



## اثر زاویه‌ی محور ترک بر شکل ناحیه‌ی پلاستیک نوک ترک تحت شرایط بارگذاری مختلف برای مواد ارتوتروپیک

غلامرضا راشد<sup>1\*</sup>، حامد زیلابی<sup>2</sup>

1- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعت نفت، آبادان

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعت نفت، اهواز

\* آبادان، صندوق پستی 619، g.rashed@put.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 28 تیر 1396

پذیرش: 11 مهر 1396

ارائه در سایت: 27 آبان 1396

کلید واژگان:

زاویه‌ی محور ترک

ناحیه‌ی پلاستیک نوک ترک

مواد ارتوتروپیک

تنش صفحه‌ای

مود ترکیبی

### چکیده

در این مقاله اندازه و شکل ناحیه‌ی پلاستیک نوک ترک برای یک صفحه به طول بی‌نهایت با ترک مرکزی در حالت تنش صفحه‌ای و تحت شرایط مختلف بارگذاری برای مواد ارتوتروپیک براساس دو معیار تسلیم تسای-هیل و هافمن ارائه گردیده است. در تمام حالت‌های بارگذاری فرض شد که اندازه‌ی ناحیه‌ی پلاستیک نسبت به اندازه‌ی طول ترک کوچک باشد. به عنوان نمونه شکل ناحیه‌ی پلاستیک برای ماده‌ی برن-اپوکسی و فولاد که به ترتیب موادی ارتوتروپیک و همسانگرد هستند، ارائه و تاثیر زاویه‌ی محور ترک بر شکل ناحیه‌ی پلاستیک نوک ترک در حالات مختلف بارگذاری بررسی شده است. نوع بارگذاری به شکلی انتخاب شد تا شکل ناحیه‌ی پلاستیک نوک ترک در حالت‌های بارگذاری مود یک، مود دو و ترکیب مود یک و دو به دست آید. برای مقایسه‌ی بین نتایج حاصل از معیار تسلیم تسای-هیل و هافمن از مفهوم مساحت بدون بعد ناحیه‌ی پلاستیک نوک ترک استفاده شده است. نتایج حاصل نشان داد که اندازه‌ی شکل ناحیه‌ی پلاستیک برای برن-اپوکسی براساس معیار تسای-هیل همواره کوچک‌تر از مقدار مشابه معیار تسلیم هافمن است و این اختلاف براساس مساحت بدون بعد ناحیه‌ی پلاستیک کمتر از 10 درصد و براساس شعاع بدون بعد ناحیه‌ی پلاستیک کمتر از 13 درصد است. شکل ناحیه‌ی پلاستیک برای مواد همسانگرد در یک شرایط خاص بارگذاری یکسان است در صورتی که در شرایط مشابه برای مواد ارتوتروپیک می‌تواند متفاوت باشد و این شکل تابعی از خواص مکانیکی ماده خواهد بود.

## Effect of Angle of the Crack Axial on Shape of Crack Tip Plastic Zone for Orthotropic Materials under Various Loading Conditions

Gholamreza Rashed<sup>1\*</sup>, Hamed Zilabi<sup>2</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Petroleum University of Technology, Abadan, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Petroleum University of Technology, Ahwaz, Iran

\* P.O.B. 619, Abadan, Iran, g.rashed@put.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 19 July 2017

Accepted 03 October 2017

Available Online 18 November 2017

### Keywords:

Angle of the axial crack

Crack tip plastic zone

Orthotropic materials

Plane stress

Mixed mode

### ABSTRACT

In this paper, shape and size of the Crack Tip Plastic Zone (CTPZ) are investigated for orthotropic materials based on Tsai-Hill and Hoffman yield criteria under various loading conditions and plane stress state for an infinite and central-cracked plate. It is assumed that the size of CTPZ is negligible versus the crack length for all loading conditions. For instance, the CTPZ is determined for orthotropic Boron-Epoxy and isotropic steel and effect of the crack's axis angle on the CTPZ is analyzed for different loading conditions. The loading conditions were selected to obtain the CTPZ for mode I, mode II and combination of mode I and II. Dimensionless area of the CTPZ concept is used to compare the results obtained from Tsai-Hill and Hoffman yield criteria. The results show that in the same loading conditions, the size of CTPZ of Boron-Epoxy on Tsai-Hill yield criterion was smaller than on Hoffman yield criterion and this disagreement is less than the 10% and 13% based on the dimensionless area and radius of the CTPZ respectively. In a specific loading condition, the dimensionless radius of the CTPZ of isotropic materials is unique; however, it depends on the mechanical characteristics in orthotropic materials.

### 1- مقدمه

دلار در هر سال است؛ با وجود اهمیت این جنبه مالی همچنین خسارت‌های ناشی از تلفات انسانی و مجروحان این اتفاقات بسیار زیاد است [1]. ناچار برای جلوگیری از این دست حوادث باید واماندگی ساختارها به علت شکست مکانیکی بررسی شوند که یکی از موضوعات مهم مورد علاقه‌ی محققین در این زمینه، بررسی تاثیر وجود ترک در مواد است. یکی از این اثرات ایجاد

در سال 1983 میلادی اداره‌ی ملی استانداردها<sup>1</sup> (انديشكده‌ی ملی علم و تکنوژی<sup>2</sup> کنونی) تخمین زد خسارت‌های مالی ناشی از فروپاشی مکانیزم‌ها و سازه‌ها در سال 1982 میلادی ناشی از شکست مکانیکی معادل 119 میلیارد

<sup>1</sup> National Bureau of Standards

<sup>2</sup> National Institute for Science and Technology

Please cite this article using:

Gh. Rashed, H. Zilabi, Effect of Angle of the Crack Axial on Shape of Crack Tip Plastic Zone for Orthotropic Materials under Various Loading Conditions, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 11, pp. 199-209, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Gh. Rashed, H. Zilabi, Effect of Angle of the Crack Axial on Shape of Crack Tip Plastic Zone for Orthotropic Materials under Various Loading Conditions, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 11, pp. 199-209, 2018 (in Persian)

حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای براساس دو معیار تسلیم میسر و ترسکا با روش گالرکین المان آزاد<sup>2</sup> بررسی کردند آن‌ها برای بیان ناپویستگی مختلف (ناشی از ترک و حفره) صفحه‌ی موردنظر از روش تعیین سطح استفاده کردند [18]. کماس و همکاران شکل ناحیه‌ی پلاستیک در نوک ترک را به روش عددی و آزمایشگاهی برای مود یک به‌دست آوردند و با نتایج تحلیلی مقایسه کردند [19]. کلوس و همکاران براساس شکل ناحیه‌ی پلاستیک به روش تحلیلی براساس حداقل شعاع پلاستیک زاویه‌ی گسترش ترک را به‌دست آوردند و با نتایج آزمایشگاهی مقایسه کرد و مشاهده کرد که تطابق بسیار بالایی بین نتایج وجود دارد [3].

تمام این تحقیقات که بررسی شدند ناحیه پلاستیک تشکیل شده در نوک ترک را برای مواد همسانگرد و براساس معیارهای، ترسکا، فون میسر و یو ارائه کردند اما این نتایج ارتباطی با مواد ناهمسانگرد ندارند چرا که معیارهای تسلیم ذکر شده برای مواد غیرهمسانگرد کاربرد ندارند.

گودوتوس و زاکاراپلوس براساس معیار تسلیم هیل و در حالت تنش صفحه‌ای برای بارگذاری مود یک ناحیه‌ی پلاستیک در صورتی که ناحیه‌ی پلاستیک کوچک باشد را برای کامپوزیت‌ها به‌عنوان نمونه‌ای از مواد ناهمسانگرد ارائه کردند [20]. آکسی و همکاران به کمک روش عددی میدان تنش را برای یک نمونه‌ی خاص در حالت بارگذاری مود دو به‌دست آوردند و براساس این میدان تنش و براساس معیار تسلیم میسر شکل ناحیه‌ی پلاستیک را برای ماده‌ی گرافیت- اپوکسی ارائه کردند و از دیدل و همکاران تحقیقات مشابهی را برای مود یک بارگذاری ارائه کردند [21, 22]. کورجاکوف و همکاران تاثیر طول ترک بر ناحیه‌ی پلاستیک را برای یک ماده‌ی غیرهمسانگرد تحت شرایط بارگذاری سخت به روشی تحلیلی بررسی کردند و به طور کلی برای حالت تنش صفحه‌ای یک مورد خاص را مورد بررسی قرار دادند و به کمک روش عددی شکل ناحیه‌ی پلاستیک را برای یک مسئله‌ی مقدار مرزی حل کردند [23]. شفیق و همکاران براساس معیار هیل در حالت ترکیب بارگذاری مود یک و مود دو شکل ناحیه‌ی پلاستیک را برای شرایط مختلف بارگذاری و در حالت تنش صفحه‌ای ارائه کردند و براساس شکل ناحیه‌ی پلاستیک زاویه‌ی گسترش ترک را پیش‌بینی کردند [24]. کامینسکی و همکاران شرایطی را فراهم کردند تا ناحیه‌ی پلاستیک در نوک ترک یک جسم محدود در حالت کرنش صفحه‌ای ایجاد بشود؛ آنها مشخص کردند که شکل ناحیه‌ی پلاستیک نوک ترک و بر روی سطح جانبی چگونه گسترش می‌یابد. اما آن‌ها تحقیقی در مورد حالت ترکیب مود یک و دو نداشتند [25]. گائو و همکاران یک حل تحلیلی برای حالت ترکیب مود یک و دو تحت شرایطی که اندازه‌ی ناحیه‌ی پلاستیک کوچک است و براساس معیار تسلیم هیل، ارائه کردند. آن‌ها ناحیه‌ی پلاستیک را تحت شرایط تنش صفحه‌ای و شرایط متفاوت بارگذاری به‌دست آوردند [26].

متأسفانه تحقیق‌های کافی برای شکل ناحیه‌ی پلاستیک در مواد غیرهمسانگرد انجام نشده و آن دسته از تحقیقات که به بررسی شکل ناحیه‌ی پلاستیک پرداخته‌اند معیار تسلیم را معیار هیل در نظر گرفته‌اند و با توجه به این موضوع که معیار تسلیم هیل تفاوتی برای استحکام تسلیم در کشش و فشار قائل نیست در موادی که استحکام کششی و فشاری اختلاف دارند نتایج دارای مقداری خطا خواهند بود. در این مقاله ناحیه‌ی پلاستیک تشکیل شده در نوک ترک با این فرض که اندازه‌ی ناحیه‌ی پلاستیک نسبت به طول ترک کوچک باشد، برای مواد ارتوتروپیک براساس معیارهای تسلیم تسای - هیل و

ناحیه‌ی پلاستیک کوچک در نوک ترک ناشی از اعمال تنش است. در تشریح فرایندهای واماندگی و فرمول‌بندی معیارهای متفاوت شکست مکانیکی بررسی شکل ناحیه‌ی پلاستیک دارای اهمیت پایه‌ای است [2]. شکل ناحیه‌ی پلاستیک نوک ترک همچنین می‌تواند به‌عنوان معیاری جهت تعیین زاویه‌ی اولیه‌ی رشد ترک در شرایط بارگذاری ترکیبی مود یک و دو مود نظر قرار گیرد [3]. جهت جلوگیری از رشد ترک مشخص بودن زاویه‌ی رشد ترک می‌تواند بسیار کمک کننده باشد، زاویه‌ی اولیه‌ی رشد ترک براساس شکل ناحیه‌ی پلاستیک به‌دست می‌آید. اندازه منطقه ناحیه پلاستیک نوک ترک در مباحث: تصحیح ضریب شدت تنش، تصحیح محاسبه CTOD، نرخ کرنش سختی، تاثیر در حالت‌های تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای، ضریب قید پلاستیک، مقاومت باقیمانده و ... نقش مهمی دارد.

تحقیقات اولیه در این زمینه توسط ایروین وداگدال برای پیدا کردن ناحیه‌ی پلاستیک نوک ترک انجام شد هر دو فرض کردند شکل ناحیه‌ی پلاستیک دایره‌ای شکل و طول موثر ترک بزرگتر از اندازه‌ی فیزیکی آن است و براساس این فرضیات شعاع ناحیه‌ی پلاستیک را ارائه کردند [4, 5]. توبا شکل ناحیه‌ی پلاستیک در مود یک را برای مواد همسانگرد ارائه کرد و ادعا کرد بیشترین شعاع ناحیه‌ی پلاستیک تقریباً در زاویه‌ی 69 درجه نسبت به محور ترک اتفاق می‌افتد و رایس و همکاران او این زاویه را 100 درجه معرفی کرده‌اند [6, 7]. تحلیل‌هایی برای دقت بیشتر در جهت به‌دست آوردن شکل ناحیه‌ی پلاستیک برای مواد همسانگرد براساس روش رهاسازی توسط استیمپسون و همکاران صورت گرفت [8]. هلت و همکاران با استفاده از معیار تسلیم میسر و بهبود دادن مدل‌های ساده مرز دایره‌ای بین ناحیه‌ی پلاستیک و پلاستیک را پیش‌بینی کردند [9]. هارمیان و همکاران با استفاده از معیار ترسکا تحت شرایط تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای برای مواد همسانگرد و در مود یک بارگذاری شکل ناحیه‌ی پلاستیک نوک ترک را پیش‌بینی کردند [10]. جینگ و همکاران شکل ناحیه‌ی پلاستیک را برای بارگذاری مود دوم بر اساس دو معیار میسر و ترسکا، به شکل تحلیلی ارائه کردند [11]. بنکس و همکاران مرز ناحیه‌ی پلاستیک در حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای را براساس معیار تسلیم میسر به‌صورت تحلیلی ارائه کردند [12]. گیانگ و همکاران شکل ناحیه‌ی پلاستیک در مود یک و دو را براساس معیار مقاومت متحد یو و برای مواد همسانگرد در حالت کوچک بودن ناحیه‌ی پلاستیک بدست آوردند [13]. ژانگ و همکاران شکل ناحیه‌ی پلاستیک برای حالت ترکیب مود یک و دو را بر اساس معیار مقاومت متحد یو برای مواد همسانگرد و در حالتی که ناحیه‌ی پلاستیک کوچک باشد، به‌دست آوردند [14]. شانارانپراهو و همکاران شکل ناحیه‌ی پلاستیک را به روش عددی در حالت بارگذاری ترکیبی مود یک و دو برای یک نمونه‌ی کشش و برشی همزمان به‌دست آوردند [15]. بنراهو و همکاران شکل ناحیه‌ی پلاستیک مواد همسانگرد را بکمک روش المان‌های محدود برای مود یک، دو و ترکیب مود یک و دو تخمین زدند و نتایج عددی به‌دست آمده را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه کرده و نشان دادند نتایج عددی و آزمایشگاهی مشابه هستند [16]. شفیق و همکاران تحت شرایط متفاوت بارگذاری و براساس معیار تسلیم میسر شکل ناحیه‌ی پلاستیک نوک ترک را به‌دست آوردند و براساس مشخصات ناحیه‌ی هسته‌ی پلاستیک<sup>1</sup> به‌دست آمده زاویه‌ی گسترش ترک را به‌دست آوردند [17]. جمیل و همکاران تاثیر شعاع و مکان یک سوراخ درون صفحه به شکل دایره را بر ناحیه‌ی پلاستیک تشکیل شده در نوک ترک در

<sup>2</sup> Element Free Galerkin Method<sup>1</sup> Core plastic region

$$\alpha_M = \left( \frac{X_c X_t}{Y_c Y_t} \right) \quad (14)$$

$$\beta_M = \left( \frac{X_c X_t}{Z_c Z_t} \right) \quad (15)$$

$$\alpha_M = \left( \frac{X_c X_t}{S_{12}^2} \right) \quad (16)$$

در صورتی که ماده همسانگرد عرضی باشد رابطه‌ی (13) به شکل زیر در می‌آید:

$$\sigma_1^2 + \alpha_M \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \gamma_M \tau_{12}^2 - (X_t + X_c) \sigma_1 - \alpha_M (Y_t + Y_c) \sigma_2 + X_c X_t = 0 \quad (17)$$

### 3- میدان تنش در نوک ترک

قانون هوک سه بعدی برای مواد نا همسانگرد را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\epsilon_i = \sum_{j=1}^6 a_{ij} \sigma_j, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (18)$$

برای یک ماده‌ی ارتوتروپیک ماتریس  $a_{ij}$  به شکل زیر ساده می‌شود:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \quad (19)$$

سی و همکاران روابط زیر را برای یک صفحه‌ی ارتوتروپیک با ترک مرکزی و با طول بی‌نهایت که تحت بارگذاری ترکیبی مود یک و مود دو قرار دارد (شکل 1 و شکل 2)، ارائه کرده‌اند. [29]:

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} [F_{I_x} + mF_{II_x}] \quad (20)$$

$$\sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} [F_{I_y} + mF_{II_y}] \quad (21)$$

$$\tau_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} [F_{I_{xy}} + mF_{II_{xy}}] \quad (22)$$

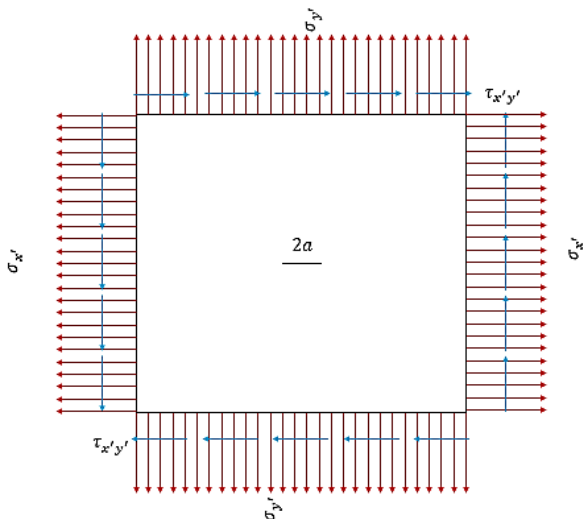


Fig. 1 The infinite plate with central crack under mixed mode loading

شکل 1 صفحه‌ای با طول بی‌نهایت و ترک در مرکز تحت بارگذاری ترکیبی

هافمن با شرایط مختلف بارگذاری ارائه شده است که می‌تواند رفتار کامپوزیت‌ها را که نمونه‌ی از مواد ارتوتروپیک هستند، توجیه کند.

### 2- معیارهای تسلیم برای مواد ارتوتروپیک

معیارهای تسلیم متفاوتی برای مواد ارتوتروپیک ارائه شده‌است. از جمله این معیارها، معیار تسلیم هیل یا تسای-هیل، و معیار تسلیم هافمن است که در ادامه روابط مربوط به هر یک از این معیارهای تسلیم ارائه خواهند شد.

#### 1-2- معیار تسلیم هیل

هیل با فرض این که تنش تسلیم در کشش و فشار با هم برابر است معیار زیر را به عنوان معیار شکست برای مواد ارتوتروپیک ارائه کرد [27]:

$$(G + H)\sigma_1^2 + (F + H)\sigma_2^2 + (F + G)\sigma_3^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 - 2G\sigma_1\sigma_3 - 2F\sigma_2\sigma_3 + 2L\tau_{12}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{23}^2 = 1 \quad (1)$$

برای حالت تنش صفحه‌ای که  $\sigma_3 = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$  است با جایگذاری این روابط در رابطه‌ی (1) رابطه‌ی ساده شده زیر حاصل می‌شود:

$$(G + H)\sigma_1^2 + (F + H)\sigma_2^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 + 2L\tau_{12}^2 = 1 \quad (2)$$

اگر حداکثر تنش در راستای محور 1، 2 و 3 را برابر  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  باشند و همچنین تنش برشی حداکثر برای صفحه‌ی 1-2 برابر  $S_{12}$  باشد ضرایب مجهول رابطه‌ی (2) برابر زیر خواهند بود:

$$G + H = \frac{1}{X^2} \quad (3)$$

$$F + H = \frac{1}{Y^2} \quad (4)$$

$$2H = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \quad (5)$$

$$2L = \frac{1}{S_{12}^2} \quad (6)$$

که با جایگذاری روابط (3) - (6) در رابطه‌ی (2) رابطه‌ی (7) حاصل خواهد شد:

$$\sigma_1^2 + \alpha_H^2 \sigma_2^2 + (\beta_H^2 - \alpha_H^2 - 1)\sigma_1\sigma_2 + \gamma_H^2 \tau_{12}^2 = X^2 \quad (7)$$

که در رابطه‌ی (7):

$$\alpha_H = \left( \frac{X}{Y} \right) \quad (8)$$

$$\beta_H = \left( \frac{X}{Z} \right) \quad (9)$$

$$\gamma_H = \left( \frac{X}{S_{12}} \right) \quad (10)$$

در صورتی که ماده همسانگرد عرضی باشد:

$$\sigma_1^2 + \alpha_H^2 \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 + \gamma_H^2 \tau_{12}^2 = X^2 \quad (11)$$

#### 2-2- معیار تسلیم هافمن

برای لحاظ کردن تفاوت تنش تسلیم در کشش و فشار برای یک ماده خاص هافمن چند ترم خطی را به معادله‌ی هیل اضافه کرد [28]. معیار هافمن در رابطه‌ی زیر ارائه شده است:

$$c_1(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + c_2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + c_3(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + c_4\sigma_1 + c_5\sigma_2\sigma_3 + c_6\sigma_1\sigma_3 + c_7\tau_{12}^2 + c_8\tau_{23}^2 + c_9\tau_{13}^2 = 1 \quad (12)$$

با اعمال فرض تنش صفحه‌ای و در نظر گرفتن  $X_t$ ،  $Y_t$  و  $Z_t$  به عنوان تنش تسلیم محورهای 1، 2 و 3 در حالت تنش کششی و  $X_c$ ،  $Y_c$  و  $Z_c$  به عنوان تنش تسلیم در جهت محورهای 1، 2 و 3 در حالت تنش صفحه‌ای رابطه‌ی (7) به شکل زیر در می‌آید:

$$\sigma_1^2 + \alpha_M \sigma_2^2 + (\beta_M - \alpha_M - 1)\sigma_1\sigma_2 + \gamma_M \tau_{12}^2 - (X_t + X_c)\sigma_1 - \alpha_M (Y_t + Y_c)\sigma_2 + X_c X_t = 0 \quad (13)$$

که در رابطه‌ی (13):

این منظور شکل ناحیه پلاستیک برای ماده‌ی برن - اپوکسی<sup>1</sup> و یک ماده‌ی همسانگرد به منظور مقایسه، ارائه می‌شود. مشخصات فیزیکی این دو ماده در جدول 1 ارائه گردیده است.

**1-4- شکل ناحیه‌ی پلاستیک تحت بارگذاری مود یک**

در این حالت بارگذاری که  $\sigma_{y'} = \sigma_0$  و  $\tau_{x'y'} = 0$  شکل ناحیه‌ی پلاستیک برای دو ماده‌ی برن-اپوکسی و فولاد به ترتیب در "شکل 3 و شکل 4" و براساس معیارهای تسای - هیل و هافمن ارائه گردید.

**2-4- شکل ناحیه‌ی پلاستیک تحت بارگذاری مود دو**

در این حالت بارگذاری که  $\sigma_{y'} = 0$  و  $\tau_{x'y'} = \tau_0$  نیم شکل ناحیه‌ی پلاستیک برای دو ماده‌ی برن-اپوکسی و فولاد به ترتیب در "شکل 5 و شکل 6" ارائه گردیده‌اند.

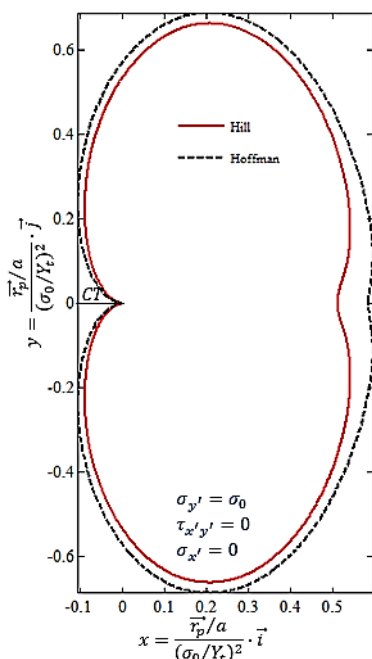
**3-4- شکل ناحیه‌ی پلاستیک تحت بارگذاری ترکیبی**

در صورتی که به طور همزمان بارگذاری مود یک و دو به صفحه‌ی موردنظر

جدول 1 خواص فیزیکی برای دو ماده‌ی برن-اپوکسی و فولاد

**Table 1** Physical characteristics of Boron-Epoxy and Steel

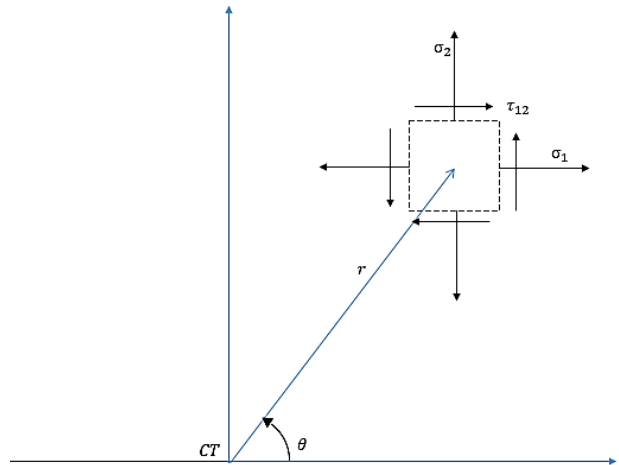
فولاد	برن-اپوکسی	خاصیت فیزیکی
200	207	$E_1$ [GPa]
200	21	$E_2$ [GPa]
76.92	7	$G_{12}$ [GPa]
0.3	0.3	$\nu_{12}$
700	1380	$X_t$ [MPa]
700	83	$Y_t$ [MPa]
115.47	124	$S_{12}$ [MPa]
-700	-2760	$X_c$ [MPa]
-700	-276	$Y_c$ [MPa]



**Fig. 3** The CTPZ shape and size under mode I loading for Boron-Epoxy based on Tsai-Hill and Hoffman yield theories.

شکل 3 اندازه و شکل پلاستیک نوک ترک برای ماده برن-اپوکسی تحت بارگذاری مود یک و براساس معیارهای تسای-هیل و هافمن.

<sup>1</sup> Boron - Epoxy



**Fig. 2** The crack tip stress field

شکل 2 میدان تنش در نوک ترک

که در رو باط (22) - (20):

$$K_I = \sigma_{y'} \sqrt{\pi a} \tag{23}$$

$$K_{II} = \tau_{x'y'} \sqrt{\pi a} \tag{24}$$

$$m = \frac{K_{II}}{K_I} = \frac{\tau_{x'y'}}{\sigma_{y'}} \tag{25}$$

$$F_{Ix} = \text{Re} \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] \tag{26}$$

$$F_{IIx} = \text{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_2^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_1^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] \tag{27}$$

$$F_{Iy} = \text{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] \tag{28}$$

$$F_{IIy} = \text{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] \tag{29}$$

$$F_{Ixy} = \text{Re} \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right) \right] \tag{30}$$

$$F_{IIxy} = \text{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right) \right] \tag{31}$$

که در معادلات (31) - (26) منظور از  $\mu_1, \mu_2$  و  $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$  ریشه‌های معادله‌ی زیر است:

$$a_{11} \mu^4 - 2a_{16} \mu^3 + (2a_{12} + a_{66}) \mu^2 - 2a_{26} \mu + a_{22} = 0 \tag{32}$$

**4- شکل ناحیه‌ی پلاستیک**

برای به‌دست آوردن شکل ناحیه‌ی پلاستیک، کافی است معادلات (22) - (20) را در معیارهای تسلیم قرار داده و معادله‌ی حاصل را برای شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک حل کرد. چون حل این معادله پیچیده است، شکل ناحیه‌ی پلاستیک برای یک ماده‌ی خاص با مشخصات معین ارائه خواهد شد. برای

4-4- شکل ناحیه‌ی پلاستیک در حالتی که محور ترک با محورهای اصلی دارای زاویه باشد

در صورتی که محور ترک با محورهای اصلی زاویه بسازد، "شکل 10"، باید تنش‌های اعمالی باید به شکلی انتقال یابد تا استفاده از معادلات (20) - (22) امکان پذیر گردد.

4-4-1- شکل ناحیه‌ی پلاستیک با بارگذاری تک محوره

در این حالت بارگذاری که در آن  $\sigma_y = \sigma_0$  و  $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$  است شکل ناحیه‌ی پلاستیک برای ماده‌ی برن-اپوکسی براساس معیار تسلیم تسای-هیل برحسب زوایای مختلف ترک در "شکل 11" و شکل ناحیه‌ی پلاستیک برای فولاد در "شکل 12" رسم گردیده است و شکل ناحیه‌ی پلاستیک برای ماده‌ی برن-اپوکسی و براساس معیار هافمن در "شکل 13" ارائه شده است.

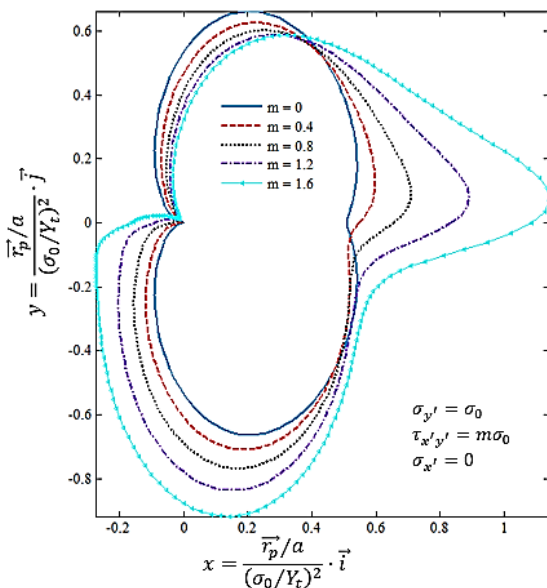


Fig. 7 The CTPZ shape and size under mixed mode loading for Boron-Epoxy based on Tsai-Hill yield theory

شکل 7 اندازه و شکل پلاستیک نوک ترک برای ماده برن-اپوکسی تحت بارگذاری ترکیبی و براساس معیار تسلیم تسای-هیل

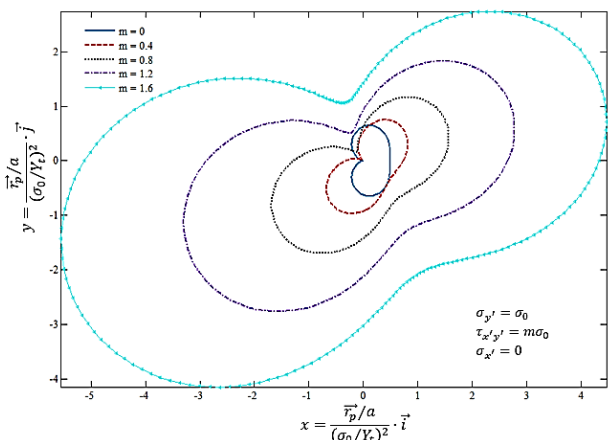


Fig. 8 The CTPZ shape and size under mixed mode loading for Steel based on Tsai-Hill yield theory or Hoffman yield theory

شکل 8 اندازه و شکل پلاستیک نوک ترک برای فولاد تحت بارگذاری ترکیبی و براساس معیار تسلیم تسای-هیل یا معیار تسلیم هافمن

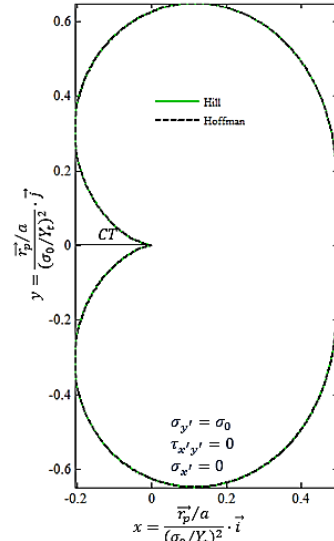


Fig. 4 The CTPZ shape and size under mode I loading for Steel based on Tsai-Hill and Hoffman yield theories

شکل 4 اندازه و شکل پلاستیک نوک ترک برای ماده فولاد تحت بارگذاری مود یک و براساس معیارهای تسلیم تسای-هیل و هافمن

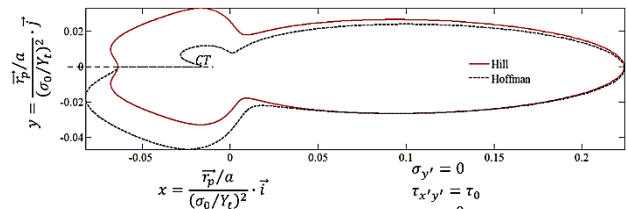


Fig. 5 The CTPZ shape and size under mode II loading for Boron-Epoxy based on Tsai-Hill and Hoffman yield theories.

شکل 5 اندازه و شکل پلاستیک نوک ترک برای ماده برن-اپوکسی تحت بارگذاری مود دو و براساس معیارهای تسلیم تسای-هیل و هافمن

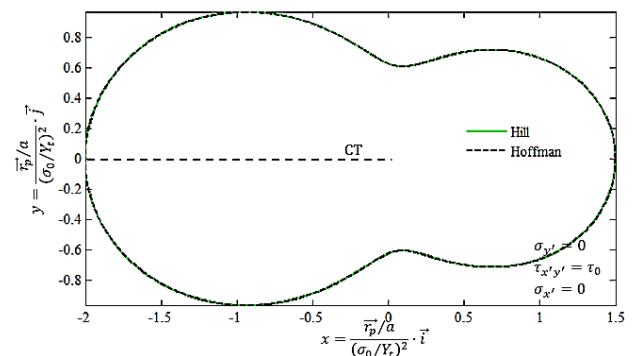
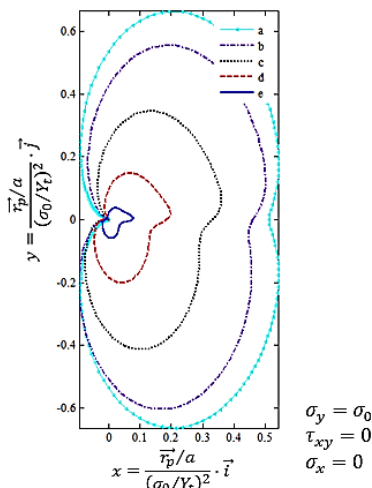


Fig. 6 The CTPZ shape and size under mode II loading for Steel based on Tsai-Hill and Hoffman yield theories

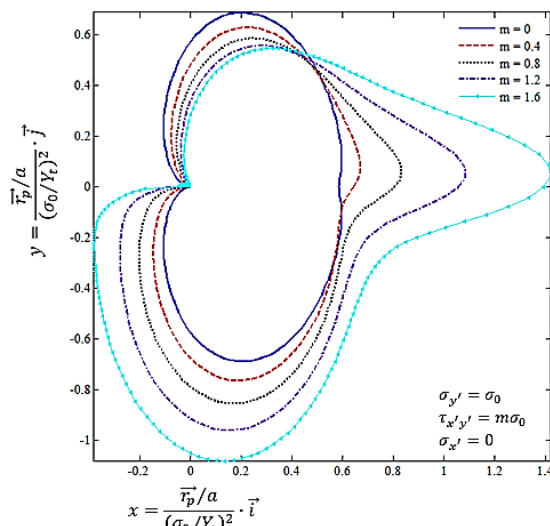
شکل 6 اندازه و شکل پلاستیک نوک ترک برای ماده فولاد تحت بارگذاری مود دو و براساس معیارهای تسلیم تسای-هیل و هافمن

اعمال شود یا به عبارت دیگر  $\sigma_{y'} = \sigma_0$  و  $\tau_{x'y'} = m\sigma_0$ ، شکل ناحیه‌ی پلاستیک در نوک ترک برای ماده‌ی برن-اپوکسی و فولاد و بر حسب مقادیر متفاوت  $m$ ، براساس معیار تسلیم تسای-هیل به ترتیب در "شکل 7" و شکل "8" ارائه گردیده است. شکل ناحیه‌ی پلاستیک براساس معیار تسلیم هافمن برای برن-اپوکسی در "شکل 9" رسم شده است.



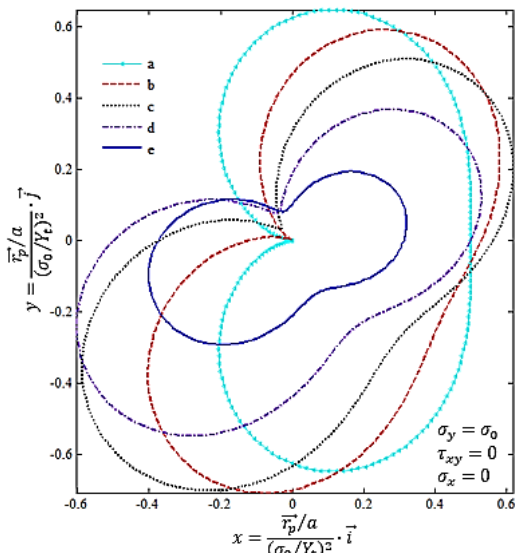
a:  $\varphi = 0^\circ$  b:  $\varphi = 15^\circ$  c:  $\varphi = 30^\circ$  d:  $\varphi = 45^\circ$  e:  $\varphi = 60^\circ$

**Fig. 11** The CTPZ shape and size with various crack angel based on Tsai-Hill yield theory for Boron-Epoxy  
 شکل 11 اندازه و شکل پلاستیک نوک ترک برای برن-اپوکسی برحسب زوایای مختلف ترک براساس معیار تسلیم تسای-هیل



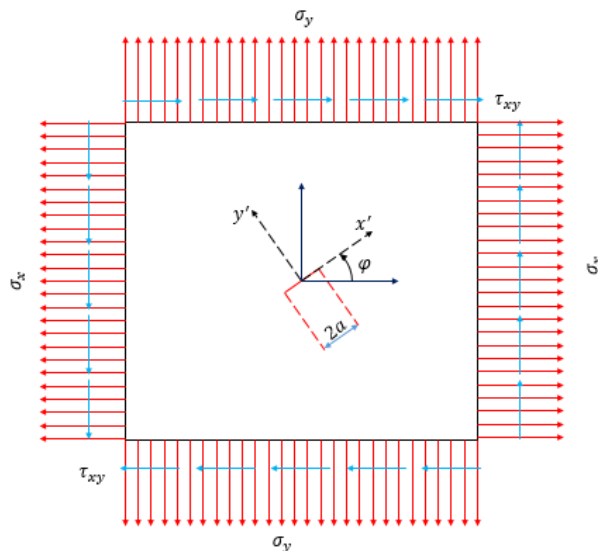
**Fig. 9** The CTPZ shape and size under mixed mode loading for Boron-Epoxy based on Hoffman yield theory

شکل 9 اندازه و شکل پلاستیک نوک ترک برای فولاد تحت بارگذاری ترکیبی و براساس معیار تسلیم هافمن یا معیار تسلیم هافمن



a:  $\varphi = 0^\circ$  b:  $\varphi = 15^\circ$  c:  $\varphi = 30^\circ$  d:  $\varphi = 45^\circ$  e:  $\varphi = 60^\circ$

**Fig. 12** The CTPZ shape and size with various crack angel based on Tsai-Hill yield theory or Hoffman yield theory for Steel  
 شکل 12 اندازه و شکل پلاستیک نوک ترک برای فولاد برحسب زوایای مختلف ترک براساس معیارهای تسلیم تسای-هیل یا هافمن



**Fig. 10** The cracked plate with a nonzero crack angle

شکل 10 صفحه ترک دار با زاویه ترک غیرصفر

$$\sigma_{y'} = \sigma_y \cos^2 \varphi = \cos^2 \varphi \sigma_0 \quad (33)$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sigma_0 \quad (34)$$

به جهت مقایسه‌ی نتایج ارائه شده براساس معیارهای تسلیم هیل و هافمن، در "شکل 14" مساحت بدون بعد ناحیه‌ی پلاستیک برحسب زوایای مختلف ترک برای مواد برن-اپوکسی و فولاد رسم شده است. لازم به ذکر است معیار تسلیم هیل و هافمن برای مواد همسانگرد یکسان هستند. در "شکل 14" مورد a مساحت بدون بعد ناحیه‌ی پلاستیک برای فولاد برحسب زوایای مختلف ترک، مورد b مساحت بدون بعد ناحیه‌ی پلاستیک برای برن-اپوکسی برحسب زوایای مختلف ترک و براساس معیار تسلیم تسای-هیل و مورد c مساحت بدون بعد ناحیه‌ی پلاستیک برای برن-اپوکسی برحسب زوایای مختلف ترک و براساس معیار تسلیم هافمن را نشان می‌دهند.

**4-4-2- شکل ناحیه‌ی پلاستیک با بارگذاری دو محوره**

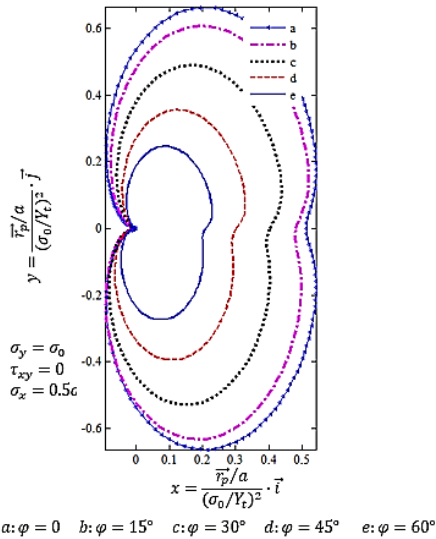
در این حالت بارگذاری که در آن  $\sigma_x = n\sigma_0$  و  $\sigma_y = \sigma_0$ ،  $\tau_{xy} = 0$  است. شکل ناحیه‌ی پلاستیک را برای حالت‌های  $n = 0.5$  و  $n = 1.5$  و برحسب زوایای مختلف ترک ارائه گردیده است. شکل ناحیه‌ی پلاستیک برای ماده‌ی برن-اپوکسی در حالتی که  $n = 0.5$  است و براساس معیار تسلیم تسای-هیل و هافمن، به ترتیب در "شکل 15" و "شکل 16" ارائه گردیده است و در حالتی که  $n = 1.5$  است و براساس معیار تسلیم تسای-هیل و هافمن، شکل ناحیه‌ی پلاستیک به ترتیب در "شکل 17" و "شکل 18" رسم شده است. در این حالت:

$$\sigma_{y'} = \sigma_0 \left[ \frac{n+1}{2} + \left( \frac{1-n}{2} \right) \cos 2\varphi \right] \quad (35)$$

شکل ناحیه‌ی پلاستیک را برای حالت‌های  $p = -0.5$  و  $p = -1.5$  و برحسب زوایای مختلف ترک ارائه گردیده است. شکل ناحیه‌ی پلاستیک برای ماده‌ی برن-اپوکسی در حالتی که  $p = -0.5$  است و براساس معیار تسلیم تسای-هیل و هافمن، به ترتیب در "شکل 21 و شکل 22" ارائه گردیده است و در حالتی که  $p = -1.5$  است و براساس معیار تسلیم تسای-هیل و هافمن، شکل ناحیه‌ی پلاستیک به ترتیب در "شکل 23 و شکل 24" رسم شده است. در این حالت:

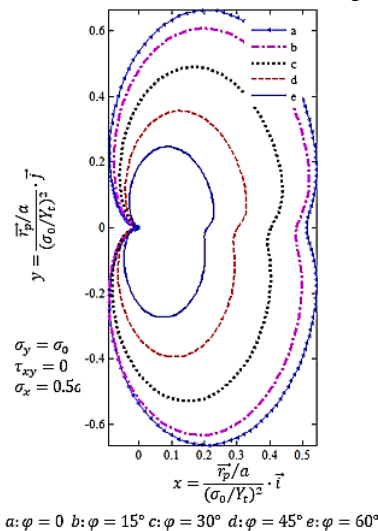
$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_0}{2} [1 + \cos 2\varphi - 2p \sin 2\varphi] \quad (37)$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma_0}{2} [\sin 2\varphi + 2p \cos 2\varphi] \quad (38)$$



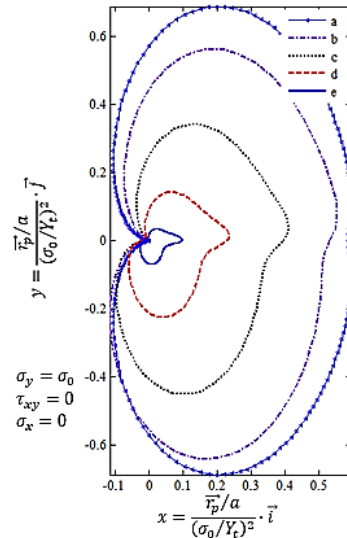
**Fig. 15** The CTPZ shape and size with various crack angel under biaxial loading with  $n = 0.5$  based on Tsai-Hill yield theory for Boron-Epoxy

شکل 15 اندازه و شکل ناحیه‌ی پلاستیک نوک ترک برای برن-اپوکسی برحسب زوایای مختلف ترک تحت بارگذاری دو محوره با  $n = 0.5$  و براساس معیار تسلیم تسای-هیل



**Fig. 16** The CTPZ shape and size with various crack angel under biaxial loading with  $n = 0.5$  based on Hoffman yield theory for Boron-Epoxy

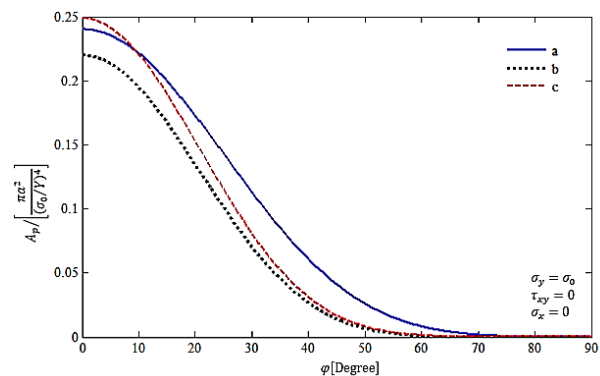
شکل 16 اندازه و شکل ناحیه‌ی پلاستیک نوک ترک برای برن-اپوکسی برحسب زوایای مختلف ترک تحت بارگذاری دو محوره و براساس معیار تسلیم هافمن



$a: \varphi = 0^\circ$   $b: \varphi = 15^\circ$   $c: \varphi = 30^\circ$   $d: \varphi = 45^\circ$   $e: \varphi = 60^\circ$

**Fig. 13** The CTPZ shape and size with various crack angel based on Hoffman yield theory for Boron-Epoxy

شکل 13 اندازه و شکل پلاستیک نوک ترک برای برن-اپوکسی برحسب زوایای مختلف ترک براساس معیار هافمن



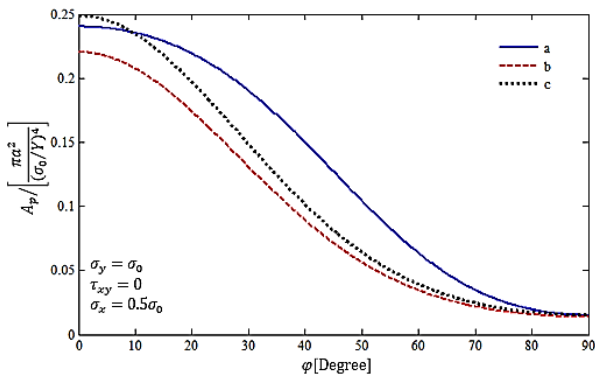
**Fig. 14** Dimensionless area of CTPZ versus different  $\varphi$  under uniaxial loading, (a) Steel based on Tsai-Hill or Hoffman, (b) Boron-Epoxy based on Tsai-Hill (c) Boron-Epoxy based on Hoffman

شکل 14 مساحت بدون بعد ناحیه‌ی پلاستیک نوک ترک برحسب مقادیر متفاوت  $\varphi$  تحت بارگذاری تک محوره، (a) فولاد براساس معیار تسای-هیل یا هافمن، (b) برن-اپوکسی براساس معیار تسای-هیل، (c) برن-اپوکسی براساس معیار هافمن

$$\tau_{x'y'} = \sigma_0 \left( \frac{1-n}{2} \right) \sin 2\varphi \quad (36)$$

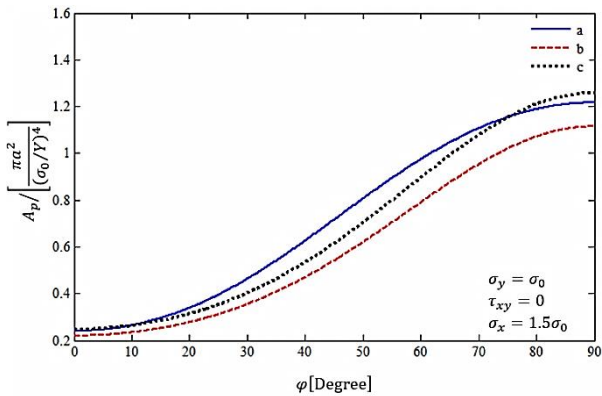
به جهت مقایسه‌ی نتایج ارائه شده براساس معیارهای تسلیم هیل و هافمن، در "شکل 19" مساحت بدون بعد ناحیه‌ی پلاستیک برحسب زوایای مختلف ترک برای مواد برن-اپوکسی و فولاد رسم شده است. در "شکل 19" مساحت بدون بعد ناحیه‌ی پلاستیک برحسب زوایای مختلف ترک با  $n = 0.5$  برای فولاد در مورد a، برای برن-اپوکسی و براساس معیار تسای-هیل در مورد b و برای برن-اپوکسی و براساس معیار هافمن در مورد c رسم گردیده است. و به همین ترتیب در حالتی که  $n = 1.5$  در "شکل 20" مساحت بدون بعد ارائه گردیده است.

**4-4-3- شکل ناحیه‌ی پلاستیک تحت بارگذاری برشی و کششی همزمان**  
در این حالت بارگذاری که در آن  $\sigma_y = \sigma_0$ ،  $\sigma_x = 0$  و  $\tau_{xy} = p\sigma_0$  است.



**Fig. 19** Dimensionless area of CTPZ versus different  $\varphi$  under biaxial loading with  $n = 0.5$ , (a) Steel based on Tsai-Hill or Hoffman, (b) Boron-Epoxy based on Tsai-Hill (c) Boron-Epoxy based on Hoffman

شکل 19 مساحت بدون بعد ناحیه پلاستیک نوک ترک برحسب مقادیر متفاوت  $\varphi$  تحت بارگذاری دو محوره با  $n = 0.5$  (a) فولاد براساس معیار تسای-هیل یا هافمن، (b) برن-اپوکسی براساس معیار تسای-هیل، (c) برن-اپوکسی براساس معیار هافمن



**Fig. 20** Dimensionless area of CTPZ versus different  $\varphi$  under biaxial loading with  $n = 1.5$ , (a) Steel based on Tsai-Hill or Hoffman, (b) Boron-Epoxy based on Tsai-Hill (c) Boron-Epoxy based on Hoffman

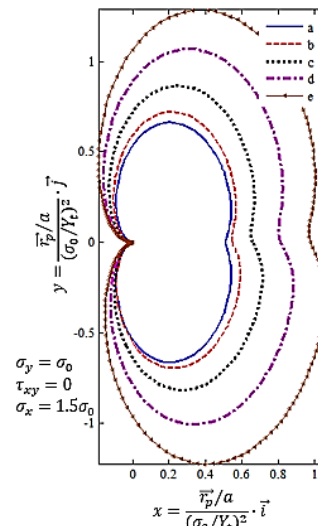
شکل 20 مساحت بدون بعد ناحیه پلاستیک نوک ترک برحسب مقادیر متفاوت  $\varphi$  تحت بارگذاری دو محوره با  $n = 1.5$  (a) فولاد براساس معیار تسای-هیل یا هافمن، (b) برن-اپوکسی براساس معیار تسای-هیل، (c) برن-اپوکسی براساس معیار هافمن

### 5- صحت سنجی

به منظور بررسی صحت نتایج ارائه شده، در "شکل 27" شکل ناحیه پلاستیک نوک ترک در مود یک ارائه گردیده است. در این حالت بارگذاری مشاهده می شود که نتایج ارائه شده از مرجع 26 تطابق کاملی با نتایج ارائه شده در مقاله حاضر دارد. شکل ناحیه پلاستیک برای ماده T300/5208 و برحسب معیار تسلیم تسای-هیل رسم گردیده است.

### 6- نتیجه گیری

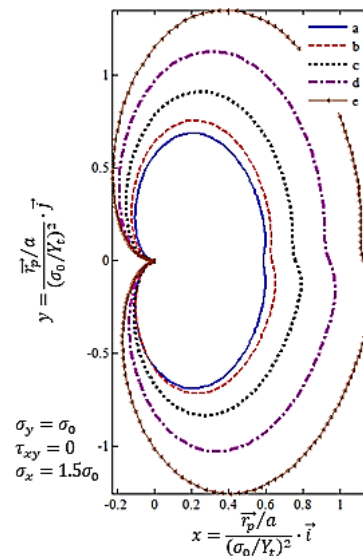
براساس شکل ناحیه پلاستیک به دست آمده در شرایط مختلف بارگذاری همواره اندازهی شکل ناحیه پلاستیک براساس معیار تسای-هیل کوچکتر از مقدار به دست آمده براساس معیار تسلیم هافمن بوده است و بیشینهی این اختلاف براساس اختلاف شعاع بدون بعد ناحیه پلاستیک کمتر از 13 درصد و براساس مساحت بدون بعد ناحیه پلاستیک کمتر از 10 درصد است و میزان این اختلاف کاملاً وابسته به نوع ماده است هر چه اختلاف استحکام



a:  $\varphi = 0$  b:  $\varphi = 15^\circ$  c:  $\varphi = 30^\circ$  d:  $\varphi = 45^\circ$  e:  $\varphi = 60^\circ$

**Fig. 17** The CTPZ shape and size with various crack angle under biaxial loading with  $n = 1.5$  based on Tsai-Hill yield theory for Boron-Epoxy

شکل 17 اندازه و شکل ناحیه پلاستیک نوک ترک برای برن-اپوکسی برحسب زوایای مختلف ترک تحت بارگذاری دو محوره با  $n = 1.5$  و براساس معیار تسلیم تسای-هیل



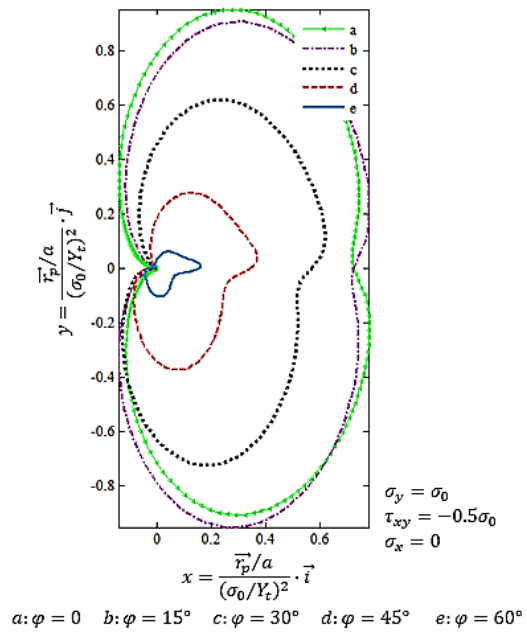
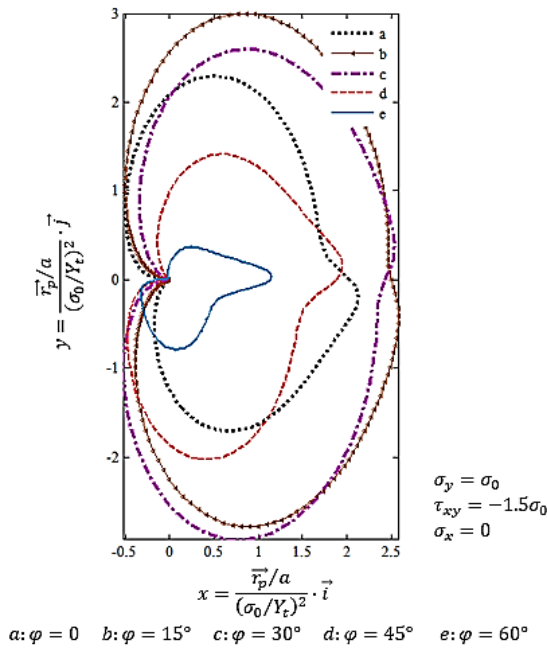
a:  $\varphi = 0$  b:  $\varphi = 15^\circ$  c:  $\varphi = 30^\circ$  d:  $\varphi = 45^\circ$  e:  $\varphi = 60^\circ$

**Fig. 18** The CTPZ shape and size with various crack angle under biaxial loading with  $n = 1.5$  based on Hoffman yield theory for Boron-Epoxy.

شکل 18 اندازه و شکل ناحیه پلاستیک نوک ترک برای برن-اپوکسی برحسب زوایای مختلف ترک تحت بارگذاری دو محوره با  $n = 1.5$  و براساس معیار تسلیم هافمن

به جهت مقایسهی نتایج ارائه شده براساس معیارهای تسلیم هیل و هافمن، در "شکل 25 و شکل 26" مساحت بدون بعد ناحیه پلاستیک برحسب زوایای مختلف ترک برای مادهی برن-اپوکسی رسم شده است.



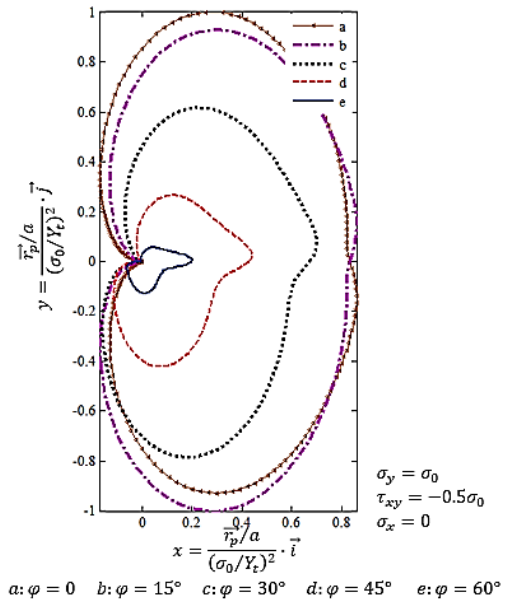
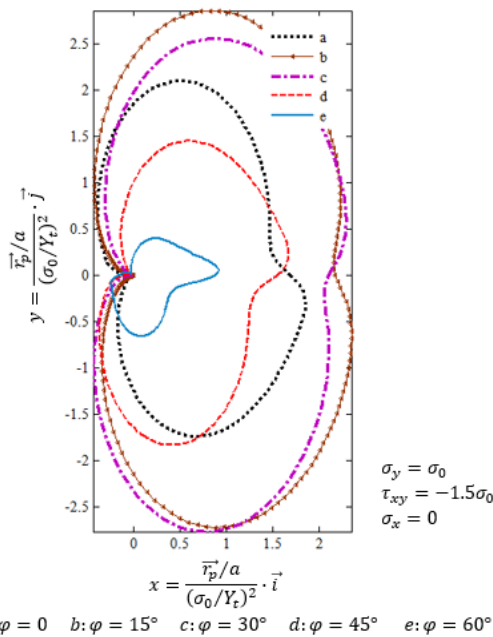


**Fig. 23** The CTPZ shape and size with various crack angel under proportional tension shear loading with  $p = -1.5$  based on Tsai-Hill yield theory for Boron-Epoxy

**Fig. 21** The CTPZ shape and size with various crack angel under proportional tension shear loading with  $p = -0.5$  based on Tsai-Hill yield theory for Boron-Epoxy

شکل 23 اندازه و شکل ناحیه‌ی پلاستیک نوک ترک برای برن-اپوکسی برحسب زوایای مختلف ترک تحت بارگذاری همزمان کشش و برش با  $p = -1.5$  و براساس معیار تسلیم تسای-هیل

شکل 21 اندازه و شکل ناحیه‌ی پلاستیک نوک ترک برای برن-اپوکسی برحسب زوایای مختلف ترک تحت بارگذاری همزمان کشش و برش و براساس معیار تسلیم تسای-هیل ( $p = -0.5$ )

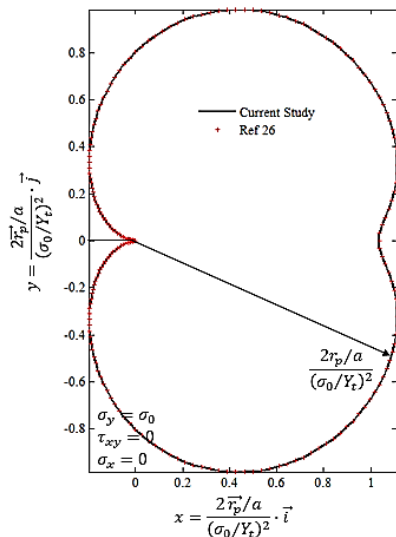


**Fig. 24** The CTPZ shape and size with various crack angel under proportional tension shear loading with  $p = -1.5$  based on Hoffman yield theory for Boron-Epoxy

**Fig. 22** The CTPZ shape and size with various crack angel under proportional tension shear loading with  $p = -0.5$  based on Hoffman yield theory for Boron-Epoxy

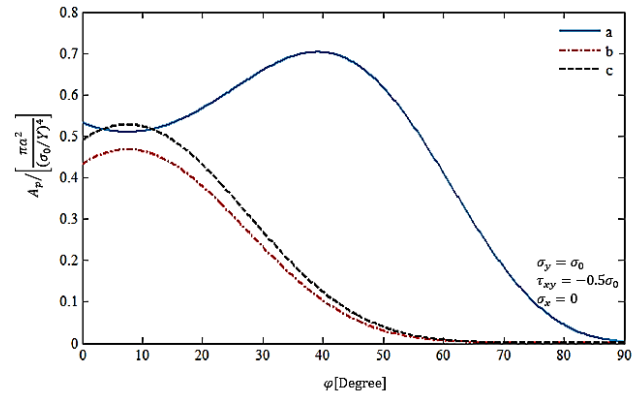
شکل 24 اندازه و شکل ناحیه‌ی پلاستیک نوک ترک برای برن-اپوکسی برحسب زوایای مختلف ترک تحت بارگذاری همزمان کشش و برش با  $p = -1.5$  و براساس معیار تسلیم هافمن

شکل 22 اندازه و شکل ناحیه‌ی پلاستیک نوک ترک برای برن-اپوکسی برحسب زوایای مختلف ترک تحت بارگذاری همزمان کشش و برش با  $p = -0.5$  و براساس معیار تسلیم هافمن



**Fig. 27** The CTPZ shape and size under mode I loading for T300/5208 based on Tsai-Hill yield criterion

شکل 27 شکل و اندازه‌ی ناحیه‌ی پلاستیک نوک ترک برای ماده‌ی T300/5208 تحت بارگذاری مود یک و براساس معیار تسلیم تسای-هیل

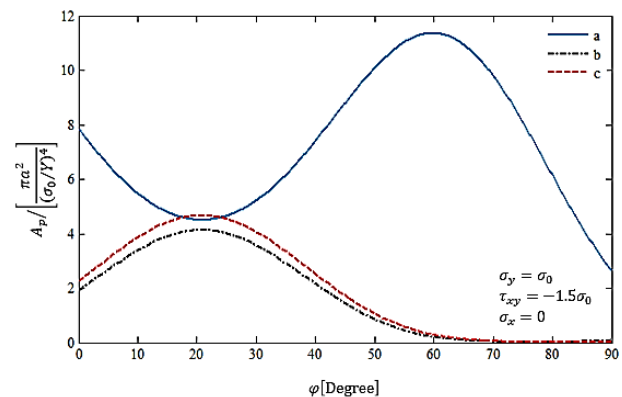


**Fig. 25** Dimensionless area of CTPZ versus different  $\phi$  under proportional tension shear loading with  $p = -0.5$ . (a) Steel based on Tsai-Hill or Hoffman criteria (b) Boron – Epoxy based on Hill (c) Boron – Epoxy based on Hoffman

شکل 25 مساحت بدون بعد ناحیه‌ی پلاستیک برحسب زوایای مختلف ترک تحت بارگذاری همزمان کشش و برش با  $p = -0.5$  (a) فولاد براساس معیار تسای-هیل یا هافمن (b) برن-اپوکسی براساس معیار تسای-هیل (c) برن-اپوکسی براساس معیار هافمن

## 7- مراجع

- [1] D. Roylance, Introduction to fracture mechanics, department of materials science and engineering, *Massachusetts Institute of Technology*, Cambridge, pp. 1-17, 2001.
- [2] C. Sharanaprabhu, S. Kudari, Finite element analysis of minimum plastic zone radius criterion for crack initiation direction under mixed mode loading, *World Congress on Engineering*, AIP, pp. 13-22, 2008.
- [3] K. Golos, B. Wasiluk, Role of plastic zone in crack growth direction criterion under mixed mode loading, *International Journal of Fracture*, Vol. 102, No. 4, pp. 341-353, 2000.
- [4] D. S. Dugdale, Yielding of steel sheets containing slits, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 8, No. 2, pp. 100-104, 1960/05/01/, 1960.
- [5] G. Irwin, Plastic zone near a crack and fracture toughness, *Sagamore Research Conference Proceedings*, 1997.
- [6] J. Rice, G. F. Rosengren, Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 16, No. 1, pp. 1-12, 1968.
- [7] I. Tuba, A method of elastic-plastic plane stress and strain analysis, *Journal of Strain Analysis*, Vol. 1, No. 2, pp. 115-120, 1966.
- [8] L. Stimpson, D. Eaton, *The extent of elasto-plastic yielding at the crack point of an externally notched plane stress tensile specimen*, California Institute of Technology Pasadena Graduate Aeronautical Labs, pp. 1961.
- [9] J. Hult, F. McClintock, Elastic-Plastic Stress and strain distribution around sharp notches; under repeated shear, IX Int, *International Conference on applied mechanics*, Vol. 18, 1957.
- [10] G. Harmain, J. Provan, Fatigue crack-tip plasticity revisited—The issue of shape addressed, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 26, No. 2, pp. 63-79, 1997.
- [11] P. Jing, T. Khraishi, L. Gorbatikh, Closed-form solutions for the mode II crack tip plastic zone shape, *International Journal of Fracture*, Vol. 122, No. 3, pp. L137-L142, 2003.
- [12] T. Banks, A. Garlick, The form of crack tip plastic zones, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 19, No. 3, pp. 571-581, 1984.
- [13] H. Qiang, N. Lu, Unified solutions of crack tip plastic zone under small scale yielding, *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 35, pp. 34-38, 1999.
- [14] Y. Zhang, H. Qiang, Y. Yang, Unified solutions to mixed mode crack tip under small scale yielding, *Jixie Gongcheng Xuebao (Chinese Journal of Mechanical Engineering)*, Vol. 43, No. 2, pp. 50-54, 2007.
- [15] C. Sharanaprabhu, S. Kudari, Study on mixed mode crack-tip plastic zones in CTS specimen, *World Congress on Engineering*, Vol. II, London, pp. 45-52, 2008.
- [16] K. Benrahou, M. Benguediab, M. Belhouari, M. Nait-Abdelaziz, A. Imad, Estimation of the plastic zone by finite element method under mixed mode (I and II) loading, *Computational Materials Science*, Vol. 38, No. 4, pp. 595-601, 2007.
- [17] S. M. Khan, M. K. Khraisheh, A new criterion for mixed mode fracture initiation based on the crack tip plastic core region, *International Journal of Plasticity*, Vol. 20, No. 1, pp. 55-84, 2004.
- [18] A. Jameel, G. Harmain, Y. Anand, J. Masoodi, F. Najjar, Effect of inclusions on the shape and size of crack tip plastic zones by element free galerkin



**Fig. 26** Dimensionless area of CTPZ versus different  $\phi$  under proportional tension shear loading with  $p = -1.5$ . (a) Steel based on Tsai-Hill or Hoffman criteria (b) Boron – Epoxy based on Hill (c) Boron – Epoxy based on Hoffman

شکل 26 مساحت بدون بعد ناحیه‌ی پلاستیک برحسب زوایای مختلف ترک تحت بارگذاری همزمان کشش و برش با  $p = -1.5$  (a) فولاد براساس معیار تسای-هیل یا هافمن (b) برن-اپوکسی براساس معیار تسای-هیل (c) برن-اپوکسی براساس معیار هافمن

تسلیم یک ماده در کشش و فشار بیشتر باشد، این اختلاف بیشتر خواهد بود. در شرایط مختلف بارگذاری همواره اندازه مساحت بدون بعد ناحیه‌ی پلاستیک برای ماده‌ی برن-اپوکسی براساس معیار هافمن بیشتر از مقدار مشابه براساس معیار تسای-هیل به دست آمد و این در صورتی است که این اختلاف برای فولاد صفر است و این اختلاف کاملاً وابسته به نوع ماده و اختلاف بین استحکام تسلیم در کشش و فشار است. شکل ناحیه‌ی پلاستیک در یک بارگذاری خاص برای تمام مواد همسانگرد مشابه است در صورتی که در بارگذاری مشابه در مواد ارتوتروپیک این شکل برای مواد مختلف متفاوت خواهد بود زیرا شکل ناحیه پلاستیک نسبت استحکام تسلیم کشش و فشار وابسته است که این نسبت برای مواد مختلف می‌تواند متفاوت باشد.

- [24] S. M. Khan, M. K. Khraisheh, The anisotropic R-criterion for crack initiation, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, No. 14, pp. 4257-4278, 2008.
- [25] A. Kaminsky, E. Kurchakov, G. Gavrilov, Study of the plastic zone near a crack in an anisotropic body, *International Applied Mechanics*, Vol. 42, No. 7, pp. 749-764, 2006.
- [26] G. Xin, W. Hangong, K. Xingwu, J. Liangzhou, Analytic solutions to crack tip plastic zone under various loading conditions, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 29, No. 4, pp. 738-745, 2010/07/01/, 2010.
- [27] R. Hill, The mathematical theory of plasticity, Oxford University Press London, Google Scholar, 1950.
- [28] O. Hoffman, The brittle strength of orthotropic materials, *Journal of Composite Materials*, Vol. 1, No. 2, pp. 200-206, 1967.
- [29] G. C. Sih, P. Paris, G. R. Irwin, On cracks in rectilinearly anisotropic bodies, *International Journal of Fracture*, Vol. 1, No. 3, pp. 189-203, 1965.
- method, *World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*, Vol. 11, No. 3, pp. 464-469, 2017.
- [19] D. Camas, P. Lopez-Crespo, A. Gonzalez-Herrera, B. Moreno, Numerical and experimental study of the plastic zone in cracked specimens, *Journal of Engineering Fracture Mechanics*, 2017.
- [20] E. Gdoutos, D. Zacharopoulos, Plastic zones in cracked anisotropic plates under small-scale yielding, *Fibre Science and Technology*, Vol. 20, No. 1, pp. 25-35, 1984.
- [21] A. Aksoy, L. Carlsson, Crack tip yield zone estimates in mode II interlaminar fracture of interleaved composites, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 39, No. 3, pp. 525-534, 1991.
- [22] F. Ozdil, L. Carlsson, Plastic zone estimates in mode I interlaminar fracture of interleaved composites, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 41, No. 5, pp. 645-658, 1992.
- [23] E. Kurchakov, G. Gavrilov, Formation of the plastic zone in an anisotropic body with a crack, *International Applied Mechanics*, Vol. 44, No. 9, pp. 982-997, 2008.