



## تحلیل اثر کارسختی بر نیروی لازم و ناحیه‌ی تغییر شکل در فرآیند کشش ورق

یوسف ملاپور<sup>1</sup>، حشمت‌الله حقیقت<sup>2\*</sup>

1- کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه رازی، کرمانشاه

2- دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه رازی، کرمانشاه

\* کرمانشاه، صندوق پستی 67149-67346، hhaghighat@razi.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 25 آذر 1394

پذیرش: 15 فروردین 1395

ارائه در سایت: 11 اردیبهشت 1395

کلید واژگان:

کشش ورق

کارسختی

ناحیه تغییر شکل

کرانه بالایی

اجزا محدود

### چکیده

در این مقاله، فرآیند کشش ورق با قالب گوه‌ای شکل، با استفاده از تابع جریان و به روش کرانه بالایی تحلیل شده است. یک مدل تغییر شکل جدید ارائه شده که در آن مرزهای برشی ورودی و خروجی، انعطاف‌پذیر می‌باشد و اثر کارسختی ورق لحاظ و شکل هندسی بهینه ناحیه تغییر شکل، بسته به شرایط فرآیند تعیین می‌شود. بر اساس تابع جریان پیشنهادی، میدان سرعت، نرخ کرنش‌ها، توان‌ها و نیروی کشش لازم محاسبه شده‌اند. در پایان نتایج تحلیل با نتایج سایر محققان و نتایج اجزا محدود مقایسه شده‌اند. همچنین اثر ضریب کارسختی بر ناحیه تغییر شکل، نیروی کشش و زاویه‌ی بهینه‌ی قالب بررسی شده است. نشان داده شد که با افزایش ضریب کارسختی، مرزهای ورودی و خروجی ناحیه‌ی تغییر شکل به سمت ناحیه‌ی ورودی قالب متمایل می‌شود و تنش کششی لازم برای انجام فرآیند کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش ضریب اصطکاک، مرزهای ورودی و خروجی به سمت ناحیه‌ی خروجی قالب متمایل می‌شوند و با افزایش درصد کاهش ضخامت، مرزها به سمت ناحیه‌ی ورودی قالب متمایل می‌شوند. نتایج نسبت به نتایج تحلیلی گذشته به میزان ده درصد بهبود یافته است.

## Analysis of the work hardening effect on required force and deformation zone in sheet drawing process

Yousef Mollapour, Heshmatollah Haghighat\*

Department of Mechanical Engineering, Razi University, Kermanshah, Iran.

\* P.O.B. 67149-67346, Kermanshah, Iran, hhaghighat@razi.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 15 December 2015  
Accepted 03 April 2015  
Available Online 30 April 2016

**Keywords:**  
Sheet Drawing  
Work hardening  
Deformation zone  
upper bound  
Finite element

### ABSTRACT

In this paper, the drawing process of the sheet metal through the wedge shaped die has been analyzed by upper bound method using stream function. First, a new deformation model has been introduced in which inlet and outlet shear boundaries are considered flexible. Then, the optimized geometry of the deformation zone has been determined through the effect of work hardening of the sheet material depending on the process conditions. According to the suggested stream function, velocity field, strain rates and power terms have been calculated. The analytical results have been compared with the results of the published analytical data and the finite element simulation results. Furthermore, the effect of work hardening exponent has been investigated on the deformation zone, drawing force and optimum die angle. It has been shown that by increasing the work hardening exponent, inlet and outlet shear boundaries of deformation zone are being inclined to the inlet zone of the die and the required drawing stress is decreased. In addition, by increasing the friction factor, inlet and outlet shear boundaries are inclined towards outlet zone of the die, and by increasing reduction in thickness, inlet and outlet shear boundaries of deformation zone are inclined to the inlet zone of the die. It is shown that the analytical results have been improved up to ten percent in comparison with the published data.

### 1- مقدمه

از بین روش‌های مختلف برای محاسبه‌ی نیروی شکل‌دهی، روش کرانه بالایی از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد. از جمله موارد مهم در تحلیل کرانه بالایی فرآیندهای شکل‌دهی، انتخاب مرزهای مناسب ناحیه تغییر شکل و نیز ارائه میدان سرعت مجازی است که علاوه بر برآورد نمودن شرط تراکم‌ناپذیری ماده و شرایط مرزی، مطابق با رفتار جریان فلز در ناحیه تغییر شکل باشد. به عبارتی میدان سرعت انتخابی روی نیروی شکل‌دهی تاثیرگذار است، بنابراین میدان سرعتی قابل قبول است که نیروی شکل‌دهی به ازای آن کمینه شود.

فرآیند کشش از جمله فرآیندهای شکل‌دهی می‌باشد که برای کاهش ضخامت ورق‌های فلزی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این فرآیند، مانند سایر فرآیندهای شکل‌دهی فلزات، آگاهی از میزان نیروی شکل‌دهی و کمینه نمودن آن دارای اهمیت زیادی است. تخمین نیروی لازم در طراحی قالب و انتخاب دستگاه با ظرفیت لازم بسیار مهم بوده و کاهش نیروی شکل‌دهی دارای مزایای متعددی از جمله کاهش انرژی مصرفی و افزایش عمر قالب می‌باشد.

Please cite this article using:

Y. Mollapour, H. Haghighat, Analysis of the work hardening effect on required force and deformation zone in sheet drawing process, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 4, pp. 345-353, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Y. Mollapour, H. Haghighat, Analysis of the work hardening effect on required force and deformation zone in sheet drawing process, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 4, pp. 345-353, 2016 (in Persian)

بالایی تحلیل و به روش اجزا محدود شبیه‌سازی کردند. ایشان مرز ورودی و خروجی ناحیه تغییر شکل را به ترتیب منحنی نمایی و دایره‌ای فرض نمودند. سپس میدان سرعت و همچنین شکل هندسی ارائه‌شده برای ناحیه تغییر شکل و خطوط جریان غیر مستقیم فلز را توجیه کردند. پس از آن بر اساس میدان سرعت ارائه شده، نیروی کشش لازم را به‌دست آوردند. در پایان، نتایج روش تحلیلی را با نتایج حاصل از حل اجزا محدود مقایسه کردند [8]. از جمله ضعف‌های تحلیل کاظمی و حقیقت این بود که ماده صلب-پلاستیک در نظر گرفته شد و در آن اثر کارسختی صرف نظر شد.

در کار حاضر، فرآیند کشش ورق با قالب گوه‌ای شکل با استفاده از تابع جریان تحلیل شده است. از جمله مزایای کار حاضر نسبت به کارهای تحلیلی گذشته این است که علاوه بر در نظر گرفتن اثر کارسختی ماده، مرزهای ورودی و خروجی به صورت انعطاف‌پذیر در نظر گرفته شده است. در نظر گرفتن مرز ورودی و خروجی انعطاف‌پذیر و اعمال کارسختی در تحلیل باعث شده است که نتایج نسبت به نتایج تحلیلی گذشته به شبیه‌سازی اجزا محدود به صورت چشم‌گیری نزدیک‌تر شوند.

## 2- فرآیند کشش ورق

شکل 1، شماتیک کلی فرآیند کشش ورق به داخل قالب گوه‌ای، نواحی تغییر شکل و پارامترهای هندسی را نشان می‌دهد. ورقی که برای این فرآیند در نظر گرفته شده است، دارای ضخامت ورودی  $t_i$  و ضخامت خروجی  $t_f$  می‌باشد. در شکل 1، سرعت ورودی  $V_i$  و سرعت خروجی  $V_f$  می‌باشد.  $\alpha$  نیم زاویه‌ی قالب و  $\gamma_{sf}$  و  $\gamma_{si}$  به ترتیب نشان‌دهنده‌ی مرز ورودی و خروجی می‌باشند. علاوه بر این، شکل به سه ناحیه تقسیم شده است. همان‌گونه که در شکل 1 واضح است، ورق پس از خروج از قالب ضخامت آن کم می‌گردد.

اولین گام در تحلیل کرانه فوقانی، پیشنهاد یک میدان مجاز سرعت می‌باشد. در این فرآیند برای ارائه میدان سرعت مجاز، دستگاه مختصات دکارتی به کار گرفته شده و مبدأ مختصات، محل برخورد محور قائم و محور افقی می‌باشد.

حل کرانه‌ی فوقانی با یافتن توان کل مورد نیاز فرآیند کشش انجام می‌پذیرد. چگونگی یافتن توان کل مورد نیاز فرآیند در فرمول بندی زیر، که بر اساس یک میدان سرعت جنبشی مجاز به‌دست‌آمده است، بیان شده است. بنابراین حدس یک میدان سرعت مناسب، نیروی کشش، جریان فلز و شکل بهینه‌ی قالب را تحت تأثیر قرار می‌دهد. همان‌طور که در شکل 1 نشان داده شده است، ماده به سه ناحیه تقسیم می‌شود که در این نواحی، میدان سرعت پیوسته می‌باشد.

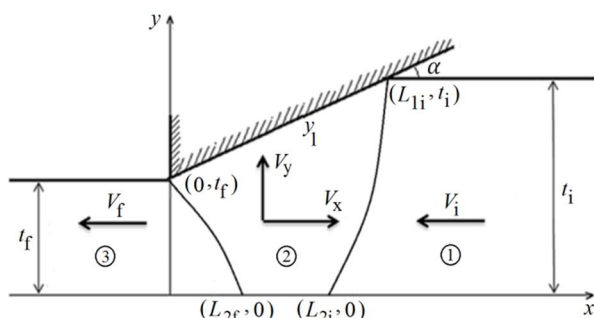


Fig. 1 Sheet drawing process through wedge-shaped die, shear boundaries and deformation zone

شکل 1 فرآیند کشش ورق با قالب گوه‌ای، مرزهای برشی و ناحیه تغییر شکل

اویترز به بررسی فرآیند کشش سیم با قالب مخروطی پرداخت. وی میدان تغییر شکل مرزهای ورودی و خروجی را کروی، مثلثی و دوزنق‌ای در نظر گرفت و بیان کرد که مناسب‌ترین مرز ورودی و خروجی ناحیه تغییر شکل، مرز کروی است. میدان سرعت وی فقط شامل مولفه‌ی شعاعی بود [1]. شیمین و اکسلی فرآیند کشش کرنش صفحه‌ای ماده در قالب دایروی با روش خطوط لغزش را تحلیل کردند و نتایج آن را با آزمایش و نتایج روش قاچی مقایسه کردند. آن‌ها یافتند که نتایج روش خطوط لغزش با نتایج آزمایش مطابقت بهتری دارد [2,1]. توکنو به آزمایش و تحلیل تغییر شکل فرآیند اکستروژن میله‌های تک‌لایه و چندلایه پرداخت. نتیجه‌ی مهم در آزمایش‌های وی این است که خطوط جریان ماده در داخل ناحیه‌ی تغییر شکل، راست و مستقیم نیستند، بلکه دارای خمیدگی هستند. ولی وی نتوانسته است این موضوع را در تحلیل خود بگنجد و خطوط را مستقیم در نظر گرفت [3]. ریبویو و همکاران به تحلیل فرآیند کشش تحت شرایط کرنش صفحه‌ای در قالب گوه‌ای به روش کرانه‌ی فوقانی پرداختند. ایده‌ی آن‌ها در این مقاله استفاده از چند بلوک صلب مثلثی با مرز خطی، برای تحلیل ناحیه‌ی تغییر شکل است. در پایان نیز به بررسی تأثیر تعداد بلوک‌ها در مقدار نیروی کشش پرداخته شد [4]. استفاده از بلوک‌های صلب در ناحیه‌ی نیروی کشش، به این صورت است که این ناحیه، توسط چند مثلث با اضلاع دلخواه پوشانده می‌شود. بنابراین مرز ورودی و خروجی ناحیه تغییر شکل نیز خطی است. تمام ذرات ماده در هر مثلث، فقط یک سرعت مشخص دارند. با به‌دست آوردن سرعت نسبی روی خطوط بین هر دو مثلث و استفاده از روابط محاسبه‌ی توان، توان کل مورد نیاز فرآیند به‌دست می‌آید. در این روش میدان سرعتی برای تمام ذرات داخل ناحیه‌ی تغییر شکل ارائه نمی‌شود و اصولاً نمی‌توان بر اساس این مدل‌سازی، خطوط جریان حرکت ماده را مدل کرد. در واقع ساده‌ترین مدلی که برای تحلیل با روش کرانه‌ی فوقانی می‌توان در نظر گرفت، این مدل است. هم‌چنین ریبویو و همکاران برای بررسی فرآیند کشش ورق و میله از تحلیل قاچی استفاده کردند و نتایج آن را با حل اجزا محدود مقایسه نمودند. نتیجه‌ی آن‌ها بود که به‌دست آوردن این است که نتایج شبیه‌سازی دقیق‌تر است ولی نتایج تحلیل قاچی در زمان کمتری به‌دست می‌آید و نیز دقت کمتری دارد [5]. ریبویو و همکاران نیز، به تحلیل کرانه‌ی فوقانی با استفاده از فقط یک بلوک مثلثی با مرز ورودی و خروجی مستقیم، در فرآیند کشش ورق از قالب گوه‌ای پرداختند. آن‌ها در این مقاله به جای ماده‌ی صلب-کاملاً پلاستیک از شیوه‌ی جدیدی برای تأثیر دادن کرنش سختی ماده، استفاده کردند و نتایج را با حالت صلب-پلاستیک کامل مقایسه کردند. نتیجه‌ی حاصل این بود که مقدار نیرو با تأثیر دادن کرنش سختی بیشتر از حالت صلب-پلاستیک کامل است اما زاویه‌ی بهینه‌ی قالب در دو حالت اختلاف ناچیزی دارد [6]. پانتقینی برای به‌دست آوردن نیروی فرآیند کشش ورق سه بعدی، حلی ارائه داد. با این تفاوت که قالب استفاده شده به گونه‌ای است که علاوه بر کاهش ضخامت ورق، عرض ورق نیز کاسته می‌شود. در واقع سطح مستطیلی ورق (عمود بر محور کشش)، پس از عبور از قالب به سطح با اضلاع کوچکتر تبدیل می‌شود. وی ناحیه‌ی تغییر شکل را به صورت بلوک‌های چهاروجهی صلب<sup>1</sup> با مرز خطی در نظر گرفت. ماده را پلاستیک کامل فرض کرده و از ضریب اصطکاک ثابت استفاده کرد. در پایان به مقایسه‌ی نتایج حل خود با شبیه‌سازی پرداخت [7]. کاظمی و حقیقت به تحلیل فرآیند کشش ورق پرداختند. آن‌ها فرآیند مذکور را به روش کرانه

<sup>1</sup> Tetrahedral

$$y_{si}(L_{2i}) = 0, y_{sf}(L_{2f}) = 0 \quad (9)$$

$$a = \frac{t_i - y_1(L_{2i})}{t_i[y_1(L_{2i})]^2} - \frac{t_f - y_1(L_{2f})}{t_f[y_1(L_{2f})]^2} / (L_{2i}^2 - L_{2f}^2) \quad (10)$$

$$b = \frac{t_i - y_1(L_{2i})}{t_i[y_1(L_{2i})]^2} - aL_{2i}^2 \quad (11)$$

## 2-2- میدان‌های سرعت

میدان سرعت در هر ناحیه، با مشتق‌گیری مستقیم از تابع جریان قابل محاسبه است.

### 2-2-1- میدان سرعت ناحیه 1 (ورودی)

این ناحیه شامل قسمتی از ماده است که هنوز وارد قالب نشده است. در این ناحیه، ماده با سرعت ثابت  $V_i$  در راستای محور قالب به طرف ورودی قالب در حرکت است. در این ناحیه، تغییر شکلی رخ نمی‌دهد و ماده همانند جسم صلب حرکت می‌کند.

چنانچه بردار سرعت محوری ماده در این ناحیه در راستای  $x$  و  $y$  تجزیه شود، میدان سرعت برابر است با:

$$V_{xi} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{Q}{t_i} \quad (12)$$

$$V_{yi} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

### 2-2-2- میدان سرعت ناحیه 2 (تغییر شکل)

این ناحیه همان طور که در شکل 1 نشان داده شده است، شامل قسمتی از ورق است که توسط نواحی  $y_{sf}$ ،  $y_{si}$ ،  $y_1$  و محور افقی محصور می‌باشد. در این ناحیه ضخامت ورق کاهش می‌یابد. برای یافتن مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت در این ناحیه لازم است از تابع جریان این ناحیه نسبت به  $x$  و  $y$  مشتق گرفته شود:

$$V_x = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = Q \left[ \frac{1}{y_1} + 2C \left( y - \frac{y_1}{2} \right) \right] \quad (14)$$

$$V_y = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = -Qy \left[ \frac{y_1'}{y_1^2} + C'(y - y_1) - Cy_1' \right] \quad (15)$$

### 2-2-3- میدان سرعت ناحیه 3 (خروجی)

این ناحیه شامل قسمتی از ماده است که در ناحیه‌ی 2 تغییر شکل یافته و از قالب خارج شده است. مرز این ناحیه سطح  $y_{sf}$  است. در این ناحیه ماده با سرعت ثابت در راستای محور قالب از قالب خارج می‌شود. در این ناحیه، تغییر شکلی رخ نمی‌دهد و ماده مانند جسم صلب تغییر مکان می‌دهد. چنانچه بردار سرعت محوری ماده در این ناحیه در راستای  $x$  و  $y$  تجزیه شود، میدان سرعت برابر است با:

$$V_{xf} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = \frac{Q}{t_f} \quad (16)$$

$$V_{yf} = -\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

### 3-2- بررسی شرط تراکم‌ناپذیری

با استفاده از روابط نرخ کرنش - سرعت:

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad \dot{\epsilon}_{yy} = \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \quad (18)$$

بنابراین

$$\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} = 0 \quad (19)$$

بر این اساس، میدان سرعت به‌دست آمده از تابع جریان ارائه شده توسط

در ناحیه‌ی 1، ماده صلب است و بخشی از ماده‌ی اولیه می‌باشد و مانند یک جسم صلب در جهت کشش حرکت می‌کند. ناحیه‌ی 2، منطقه‌ی تغییر شکل فلز می‌باشد و ناحیه‌ی 3، محصول فرآیند کشش می‌باشد که مانند ناحیه‌ی اول به‌صورت جسم صلب حرکت می‌کند و بدون تغییر شکل می‌باشد. در تحلیل فرآیند کشش به روش تابع جریان، پس از حدس توابع جریان نواحی مختلف و اعمال شرط پیوستگی سرعت و دیگر شرایط، می‌توان میدان‌های سرعت را به‌دست آورد و پس از به‌دست آوردن نرخ کرنش‌ها و توان‌ها، در نهایت به نیروی کشش دست یافت.

## 2-1- توابع جریان

### 2-1-1- تابع جریان ناحیه‌ی 1 (ورودی)

الگوی جریان در هر ناحیه به صورت توابع جریان جداگانه‌ای فرض شده است، که با نماد  $\varphi$  نمایش داده می‌شود. تابع جریان  $\varphi_1$  الگوی جریان در ناحیه (1) را بیان می‌کند که به صورت رابطه (1) فرض شده است.

$$\varphi_1 = Q \frac{y}{t_i} \quad (1)$$

که در آن  $Q$  نشان دهنده نرخ جریان حجمی در هر سطح مقطع می‌باشد.

### 2-1-2- تابع جریان ناحیه‌ی 2 (تغییر شکل)

تابع جریان  $\varphi_2$  الگوی جریان در ناحیه (2) را بیان می‌کند که به صورت رابطه (2) فرض شده است.

$$\varphi_2 = Q \left[ \frac{y}{y_1} + Cy(y - y_1) \right] \quad (2)$$

$$y_1 = t_f + \frac{t_i - t_f}{L_{11}} x \quad (3)$$

$$C = ax^2 + b \quad (4)$$

که در آن  $y_1$  تابع مرزی قالب و ورق در ناحیه (2) و  $C$  بیانگر گرادیان توزیع سرعت افقی در ناحیه‌ی تغییر شکل می‌باشد. در این مقاله به دلیل تک لایه بودن، نرخ جریان حجمی سه ناحیه موجود، برابر می‌باشد.

### 2-1-3- تابع جریان ناحیه‌ی 3 (خروجی)

تابع جریان  $\varphi_3$  الگوی جریان در ناحیه (3) را بیان می‌کند که به صورت رابطه (5) فرض شده است.

$$\varphi_3 = Q \frac{y}{t_f} \quad (5)$$

## 2-1-4- مرزهای ورودی و خروجی

در مرزهای ورودی و خروجی، تابع جریان پیوسته می‌باشد. با برابر قرار دادن تابع جریان نواحی مجاور، می‌توان تابع مرز ورودی و خروجی را به‌دست آورد. بنابراین:

$$[\varphi_1]_{y=y_{si}} = [\varphi_2]_{y=y_{si}} \quad (6)$$

بنابراین تابع مرز ورودی به صورت زیر می‌باشد:

$$y_{si} = \frac{t_i - y_1 - Cy_1^2 t_i}{y_1 t_i C} \quad (7)$$

به همین ترتیب می‌توان تابع مرز خروجی را به‌دست آورد:

$$y_{sf} = \frac{t_f - y_1 - Cy_1^2 t_f}{y_1 t_f C} \quad (8)$$

## 2-1-5- به‌دست آوردن ثوابت گرادیان توزیع سرعت افقی با استفاده از شرایط مرزی

برای مرز ورودی و خروجی با توجه به شکل 1:

معادله (2)، میدان سرعت مجاز می‌باشد.

در معادله‌ی (27)،  $S$  طول مسیر جابجایی ذره از مرز ورودی به خروجی است. به کمک میدان سرعت (15،14)، می‌توان خطوط جریان ماده را رسم کرد و جریان ماده ناحیه تغییر شکل را مانند سیالی در نظر گرفت که با میدان سرعت روابط (15،14) در حرکت است. در بیان اوپلری، ناظر ذرات را در مختصات ثابت  $(x, y)$  می‌بیند و این نقاط همراه با ماده حرکت نمی‌کنند. در هر نقطه از ناحیه تغییر شکل، سرعت ماده در دو بعد، به صورت رابطه (28) بیان می‌گردد.

$$Q = [\dot{U}_x(x, y), \dot{U}_y(x, y)] \quad (28)$$

حال اگر از نقاط ناحیه تغییر شکل، مسیر ذرات دنبال شود، به توابع  $x(t)$  و  $y(t)$  برای تعیین موقعیت ذرات به صورت تابعی از زمان نیاز می‌شود. سرعت ذره در زمان  $t$  به صورت رابطه (29) می‌باشد.

$$Q = [x'(t), y'(t)] \quad (29)$$

بنابراین با توجه به دو رابطه (28) و (29) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{U}_x(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = \dot{U}_y(x, y) \quad (30)$$

در اینجا از حل عددی و روش اوپلر در حل عددی معادلات دیفرانسیل درجه یک استفاده شده و برای پیدا کردن هر یک از مسیرهای حرکت ذره در ناحیه تغییر شکل، فرض شده است که در زمان  $t = 0$ ، ذره در نقطه  $(x_1, y_1)$  روی مرز  $\gamma_{si}$  قرار دارد (شکل 2). میدان سرعت در آن نقطه  $Q = [\dot{U}_x(x_1, y_1), \dot{U}_y(x_1, y_1)]$  است. پس از بازه زمانی خیلی کوتاه  $\Delta t$ ، ذره به نقطه  $(x_2, y_2)$  خواهد رفت. بنابراین:

$$(x_2, y_2) = (x_1 + \Delta t \dot{U}_x(x_1, y_1), y_1 + \Delta t \dot{U}_y(x_1, y_1)) \quad (31)$$

این روش تا جایی تکرار می‌شود که مسیر ذره به مرز  $\gamma_{sf}$  برسد. پس می‌توان نوشت:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n + \Delta t \dot{U}_x(x_n, y_n), y_n + \Delta t \dot{U}_y(x_n, y_n)) \quad (32)$$

با وصل کردن تمام نقاط حاصل، مسیر جابجایی ذره ( $S$ ) مشخص می‌شود. به همین ترتیب برای نقاط دیگر روی مرز  $\gamma_{si}$  این روش تکرار می‌شود تا خطوط دیگر جریان نیز مشخص شود. بنابراین پس از معلوم شدن مسیر جابجایی ذره،  $\bar{\epsilon}$  از رابطه‌ی (27) قابل محاسبه می‌باشد. پس از قرار دادن  $\bar{\epsilon}$  در رابطه‌ی (26) و جایگذاری در رابطه‌ی (23)، می‌توان توان داخلی را به دست آورد.

با توجه به شکل 1، رابطه‌ی توان داخلی در ناحیه‌ی 1 (تغییر شکل) به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$\dot{W}_1 = \int_0^{L_{1i}} \int_0^{y_1} \sigma \dot{\epsilon}_{eq} dy dx - \int_{L_{2i}}^{L_{1i}} \int_0^{y_{si}} \sigma \dot{\epsilon}_{eq} dy dx - \int_0^{L_{2f}} \int_0^{y_{sf}} \sigma \dot{\epsilon}_{eq} dy dx \quad (33)$$

#### 2-5-2- توان برشی تلف شده

رابطه‌ی کلی توان برشی در سطوح ناپیوستگی سرعت به‌طور کلی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\dot{W}_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_S \sigma |\Delta V| dS \quad (34)$$

از آنجایی که در فرآیند کشش ورق تک‌فلزی، دو سطح ناپیوستگی سرعت وجود دارد بنابراین دو مقدار توان برشی وجود دارد که مقدار آن‌ها با توجه به روابطی که در زیر بیان می‌شود، معلوم می‌گردد. با توجه به شکل 2، مقدار ناپیوستگی‌های سرعت در امتداد مرز ورودی

#### 2-4- مولفه‌های نرخ کرنش

پس از یافتن مؤلفه‌های میدان سرعت در همه‌ی نواحی ورق، مؤلفه‌های نرخ کرنش از روابط (20)، (21) و (22) قابل محاسبه می‌باشند. لازم به ذکر است که مؤلفه‌های نرخ کرنش در نواحی ورودی و خروجی صفر می‌باشند؛ بنابراین از نوشتن آن‌ها صرف نظر می‌شود.

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial V_x}{\partial x} = Q \left[ \frac{y_1'}{y_1^2} + 2C' \left( y - \frac{y_1}{2} \right) - C y_1' \right] \quad (20)$$

$$\dot{\epsilon}_{yy} = \frac{\partial V_y}{\partial y} = -Q \left[ \frac{y_1'}{y_1^2} + 2C' \left( y - \frac{y_1}{2} \right) - C y_1' \right] \quad (21)$$

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \\ \dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2} Q \left[ 2C - \frac{2y y_1'^2}{y_1^3} - C'' y (y - y_1) + 2C' y y_1' \right] \quad (22)$$

#### 2-5-5- محاسبه‌ی مؤلفه‌های توان

توان کل مورد نیاز برای تغییر شکل فرایند را می‌توان به سه دسته تقسیم نمود:

1- توان داخلی تغییر شکل

2- توان برشی تلف شده در سطوح ناپیوستگی سرعت

3- توان تلف شده به دلیل اصطکاک فلز با قالب در طول سطح تماس

بنابراین، با توجه به شکل 1، توان کل برابر با حاصل جمع توان داخلی ناحیه‌ی تغییر شکل، توان تلف شده در مرزهای ناپیوستگی سرعت  $\gamma_{sf}$  و  $\gamma_{si}$  و توان اصطکاکی تلف شده در سطح  $\gamma_1$  می‌باشد.

#### 2-5-1- توان داخلی تغییر شکل

رابطه‌ی کلی توان داخلی در نواحی تغییر شکل به صورت زیر می‌باشد:

$$\dot{W}_i = \int_S \sigma \dot{\epsilon}_{eq} dv \quad (23)$$

مقدار توان داخلی تغییر شکل در نواحی اول و سوم برابر با صفر است؛ زیرا مؤلفه‌های نرخ کرنش در این نواحی صفر می‌باشند و ماده در این نواحی به صورت صلب حرکت می‌کند، لذا تغییر شکلی در آن به وجود نمی‌آید. توان داخلی در ناحیه‌ی دوم با استفاده از رابطه‌ی (23) به دست می‌آید.  $dv$  المان حجم در منطقه‌ی تغییر شکل می‌باشد و با توجه به کرنش صفحه‌ای بودن فرآیند ( $dz = 1$ ) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$dv = dx dy \quad (24)$$

رابطه نرخ کرنش موثر در ناحیه‌ی پلاستیک به صورت زیر می‌باشد:

$$\dot{\epsilon}_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_{xx}^2 + \dot{\epsilon}_{yy}^2 + 2\dot{\epsilon}_{xy}^2)} \quad (25)$$

در رابطه‌ی (23)، تنش شارش ماده‌ی کارسخت می‌باشد و به صورت رابطه‌ی (26) بیان می‌گردد.

$$\sigma = A(\bar{\epsilon})^n \text{MPa} \quad (26)$$

که در آن  $A$  و  $n$  به ترتیب ضریب استحکام و ضریب کارسختی می‌باشند و برای مواد مختلف از آزمون کشش بدست می‌آیند.  $\bar{\epsilon}$  کرنش موثر یکنواخت در امتداد خط جریان می‌باشد و از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\bar{\epsilon} = \int_S d\epsilon_{eq} = \int_S \frac{d\epsilon_{eq}}{dt} dt dS = \int_S \frac{\dot{\epsilon}_{eq}}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} dS \quad (27)$$

$$\varepsilon_{sf} = \frac{\gamma_{sf}}{\sqrt{3}} \quad (44)$$

که در آن  $\gamma_{sf}$  کرنش برشی مهندسی روی مرز خروجی می‌باشد و طبق رابطه‌ی (45) از نسبت اختلاف سرعت مماسی روی مرز خروجی به سرعت در جهت خط جریان ورودی به مرز خروجی به‌دست می‌آید.

$$\gamma_{sf} = \frac{|\Delta V_f|}{|U_f|} = \frac{|[V_f - V_x(x, y_{sf})]\cos\theta_f - V_y(x, y_{sf})\sin\theta_f|}{\sqrt{[V_f - V_x(x, y_{sf})]^2 + V_y^2(x, y_{sf})}} \quad (45)$$

پس از جایگذاری رابطه (45) در رابطه تنش-کرنش،  $\sigma$  به‌دست می‌آید. با جایگذاری روابط (41)، (43) و رابطه‌ی تنش بر حسب کرنش در رابطه‌ی (34)، توان برشی تلف شده در امتداد مرز  $\gamma_{sf}$  به‌دست می‌آید:

$$\dot{W}_{Sf} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{y_{sf}} \sigma |\Delta V_f| dS_f \quad (46)$$

بنابراین توان برشی کل به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{W}_S = \dot{W}_{Si} + \dot{W}_{Sf} \quad (47)$$

### 2-5-3- توان اصطکاکی تلف شده

به‌طور کلی توان اصطکاکی تلف شده روی مرز اصطکاکی از رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$\dot{W}_f = \frac{m}{\sqrt{3}} \int_{y_1} \sigma |\Delta V| dS \quad (48)$$

که در آن  $m$  ثابت اصطکاک برشی می‌باشد. برای یافتن توان اصطکاکی که در طول تماس ورق با قالب گوه‌ای از دست می‌رود، مقدار ناپیوستگی سرعت به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$|\Delta V_{y_1}| = |-V_x(x, y_1)\cos\alpha + V_y(x, y_1)\sin\alpha| \quad (49)$$

علاوه بر این  $dS$  مربوط به سطح اصطکاکی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$dS_{y_1} = \left( \sqrt{1 + \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2} \right) dx = \sqrt{1 + \left(\frac{t_i - t_f}{L_{1i}}\right)^2} dx \quad (50)$$

$$\bar{\varepsilon} = \int_{y_1} d\varepsilon_{eq} = \int_0^{L_{1i}} \frac{d\varepsilon_{eq}}{dt} \frac{dt}{dl} dl = \int_0^{L_{1i}} \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}(x, y_1)}{\sqrt{V_x^2(x, y_1) + V_y^2(x, y_1)} \cos\alpha} dx \quad (51)$$

پس از جایگذاری رابطه‌ی (51) در رابطه‌ی (26)،  $\sigma$  به‌دست می‌آید. بنابراین با جایگذاری روابط (49)، (50) و (51) در رابطه‌ی (48)، توان اصطکاکی در طول تماس ورق با قالب به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\dot{W}_f = \frac{m}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{t_i - t_f}{L_{1i}}\right)^2} \int_0^{L_{1i}} \sigma |-V_x(x, y_1)\cos\alpha + V_y(x, y_1)\sin\alpha| dx \quad (52)$$

### 2-6- محاسبه‌ی نیروی شکل‌دهی

بر اساس روش کرانه‌ی بالایی، توان کلی تغییرشکل برابر با حاصل جمع تمام توان‌های مصرفی می‌باشد و از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$J^* = \dot{W}_i + \dot{W}_S + \dot{W}_f \quad (53)$$

$F_D$  نیروی کشش مورد نیاز برای فرآیند کشش ورق تک فلزی می‌باشد. بنابراین نیرو و تنش کششی مورد نیاز برای انجام فرآیند را می‌توان به ترتیب از روابط (54) و (55) به‌دست آورد:

$$F_D = \frac{J^*}{V_f} \quad (54)$$

$$\sigma_D = \frac{F_D}{t_f} \quad (55)$$

(سطح  $\gamma_{si}$ ) به صورت رابطه‌ی (35) مشخص می‌شود:

$$|\Delta V_i| = |[V_i - V_x(x, y_{si})]\cos\theta_i - V_y(x, y_{si})\sin\theta_i| \quad (35)$$

$$\theta_i = \tan^{-1}\left(\frac{dy_{si}}{dx}\right) \quad (36)$$

هم‌چنین المان سطح ورودی به صورت معادله‌ی (37) بیان می‌شود:

$$dS_i = \left( \sqrt{1 + \left(\frac{dy_{si}}{dx}\right)^2} \right) dx \quad (37)$$

و کرنش معادل مرز ورودی از رابطه‌ی (38) محاسبه می‌شود.

$$\varepsilon_{si} = \frac{\gamma_{si}}{\sqrt{3}} \quad (38)$$

که در آن  $\gamma_{si}$  کرنش برشی مهندسی روی مرز ورودی می‌باشد و طبق رابطه‌ی (39) از نسبت اختلاف سرعت مماسی روی مرز ورودی به سرعت در جهت خط جریان خروجی از مرز ورودی به‌دست می‌آید.

$$\gamma_{si} = \frac{|\Delta V_i|}{|U_i|} = \frac{|[V_i - V_x(x, y_{si})]\cos\theta_i - V_y(x, y_{si})\sin\theta_i|}{\sqrt{[V_i - V_x(x, y_{si})]^2 + V_y^2(x, y_{si})}} \quad (39)$$

پس از جایگذاری رابطه (39) در رابطه تنش-کرنش،  $\sigma$  به‌دست می‌آید. با جایگذاری روابط (35)، (37) و رابطه‌ی تنش بر حسب کرنش در رابطه‌ی (34)، توان برشی تلف شده در امتداد مرز  $\gamma_{si}$  به‌دست می‌آید.

$$\dot{W}_{Si} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{y_{si}} \sigma |\Delta V_i| dS_i \quad (40)$$

با توجه به شکل 2، مقدار ناپیوستگی سرعت در امتداد مرز خروجی (سطح  $\gamma_{sf}$ ) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$|\Delta V_f| = |[V_f - V_x(x, y_{sf})]\cos\theta_f + V_y(x, y_{sf})\sin\theta_f| \quad (41)$$

$$\theta_f = \tan^{-1}\left(\frac{dy_{sf}}{dx}\right) \quad (42)$$

هم‌چنین المان سطح خروجی به صورت معادله‌ی (43) بیان می‌شود:

$$dS_f = \left( \sqrt{1 + \left(\frac{dy_{sf}}{dx}\right)^2} \right) dx \quad (43)$$

و کرنش معادل مرز خروجی از رابطه‌ی (44) محاسبه می‌شود.

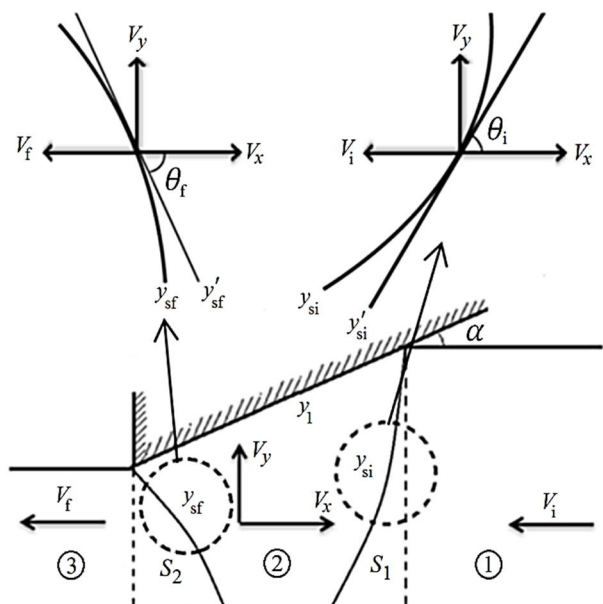


Fig. 2 Diagram showing entry and exit boundary and velocity components through them

شکل 2 نمایش مرز ورودی و خروجی و مولفه‌های سرعت گذرنده از آنها

همان گونه که از روابط به‌دست آمده در قسمت 2 مقاله حاضر مشخص می‌باشد، تنش کششی لازم برای یک هندسه‌ی اولیه و نهایی ورق، تابعی از ثابت اصطکاک و نیم‌زاویه‌ی قالب می‌باشد. بنابراین برای یک شرایط داده شده‌ی فرآیند کشش، می‌توان منحنی تغییرات تنش کششی بر حسب نیم‌زاویه قالب را ترسیم نمود.

در جدول 1، مقادیر بهینه نیروی کشش،  $L_{2f}$  و  $L_{2i}$  (حل حاضر)، نتایج حل مربوط به اویترز [11]، حل کاظمی و حقیقت [8] در شرایط مشابه و حل اجزا محدود مشاهده خواهد شد. با توجه به جدول 1 مشخص است که نیروهای محاسبه شده از حل تحلیلی کار حاضر، نتایج بهتر و نزدیک‌تری به حل اجزا محدود دارند.

در شکل 3 مرزهای ناحیه تغییر شکل در حل کرانه بالایی کار حاضر، حل کاظمی و حقیقت و حل اجزا محدود برای حالت بهینه موجود در جدول 1 با هم مقایسه شده‌اند. مرز ورودی و خروجی ناحیه‌ی تغییر شکل حل کاظمی و حقیقت به ترتیب سطح منحنی نمایی و سطح استوانه‌ای فرض شد. حل کرانه بالایی کار حاضر با دقت بهتری نسبت به حل کاظمی و حقیقت توانسته است مرزهای ناحیه تغییر شکل در حل اجزا محدود را پیش‌بینی و مدل کند. دلیل اینکه مرزهای حل حاضر نسبت به حل کاظمی و حقیقت به اجزا محدود نزدیک‌تر شده است، اعمال کردن کارسختی و در نظر گرفتن مرزهای انعطاف‌پذیر در تحلیل می‌باشد.

قبل از ورود ماده به داخل ناحیه‌ی تغییر شکل سرعت آن کم می‌باشد و درون آن سرعت بیشتر می‌شود به طوری که بعد از خروج از ناحیه‌ی تغییر شکل سرعت ماکزیمم می‌شود. به عبارتی با کاهش ضخامت سرعت افزایش

**جدول 1** مقایسه‌ی کرانه بالایی کار حاضر، حل اویترز [11]، کاظمی و حقیقت [8] و اجزا محدود به ازای کاهش ضخامت مختلف

Table 1 Comparison of present solution, Avitzur [11], Kazemi and haghightat [8], FEM by considering different reductions				
درصد کاهش ضخامت	پارامترهای بهینه محاسبه شده	حل اویترز [11]	حل کاظمی و حقیقت [8]	حل حاضر
40	$F(N)$	1502.9	1501.4	1385.4
	$\alpha$ (deg)	16	16	16.4
	$L_{2i}$ (mm)	-	-	10.34
30	$L_{2f}$ (mm)	-	-	1.45
	$F(N)$	1175.2	1172.9	1092.7
	$\alpha$ (deg)	13	14	14.2
20	$L_{2i}$ (mm)	-	-	8.85
	$L_{2f}$ (mm)	-	-	1.18
	$F(N)$	806.3	800.6	745.9
10	$\alpha$ (deg)	10	12	12.2
	$L_{2i}$ (mm)	-	-	7.12
	$L_{2f}$ (mm)	-	-	0.75
میانگین درصد اختلاف با حل اجزا محدود	$F(N)$	412.6	389	360.5
	$\alpha$ (deg)	7	10	11.1
	$L_{2f}$ (mm)	-	-	4.75
	$L_{2i}$ (mm)	-	-	0.52
		11.07	9.54	2.55

معادلات بالا نشان می‌دهند که نیرو و تنش کششی مورد نیاز برای فرآیند، تابعی از پارامترهایی همچون ضخامت اولیه و نهایی ورق، ثابت اصطکاک و نیم‌زاویه‌ی قالب می‌باشد.

### 3- شبیه‌سازی اجزا محدود

در این مقاله، از شبیه‌سازی اجزا محدود در نرم‌افزار دیفرم<sup>1</sup> برای مقایسه و اعتباردهی به نتایج تحلیلی استفاده شده است. قالب صلب و ورق شکل‌پذیر در بخش ایجاد قطعه، به صورت دو بعدی مدل شده‌اند. به دلیل تقارن هندسه، نصف فرآیند مدل شده است. طول ورق 60 میلی‌متر، ضخامت اولیه‌ی آن 10 میلی‌متر می‌باشد. ضخامت نهایی ورق با توجه به میزان کاهش ضخامت‌های مختلف محاسبه و وارد شده است و فرآیند به ازای زوایای مختلف قالب انجام شده است. برای اینکه تحلیل کرنش صفحه‌ای باشد، گزینه‌ی کرنش صفحه‌ای<sup>2</sup> در قسمت نوع هندسه<sup>3</sup> انتخاب شده است. از قسمت نوع فرآیند<sup>4</sup> گزینه‌ی شکل‌دهی سرد<sup>5</sup> انتخاب شده است. همچنین در بخش تعیین ماده، از قسمت کتابخانه<sup>6</sup> نرم‌افزار، جنس آلومینیوم 1100 سرد به ورق اختصاص داده شده است [9].

مقدار ضریب اصطکاک در فرآیندهای شکل‌دهی سرد، 0.05 تا 0.15 فرض می‌شود [10]، که در این مقاله با توجه به اینکه میزان اصطکاک بین ورق و قالب ناچیز نیست، این مقدار، 0.15 در نظر گرفته شده است.

در بخش شرایط مرزی<sup>7</sup>، مقدار سرعت کشش ورق  $(V_f)$ ، 1 میلی‌متر بر ثانیه اعمال شده است. با توجه به اینکه نصف ورق مدل شده است، شرط مرزی تقارن محوری نیز اعمال شده است تا جابجایی قسمت زیرین (خط تقارن) ورق به سمت پایین محدود شود و فقط جابجایی افقی صورت گیرد. برای شبکه‌بندی ورق از 1200 المان چهار گره‌ای استفاده شده است و اندازه شبکه‌بندی، با امتحان کردن چند اندازه مختلف و همگرایی نتایج، 0.5 میلی‌متر در نظر گرفته شده است. به صورتی که ریزتر شدن بیشتر شبکه‌ها، تاثیر چندانی در نتایج نداشته است. شبیه‌سازی فرآیند به ازای زوایای مختلف انجام شده است.

### 4- نتایج و بحث

برای تحلیل کشش ورق در حالت کرنش صفحه‌ای، برنامه کامپیوتری در نرم‌افزار متلب<sup>8</sup> نوشته شده است که امکان انجام تمام مراحل به صورت پارامتریک را فراهم می‌سازد. اطلاعات ورودی شامل ضخامت اولیه و نهایی ورق، ثابت اصطکاک، جنس ماده و مشخصات هندسی قالب به برنامه‌ی کامپیوتری نوشته شده در محیط نرم‌افزار متلب داده می‌شود، پس از محاسبه‌ی توابع جریان، برنامه به محاسبه‌ی میدان سرعت در هر ناحیه می‌پردازد. سپس تانسور نرخ کرنش در هر نقطه برای ناحیه‌ی تغییر شکل محاسبه می‌شود. در ادامه توان داخلی، برشی و اصطکاک و سپس توان کل خارجی محاسبه شده و نهایتاً نیرو و تنش کششی به‌دست می‌آید. برنامه‌ی کامپیوتری نوشته شده برای تحلیل این قابلیت را دارد که محاسبات برای گستره‌ی وسیعی از داده‌های ورودی را انجام و تاثیر هر یک از پارامترها را بر نیرو و تنش شکل‌دهی نشان دهد.

<sup>1</sup>DEFORM

<sup>2</sup>Plane Strain

<sup>3</sup>Geometry Type

<sup>4</sup>Process Type

<sup>5</sup>Cold Forming

<sup>6</sup>Library

<sup>7</sup>Boundary Conditions

<sup>8</sup>MATLAB

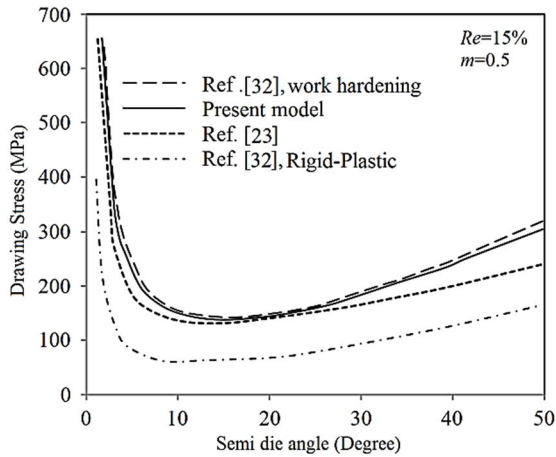


Fig. 5 Comparison of present solution, Kazemi and haghightat [8] and Rubio solutions [6] for  $m=0.5$  and  $Re=15\%$

شکل 5 مقایسه‌ی کار حاضر، حل کاظمی و حقیقت [8] و حل‌های روبیو و همکاران [6] به ازای ثابت اصطکاک 0.5 و کاهش ضخامت 15%

سرعت نقاط و پیچیده بودن محاسبات، کارسختی اعمال شده است و نه تنها نتایج نسبت به حل کاظمی و حقیقت به نتایج کارسختی روبیو و همکاران نزدیک‌تر شده است، بلکه تا حدود بسیار زیادی با نتایج اجزا محدود تطابق دارد. در ادامه به تأثیر پارامترهای مختلف بر روی حالت بهینه پرداخته خواهد شد.

در شکل 6 تغییرات تنش کششی بر حسب نیم‌زاویه‌ی قالب به ازای ثابت اصطکاک برشی مختلف نشان داده شده است. با افزایش مقدار ثابت اصطکاک برشی، مقدار بهینه نیم‌زاویه‌ی قالب افزایش می‌یابد. همچنین در شکل 6 نتایج کار حاضر با کار کاظمی و حقیقت و اجزا محدود مقایسه شده است. مشاهده می‌شود نتایج کار حاضر نسبت به حل کاظمی و حقیقت به اجزا محدود نزدیک‌ترند.

در نرم‌افزار اجزا محدود دیفرم تنش موثر، با تنش کششی برابر می‌باشد. در شکل 7 تانسور تنش موثر (کششی) به ازای کاهش ضخامت 30 درصد، نیم‌زاویه‌ی قالب 15 درجه و ثابت اصطکاک 0.3 نمایش داده شده است.

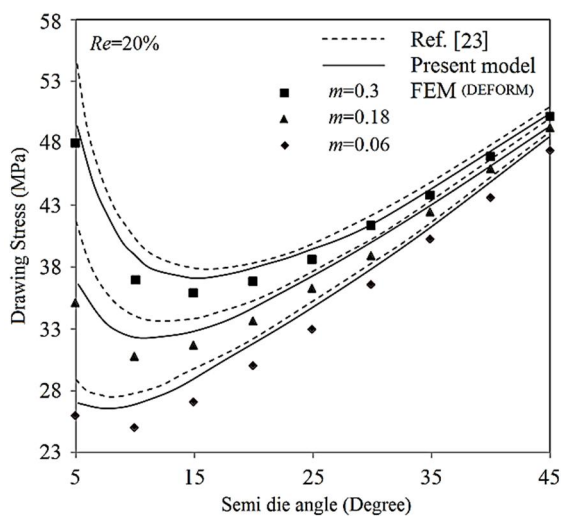


Fig. 6 Comparison of present solution, Kazemi and haghightat solution [8] and FEM result for  $Re=20\%$  and effect of friction factor on optimum semi die angle

شکل 6 تأثیر ثابت اصطکاک در نیم‌زاویه‌ی بهینه قالب و مقایسه‌ی کار حاضر، حل کاظمی و حقیقت [8] و نتایج اجزا محدود به ازای کاهش ضخامت 15%

می‌یابد این تغییر سرعت با قانون پیوستگی توجیه می‌شود. در شکل 4 سرعت حرکت ماده روی مرز قالب در کار حاضر و اجزا محدود به ازای درصد کاهش ضخامت مختلف مقایسه شده است. در شکل 3 پارامتر  $x'$  مشخص می‌باشد. پارامترهای  $S'$  و  $V$  موجود در شکل 4، به ترتیب طول مرز قالب و سرعت حرکت ماده روی آن می‌باشند.

در شکل 5، کار حاضر با حل کرانه بالایی روبیو و همکاران [6] و کاظمی و حقیقت مقایسه شده است. روبیو و همکاران در حل خود، یکبار از فرض صلب-پلاستیک کامل و بار دیگر توسط مدلی برای تأثیر دادن کارسختی، استفاده کردند و تحلیل را انجام دادند. ایشان ناحیه‌ی تغییرشکل را توسط یک مثلث صلب با مرز مستقیم مدل کردند. از شکل 5 مشخص است که نتایج حل روبیو و همکاران با فرض صلب-پلاستیک کامل، با حل حاضر فاصله دارد. در حل روبیو و همکاران، کل ناحیه تغییرشکل یکپارچه و به صورت بلوک صلب در نظر گرفته شد، بنابراین ناحیه فقط دارای یک سرعت ثابت می‌باشد. به همین دلیل به راحتی توانست کارسختی را در روابط خود تأثیر دهد، چون تعداد انتگرال‌ها برای محاسبه‌ی توان کم بود.

کاظمی و حقیقت به دلیل متفاوت بودن سرعت نقاط نتوانستند کارسختی را در تحلیل خود لحاظ کنند اما نتایج آن‌ها تا حدودی به حل کارسختی روبیو و همکاران نزدیک بود. در کار حاضر با وجود یکسان نبودن

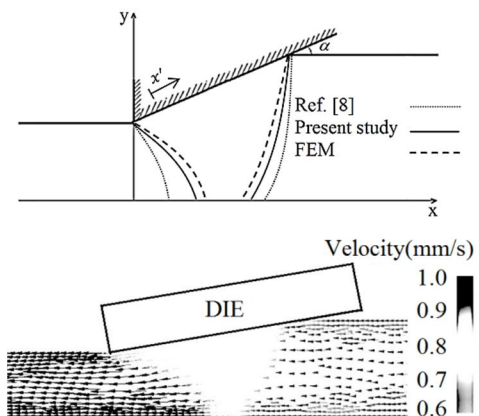


Fig. 3 Schematic of sheet after deformation and comparison of deformation zone boundaries in present solution and FEM

شکل 3 نمایش ورق بعد از تغییر شکل و مقایسه‌ی مرزهای ناحیه‌ی تغییر شکل حل حاضر و حل اجزا محدود

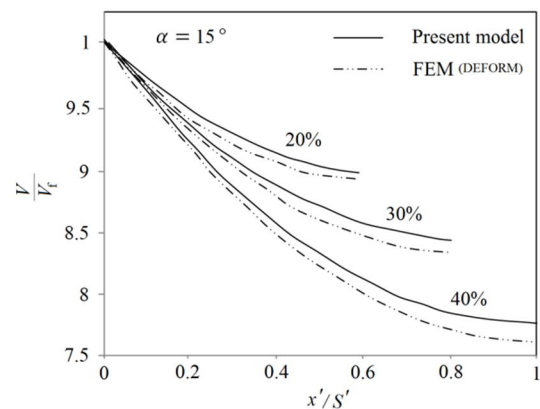


Fig. 4 Comparison of materials velocity on die boundary in this solution and FEM for different reduction

شکل 4 مقایسه‌ی سرعت ماده روی مرز قالب در کار حاضر و اجزا محدود به ازای درصد کاهش ضخامت مختلف

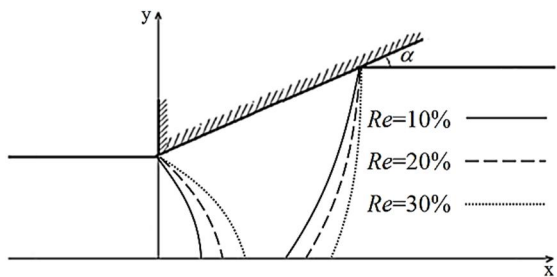


Fig. 10 Effect of reduction on optimum deformation zone  
شکل 10 اثر کاهش ضخامت بر ناحیه بهینه‌ی تغییر شکل

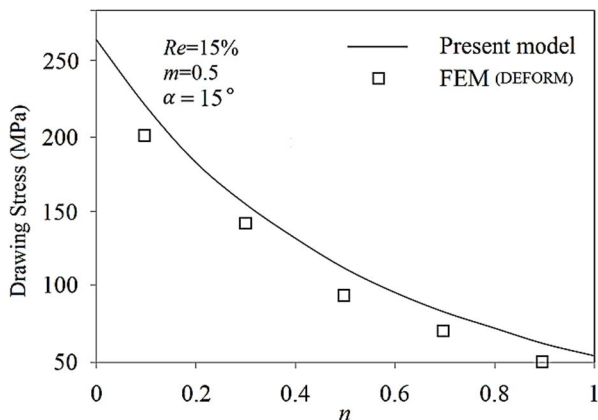


Fig. 11 Effect of change of work hardening exponent on required drawing stress  
شکل 11 اثر تغییر توان کارسختی بر تنش کششی لازم

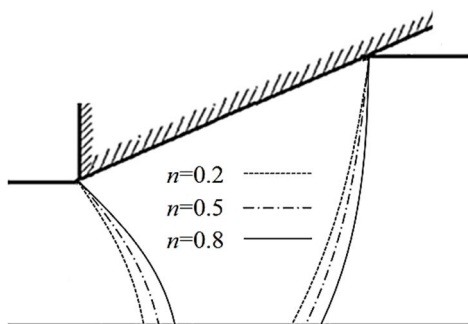


Fig. 12 Effect of change of work hardening exponent on optimum deformation zone  
شکل 12 اثر تغییر ضریب کارسختی بر ناحیه بهینه تغییر شکل

### 5- نتیجه گیری

در این مقاله، فرآیند کشش ورق با قالب گوه‌ای شکل با استفاده از تابع جریان و روش کرانه‌ی فوقانی مورد تحلیل قرار گرفت. با در نظر گرفتن یک مدل تغییر شکل جدید، میدان سرعت ناحیه‌ی تغییر شکل به دست آورده شد. نتایج به دست آمده از این مقاله به شرح زیر می‌باشد:

1- با افزایش ضریب اصطکاک، مرزهای ورودی و خروجی به سمت ناحیه‌ی خروجی قالب متمایل می‌شوند. همچنین با افزایش درصد کاهش ضخامت، مرزها به سمت ناحیه‌ی ورودی قالب متمایل می‌شوند.

2- با افزایش توان کارسختی، مرزهای ورودی و خروجی ناحیه‌ی تغییر شکل به سمت ناحیه‌ی ورودی قالب متمایل می‌شوند و تنش کششی لازم برای انجام فرآیند کاهش می‌یابد.

در شکل 8 تغییرات تنش کششی بر حسب نیم زاویه قالب به ازای تغییر درصد کاهش ضخامت مختلف نشان داده شده است. با توجه به شکل مشخص است که با افزایش مقدار درصد کاهش ضخامت، تنش کششی و مقدار بهینه نیم زاویه قالب افزایش می‌یابد.

در شکل‌های 9 و 10 اثر ثابت اصطکاک و کاهش ضخامت بر ناحیه‌ی بهینه تغییر شکل نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش ضریب اصطکاک، مرزهای ورودی و خروجی به سمت ناحیه‌ی خروجی قالب متمایل می‌شوند. همچنین با افزایش درصد کاهش ضخامت، مرزها به سمت ناحیه‌ی ورودی قالب متمایل می‌شوند. در شکل 11 اثر ضریب کارسختی بر تنش کششی لازم برای انجام فرآیند نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش توان کارسختی، تنش کششی لازم برای انجام فرآیند نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش توان کارسختی، تنش کششی لازم برای انجام فرآیند نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش توان کارسختی، تنش کششی لازم برای انجام فرآیند نشان داده شده است.

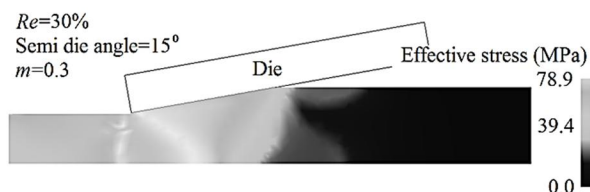


Fig. 7 Tensor of drawing stress in DEFORM software  
شکل 7 تنش کششی در محیط نرم‌افزار دیفرم

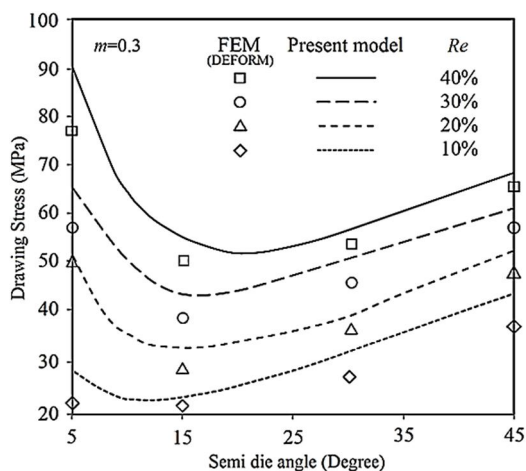


Fig. 8 Comparison of present solution and FEM result for  $m=0.3$  and effect of reduction in area on optimum semi die angle  
شکل 8 مقایسه‌ی کار حاضر و نتایج اجزا محدود به ازای ثابت اصطکاک 0.3 و تاثیر درصد کاهش ضخامت در نیم‌زاویه‌ی بهینه قالب

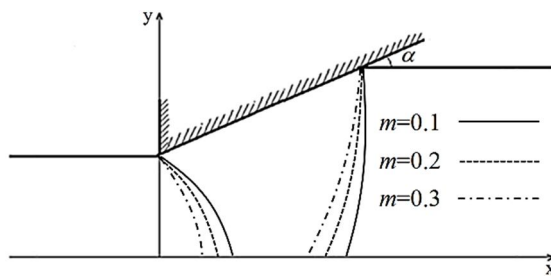


Fig. 9 Effect of friction factor on optimum deformation zone  
شکل 9 اثر ثابت اصطکاک بر ناحیه بهینه‌ی تغییر شکل



تنش شارش ماده‌ی کارسخت	$\sigma$	3- با افزایش درصد کاهش ضخامت و هم‌چنین افزایش ثابت اصطکاک، مقدار نیروی شکل‌دهی لازم و نیم زاویه بهینه قالب افزایش می‌یابد.
کرنش مؤثر یکنواخت در امتداد خط جریان	$\bar{\epsilon}$	4- نیروی شکل‌دهی و نیم زاویه بهینه به‌دست آمده از حل حاضر، نتایج نزدیک‌تری به شبیه‌سازی اجزا محدود نسبت به مرجع [8] دارد.
تابع جریان فلز	$\phi$	5- نتایج نسبت به نتایج تحلیلی گذشته به میزان ده درصد بهبود یافته است.
مشتق ( ) نسبت به $x$	( )'	
<b>زیر نویس‌ها</b>		
بعد از کشش (در خروج از قالب)	f	
قبل از کشش (در ورود به قالب)	i	

**6- فهرست علائم**

ضریب استحکام	A
تابع گرادیان توزیع سرعت افقی	C
توان کلی تغییرشکل	$J^*$
ثابت اصطکاک بین قالب و فلز	m
ضریب کارسختی	n
دبی حجمی در هر سطح مقطع	Q
درصد کاهش ضخامت	Re
ضخامت فلز در ورودی و خروجی قالب	$t_i - t_f$
سرعت فلز در ورودی و خروجی قالب	$V_i, V_f$
مولفه سرعت افقی و عمودی	$V_x, V_y$
اختلاف سرعت مماسی در سطوح ناپوستگی سرعت	$\Delta v_f - \Delta v_i$
توان اصطکاکی تلف شده	$\dot{W}_f$
توان داخلی تغییرشکل	$\dot{W}_i$
توان برشی تلف شده	$\dot{W}_s$
تابع مرزی در امتداد سطح قالب	$\gamma_1$
تابع مرزی در امتداد مرزهای نواحی تغییرشکل	$\gamma_{sf} - \gamma_{si}$

**علائم یونانی**

نیم زاویه قالب	$\alpha$
کرنش برشی مهندسی	$\gamma$
نرخ کرنش ماده	$\dot{\epsilon}$

**7- مراجع**

- [1] B. Avitzur, *Handbook of Metal-Forming Processes* New York, Wiley, pp. 100-115, 1983.
- [2] E. W. Shimmin, P. L. B. Oxley, Plane strain drawing of strain hardening Material through circular dies, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 26, No. 3, pp. 201-216, 1984.
- [3] H. Tokuno, Analysis of deformation in extrusion of composite rods, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 26, No. 3, pp. 323-335, 1991.
- [4] E. M. Rubio, M. A. S. Perez, A. S. Lobera, Mechanical solutions for drawing Processes under plane strain conditions by the upper bound method, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 143-144, No. 4, pp. 539-545, 2003.
- [5] E. M. Rubio, A. M. Camacho, L. Sevilla, M. A. Sebastian, Calculation of the Forward tension in drawing processes, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 162-163, No. 3, pp. 551-557, 2005.
- [6] E. M. Rubio, M. Marin, R. Domingo, M. A. Sebastian, Analysis of plate Drawing processes by the upper bound method using theoretical work hardening materials, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 40, No 3-4, pp. 261-269, 2009.
- [7] A. Panteghini, Analytical solution for the estimation of the drawing force in three dimensional plate drawing processes, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 84, No. 4, pp. 147-157, 2014.
- [8] S. H. Kazemi, H. Haghighat, An upper bound analysis of the geometric shape of the deformation zone in drawing process of the metal plates through wedge-shaped die, *Motares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 3, pp. 162-172, 2015 (in Persian).
- [9] *Deform Documentation Collection*.
- [10] Sh. Kobayashi, S. OH, T. Altan, *Metal Forming and the Finite-Element Method Oxford Series on Advanced Manufacturing*, University Press: New-York, 1989.
- [11] B. Avitzur, J. Fueyo, J. Thompson, Analysis of plastic flow through inclined planes in plane strain, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 89, No. 2, pp. 361-375, 1967.