مجله مهندسی مکانیک مدرس، تیر 1393، دوره 14، شماره 4، ص‌ص 99-110

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

یک روش SPH تراکم ناپذیر ضمنی برای مسائل جریان سطح آزاد

سعید فرزین[1]، یوسف حسن زاده[2]، محمد تقی اعلمی[3]، روح اله فاتحی[4*]

1- دانشجوی دکتری مهندسی عمران، دانشگاه تبریز، تبریز
2- استاد مهندسی عمران، دانشگاه تبریز، تبریز
3- دانشیار مهندسی عمران، دانشگاه تبریز، تبریز
4- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه خلیج فارس بوشهر، بوشهر
* بوشهر، کد پستی 7516913817، fatehi@pgu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 13 مرداد 1392
پذیرش: 16 شهریور 1392
ارائه در سایت: 31 اردیبهشت 1393

کلید واژگان:
جریان تراکم ناپذیر
روش ضمنی
سازگاری
جریان با سطح آزاد
شکست سد

چکیده

یک روش جدید ضمنی بر اساس روش تصویر، برای حل مسائل جریان تراکم ناپذیر در روش هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH) معرفی شده است. در این روش، از دو طرح گسسته‌سازی جدید سازگار برای مشتقات مکانی مرتبه اول و دوم استفاده شده است. در این مقاله، نشان داده شده است که در حل صریح با روش تصویر، متغیر میدان و مکان ذراتی که فرایند مشتق‌گیری عددی روی آنها انجام می‌شود، در دو زمان متفاوت محاسبه می‌شوند و امکان ارضای دقیق شرط تراکم ناپذیری با استفاده از روش‌های رایج وجود ندارد. در روش ضمنی پیشنهادی، در هر گام زمانی یک حلقه تکرار طی می‌شود که در آن، پس از یافتن سرعت در زمان جدید، مکان ذرات نیز به‌روز می‌شود. به این ترتیب پس از همگرایی تکرار، مشتقات مکانی نیز در زمان جدید محاسبه خواهند شد. قابلیت و دقت روش ارائه شده، در شبیه‌سازی مسائل سطح آزاد و انتشار امواج ناشی از شکست سد روی بستر خشک و مرطوب، مورد آزمون و تأیید قرار گرفت. از مزایای روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های صریح رایج، دقت بیشتر در عین استفاده از تعداد ذرات کمتر و گام‌های زمانی بزرگ‌تر است. همچنین این روش از جهت عدم حضور نوسانات غیر فیزیکی در میدان فشار، برتری محسوسی دارد.

An implicit incompressible SPH method for free surface flow problems

Saeed Farzin[1], Yousef Hassanzadeh[1], Mohammad Taghi Aalami[1], Rouhollah Fatehi[2*]

1- Civil Engineering, Tabriz University, Tabriz, Iran
2- Mechanical Engineering, Persian Gulf University, Bushehr, Iran
*P.O.B. 7516913817 Bushehr, Iran. fatehi@pgu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 04 August 2013
Accepted 07 September 2013
Available Online 21 May 2014

Keywords:
Incompressible Flow
Implicit Method
Consistency
Free Surface Flow
Dam Break Problems

ABSTRACT

A consistent implicit Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) method based on projection approach is proposed for solving violent free surface flow problems. In this way, two consistent discretization schemes are employed for first and second spatial derivatives. In this study, it is shown that in explicit ISPH solvers, the field variables and the positions of particles in the process of numerical differentiation are estimated at two different time steps. So, the incompressibility is not completely satisfied. In the present approach, an iteration loop is implemented, in each time-step. Thus, at the end of each time-step both velocity and the positions used in divergence estimation are at the new time-level. The proposed ISPH method is validated in free surface flow problems involving 2-D dam break benchmarks in which both wet and dry beds are considered. Among the advantages of the present implicit method is being more accurate and stable than the explicit one, despite use of lower number of particles and greater time-step sizes. Also, it provides significant improvement in free surface simulations and pressure distribution results.

1- مقدمه

امروزه، روش‌های لاگرانژی بدون شبکه، مقبولیت فراوانی درتحلیل انواع مسائل سطح آزاد همراه با ناپیوستگی‌ها و تغییر مکان‌های بزرگ، پیدا کرده است. در این راستا، روش هیدرودینامیک ذرات هموار[1] (SPH)، به عنوان یک روش پرکاربرد در زمینه‌های متفاوتی مورد استفاده قرار گرفته است [۱،۲]. در SPH، معادلات ناویر-استوکس بر روی تعداد محدودی «ذره» حل می‌شود. به این ترتیب، تمام کمیت‌های مجهول جریان از قبیل سرعت، فشار و دما بر روی نقاطی قرار دارند که همراه جریان حرکت می‌کنند.

شبیه‌سازی جریان‌های سیال با قید تراکم ناپذیری در قالب روش SPH، اولین بار توسط موناهان [3] و با استفاده از مفهوم سیال با تراکم پذیری اندک[2] (WCSPH) صورت پذیرفت. در این مفهوم، ارضای تقریبی شرط تراکم ناپذیری، با استفاده از یک معادله حالت محقق می‌شود. همچنین، تضمین

1- Smoothed Particle Hydrodynamics

2- Weakly Compressible SPH

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

S. Farzin, Y. Hassanzadeh, M.T. Aalami, R. Fatehi, An implicit incompressible SPH method for free surface flow problems, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 4, pp. 99-110, 2014 (In Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.4.1.6]

تغییرات کمِ چگالی نسبی، مستلزم انتخاب یک سرعت صوت مصنوعی بزرگ می‌باشد که منجر به اعمال یک گام زمانی بسیار کوچک و افزایش هزینه محاسبات می‌شود. مشکل اصلی این رویکرد امکان ایجاد نوسان‌های غیر فیزیکی در میدان فشار و سرعت است. با افزایش عدد رینولدز جریان و غالب شدن نیروی فشاری، هرگونه نوسان در میدان فشار می‌تواند کل جریان را به هم ریخته و حل را واگرا کند. در این رابطه تاکنون مطالعاتی صورت گرفته است؛ از جمله مراجع [۴،۵]. همچنین، در تراکم پذیری کم، دستگاه معادلات دیفرانسیل حاصل بد رفتار است و این به ماهیت غیرخطی معادلات ناویر-استوکس بر می‌گردد. به منظور غلبه بر مشکلات فوق، کومینز و رودمن [6] رویکرد تصویر[1] فشار را برای شبیه‌سازی جریان تراکم ناپذیر سیال پیشنهاد دادند. در این رویکرد، میدان فشار از حل یک معادله پواسون بدست می‌آید. در این معادله، جمله چشمه متناسب با دیورژانس سرعت است. شائو و لو [7] روش فوق را به نحوی اصلاح کردند که تغییرات چگالی در جمله چشمه لحاظ شود و برای جریان با سطح آزاد قابل اعمال باشد. آنان این روش را ISPH نامیدند.

اخیرا پژوهش‌هایی به منظور مقایسه رویکردهای تراکم پذیری اندک و تصویر فشار در زمینه شبیه‌سازی جریان تراکم ناپذیرصورت گرفته است. لی و همکاران [8] در سال 2008 با مقایسه دو روش فوق، نشان دادند که روش تراکم پذیری اندک استاندارد میدان فشار نوسانی و غیر قابل اعتمادی تولید می‌کند. همچنین، در تحقیق دیگری، لی و همکاران [9] عملکرد مناسب روش تصویر را در مسایل با سطح آزاد سه بعدی نشان دادند. نتایج مطالعات هیوز و گراهام [10] و شادلو و همکاران [11] نیز حاکی از دقت بالای رویکرد تصویر فشار نسبت به تراکم پذیری اندک می‌باشد.

چالش‌هایی چون شرایط مرزی دیواره‌ها، مدل‌سازی سطح آزاد با تغییر شکل‌های بسیار بزرگ، ایجاد پرش و ناپیوستگی در جریان‌های با رینولدز بسیار بالا، اندازه گام زمانی وپایداری، موضوع اصلی تحقیقات فوق و دیگر تحقیقات مربوط به روش تصویر فشار بوده است. نکته مهمی که در این میان تا حدی مغفول واقع شده است، ارضای شرط تراکم ناپذیری در روش صریح است. این روش می‌تواند منجر به تغییرات قابل ملاحظه‌ای در چگالی سیال شود.

به علاوه مشکل دیگری که در اغلب مطالعات صورت گرفته با استفاده از روش SPH دیده می‌شود، همگرایی روش می‌باشد. نشان داده شده است که روش استاندارد برای گسسته‌سازی مشتقات مکانی با کاهش فاصله ذرات همگرا نمی‌شود [12]. علت این مسأله، سازگار[2] نبودن طرح‌های گسسته‌سازی مورد استفاده است. برای حل این مشکل، اخیراً فاتحی و منظری [13] روشی با استفاده از طرح‌های گسسته‌سازی سازگار در چارچوب WCSPH ارائه کرده و همگرایی آن را در مسائل جریان داخلی نشان دادند.

در مقاله حاضر، نشان داده می‌شود که در حل صریح روش تصویر فشار، امکان ارضای شرط تراکم ناپذیری به صورت دقیق وجود ندارد. مشکل حاضر، به رویکرد لاگرانژی بر می‌گردد. در این راستا، دو طرح گسسته‌سازی جدید که خاصیت سازگاری دارند برای گسسته‌سازی مشتقات مکانی اول و دوم ارائه شده است. در ادامه، بر مبنای طرح‌های جدید، یک روش ضمنی سازگار و پایدار [3](IISPH) تضمین کننده شرط تراکم ناپذیری سیال در روش تصویر، معرفی می‌شود. دقت، همگرایی و پایداری طرح‌های گسسته‌سازی و روش ضمنی پیشنهادی، با حل چندین مسأله نمونه جریان ناشی شکست سد بر بستر مرطوب و خشک، ارزیابی می‌شود.

1- Projection Method
2- Consistent
3- Implicit Incompressible SPH

2- معادلات لاگرانژی حاکم بر جریان تراکم ناپذیر لزج

برای جریان‌های آشفته تراکم ناپذیر در فرمولاسیون SPH، معادلات بقای جرم و اندازه حرکت ناویر-استوکس در قالب لاگرانژی به صورت روابط (1) و (2) بیان می‌شوند.

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \upsilon_0 \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \vec{\tau} \tag{2}$$

که در آن u بردار سرعت، p فشار، t زمان، ρ چگالی، g شتاب گرانش، υ_0 لزجت فیزیکی و τ تنش برشی آشفتگی (SPS)[4] می‌باشد.

2-1- لزجت مصنوعی در حل جریان تراکم ناپذیر

در مسائل جریان تراکم ناپذیر با عدد رینولدزهای بالا، همچون مسأله جریان ناشی از شکست سد، که در آنها امواج ضربه‌ای و ایجاد گرادیان‌های شدید نقش به سزایی دارد، اضافه نمودن لزجت مصنوعی به فرمول‌بندی معادله اندازه حرکت، باعث مهار شوک و میرا شدن این نوسانات می‌شود.

در این تحقیق، به منظور دست‌یابی به نتایج دقیق و جلوگیری از ناپایداری‌های عددی در روش SPH، مطابق رابطه پیشنهادی (3)، یک عملگر پایدار ساز لزجت مصنوعی υ_a، به لزجت فیزیکی υ_0 افزوده می‌شود. از خصوصیات این عملگر می‌توان به سادگی، کارآیی موثر در روش‌های بدون شبکه با هندسه نامنظم و پیچیده، دقت بالا و هزینه محاسباتی کم اشاره کرد.

$$\upsilon_a = c_a |\vec{u}| \Delta x \tag{3}$$

در رابطه (3)، c_a یک مقدار ثابت و Δx فاصله بین ذرات محاسباتی است.

2-2- مدل‌سازی آشفتگی

آشفتگی یک عامل مؤثر در محاسبات هیدرولیکی جریان‌های آشفته با عدد رینولدز بالا به شمار می‌آید. در این پژوهش، برای مدل‌سازی تنش آشفتگی در معادله اندازه حرکت، از روابط معرفی‌شده توسط لو و شائو [14] استفاده شده است.

$$\vec{\tau}_{ij} = \rho(2\upsilon_t S_{ij} - \frac{2}{3}k_{sps}\delta_{ij}) \tag{4}$$

که در آن $S_{ij} = \frac{1}{2}(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$ تانسور میانگین نرخ کرنش و δ_{ij} دلتای کرونکر می‌باشد. همچنین υ_t لزجت آشفتگی و k_{sps} انرژی جنبشی آشفتگی می‌باشند که به ترتیب در روابط (5) و (6) محاسبه می‌شوند.

$$\upsilon_t = (c_s \Delta x)^2 |S| \tag{5}$$

$$k_{sps} = (\frac{\upsilon_t}{0.08\Delta x})^2 \tag{6}$$

در این روابط، $|S| = \sqrt{|2S_{ij}S_{ij}|}$ مقدار نرخ کرنش موضعی و c_s ثابت اسماگورینسکی است.

3- اصول روش SPH

3-1- تقریب نقطه‌ای توابع روی فضای گسسته

روش SPH بر پایه یک روش درون‌یابی انتگرالی قرار دارد که به هر تابعی اجازه می‌دهد بر اساس مقادیر نقاط میدان، تقریب زده شود [15]. در شبیه‌سازی‌های فیزیکی، میدان حل توسط نقاط مادی یا همان ذرات با جرم مشخص تعریف می‌شود. این نقاط تحت تأثیر سرعت سیال حرکت می‌کنند. تقریب تابع روی فضای گسسته بصورت رابطه (7) تعریف می‌شود:

4- Sub-Particle Scale

$$\langle v(r)\rangle = \sum_j \omega_j v_j W(|r-r_j|,h) \tag{7}$$

که در آن W تابع هموارسازی یا کرنل درون‌یاب و h شعاع هموارسازی[1] نامیده می‌شود. j شمارنده ذرات تحت تأثیر و r_j و ω_j به ترتیب بردار موقعیت و حجم ذره j است.

3-2- تابع هموارسازی درون‌یاب

عملکرد روش SPH، وابستگی زیادی به انتخاب تابع مناسب هموارسازی دارد. این تابع می‌بایست مثبت، یکه و دارای مشتقات پیوسته باشد. در این تحقیق، با بررسی توابع متعدد پیشنهادی به عنوان هموارساز در SPH، تابع مرتبه دو به عنوان بهترین تابع در مسائل دو بعدی جریان تراکم ناپذیر انتخاب شد.

$$W(q,h)=\begin{cases}\dfrac{6}{\pi h^2}(1-q)^2 & 0\le q<1.0\\ 0 & q\ge 1.0\end{cases} \tag{8}$$

که در آن $q=\dfrac{|r-r_j|}{h}$ می‌باشد.

نتایج تحقیقات جلالی فراهانی [16] نیز مؤید برتری تابع فوق در مسائل امواج ضربه‌ای می‌باشد.

3-3- انتخاب شعاع هموارسازی

از آنجا که تقریب در روش هیدرودینامیک ذرات هموار، شامل تعدادی درون‌یابی انتگرالی می‌باشد، تعداد نقاط تأثیر زیادی بر روی دقت روش می‌گذارد. بنابراین، اندازه شعاع هموارسازی، عامل تعیین کننده‌ای در این راستا می‌باشد. در این تحقیق، با انجام محاسبات متفاوت، شعاع هموارسازی مناسب برای حل جریان لزج تراکم ناپذیر با رینولدز بالا، تعیین شد.

بررسی‌های قبلی فاتحی و منظری [12] مؤید این مطلب است که طرح‌های گسسته‌سازی سازگار از قبیل آنچه در این مقاله آمده است نسبت به طرح‌های رایج، حساسیت کمتری به اندازه شعاع هموارسازی دارد. از این‌رو در مسائل حل شده در مقاله حاضر، شعاع هموارسازی $h=3.0\Delta x$ در نظر گرفته شده است که نسبت به کارهای مشابه، مقدار کوچکی است و نشان از کارایی مدل پیشنهادی دارد.

4- معرفی طرح‌های جدید گسسته‌سازی مکانی در SPH

حل معادلات ناویر- استوکس در فرمولاسیون SPH، مستلزم گسسته‌سازی مشتقات دیفرانسیلی و تبدیل آن به معادلات جبری می‌باشد. بدین منظور، تاکنون طرح‌های متعددی برای گسسته‌سازی مشتقات مکانی ارائه شده است. در این بخش، پس از شرح طرح‌های موجود، طرح‌های جدیدی که نقاط ضعف طرح‌های رایج را برطرف کرده است، معرفی می‌شود.

4-1- طرح جدید گسسته‌سازی مرتبه اول

در ابتدا، طرح‌های رایج گسسته‌سازی مشتق اول به طور اجمالی بررسی می‌شوند. این طرح‌ها عبارتند از: 1- طرح استاندارد: این طرح توسط جینگلد و موناهان [17] معرفی شد و با مشتق‌گیری از تخمین گسسته بر پایه تابع هموارساز، حاصل می‌شود. در این طرح، مشتق یک تابع ثابت، برابر صفر نمی‌شود. 2- طرح اصلاح شده طرح استاندارد: توسط موناهان [18] معرفی شد. در این طرح بر خلاف طرح استاندارد، اگر مشتق یک تابع ثابت مد نظر باشد، جواب دقیق صفر بدست می‌آید. 3- طرح متقارن: با اصلاح طرح 2، طرح متقارن حاصل می‌شود. بدین معنی که سهم ذره i از مشتق در محل ذره j برابر سهم ذره j از مشتق در محل ذره i است. خاصیت تقارن طرح‌ها منجر به بقایی بودن روش عددی می‌شود که ویژگی مهمی در حل جریان سیال است. نقطه ضعف این طرح مانند طرح اول، این است که مشتق یک تابع ثابت، برابر صفر نمی‌شود. در نتیجه، این طرح سازگار نیست. 4- طرح نرمال شده مجدد[2]: توسط راندلس و لیبرسکی [19] برای بهبود دقت گسسته‌سازی، ارائه شده است. در این طرح، بر اساس مقدار تابع هموارساز هر ذره و نیز بردار فاصله بین ذرات، از یک تانسور نرمال‌سازی مجدد استفاده می‌شود. طرح اخیر مشتق اول یک تابع درجه اول را به طور دقیق پیش‌بینی می‌کند.

در نهایت می‌توان گفت که از میان طرح‌های فوق، تنها طرح نرمال شده مجدد، خاصیت سازگاری دارد [20]؛ اگرچه این طرح شرط بقا را ارضا نمی‌کند.

در این مقاله به منظور گسسته‌سازی اولین مشتق مکانی در SPH، یک طرح سازگار جدید بر مبنای طرح راندلس و لیبرسکی [19] معرفی شده است. طرح پیشنهادی برای گرادیان یک میدان دلخواه $\langle\nabla v\rangle_i$ به صورت رابطه (9) بیان می‌شود:

$$\langle\nabla v\rangle_i=\sum_j \omega_j \overleftrightarrow{B}1_i\cdot\frac{W_{ij}}{r_{ij}}(-e_{ij})(v_j-v_i) \tag{9}$$

در این رابطه، $W_{ij}=W(|r_i-r_j|,h)$ و $\overleftrightarrow{B}1_i$ یک تانسور نرمال‌سازی مجدد جدید است که در تحقیق حاضر مطابق رابطه (10) برای مشتق مرتبه اول معرفی شده است.

$$\overleftrightarrow{B}1_i=\left[\sum_j \omega_j W_{ij} e_{ij} e_{ij}\right]^{-1} \tag{10}$$

در روابط فوق، $r_{ij}=|\vec{r}_{ij}|$ فاصله دو ذره و $e_{ij}=\vec{r}_{ij}/r_{ij}$ یک بردار واحد در راستای بین ذرات j تا i می‌باشد.

در رابطه (9) به جای ∇w_{ij}، از عبارت $W_{ij}(-e_{ij})/r_{ij}$ استفاده شده است. با توجه به تعریف گرادیان واضح است که عبارت $\partial W_{ij}/\partial r_{ij}$ با W_{ij}/r_{ij} جایگزین شده است. رفتار کلی این دو عبارت تشابهاتی با یکدیگر دارد. با این حال، در مواردی که r_{ij} کوچک می‌شود، عبارت جدید بر خلاف عبارت قبلی به سمت صفر میل نمی‌کند. این رفتار، باعث بهبود عملکرد روش در توزیع‌های ناهمگن ذرات می‌شود. متناسب با تغییر صورت معادله (9)، تعریف تانسور نرمال‌سازی مجدد نیز (رابطه (10)) متفاوت با عبارت رایج در ادبیات موضوع ارائه شده است.

با توجه به روابط (9) و (10)، واضح است که تانسور نرمال‌سازی معرفی شده، متقارن می‌باشد. بنابراین باعث کاهش هزینه محاسبات نیز می‌شود. همچنین طرح گسسته‌سازی ارائه شده، دارای خاصیت سازگاری مرتبه اول می‌باشد. به عبارتی قابلیت پیش‌بینی دقیق اولین مشتق از توابع خطی را دارد. این طرح علاوه بر دقت بالا، حساسیت کمتری نیز نسبت به بی‌نظمی در مکان ذرات محاسباتی به نسبت طرح سازگار راندلس و لیبرسکی [19] دارد.

4-2- طرح جدید گسسته‌سازی مرتبه دوم

اهم طرح‌های ارائه شده برای تخمین مشتق دوم عبارتند از: 1- تکرار مجدد هر یک از طرح‌های بخش 4-1. در این روش، فرایند محاسبه مجموع روی ذرات همسایه دو بار انجام می‌شود. اجرای این طرح اگر چه آسان است، اما منجر به نوسانات غیر واقعی در نتایج می‌شود. این مشکل ناشی از افزایش استنسیل محاسباتی رایج در روش‌های اویلری است [21]. 2- دیورژانس‌گیری مستقیم از طرح‌های بخش 4-1 که منجر به ایجاد مشتق دوم تابع هموارساز می‌شود. از

1- Smoothing Length

2- Renormalized

نقاط ضعف این طرح آن است که به چینش ذرات حساسیت زیادی دارد [18].

3- استفاده از یک فرم اختلافی بجای مشتق اول و سپس مشتق گیری به روش SPH [22] مطابق رابطه (11).

$$\langle \nabla \cdot \nabla v \rangle_i = -\sum_j 2\omega_j \frac{v_j - v_i}{r_{ij}} e_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} \tag{11}$$

بررسی‌های عددی نشان داده است که این طرح نسبت به دو طرح پیشین عملکرد بهتری دارد [23]. البته، هیچ یک از طرح‌های فوق خاصیت سازگاری و همگرایی را ندارند [12].

در این مقاله، به منظور حل این مشکلات، یک طرح گسسته‌سازی جدید بر مبنای طرح سازگار پیشنهادی فاتحی و منظری [12] برای تقریب عددی مشتق دوم مکانی در روش SPH ارائه می‌شود که در رابطه (12) بیان شده‌است.

$$\langle \nabla^2 v \rangle_i = \overleftrightarrow{B}2_i : \sum_j 2\omega_j \frac{W_{ij}}{r_{ij}} e_{ij} e_{ij} \left(\frac{v_j - v_i}{r_{ij}} + e_{ij} \cdot \langle \nabla v \rangle_i \right) \tag{12}$$

در طرح پیشنهادی (12)، تانسور دیگری برای نرمال‌سازی مجدد $\overleftrightarrow{B}2_i$ معرفی شده است، به نحوی که معادله (13) را ارضا کند.

$$\overleftrightarrow{B}2_i : \left[\sum_j \omega_j W_{ij} e_{ij} e_{ij} e_{ij} e_{ij} - \left(\sum_j \omega_j \frac{W_{ij}}{r_{ij}} e_{ij} e_{ij} e_{ij} \right) \cdot \overleftrightarrow{B}1_i \cdot \left(\sum_j \omega_j W_{ij} r_{ij} e_{ij} e_{ij} \right) \right] = \overleftrightarrow{I} \tag{13}$$

از مزایای طرح پیشنهادی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- این طرح سازگار است.
- تانسور معرفی شده $\overleftrightarrow{B}2_i$ متقارن است و بنابراین در کاهش هزینه محاسبات مؤثر است.
- روش عددی برای همه نسبت‌های شعاع همگرایی، مشابه یک روش مرتبه دو رفتار می‌کند. به علاوه، طرح ارائه شده برای ذرات منظم چیده شده، یک مرتبه دقت بیشتری نسبت به طرح رابطه (11) نشان می‌دهد.
- این طرح برای شعاع‌های هموارسازی کوچک نیز همگرا می‌شود. به تعبیر دقیق‌تر، محاسبه مشتق دوم در این طرح، با استفاده از تعداد ذره همسایه کمتری قابل انجام است. این امر به طور قابل ملاحظه‌ای هزینه محاسبات و زمان حل را کاهش می‌دهد.

5- حلگر جریان تراکم ناپذیر با استفاده از روش تصویر

در این بخش، از طرح‌های پیشنهادی در گسسته‌سازی عبارات نیروی لزجت و لاپلاسین فشار در معادلات ناویر-استوکس استفاده می‌شود. بر این اساس، یک روش شبه ضمنی پایدار به منظور اصلاح حلگر جریان تراکم ناپذیر با استفاده از روش تصویر، معرفی می‌شود. روش معرفی شده، بر خلاف روش‌های صریح رایج، شرط تراکم ناپذیری را کاملاً ارضا می‌کند.

به منظور مقایسه نحوه عملکرد روش پیشنهادی با روش‌های صریح رایج، ابتدا مراحل روش صریح به طور خلاصه آورده می شود.

5-1- روش صریح

گام اول) پیش‌بینی یک سرعت میانی بر اساس مقدار نیروی حجمی و تنش معلوم و بدون احتساب جمله فشار در معادله اندازه حرکت:

$$u^* = u^n + \Delta t \left(g + \upsilon_{eff} < \nabla^2 u^n >^n + \frac{1}{\rho} < \nabla \cdot \tau^n >^n \right) \tag{14}$$

که در آن Δt اندازه گام زمانی و υ_{eff} مجموع لزجت فیزیکی و لزجت مصنوعی ذرات می‌باشد.

شایان ذکر است که در رابطه فوق، بالا نویس n برای u^n نشان دهنده مقادیر در زمان فعلی است. در حالی که $<\cdot>^n$ نشان دهنده تقریب SPH در روابط (9) و (12) و بر اساس مکان فعلی ذرات است. تفکیک این دو حائز اهمیت است. زیرا در روش‌های لاگرانژی مانند SPH، مقادیر مشتق‌های مکانی بر اساس مکان ذرات تقریب زده می‌شود که بر خلاف روش‌های اویلری، در زمان جابجا می‌شود. پس لازم است که هنگام مشتق‌گیری تعیین شود که مشتق مکانی بر اساس محل ذرات در چه زمانی صورت می‌گیرد.

گام دوم) محاسبه فشار طوری که لاپلاسین آن متناسب با مقدار دیورژانس سرعت میانی (u^*) باشد:

$$\langle \nabla^2 p^{n+1} \rangle^n = \frac{\rho}{\Delta t} \langle \nabla \cdot u^* \rangle^n \tag{15}$$

گام سوم) محاسبه سرعت جدید ذرات با استفاده از فشار جدید:

$$u^{n+1} = u^* + \Delta t \left(-\frac{1}{\rho} < \nabla p^{n+1} >^n \right) \tag{16}$$

گام چهارم) محاسبه موقعیت ذرات با استفاده از سرعت جدید:

$$r^{n+1} = r^n + \frac{\Delta t}{2} (u^n + u^{n+1}) \tag{17}$$

به این ترتیب، روش تصویر طی دو مرحله شامل پیش بینی و تصحیح، اجرا می‌شود.

اشکال مهم این روش، عدم ارضای کامل شرط تراکم ناپذیری است. با جایگذاری معادله (15) در (16) رابطه (18) حاصل می‌شود.

$$< \nabla \cdot u^{n+1} >^n = 0 \tag{18}$$

در رابطه فوق، متغیر میدان و مکان مشتق گیری در دو زمان متفاوت محاسبه شده‌اند. در حالی‌که شرط ارضای تراکم ناپذیری، رابطه (19) است:

$$< \nabla \cdot u^{n+1} >^{n+1} = 0 \tag{19}$$

این شرط با استفاده از روش صریح دست یافتنی نیست. با کاهش اندازه گام زمانی، می‌توان تفاوت دو زمان فوق را کمتر و مکان مشتق‌گیری را اندکی اصلاح نمود، لیکن کاهش بیش از حد اندازه گام زمانی باعث از بین رفتن مزیت اصلی روش تصویر و عدم پایداری حل می‌شود. مزیت روش تصویر نسبت به روش تراکم پذیری اندک عدم وجود عدد صوت و در نتیجه گام زمانی بزرگ‌تر است.

5-2- روش شبه ضمنی

چاره کار جهت رسیدن دقیق به شرط تراکم ناپذیری، حل روش تصویر توسط یک روش ضمنی پایدار با الگوی تکرار شونده (سعی و خطایی) می‌باشد. این پیشنهاد قبلاً در مقاله هو و آدامز [24] و پس از آن خو و همکاران [25] داده شده است. روش ایشان بدون تأکید بر اثر مکان مشتق‌گیری، به ثابت نماندن چگالی در روش SPH تاکید دارد. راه حل ایشان محاسبه مجدد چگالی و اصلاح فشار در یک فرایند سعی و خطایی است. اما در روش ذکر شده، اثر تغییر مشتقات مکانی فشار و سرعت بر اثر اصلاح مکان ذرات در نظر نگرفته شده است.

روش پیشنهادی در این مقاله به طور خلاصه (IISPH) نامیده شد که در شش گام و به ترتیب زیر اجرا می‌شود:

گام اول) مقادیر مکان، سرعت و فشار در اولین مرحله تکرار[1] (k=1)، برابر مقادیر زمان فعلی قرار داده می‌شود:

$$r^k = r^n, u^k = u^n, p^k = p^n \tag{20}$$

گام دوم) سرعت میانی بر اساس مقادیر تکرار k پیش‌بینی می‌شود:

1- Iteration

$$u^{*}=u^{n}+\Delta t\,(g+\upsilon_{eff}\langle\nabla^{2}u^{k}\rangle^{k}+\frac{1}{\rho}\langle\nabla\cdot\tau^{k}\rangle^{k}) \tag{21}$$

گام سوم) فشار جدید برای سعی و خطای مرحله k از حل دستگاه معادلات رابطه (22) به دست می‌آید:

$$\langle\nabla^{2}p^{k+1}\rangle^{k}=\frac{\rho}{\Delta t}\langle\nabla\cdot u^{*}\rangle^{k} \tag{22}$$

برای یافتن p^{k+1} از رابطه (22)، می‌بایست از رابطه (12) جهت یافتن ماتریس ضرایب استفاده کرد. در رابطه (12)، جمله مشتق اول $\langle\nabla v\rangle_i$ وجود دارد که لازم است از رابطه (9) جایگذاری شود و نهایتاً به صورت رابطه (23) درآید.

$$\langle\nabla^{2}p\rangle_i=\overleftrightarrow{\mathrm{B}}2_i:\sum_j 2\omega_j(p_j-p_i)[\frac{W_{ij}}{\mathrm{r}_{ij}^{2}}\mathrm{e}_{ij}\mathrm{e}_{ij}+(\sum_k\omega_k\cdot\frac{W_{ik}}{\mathrm{r}_{ik}}\mathrm{e}_{ik}\mathrm{e}_{ik}\mathrm{e}_{ik})\cdot\overleftrightarrow{\mathrm{B}}1_i\cdot\frac{W_{ij}}{\mathrm{r}_{ij}}\mathrm{e}_{ij}] \tag{23}$$

برای حل ماتریس ضرایب فشار در معادله (22) لازم است که یک دستگاه معادلات خطی حل شود. بدین منظور، در اینجا از حلگر GMRes که برای ماتریس‌های تُنُک[1] نوشته شده است، استفاده می‌شود.

گام چهارم) حال مقدار سرعت و مکان مرحله جدید بدست می‌آید:

$$u^{k+1}=u^{*}+\Delta t\,(-\frac{1}{\rho}\langle\nabla p^{k+1}\rangle^{k}) \tag{24}$$

$$r^{k+1}=r^{n}+\frac{\Delta t}{2}(u^{n}+u^{k+1}) \tag{25}$$

گام پنجم) اگر جواب همگرا شده است که از حلقه خارج می‌شود، اگر نه رابطه (26) به روز رسانی می‌شود.

$$r^{k}=r^{k+1},u^{k}=u^{k+1},p^{k}=p^{k+1} \tag{26}$$

به گام دوم باز می‌گردد.

گام ششم) در نهایت، پس از ایجاد همگرایی در حل، مقادیر زمان جدید بدست می‌آید:

$$r^{n+1}=r^{k+1},u^{n+1}=u^{k+1},p^{n+1}=p^{k+1} \tag{27}$$

برای معیار همگرایی در حلقه تکرار فوق، انتخاب‌های متفاوتی وجود دارد. در اینجا $\left|p^{k+1}-p^{k}\right|<\varepsilon$ به عنوان معیار همگرایی انتخاب شده است. به علاوه، برای جلوگیری از واگرا شدن سعی و خطا از ضرایب زیر تخفیف[2] 0/3، 0/4 و 0/4 به ترتیب برای فشار، سرعت و مکان استفاده شده است.

3-5- تکنیک جابجا کردن ذرات[3] در SPH

تکنیک دیگری که اخیراً در SPH معرفی شده است، جابجا کردن ذرات محاسباتی می‌باشد [25]. در SPH ممکن است ذرات در حین پروسه حل، از جهتی به یکدیگر نزدیک و از جهت دیگر از هم دور شوند. این امر سبب ایجاد فضاهای خالی در جواب و واگرایی حل می‌شود. هدف از تکنیک جابجا کردن ذرات، ایجاد همگنی در توزیع ذرات می‌باشد. بدین ترتیب که هر بار پس از یافتن مکان جدید ذرات، میزان همگنی ذرات همسایه اطراف هر ذره را بررسی می‌کند. سپس متناسب با آن، ذرات را طوری جابجا می‌کند که توزیع همگن‌تری بدست آید. واضح است که اندازه جابجا شدن هر ذره، به نسبت تغییر مکان آن در حین حرکت سیال، بسیار کوچک‌تر است.

در مطالعه حاضر، یک روش اصلاح شده نسبت به آنچه که در [13] و [25] استفاده شده است، پیشنهاد می‌شود. ابتدا مقداری به عنوان فاصله نسبی ذرات همسایه محاسبه می‌شود.

$$\bar{r}_i=\frac{1}{N_i}\sum_j r_{ij} \tag{28}$$

که در آن N_i، تعداد ذرات همسایه ذره i می‌باشند. در اینجا، $\bar{r}_i$ به نحوی اصلاح شده است که ذرات مجاور دیوار، نتوانند از مرز خارج شوند. سپس جهت فضای خالی (R_i)، مطابق رابطه (29) محاسبه می‌شود.

$$R_i=\sum_j\left(\frac{\bar{r}_i}{r_{ij}}\right)^{3}e_{ij} \tag{29}$$

در رابطه (29)، اگر $R_i=0$ شود، توزیع ذرات همسایه به صورت همگن می‌باشد. در غیر این صورت، بردار R_i نشان دهنده آن است که در کنار ذره i، فضایی خالی ایجاد شده است. برای ایجاد همگنی، می‌بایست ذره را به اندازه Δr_i به سمت فضای خالی جابجا کرد.

$$\Delta r_i=\varepsilon\Delta t\,|u_i|\cdot R_i \tag{30}$$

در این رابطه، $0<\varepsilon<0.1$ تعیین می‌شود.

به این ترتیب، توزیع ذرات همگن‌تر می‌شود و از پیوستن و یا خوشه‌بندی[4] ذرات ممانعت به عمل می‌آید. تفاوت عمده روش پیشنهادی حاضر نسبت به روش معرفی شده در [13] و [25]، این است که در تعیین بردار $\bar{r}_i$، هیچ ذره اضافی به عنوان «نخودی»[5] یا «آینه‌ای» پشت دیواره‌ها قرار داده نمی‌شود. اصلاح صورت گرفته، سبب می‌شود که علاوه بر افزایش دقت، هزینه اضافی نیز به مدل تحمیل نشود.

در ادامه، برای حفظ دقت، لازم است که متغیرهای سرعت و فشار مطابق روابط (31) و (32) در مکان جدید میان‌یابی و اصلاح شوند.

$$\Delta u_i=\Delta r_i\cdot\langle\nabla u\rangle_i \tag{31}$$

$$\Delta P_i=\Delta r_i\cdot\langle\nabla P\rangle_i \tag{32}$$

گرادیان سرعت و فشار که در معادلات فوق استفاده شده است، قبلا در حین کار محاسبه شده‌اند.

اگر چه تکنیک جابجا کردن ذرات از جمله مفاهیم بنیادین در روش SPH به حساب نمی‌آید، لیکن نتیجه تحقیق حاضر حاکی از آن است که اعمال مناسب این تکنیک، تاثیر به سزایی در پایداری و همگرایی محاسبات دارد.

4-5- مدل‌سازی سطوح آزاد جریان

شبیه‌سازی دقیق سطوح آزاد جریان از چالش‌های فعلی روش SPH می‌باشد. از طرف دیگر در جریان‌های با عدد رینولدز بالا، برای مدل‌سازی مرزهای دارای تغییر شکل‌های بزرگ نیاز به ذرات محاسباتی زیاد می‌باشد که سبب بروز خطا و صرف زمان طولانی برای شبیه‌سازی می‌شود. بنابراین لازم است که تمهیداتی در این راستا اندیشیده شود. در ادامه به چگونگی پیاده‌سازی آنها در مدل عددی حاضر پرداخته می‌شود.

ابتدا با توجه به میدان سرعت و میدان فشار، یک شرط سطح آزاد و یک شرط فشار صفر برای ذرات سطح، تعریف می‌شود:

$$\tau\cdot n=0,or(\langle\nabla u\rangle+\langle\nabla u\rangle^{\mathrm{T}})\cdot n=0 \tag{33}$$

$$p=p_0=0 \tag{34}$$

در این مطالعه، ذره‌ای که چهار شرط پیشنهادی زیر را ارضا کند، به عنوان سطح آزاد شناخته می‌شود:

$$\sum_j W_{ij}\le\frac{0.80}{\omega_i} \qquad \text{(35- الف)}$$

1- Sparse
2- Under-relaxation
3- Shifting SPH Particles

4- Clustering
5- Dummy

$$\left|\sum_j \omega_j W_{ij} e_{ij}\right| > 0.25 \qquad \text{(35- ب)}$$

$$S_{\overleftrightarrow{B}2} > 14 \qquad \text{(35- ج)}$$

$$\det(\overleftrightarrow{B}1) = 0 \qquad \text{(35- د)}$$

در روابط فوق، $S_{\overleftrightarrow{B}2} = (\left|\overleftrightarrow{B}2_{xx}\right| + \left|\overleftrightarrow{B}2_{yy}\right| + \left|\overleftrightarrow{B}2_{xy}\right|)$ و $\overleftrightarrow{B}2_{xx}$، $\overleftrightarrow{B}2_{yy}$ و $\overleftrightarrow{B}2_{xy}$ اعضای دومین تانسور نرمال‌سازی هستند.

چهار شرط فوق به ترتیب شامل موارد زیر است:

الف) در حالتی که یک ذره داخل ناحیه سیال قرار داشته باشد، $\sum_j W_{ij}$ تقریباً برابر $1/\omega_i$ می‌باشد. پس برای ذره‌ای که روی سطح آزاد قرار دارد، چون تعداد همسایه‌های کمتری دارد، مجموع مقدار تابع کرنل همسایه‌ها از مقدار فوق کمتر است.

ب) برای ذره‌ای که در داخل ناحیه سیال قرار دارد معمولاً توزیع ذرات همسایه نزدیک به توزیع یکنواخت است بطوری که مقدار $\left|\sum_j \omega_j W_{ij} e_{ij}\right|$ تقریباً برابر صفر است. افزایش مقدار عبارت فوق به معنی نزدیک بودن ذره به سطح آزاد است.

ج) برای ذرات داخل سیال معمولاً تانسورهای $\overleftrightarrow{B}1$ و $\overleftrightarrow{B}2$ نزدیک به تانسور یکه هستند. اما برای ذرات نزدیک مرز یا روی سطح آزاد، مؤلفه‌های این تانسورها افزایش می‌یابد. شرط (35- ج) معیاری از بزرگ بودن اندازه تانسور $\overleftrightarrow{B}2$ است.

د) ذرات روی دیوار در مناطقی که هنوز سیال به آن نرسیده است (بستر خشک) و ذرات منفرد، شامل هیچ کدام از سه شرط قبلی نمی‌شود. شرط (35- د) در واقع به منظور در نظر گرفته شدن این نقاط اضاف شده است.

بدین ترتیب، برای مدل‌سازی سطح آزاد جریان از حداقل تعداد ذرات استفاده می‌شود. همچنین به ذرات اضافی هم نیازی نیست. بنابراین، روش پیشنهادی گزینه مناسبی به منظور حل مشکلات ذکر شده می‌باشد.

5-5- مدل‌سازی مرزهای جامد

عدم دقت در تعریف شرایط مرزی سبب ایجاد خطا در مرزها و سپس انتشار آن به درون ناحیه محاسباتی می‌شود. در پیاده‌سازی مرزهای جامد، در روش‌های ذره-مبنا دو مشکل عمده مطرح می‌باشد:

الف) مشکل اول مربوط به ذرات مجاور مرز می‌باشد که بخشی از تکیه‌گاه تابع هموار ساز آنها، در خارج از دامنه قرار می‌گیرد و منجر به محاسبه غلط مقادیر گسسته‌سازی شده مشتق اول و دوم برای این ذرات می‌شود.

ب) در رویکرد لاگرانژی، مکان، تابع زمان بوده و همراه با حرکت ذرات مادی تعریف می‌شود. به همین دلیل وقتی قرار است در مکان مشخصی، شرطی مانند دیوار بدون لغزش و یا سرعت ورودی ثابت اعمال شود، مکان ذره و محل شرط مرزی می‌تواند بر هم منطبق نباشد.

در مقاله حاضر برای حل مشکلات فوق، روشی که اخیراً توسط فاتحی و منظری [13] معرفی شده است، با استفاده از طرح گسسته‌سازی جدید اعمال می‌شود. به منظور مدل‌سازی مرزهای جامد با استفاده از ذرات مرزی، ذرات مرزی ساکن که از هر نظر رفتاری مشابه ذرات داخلی سیال دارند و از معادلات حاکم پیروی می‌کنند، با تنظیم فشار، از نفوذ ذرات داخلی به داخل دیواره‌های جامد جلوگیری می‌کنند.

برای اعمال شرط عدم لغزش، پس از محاسبه سرعت در هر گام زمانی این مقدار برای ذرات روی دیوار مساوی صفر قرار داده می‌شود. بنابراین موقعیت این ذرات در طول زمان ثابت می‌ماند. با استفاده از این نکته، معادله تکانه خطی را برای این ذره سیال دوباره نوشته می‌شود:

$$\langle \nabla p \rangle \cdot n = \langle \nabla \cdot \tau \rangle \cdot n + \rho g \cdot n \qquad (36)$$

در این رابطه، از آنجا که عبارت تنش برشی تأثیرگذار نیست، از آن می‌توان چشم‌پوشی کرد. بنابراین:

$$\langle \nabla p \rangle \cdot n = \rho g \cdot n \qquad (37)$$

که در آن n بردار یکه عمود بر دیوار است. برای هر ذره i، بردار n_i را می‌توان از مجموع گرادیان‌های تابع هموارساز بدست آورد:

$$n_i = \frac{\sum_j \omega_j W_{ij} e_{ij}}{\left|\sum_j \omega_j W_{ij} e_{ij}\right|} \qquad (38)$$

با توجه به رابطه (37)، اگر ذره i روی دیوار قرار داشته باشد، سرعت آن معلوم و صفر است. این رابطه را می توان با استفاده از طرح گسسته‌سازی (9)، به صورت رابطه (39) گسسته کرد:

$$\sum_j \omega_j \left(\overleftrightarrow{B}1_i \cdot \frac{W_{ij}}{r_{ij}} (-e_{ij}) \right) \cdot n_i (p_j - p_i) = \rho g \cdot n_i \qquad (39)$$

از مزایای روش حاضر، دقت بالا و عدم نیاز به ذرات اضافی دیگر است. چرا که استفاده از طرح‌های جدید گسسته‌سازی که سازگار و پایدار هستند، تضمین می‌کند که مقادیر مشتق در نقاط مجاور و یا روی مرز نیز با دقت کافی محاسبه شود.

6-5- شرایط اولیه

به غیر از شرایط مرزی بالا، شرایط اولیه‌ای هم در شبیه‌سازی استفاده شده است. ذرات در لحظه اولیه (t=0) دارای فشار صفر هستند. اما به محض شروع حرکت فشار هیدرواستاتیک برآنها حاکم است. تمامی سرعت‌ها در مخزن در زمان t=0 برابر صفر می‌باشد. همچنین، در این لحظه، ذرات در یک آرایش مربعی منظم چیده شده‌اند.

7-5- شرط پایداری

در SPH، به منظور مدل‌سازی هر چه واقعی‌تر جریان، تحلیل مسائل پیچیده با تغییر شکل‌های بزرگ و همچنین ایجاد همگرایی در پروسه حل، می‌بایست تعداد ذرات محاسباتی زیادی انتخاب شود. با افزایش تعداد ذرات، گام زمانی نیز باید کوچک شود تا حل پایدار بماند. بنابراین انتخاب گام زمانی مناسب، از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد.

در اینجا، طول هر گام زمانی به گونه‌ای انتخاب می‌شود که شرط زیر را (مشابه با شرط کورانت-فردریش-لوی) ارضا نماید.

$$\Delta t \le \alpha \frac{\Delta x}{U_{\max}} \qquad (40)$$

که در آن $U_{\max}$، سرعت بیشینه جریان و $0<\alpha<1.0$ یک ضریب ثابت می‌باشد. رابطه (40) در جریان‌های با عدد رینولدز زیاد، بر سایر شرط‌های پایداری غالب می‌باشد. در نتیجه، به جز در لحظات اول که سرعت سیال ناچیز است، نیازی به بررسی سایر شرط‌ها نیست. در مسائل شکست سد به علت حضور نیروی گرانش، در زمان‌های اولیه، شرط زیر اندازه گام زمانی را تعیین می کند:

$$\Delta t \le \alpha \frac{\Delta x}{\sqrt{2gL}} \qquad (41)$$

در این رابطه L، طول مشخصه مسأله می‌باشد.

6- نتایج و بحث

در این مطالعه، مسأله شناخته شده و پر کاربرد جریان ناشی از شکست سد

بنا به اهمیت و ویژگی‌های خاصی که دارد، جهت بررسی دقت و کارایی روش‌های پیشنهادی و اصلاحی انتخاب شد. از جمله این ویژگی‌ها می‌توان موارد زیر را برشمرد: معادلات ناویر-استوکس بر حرکت حاکم است، دارای جریان با سطح آزاد است، جریان از نوع متغیر سریع و همراه با تغییر مکان‌های زیاد می‌باشد، نوسان‌های شدید در میدان فشار ایجاد می‌شود و انواع موج از جمله موج ضربه‌ای تولید می‌شود.

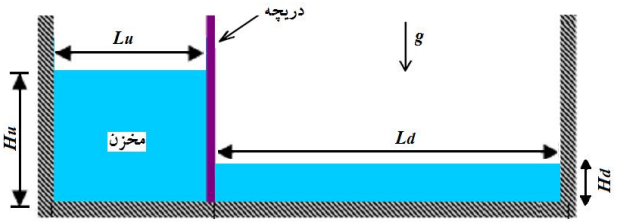
همان‌طور که پیشتر گفته شد، تعداد نقاط انتگرال‌گیری تأثیر زیادی بر دقت روش دارند. بنابراین عمده نتایج این تحقیق با استفاده از تعداد ذرات متفاوت، ارائه و تحلیل شده است. برای این کار، کد نویسی بر اساس روش عددی SPH به صورت شی گرا در زبان C++ انجام شده است.

بسیاری از خصوصیات جریان شکست سد به شدت به این مسأله که موج بر روی بستر خشک انتشار می‌یابد یا روی لایه‌ای از سیال، بستگی دارد [26]. بنابراین در این تحقیق، مسأله شکست سد در دو حالت کلی شامل بستر مرطوب و بستر خشک شبیه‌سازی شده است.

در مسائل شکست سد، کانالی با طول معلوم به وسیله دریچه‌ای که در بین کانال قرار دارد به دو قسمت مجزا تقسیم می‌شود: مخزنی از آب با ابعاد مشخص که در بالا دست قرار دارد و در حالت بستر مرطوب، آبی هم در پایین دست وجود دارد. شکست سد با برداشتن ناگهانی دریچه شبیه‌سازی می‌شود. شماتیک کلی مدل فیزیکی و همچنین مشخصات مدل‌سازی‌های انجام شده در شکل 1 و جدول 1 نمایش داده شده است.

6-1- شبیه‌سازی جریان شکست سد در بستر مرطوب

در این بخش، به عنوان اولین آزمون محاسباتی، مسأله شکست سد در بستر مرطوب شبیه‌سازی می‌شود. این آزمون، یک نمونه خوب به منظور بررسی قابلیت روش‌های عددی در مدل‌سازی سطح آزاد محسوب می‌شود. مشخصات مدل فیزیکی شبیه سازی شده در جدول 1 ارائه شده است. آزمایش تجربی در این زمینه توسط جانوسی و همکاران [26] در سال 2004 صورت پذیرفته است و به طرز وسیعی در زمینه صحت‌سنجی مورد استقبال محققان می‌باشد. به‌منظور بررسی دقت روش‌های پیشنهادی، نتایج روش ضمنی (IISPH) حاضر با داده‌های آزمایشگاهی مورد مقایسه قرار گرفته است. در این بخش، برای شبیه‌سازی از 11905 ذره استفاده شده است.



شکل 1 شماتیک شرایط اولیه برای شبیه‌سازی شکست سد

جدول 1 مشخصات آزمایش‌های جریان شکست سد

آزمایش	نوع بستر	عمق آب مخزن (*Hu*)	عمق آب پایین دست (*Hd*)	طول مخزن (*Lu*)	طول پایین دست (*Ld*)
جانوسی و همکاران [26]	مرطوب	0/15	0/038	0/38	3/55
مارتین و مویس [27]	خشک	0/057	0	0/057	0/249
ژو و همکاران [28]	خشک	0/60	0	1/20	2/02

*تمامی واحدها بر حسب متر می‌باشد.

همچنین، در راستای مقایسه عملکرد روش حاضر با روش حل صریح جریان تراکم ناپذیر، شبیه‌سازی با روش صریح نیز انجام گرفته است. در روش ضمنی، مقدار ضریب جابجا کردن ذرات و بیشینه عدد کورانت به ترتیب برابر $\varepsilon = 0.08$ و $\alpha = 0.12$ و در روش صریح برابر $\varepsilon = 0.10$ و $\alpha = 0.05$ انتخاب شدند. همچنین در تمام نتایج این بخش، ضریب لزجت مصنوعی و ثابت اسماگورینسکی به ترتیب برابر $c_a = 0.20$ و $c_s = 0.10$ تعیین شدند.

نتایج به دست آمده از توزیع ذرات، کانتورهای فشار و سطح آزاد در زمان‌های 0/28، 0/34، 0/46 و 0/59 ثانیه به ترتیب از بالا به پایین، در شکل 2 نشان داده شده است. نمودارهای سطح آزاد با نتایج آزمایشگاهی [26] و حل صریح مقایسه شده است. مقایسه نتایج نشان می‌دهد هر چند که هر دو روش سطح آزاد را بخوبی مدل می‌کنند، اما نتایج روش ضمنی دقیق‌تر از روش صریح می‌باشد. روش ضمنی انحناهای سطح آزاد را بسیار خوب نشان می‌دهد و بر خلاف روش صریح انحناهای اضافی (مثلا ردیف دوم) تولید نمی‌کند. توجه شود که تفاوت موجود بین نتایج روش‌های صریح و ضمنی حاضر با نتایج آزمایشگاهی در لحظات اولیه 0/28 ثانیه به سرعتِ کمِ برداشتن دریچه در مدل آزمایشگاهی مربوط می‌شود. این مقدار برابر 1/5 متر بر ثانیه می‌باشد. این بدان معنی است که برداشتن دریچه در حدود 0/1 ثانیه به طول می‌انجامد. به نظر می‌رسد به منظور شبیه‌سازی شکست آنی سد، این مدت، نسبتاً طولانی است.

6-2- شبیه‌سازی جریان شکست سد در بستر خشک

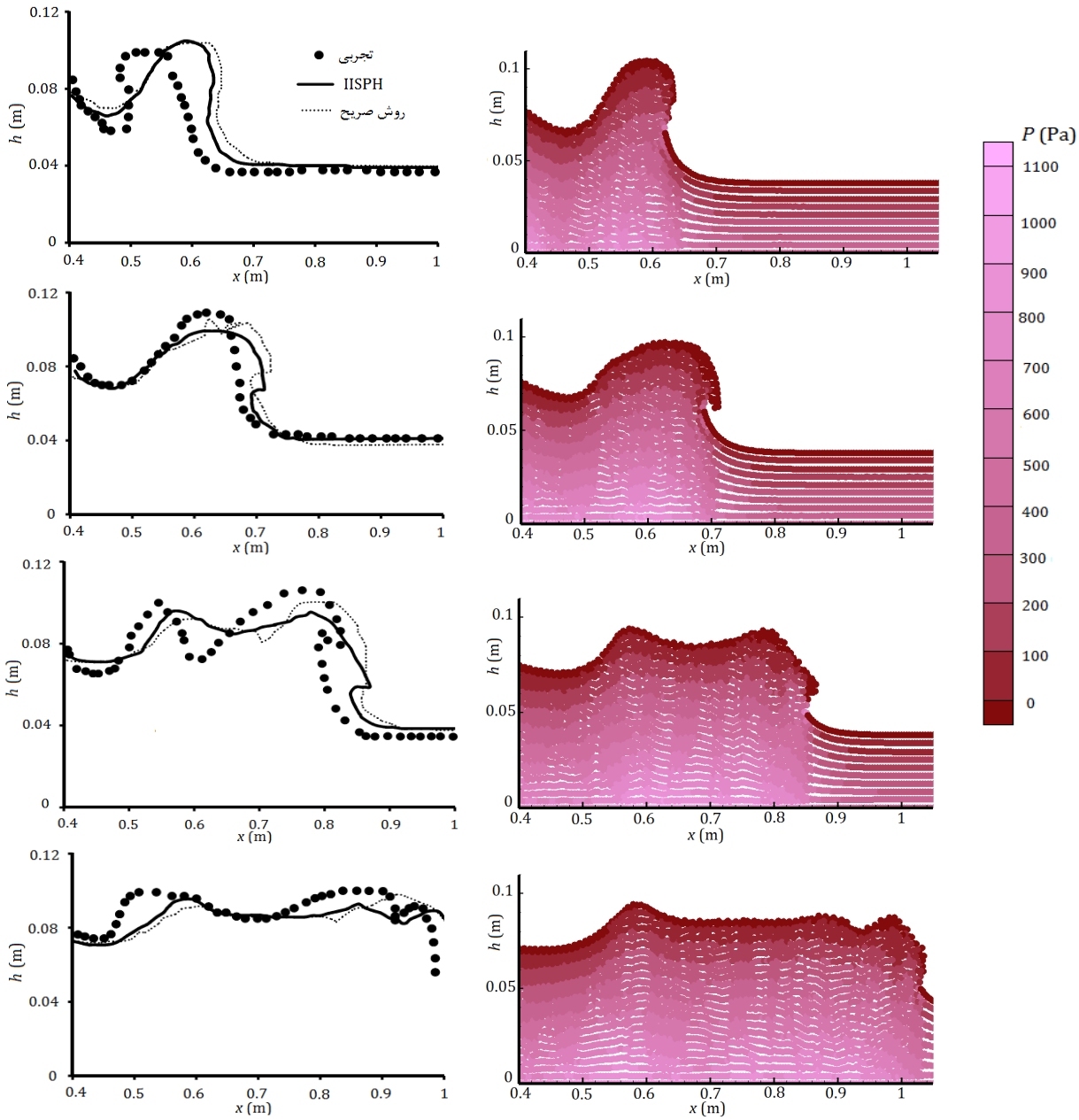
با برداشتن ناگهانی دریچه، یک موج منفی در جهت بالادست انتشار می‌یابد. به طور هم‌زمان پیشانی این موج نیز از محل سد حرکت خود را بر روی بستر خشک پایین دست شروع می‌کند. در این راستا، مطالعه تاریخچه زمانی پیشانی موج پیش رونده، نیم‌رخ سطح آزاد جریان، تغییرات عمق جریان در مقاطع مختلف و همچنین مقدار فشار متوسط در محدوده‌ای معین روی دیوار پایین‌دست انتهای کانال، از اهمیت به سزایی برخوردار است که در ادامه به این مهم پرداخته شده است.

6-2-1- موقعیت پیشانی موج ناشی از شکست سد

به عنوان دومین آزمون محاسباتی، حلگر حاضر جهت شبیه‌سازی انتشار امواج ناشی از شکست سد بر روی بستر افقی و بدون اصطکاک (شکست ایده ال) بکار می‌رود. آزمایش تجربی در این زمینه توسط مارتین و مویس [27] انجام شده است. علاوه بر این، حل‌های عددی کولاگروسی و لاندرینی [29] و فراری و همکاران [30] نیز موجود می‌باشد. مدل‌سازی مرجع [29] با استفاده از یک نسخه اصلاح شده از WCSPH و با 6320 ذره انجام شده است. در مرجع [30] نیز با فرض جریان غیر لزج و در سه بعد با استفاده از 2000000 ذره، مسأله حل شده است. نتایج در شکل 3 ارائه شده است.

با توجه به شکل 3، مشاهده می‌شود که پیشانی موج آزمایشگاهی نسبت به نتایج عددی پیش‌روی آرام‌تری دارد. با گذشت زمان، این اختلاف بین نتایج آزمایشگاهی و عددی افزایش یافته است. این امر ناشی از آن است که در روش‌های عددی از اثرات اصطکاکی کف کانال صرف‌نظر می‌شود.

در این تحقیق، مدل‌سازی مسأله فوق با استفاده از 3898 و 9320 ذره محاسباتی صورت پذیرفته است. ابعاد مدل در جدول 1 ارائه شده است. مقدار ضریب جابجا کردن ذرات و بیشینه عدد کورانت نیز به ترتیب برابر $\varepsilon = 0.10$ و $\alpha = 0.10$ انتخاب شده‌اند. موقعیت پیشانی موج، توسط ذره‌ای از سیال که در هرگام زمانی بیشترین فاصله از محل سد را دارد، محاسبه می‌شود.



ب- نمودار مقایسه‌ای سطوح آزاد

الف- نتایج روش ضمنی IISPH

شکل 2 نمودارهای کانتور فشار و سطح آزاد بستر مرطوب در زمان‌های مختلف

نتایج محاسبه پیشروی پیشانی موج با استفاده از روش پیشنهادی IISPH در شکل 4 نمایش داده شده است. مطابقت بسیار بالای نتایج IISPH با نتایج آزمایشگاهی و مقایسه با سایر روش‌های عددی حاکی از دقت روش پیشنهادی است.

با توجه به اصل بقای جرم، فرایند پیش‌روی موج روی بستر خشک، با نزول سطح آب مخزن همراه است. در شکل 5 نیز میزان افت تراز آب در دیواره سمت چپ مخزن (h) شبیه‌سازی شده و با نتایج آزمایشگاهی [27] مقایسه شده است. این نتایج نیز نشان از قابلیت روش ضمنی پیشنهادی دارد.

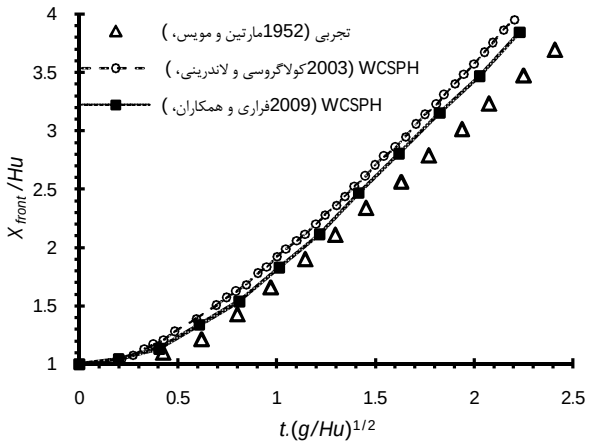
6-2-2- نیمرخ سطح آزاد جریان، امواج ضربه‌ای و پروفیل‌های توزیع فشار

آخرین مدل فیزیکی شبیه سازی شده در این پژوهش، مدلی است که مطالعه آزمایشگاهی آن توسط ژو و همکاران [28] انجام پذیرفته است. ابعاد اولیه مدل‌در جدول 1 ارائه شده است.

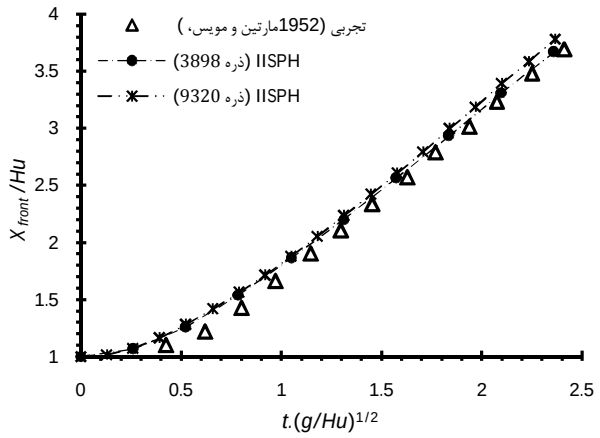
در این مقاله، مدل فیزیکی فوق با استفاده از روش پیشنهادی IISPH و با تعداد 5155 و 11187 ذره شبیه‌سازی و تحلیل شد. به منظور نشان دادن قابلیت روش پیشنهادی، نتایج حاصل از ذرات کمتر (برابر 5155) ارائه شده است (شکل 6).

نیمرخ های سطح آزاد در گذر زمان، امواج ضربه‌ای که به دیوار انتهایی برخورد کرده و بازتاب می‌شوند و نحوه توزیع فشار در این پروسه، اطلاعاتی است که از شکل 6 حاصل می‌شود و نتایج به شرح ذیل می‌باشد:

- توزیع فشار با استفاده از IISPH، هموار، بدون نوسان و در محدوده بسیار قابل قبولی است.
- جدا شدن ذرات بعد از برخورد جریان به دیوار انتهایی، در لحظات اولیه 1/2 و 1/4 ثانیه، که در نتایج SPH مسأله‌ای کاملاً رایج می‌باشد، مشاهده نمی‌شود.



شکل 3 میزان پیشروی موج ناشی از شکست سد



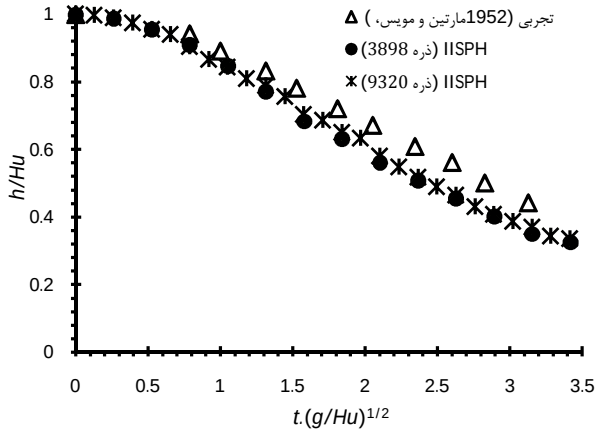
شکل 4 ارزیابی نتایج موقعیت پیشانی موج در کار حاضر

- شکست موج، باز تاب آن روی جریان و شکل سطح آزاد به خوبی مدل شده است.

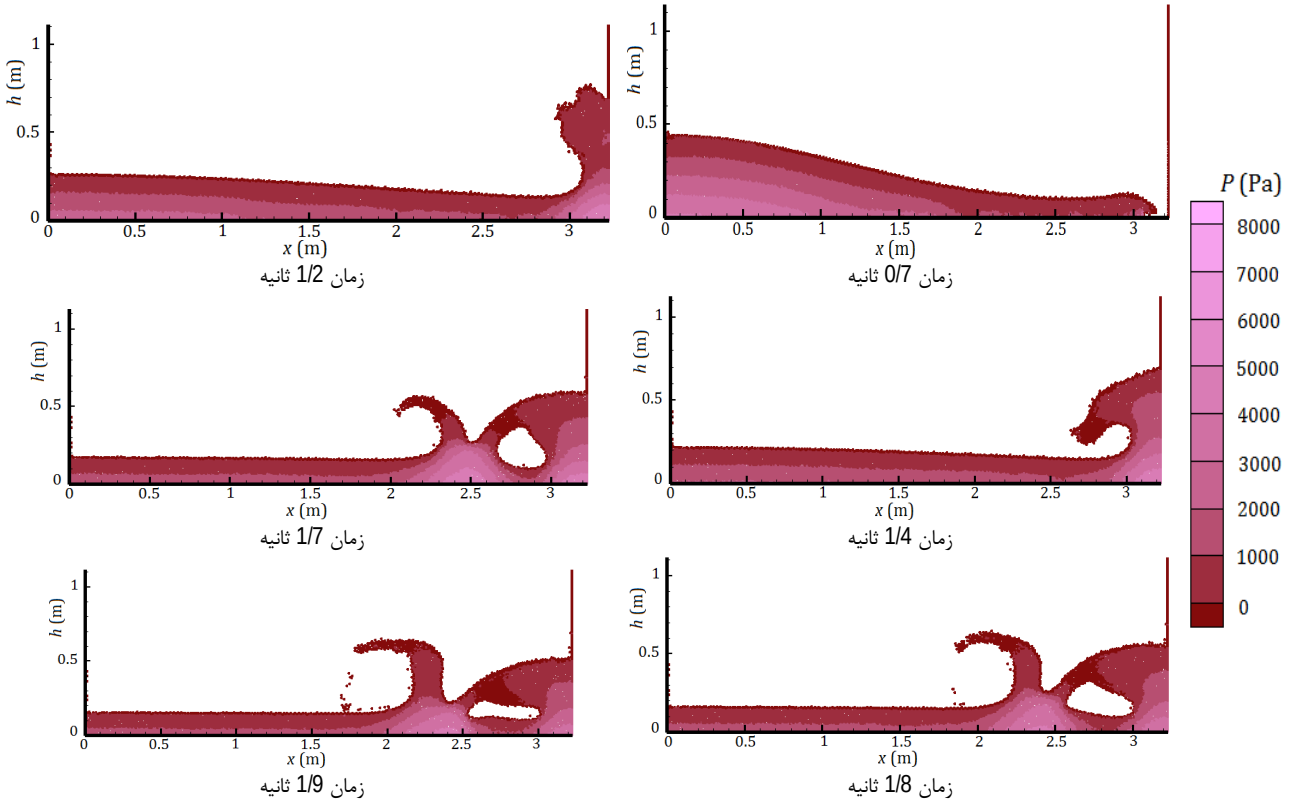
می‌توان چنین بیان نمود که روش ضمنی ارائه شده در این مقاله، نسبت به سایر روش‌ها، بهبود قابل ملاحظه‌ای را نشان می‌دهد. شایان ذکر است که نتایج فوق تنها با استفاده از 5155 ذره محاسباتی و در دو بعد حاصل شده است که نسبت به کارهای مشابه بسیار کم است. به عنوان مثال، فراری و همکاران [30] شبیه‌سازی فوق را با روش WCSPH به صورت سه بعدی و با استفاده از 2000000 ذره انجام دادند

6-2-3- عمق سطح آزاد جریان در مقاطع مختلف

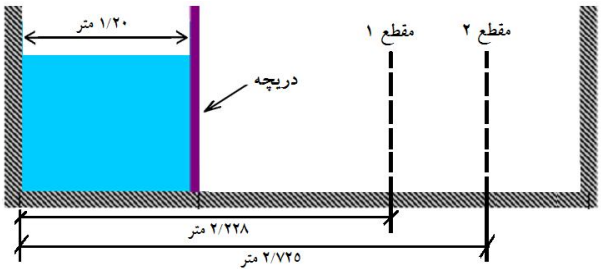
موج حاصل از شکست سد، پس از رسیدن و برخورد به دیواره پایین دست، فرایند بالاروی را آغاز کرده و سپس می‌شکند و به سمت بالادست انتشار می‌یابد. پیشروی موج تا اتلاف کامل انرژی جریان و رسیدن سیال به حالت سکون تکرار می‌شود.



شکل 5 ارزیابی نتایج میزان افت تراز آب مخزن در کار حاضر



شکل 6 شبیه سازی نیمرخ سطح آزاد، اثرات امواج ضربه ای و توزیع فشار در زمان‌های مختلف با استفاده از روش پیشنهادی IISPH



شکل 7 موقعیت مقاطع محاسبه عمق سطح آزاد جریان

در این بخش با استفاده از تکنیک توسعه داده شده در این مقاله، عمق جریان در مقاطع عرضی 1 و 2 از کانال در زمان‌های مختلف محاسبه می‌شود (شکل 7).

در شکل‌های 8 و 9، نتایج بی‌بعد شده شبیه‌سازی عددی تغییرات عمق جریان در مقاطع 1 و 2 توسط روش پیشنهادی IISPH و با استفاده از 5155 و 11187 ذره محاسباتی در زمان‌های مختلف ارائه شده است.

همچنین در شکل‌های 8 و 9، نتایج حاصل با نتایج آزمایشگاهی [28]، نتایج تحلیل عددی فراری و همکاران [30] و نتایج نرم‌افزار شبیه‌ساز فلوئنت که از روش حجم سیال استفاده می‌کند [30]، مقایسه شده است. نتایج عددی فراری و همکاران که در سه بعد و با استفاده از 2000000 ذره حاصل شده است، از جمله دقیق‌ترین نتایجی است که تا کنون معرفی شده است.

همان‌گونه که در شکل‌های 8 و 9 ملاحظه می‌شود، نتایج تعیین عمق جریان توسط مدل حاضر، نسبت به دیگر نتایج موجود از مطابقت بسیار بالایی با داده‌های آزمایشگاهی برخوردار می‌باشد؛ با وجود این که در محاسبات از تعداد بسیار کمتری ذره نسبت به روش‌های معتبر دیگر استفاده شده است.

توضیح این که در زمان‌های انتهایی در شکل 8، اختلاف زیادی بین نتایج آزمایشگاهی و نتایج عددی حاضر و دیگر نتایج عددی مشاهده می‌شود. کمتر توجیهی در این زمینه در منابع ارائه شده است. به نظر می‌رسد این اختلاف ناشی از نحوه تعیین عمق جریان در مقطع 1 باشد. چرا که در این مقطع در اواخر محاسبات، یک حباب ایجاد می‌شود. این که عمق جریان، بر اساس بالا یا پایین حباب لحاظ شود، باعث ایجاد اختلاف در نتایج شده است. علاوه بر آن، عامل آشفتگی جریان پس از برخورد به دیواره و اختلاط آب و هوا نیز تأثیرگذار می‌باشد.

6-2-4- فشار روی دیوار پایین دست

به عنوان آخرین آزمون اعتبارسنجی، مقدار فشار روی دیوار انتهایی در زمان‌های مختلف محاسبه می‌شود. از آنجا که بر روی این دیوار، گرادیان‌های شدید فشار تولید می‌شود، در آزمایشگاه تعیین فشار یک نقطه مشخص روی دیوار ممکن نمی‌باشد. بنابراین در مدل فیزیکی بخش پیشین، در محدوده 20/50- 11/5 سانتی‌متری از پایین دیوار انتهایی، فشار نقاط تعیین می‌شود و سپس متوسط‌گیری می‌شود [28].

در شکل 10، تاریخچه زمانی فشار متوسط‌گیری شده در محدوده فوق توسط روش ضمنی حاضر، ارائه شده است. نتایج حاصل با داده‌های آزمایشگاهی [28] و نتایج روش صریح مقایسه شده است. این نمودار به خوبی تفاوت موجود بین روش صریح حاضر و ضمنی پیشنهادی را نشان می‌دهد. در هر دو روش از لزجت مصنوعی با ضریب $c_a = 0.20$ استفاده شده است. همان‌گونه که انتظار می‌رفت، روش IISPH نوسانات فشاری را کاهش داده است و فشار، هموار و دقیق شبیه‌سازی شده است.

در شکل 10 برخورد موج به دیوار انتهایی پایین‌دست، یک پرش شدید در میدان فشار تولید می‌کند. پس از آن نیز، بازتابش موج، یک پرش ثانویه تولید می‌کند. ملاحظه می‌شود که مقادیر محاسبه شده پرش اولیه و به خصوص ثانویه توسط IISPH، دارای تطابق بسیار خوبی با نتایج تجربی هستند.

در نهایت بایستی بیان نمود که اعمال روش ضمنی IISPH، مستلزم اعمال هزینه محاسباتی بیشتری نسبت به روش‌های صریح رایج می‌باشد. هر مرحله سعی و خطا در روش ضمنی پیشنهادی هزینه‌ای معادل با یک گام زمانی در روش صریح دارد. به طور معمول تعداد تکرار در این روش ضمنی بین 8 تا 30 مرحله است. با این‌حال، در این تحقیق به‌علت استفاده از اندازه گام زمانی بزرگ‌تر (در حدود دو برابر) نسبت به روش صریح، در کل هزینه محاسبات مسائل حل شده حداکثر ده برابر بیشتر از روش صریح است. لیکن دست‌یابی به جواب دقیق با استفاده از کمترین تعداد ذرات نیز، باعث می‌شود که آنچنان هزینه اضافی به مدل تحمیل نشود. همچنین، روش پیشنهادی انعطاف‌پذیر است و در نشان دادن خصوصیات جریان‌های شدید و همراه با سطح آزاد، همچون جریان ناشی از شکست سد، قابلیت ویژه‌ای دارد. به علاوه، با استفاده از گام‌های زمانی دو برابر روش‌های صریح، پایداری در حل همچنان برقرار است.

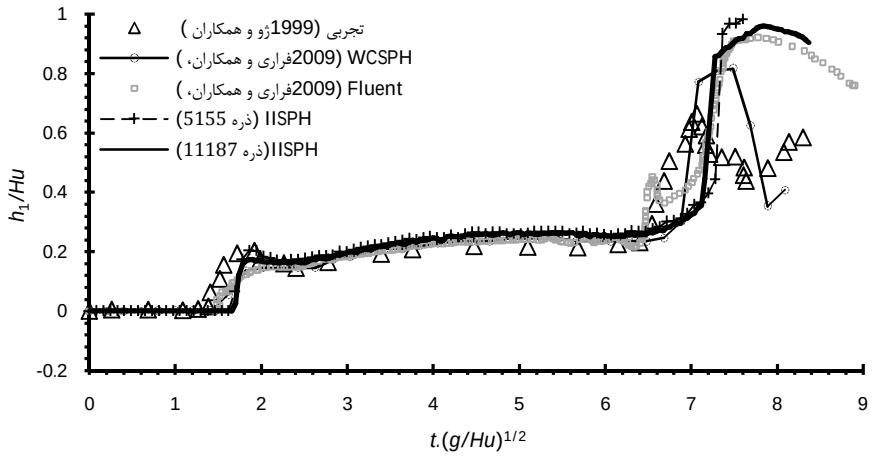
7- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله، نشان داده شده است که به علت تفاوت زمان مربوط به مقدار سرعت جدید و زمانی که عملیات مشتق گیری در مکان مربوط به آن صورت می‌گیرد، امکان ارضای شرط تراکم ناپذیری به صورت دقیق با استفاده از روش‌های صریح رایج مقدور نمی‌باشد. روش پیشنهادی ضمنی IISPH ارائه شده در این مطالعه، به منظور حل این مشکل، و توسعه حلگر تراکم ناپذیر به روش تصویر می‌باشد. جهت نیل به این مهم، مطالعات زیر صورت گرفته است:

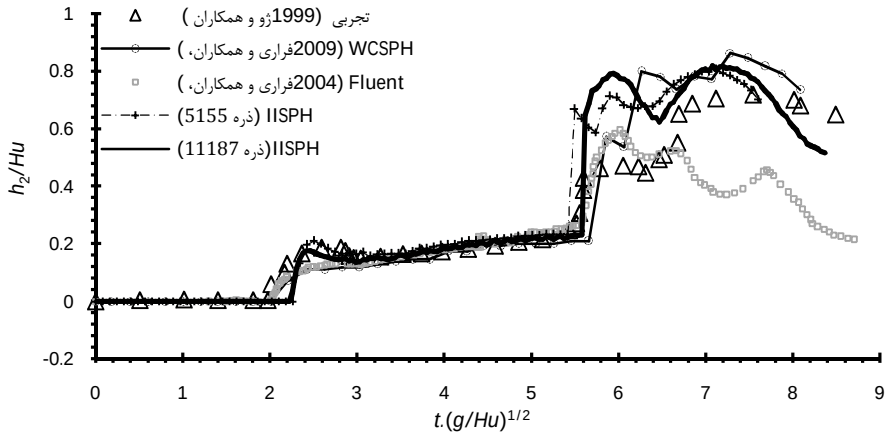
- طرح‌های جدیدی برای گسسته‌سازی مشتقات مکانی اول و دوم ارائه شده است. طرح‌های معرفی شده بر خلاف طرح های رایج در SPH، سازگار و همگرا بوده و دقت بالاتری دارد.
- با استفاده از طرح‌های جدید گسسته‌سازی، مدل‌سازی مرزهای جامد اصلاح شد. استفاده از طرح‌های سازگار و پایدار جدید، تضمین می‌کند که مقادیر مشتق در نقاط مجاور و یا روی مرز نیز با دقت کافی محاسبه شود.
- روابطی به منظور شبیه‌سازی دقیق جریان تراکم ناپذیر سطح آزاد و ردیابی سطح واسط در جریان‌های با عدد رینولدز بالا و همراه با تغییر شکل‌های بزرگ ارائه شد. در روابط پیشنهادی، به ذرات محاسباتی اضافی که سبب بروز خطا و صرف زمان طولانی برای شبیه‌سازی می‌شود، نیازی نیست.
- تکنیک جابجا کردن ذرات SPH اصلاح شد. به نحوی که منجر به توزیع همگن ذرات و افزایش دقت شد.

در ادامه، با استفاده از موارد فوق و روش تصویر توسعه داده شده، مسأله پیچیده شکست سد شامل بسترهای مرطوب و خشک شبیه‌سازی شد و سپس با نتایج صریح و دیگر نتایج عددی و تجربی موجود مقایسه شد. اهم قابلیت‌ها و مزایای روش ضمنی پیشنهادی IISPH به شرح زیر است:

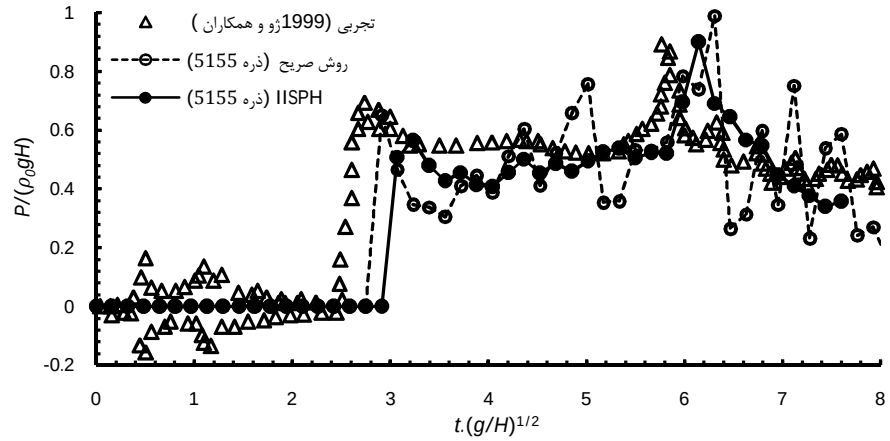
- مشکل نوسان‌های فشاری موجود در روش‌های صریح، از طریق تکرار حل معادله پواسون و به روز رسانی مکان مشتق‌گیری برطرف می‌شود. بدین ترتیب، امکان دست‌یابی به جواب‌های عاری از نوسان غیر فیزیکی فراهم می‌شود.



شکل 8 ارزیابی نتایج شبیه سازی تغییرات عمق سطح آزاد در مقطع 1



شکل 9 ارزیابی نتایج شبیه سازی تغییرات عمق سطح آزاد در مقطع 2



شکل 10 ارزیابی فشار دیوار پایین دست در زمان‌های گوناگون پس از شکست سد

- گام‌های زمانی بزرگ‌تر و بعضاً تا دو برابر روش‌های صریح، قابل اتخاذ است.
- پایداری در حل، با استفاده از ذرات محاسباتی کمتر قابل دست‌یابی است.
- انعطاف‌پذیر می‌باشد و در مدل‌سازی نیم‌رخ‌های سطح آزاد جریان نتایج مطلوبی می‌دهد. همچنین مسأله پرتاب، جدا شدن و خوشه‌بندی ذرات در نتایج مشاهده نمی‌شود.

8- مراجع

[1] G.R. Liu, M.B. Liu, Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method, Singapore: World Scientific, 2003.

[2] A. Ferrari, L. Fraccarollo, M. Dumbser, E.F. Toro, A. Armanini, Three-dimensional flow evolution after a dam break, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 663, pp. 456-477, 2010.

[3] J.J. Monaghan, Simulating free surface flows with SPH, Journal of Computational Physics, Vol. 110, pp. 399– 406, 1994.

[4] R. Fatehi, M. Manzari, A remedy for numerical oscillations in weakly compressible smoothed particle hydrodynamics, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 67, No. 9, pp. 1100-1114, 2011.

[5] A. Tayebi, B. GHadiri Dehkordi, M.T. Manzari, Control of pressure fluctuations in SPH method for simulation of flow past a cylinder, Modares Mechanical Engineering, Vol. 13, No. 7, pp. 32-44, 2013. (In Persian)

[6] S.J. Cummins, M. Rudman, An SPH projection method, Journal of Computational Physics, Vol. 152, No. 2, pp. 548-607, 1999.

[7] S. Shao, E.Y.M. Lo, Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface, Advances in Water Resources, Vol. 26, No. 7, pp. 787-800, 2003.

[8] E.S. Lee, C. Moulinec, R. Xuc, D. Violeau, D. Laurence, P. Stansby, Comparisons of weakly compressible and truly incompressible algorithms for the SPH mesh free particle method, Journal of Computational Physics, Vol. 227, No. 18, pp. 8417-8436, 2008.

[9] E.S. Lee, D. Violeau, R. Issa, S. Ploix, Application of weakly compressible and truly incompressible SPH to 3-D water collapse in waterworks, Journal of Hydraulic Research, Vol. 48, No. S1, PP. 50-60, 2010.

[10] J.P. Hughes, D.I. Graham, Comparison of incompressible and weakly-compressible SPH models for free-surface water flows, Journal of Hydraulic Research, Vol. 48, No. S1, PP. 105-117, 2010.

[11] M.S. Shadloo, A. Zainali, M. Yildiz, A. Suleman, A robust weakly compressible SPH method and its comparison with an incompressible SPH, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 89, No. 8, PP. 939-956, 2012.

[12] R. Fatehi, M.T. Manzari, Error estimation in smoothed particle hydrodynamics and a new scheme for second derivatives, Computers & Mathematics with Applications, Vol. 61, No. 2, PP. 482-498, 2011.

[13] R. Fatehi, M.T. Manzari, A consistent and fast weakly compressible Smoothed Particle Hydrodynamics with a new wall boundary condition, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 68, No. 7, PP. 905-921, 2012.

[14] E.Y.M. Lo, S. Shao, Simulation of near-shore solitary wave mechanics by an incompressible SPH method, Applied Ocean Research, Vol. 24, No. 5, PP. 275-286, 2002.

[15] J. Bonet, T.S. Lok, Variational and momentum preservation aspects of Smooth Particle Hydrodynamic formulations, Computer Methods in applied mechanics and engineering, Vol. 180, No. 1, PP. 97-115, 1999.

[16] R. Jallai Frahani, Simulation of impulsive waves by modified Incompressible SPH method, MSc Thesis, Department of Civil Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, 2007. (In Persian)

[17] R.A. Gingold, J.J. Monaghan, Smoothed particle hydrodynamics-theory and application to non-spherical stars, The astronomical journal, Vol. 181, PP. 375-389, 1977.

[18] J.J. Monaghan, Smoothed Particle Hydrodynamics, Reports on Progress in Physics, Vol. 68, PP. 1703-1759, 2005.

[19] P.W. Randles, L.D. Libersky, Smoothed Particle Hydrodynamics: some recent improvements and application, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 139, No. 1, PP. 375-408, 1996.

[20] R. Fatehi, Pore-Scale Numerical Simulation of Two-phase Flows in Porous Media, PhD Thesis, Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, 2011. (In Persian)

[21] J.H. Ferziger, M. Peric, Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer, 2002.

[22] L. Brookshaw, A method of calculating radiative heat diffusion in particle simulations, In Proceedings of the Astronomical Society of Australia, Vol. 6, PP. 207-210, 1985.

[23] M. Basa, N.J. Quinlan, M. Lastiwka, Robustness and accuracy of SPH formulations for viscous flow, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 60, PP. 1127-1148, 2009.

[24] X.Y. Hu, N.A. Adams, An incompressible multi-phase SPH method, Journal of Computational Physics, Vol. 227, No. 1, pp. 264-278, 2007.

[25] R. Xu, P. Stansby, D. Laurence, Accuracy and stability in incompressible SPH (ISPH) based on the projection method and a new approach, Journal of Computational Physics, Vol. 228, No. 18, PP. 6703-6725, 2009.

[26] I.M. Janosi, D. Jan, K.G. Szabo, T. Tel, Turbulent drag reduction in dam-break flows, Experiments in Fluids, Vol. 37, No. 2, PP. 219-229, 2004.

[27] J.C. Martin, W.J. Moyce, An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane, Philosophical Transactions of the Royal Society, Vol. 244, No. 882, PP. 312-324, 1952.

[28] Z.Q. Zhou, J.O. De Kat, B. Buchner, A nonlinear 3D approach to simulate green water dynamics on deck, in Proceedings of the Seventh International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, Nantes, France, pp. 1-15, 1999.

[29] A. Colagrossi, M. Landrini, Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics, Journal of Computational Physics, Vol. 191, No. 2, PP. 448-475, 2003.

[30] A. Ferrari, M. Dumbser, E.F. Toro, A. Armanini, A new 3D parallel SPH scheme for free surface flows, Computers & Fluids, Vol. 38, No. 6, PP. 1203-1217, 2009.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.4.1.6]