L$ ) می‌باشد.

2- GalerkinMethod  
3- AUTO

1- Hadamard

جدول 1 همگرایی اولین فرکانس طبیعی خطی تیر متحرک محوری تیموشنکو

تعداد نقاط	اولین فرکانس طبیعی خطی بدون بعد
5	5/87768
6	5/89525
7	5/95442
10	5/95671
12	5/95673
15	5/95673

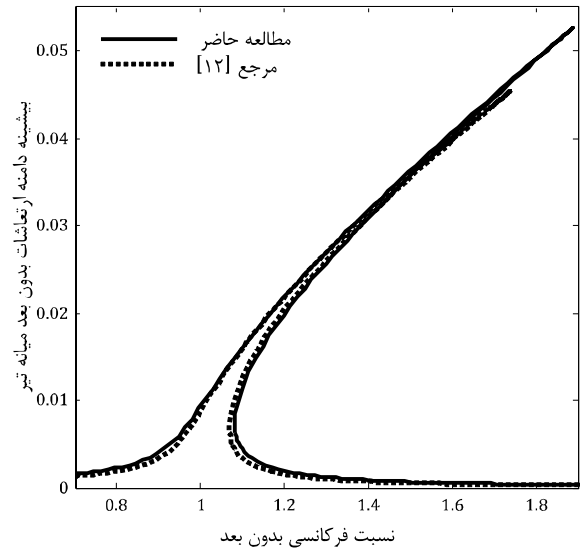
محور عمودی (در مطالعه حاضر) بیشینه دامنه ارتعاشی در میانه تیر است که به این صورت محاسبه می‌شود که در رابطه (23-ب) بیشترین مقدار جابجایی عرضی در یک دوره<sup>1</sup> زمانی (از لحظه صفر تا لحظه  $2\pi/\Omega$ ) بدست می‌آید. در [12] مختصات تعمیم یافته<sup>2</sup> جابجایی‌های عرضی و طولی اول و دوم بررسی شده است؛ از آنجا که در روش گلرکین اولین مختصات جمله غالب می‌باشد، به همین دلیل مختصات تعمیم یافته جابجایی عرضی اول (در [12]  $q_1$ ) در شکل 2 ترسیم شده است.

شکل 2 نشان می‌دهد که دامنه ارتعاشات میانه تیر از حدود فرکانس تحریک 0/7 برابر فرکانس طبیعی اولیه سیستم افزایش قابل ملاحظه‌ای می‌یابد که این افزایش تا 1/89 برابر  $\omega_L$  نیز ادامه دارد. پس از آن پاسخ حالت ناپایدار<sup>3</sup> سیستم تا 1/08 برابر  $\omega_L$  مشاهده می‌شود. بنابراین مشخص می‌شود که رفتار غیرخطی سیستم از نوع سفت شونده<sup>4</sup> است؛ به این معنا که با افزایش فرکانس، دامنه ارتعاشی سیستم نیز افزایش می‌یابد.

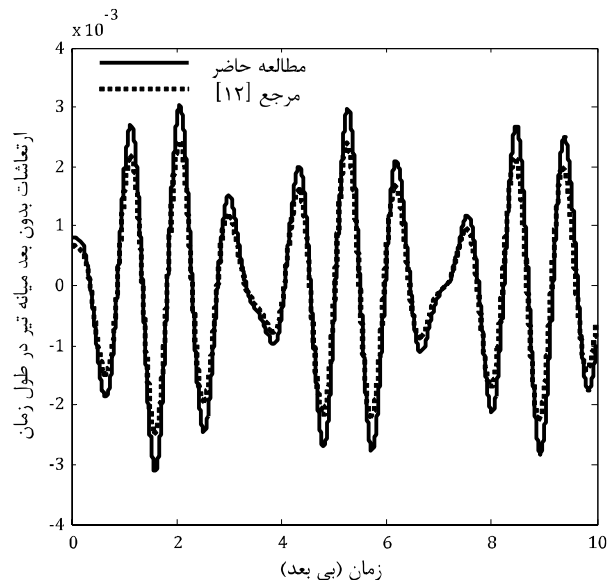
شکل 3 پاسخ‌های زمانی و فازی تیر متحرک محوری تیموشنکو را در مقایسه با پاسخ‌های مشابه در [12] ارائه می‌دهد. با توجه به شکل 2 نتایج موجود در شکل 3 در فرکانس تحریک 1/3 برابر  $\omega_L$  محاسبه شده است. همان‌گونه که در شکل‌های 2 و 3 ملاحظه می‌شود نتایج مطالعه حاضر تا حدود زیادی با نتایج [12] مطابقت دارد. اختلاف موجود در منحنی‌های بدست آمده عمدتاً ناشی از تفاوت روش‌های به کار گرفته شده است؛ به این معنا که در پژوهش حاضر پاسخ کامل مربوط به ارتعاشات تیر متحرک محوری با روش‌های ذکر شده بدست می‌آید در حالی که در [12] مختصات تعمیم یافته سیستم بطور جداگانه بررسی شده و پاسخ کل آن مورد بحث قرار نمی‌گیرد.

حال به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف در رفتار ارتعاشی تیرهای متحرک محوری پرداخته می‌شود. در هر مورد سایر پارامترها (به جز پارامتر مورد بررسی) همان مقادیر ذکر شده اولیه را دارند. شکل 4 اثرات سرعت‌های محوری گوناگون در پاسخ فرکانسی سیستم را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش سرعت محوری سیستم، دامنه ارتعاشی تیر در نسبت‌های فرکانسی بزرگ‌تری به مقدار بیشینه خود می‌رسد. به عنوان مثال در سرعت محوری بدون بعد 0/1 این نسبت فرکانسی 1/89 و در سرعت محوری 1/5، برابر 3/08 است. همچنین با افزایش سرعت محوری، مقدار بیشینه دامنه ارتعاشی نیز به میزان کمی افزایش می‌یابد.

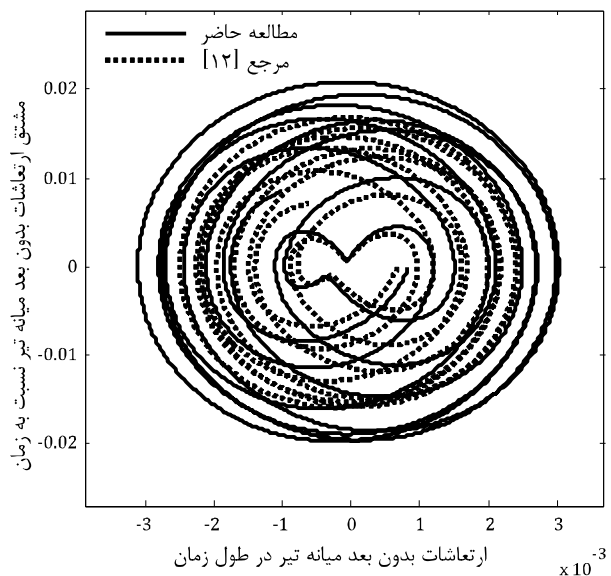
در شکل 5 تأثیر میزان نیروی خارجی وارد بر تیر متحرک محوری تیموشنکو بر پاسخ‌های فرکانسی آن نشان داده شده است. با توجه به شکل مشخص می‌شود که با افزایش مقدار نیروی اعمالی، دامنه ارتعاشات سیستم به طرز چشمگیری زیاد می‌شود طوری که در حالت  $f_0$  برابر 0/003 در نسبت فرکانسی 1/07، دامنه ارتعاشی میانه تیر 0/012 و در حالت  $f_0$  برابر 0/020 در نسبت فرکانسی 1/76، دامنه ارتعاشی بدون بعد 0/047 است.



شکل 2 مقایسه نتایج حاصل از مطالعه حاضر و نتایج مرجع [12]، پاسخ فرکانسی

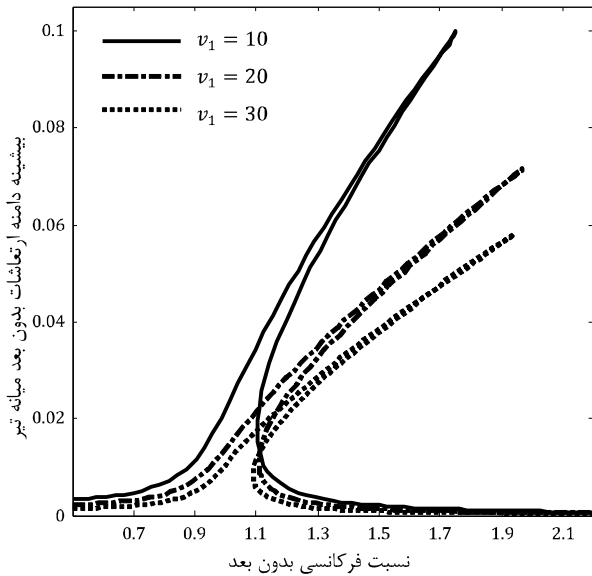
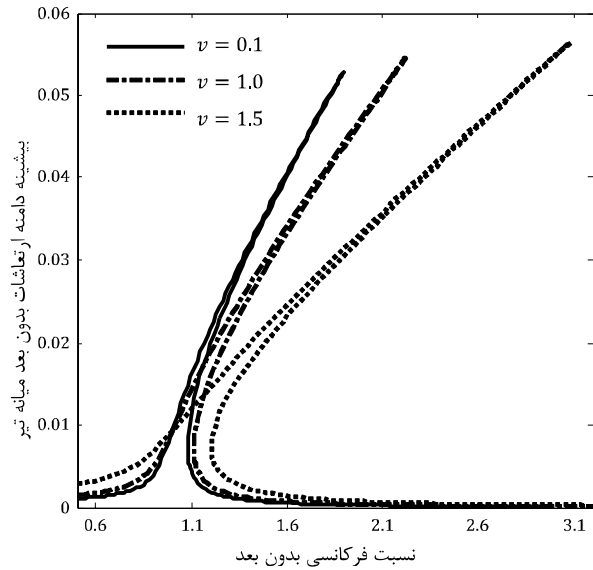


شکل 3- الف مقایسه نتایج حاصل از مطالعه حاضر و نتایج مرجع [12]، پاسخ زمانی



شکل 3- ب مقایسه نتایج حاصل از مطالعه حاضر و نتایج مرجع [12]، پاسخ فازی

1-Period  
2- Generalized Coordinates  
3-Unstable  
4-Hardening

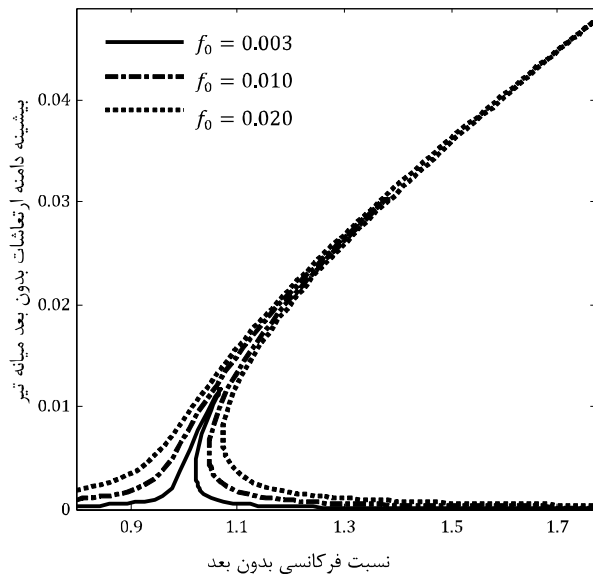
شکل 7 تأثیرات پارامتر  $v_1$  در پاسخ فرکانسی سیستم

شکل 4 تأثیرات سرعت محوری در پاسخ فرکانسی سیستم

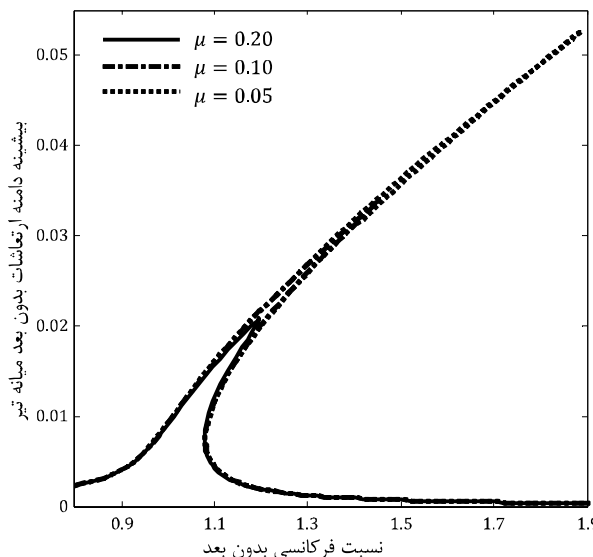
شکل 6 که در آن تأثیرات ضریب دمپینگ در پاسخ فرکانسی سیستم به تصویر کشیده شده است، نشان می‌دهد که افزایش مقدار این پارامتر به شدت دامنه ارتعاشات تیر متحرک محوری تیموشنکو را کاهش می‌دهد. بطوری که با در نظر گرفتن دو مورد ضریب دمپینگ‌های بدون بعد  $0/10$  و  $0/05$  مشخص می‌شود که با دو برابر شدن این پارامتر میزان بیشینه دامنه ارتعاشی  $0/64$  برابر می‌شود. با مقایسه شکل 4 با شکل‌های 5 و 6، مشاهده می‌شود که افزایش سرعت محوری تیر در رفتار غیرخطی سیستم - که با خمش هر چه بیشتر منحنی‌ها مشخص می‌شود- تأثیر زیادی دارد، در حالی که تغییر مقدار نیروی خارجی و ضریب دمپینگ در این مورد چندان تأثیرگذار نیستند. در شکل 7 تأثیرات پارامتر بدون بعد  $v_1$  در پاسخ فرکانسی تیر متحرک محوری تیموشنکو مورد آزمایش قرار گرفته است. می‌توان مشاهده کرد که با کاهش مقدار این پارامتر، دامنه ارتعاشی سیستم در نسبت‌های فرکانسی کمتر به شدت افزایش می‌یابد. به عنوان مثال چنانچه مقدار این پارامتر از 30 به 10 کاهش یابد میزان بیشینه دامنه ارتعاشی میانه تیر  $1/72$  برابر می‌شود در حالی که نسبت فرکانسی از  $1/94$  به  $1/75$  کاهش می‌یابد.

لازم به ذکر است که چنانچه تیر اویلر برنولی مشابه در نظر گرفته شده و از اثرات جابجایی طولی صرف‌نظر شود (معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی دیفرانسیلی)، پارامتر  $v_1$  اثرات غیرخطی سیستم را نمایندگی می‌کند و به همین دلیل به آن ضریب غیرخطی<sup>1</sup> گفته می‌شود [5]. در پژوهش حاضر نیز که از تئوری تیر تیموشنکو استفاده شده، تأثیرات قابل توجه این پارامتر در رفتار غیرخطی سیستم نمایان است.

اثرات اختلاف دما بر رفتار ارتعاشی سیستم در شکل 8 آورده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش دما، تیر متحرک محوری در نسبت‌های فرکانسی بالاتری به بیشینه دامنه ارتعاشی خود می‌رسد در حالی که این مقدار بیشینه با افزایش دما تغییر چندانی نمی‌کند. همچنین تأثیرات افزایش دما بر رفتار غیرخطی سیستم نیز مشهود است که در این خصوص لازم به ذکر است که با افزایش اختلاف دما از سفتی<sup>2</sup> سیستم کاسته می‌شود که این امر علاوه بر کاهش فرکانس طبیعی منجر به آن می‌شود که اثرات غیرخطی هندسی سیستم بیش از گذشته در رفتار ارتعاشی تأثیرگذار باشند.



شکل 5 تأثیرات نیروی خارجی در پاسخ فرکانسی سیستم



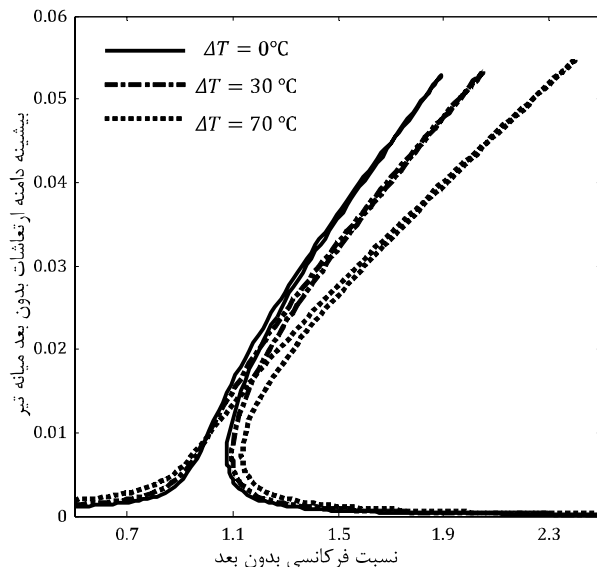
شکل 6 تأثیرات ضریب دمپینگ در پاسخ فرکانسی سیستم

1- Nonlinear Coefficient  
2- Stiffness

قابل توجهی دامنه ارتعاشات تیر متحرک محوری را افزایش می‌دهد. همچنین مشخص شده است که افزایش سرعت محوری و ضریب غیر خطی سیستم و همینطور افزایش دما منجر به رفتار غیر خطی بیشتر تیر می‌شود که با خمش بیشتر منحنی‌های پاسخ فرکانسی قابل تشخیص است.

## 6- مراجع

- [1] A.L. Thurman, C.D.J. Mote, Free, periodic, nonlinear oscillation of an axially moving strip, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 36, No. 1, pp. 83-91, 1969.
- [2] J.A. Wickert, Non-linear vibration of a traveling tensioned beam, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 27, No. 3, pp. 503-517, 1992.
- [3] S.J. Hwang, N.C. Perkins, High speed stability of coupled band/wheel systems: Theory and experiment, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 169, No. 4, pp. 459-483, 1994.
- [4] H. Ding, L.Q. Chen, On two transverse nonlinear models of axially moving beams, *Science in China Series E: Technological Sciences*, Vol. 52, No. 3, pp. 743-751, 2009.
- [5] H. Ding, L.Q. Chen, Natural frequencies of nonlinear vibration of axially moving beams, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 63, No. 1, pp. 125-134, 2011.
- [6] M. Pakdemirli, A.G. Ulsoy, A. Ceranoglu, Transverse vibration of an axially accelerating string, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 169, No. 2, pp. 179-196, 1994.
- [7] A. Simpson, Transverse modes and frequencies of beams translating between fixed end supports, *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 15, No. 3, pp. 159-164, 1973.
- [8] S. Chonan, Steady state response of an axially moving strip subjected to a stationary lateral load, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 107, No. 1, pp. 155-165, 1986.
- [9] M.H. Ghayesh, S.E. Khadem, Rotary inertia and temperature effects on non-linear vibration, steady-state response and stability of an axially moving beam, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 50, No. 3, pp. 389-404, 2008.
- [10] J.N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*, Second Edition, Boca Raton Florida, CRC Press, 2003.
- [11] R. Bellman, Differential quadrature: A technique for rapid solution of nonlinear partial differential equations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 10, No. 1, pp. 40-52, 1972.
- [12] M.H. Ghayesh, S. Kazemirad, M. Amabili, Coupled longitudinal-transverse dynamics of an axially moving beam with an internal resonance, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 52, No. 4, pp. 18-34, 2012.



شکل 8 تأثیرات اختلاف دما در پاسخ فرکانسی سیستم

بنابراین با افزایش اختلاف دما، سیستم رفتار سفت شوندگی بیشتری از خود نشان می‌دهد.

## 5- نتیجه گیری و جمع بندی

در این پژوهش به منظور بررسی ارتعاشات تیر متحرک محوری از تئوری تیر تیموشنکو برای مدل‌سازی سیستم استفاده شده است. این تیر به وسیله یک بستر خارجی که هم‌سرعت با آن حرکت می‌کند احاطه شده و در یک میدان حرارتی قرار گرفته است. با استفاده از اصل همپلتون، معادلات غیر خطی سیستم بدست آمده است. این معادلات با روش تریب دیفرانسیلی تعمیم یافته و با استفاده از ماتریس‌های اپراتوری مشتق‌گیر آن، گسسته‌سازی شده و پس از آن با روش تعادل هارمونیک حل شده‌اند.

تأثیرات سرعت محوری تیر، نیروی خارجی اعمال شده، ضریب دمپینگ، ضریب غیر خطی و تغییرات دما در شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در دو انتهای تیر مورد بررسی قرار گرفته است. مشاهدات نشان داده است که افزایش میزان نیروی خارجی و کاهش ضریب دمپینگ و ضریب غیر خطی به مقدار