



محمدحسن کیهانی'*، محمود نوروزی'، امین امیری دلوئی"

۱ - دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود ۲- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود ۳- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود * شاهرود، صندوق پستی ۳۱۶، کد پستی ۱۹۹۹۹۵۱۶۱، h_kayhani@shahroodut.ac.ir

چکیده- در این مقاله، یک حل تحلیلی برای انتقال حرارت غیردایمی در پین فینهای کامپوزیتی چندلایه با درنظر گرفتن شرایط مرزی کلی در سطح پره ارائه شده است. معادله انتقال حرارت هدایتی دوبعدی در حالت ناپایا برای لمینیتهای اورتوتروپیک استخراج شده و مسئله با اعمال تبدیل لاپلاس از حوزه زمان به فرکانس انتقال یافته است. با استفاده از تئوری اشترم لییوویل یک تبدیل فوریه مناسب استخراج شده و دستگاه معادلاتی بر اساس شرایط مرزی پره و شرایط پیوستگی دما و شار حرارت در مرز بین لایهها ساخته شده است. همچنین از روش توابع مرومرفیک برای محاسبه انتگرال مختلط پیچیده مربوط به تبدیل لاپلاس معکوس بهره برده شده است. نمودارهای مربوط به توزیع دمای غیردایم و تغییرات نرخ سردشدن پره رسم شده و نشان داده شده که اثر هدایت اورتوتروپیک، در نرخهای سردشدن بالا، محسوس تر است.

Analytical investigation of orthotropic unsteady heat transfer in composite pin fins

M. H. Kayhani^{1*}, M. Norouzi², A. A. Delouei³

Associate Prof. of Mech. Eng., Shahrood Univ. of Technology, Shahrood, Iran
 Assistant Prof. of Mech. Eng., Shahrood Univ. of Technology, Shahrood, Iran
 PhD Student of Mech. Eng., Shahrood Univ. of Technology, Shahrood, Iran
 *P. O. B. 316, P. Code: 3619995161, Shahrood, Iran, h kayhani@shahroodut.ac.ir

Abstract- In this paper, an analytical solution of transient heat conduction in multi-layer composite pin fins under the general boundary conditions is presented. The 2D unsteady heat conduction equation in cylindrical coordinate system has been achieved for multi-layer orthotropic laminates. Laplace transformation is applied to change the solution's domain from time into the frequency. An appropriate Fourier transformation has been derived using the Strum-Liouville theorem and a set of equations are obtained based on the boundary conditions of fin and temperature/heat flux continuity at boundaries located between the layers. The Meromorphic function method is utilized to find the complicated complex integration of inverse Laplace. Diagrams of unsteady temperature distribution and cooling rate of

pin fin have been depicted and it is shown that the effects of orthotropic conduction are more noticeable in high convection coefficients.

Keywords: Analytical Solution, Strum-Liouville Theorem, Orthotropic Conduction, Meromorphic Functions

۱– مقدمه

پیشرفتهای اخیر در زمینه طراحی و تولید سازههای کامپوزیتی آنها را در زمره یکی از تاثیر گذارترین مواد در حوزههای مختلف صنعت، حملونقل، خطوط انتقال مایعات و ... قرار داده است. این پیشرفتها عمدتاً ناشی از خواص منحصر به فرد این مواد مانند نسبت استحکام به وزن بالا، مقاومت به خوردگی، قابلیت شکلپذیری، هزینههای تولید پایین و ... است. بدیهی است که با افرایش روزافرون کاربرد این مواد دانش مرتبط با آنها نیز گسترش یافته است.

مطالعات پیشین در زمینه انتقال حرارت مواد کامپوزیتی عمدتاً به بررسیهای عددی محدود شده است. کرلی و ادوانی[۱] دمای یک صفحه کامپوزیتی نازک که در معرض یک منبع گرمایی متمرکز قرار دارد را با روشهای عددی و تجربی بهدست آوردهاند. آنها یک بررسی پارامتریک برای منعین اعداد بی عد مهم و تاثیرشان بر توزیع درجه حرارت صفحه ارائه دادهاند. اینگار[۲] انتقال حرارت غیردایمی هدایتی را در یک ورق کامپوزیتی مورد بررسی قرار داده و از فرمولاسیون المان محدود برای تحلیل این مسئله استفاده کرده است. این تحلیل بر روی لمینیت گرافیت/اپوکسی با آرایش الیاف[°۹۰, °۴۵±, °۰] و در شرایط مرزی مختلف انجام شده است. سونائو و همکاران[۳] حل عددی را برای انتقال حرارت پایدار هدایتی در ورقهای کامپوزیتی ارائه کردهاند. آنها اثرات نتقال حرارت بر روی لایه داخلی را که ناشی از القا خاصیت ترموپلاستیک ماده است مورد بررسی قرار دادند.

گو[۴] به طور عددی انتقال حرارت هدایتی در لمینیتهای ضخیم را مطالعه کرده و با استفاده از روش المان محدود، انتقال حرارت غیردایمی را در حضور تولید انرژی داخلی بررسی کرده است. چترجی و همکاران[۵] با استفاده از فرمولاسیون مرز محدود اقدام به محاسبه انتقال حرارت پایدار در کامپوزیتهای سهبعدی کردهاند. آنها، با استفاده از توابع خطی و درجه چهار، توزیع دما و شار حرارتی را در این لمینیتها بهدست آوردند. یوونت و همکاران[۶] نیز فرمولاسیون مناسبی را بر مبنای روش المان محدود برای حل عددی انتقال حرارت موثر در کامپوزیتها ارائه دادهاند.

فعالیتهایی نیز در زمینه حل تحلیلی انتقال حرارت در مواد کامپوزیتی صورت گرفته است. آرگیریس و همکاران [۷]

بررسی تحلیلی را بر روی انتقال حرارت در لمینیت های تخت مثلثی انجام دادهاند. آن ها در فرمولاسیون خود اثر هر سه مکانیزم انتقال حرارت هدایتی، همرفتی و تشعشعی را بر لمینیت در نظر گرفتند. فرمولاسیون آن ها بر مبنای انتقال حرارت مرتبه اول لمینیت کامپوزیتی بود و تغییرات خطی را برای انتقال حرارت در جهت ضخامت لایه ها لحاظ کردند و در نهایت نشان دادند که استفاده از این فرمولاسیون از نظر هزینه محاسباتی بسیار موثرتر از محاسبات عددی است. ما و همکاران [۸-۹] حل تحلیلی انتقال حرارت هدایتی در محیطهای چندلایه غیرایزوتروپیک را در دو حالت، بدون در نظر گرفتن منبع گرمایی و همراه با گرمایش داخلی، به طور محیصات خطی مسئله انیزوتروپ را به شکل ساده ایزوتروپ تبدیل کرده و مسئله را حل کردهاند.

اوسلوکا[۱۰] نیز، با استفاده از توابع گرین و فرمول بندی انتگرالی معادله انتقال حرارت، پاسخی برای انتقال حرارت در واسطهای کامپوزیتی بهدست آورده است. سان و ویچمن[۱۱] در مقاله خود حلى تحليلي از انتقال حرارت يک بعدي غيردايم در یک بلوک کامپوزیتی ارائه کردهاند. لو و همکاران[۱۲] انتقال حرارت در جدارههای مرکب استوانهای شکل را مورد مطالعه قرار دادند. آنها در تحلیل خود از روش جداسازی متغیرها استفاده کرده و نشان دادهاند که حل آن ها دارای تطابق مناسبی با محاسبات عددی است. حاجی شیخ و همکاران[۱۳] یک فرمولاسیون ریاضی برای میدان دما در حالت پایدار در اجسام چندلایه و چندبعدی بهدست آوردهاند و در ادامه اثبات کردهاند که مقادیر ویژه برای حالتی که لایهها همگن باشد حقیقی است، در حالی که برای حالت اورتوتروپ این مقادیر میتوانند موهومی باشند. سینگ و همکاران[۱۴] حل تحلیلی انتقال حرارت هدایتی در مختصات قطبی چندلایه در جهت شعاعی را مورد بررسی قرار دادهاند. بهادر و بارکهن[۱۵] یک حل تحلیلی برای توزیع دما و نرخ انتقال حرارت در پینفینهای استوانهای (تكلايه) با ضرايب هدايت گرمايي اورتوتروپ ارائه داده و سپس نتایج را با حل عددی به روش اجزا محدود مقایسه کردهاند. اونیجکوه [۱۶] یک حل دقیق برای انتقال حرارت در محیطهای کامپوزیتی با استفاده از تئوری انتگرال مرزی ارائه داده است. کیهانی و همکاران [۱۷–۱۸] حل تحلیلی هدایت پایا

در لمینیتهای کامپوزیتی استوانهای در جهتهای شعاعی و (r,z) و همچنین جهتهای شعاعی و طولی (r,z) را مورد بررسی قرار دادهاند. این حلها تنها برای گذشت زمانهای زیاد و حالت دایم معتبرند.

بررسی انتقال حرارت در فرایند تولید مواد مرکب نیز از اهمیت فراوانی برخوردار است. برای نمونه میتوان به پژوهش حسن و همکارانش [۱۹] در زمینه تحلیل اثر انتقال حرارت در حین ترکیب الیاف و ماده زمینه اشاره کرد. در این پژوهش، شرح مناسبی از تئوری انتقال حرارت در لمینیتهای کامپوزیتی ارائه شده است. نیونهام و آبرات [۲۰] نیز در مقاله خود به تحلیل انتقال حرارت کاربردی (کاربرد در فرایند تولید) به روش المان محدود در مواد غیرایزوتروپ پرداختهاند.

در مطالعه حاضر یک حل تحلیلی برای توزیع دمای غیردایم در پرههای کامپوزیتی چندلایه (با درنظر گرفتن خواص اورتوتروپیک هر یک از لایهها) ارائه شده و نرخ سردشدن پره در حالت پایا محاسبه شده است. پره مورد بررسی استوانهای شکل بوده و الیاف در جهتهای مشخص به دور آن پیچیده شدهاند. شکل ۱ هندسه و لایهبندی مربوط به پینفین مورد بحث را نشان میدهد. زوایه الیاف در هر کدام از لایههای لمینیت می تواند تغییر کند. در این مقاله بر روی انتقال حرارت (r, z) ناپایای متقارن دوبعدی در جهتهای طولی و شعاعی تمرکز کردهایم. همچنین، شرایط مرزی در سطح تبادل حرارت با محیط به صورت کلی در نظر گرفته شده است تا در صورت نیاز تمامی مکانیزم انتقال حرارت را پوشش دهد. تبدیل لاپلاس بر روی معادله انرژی اعمال شده تا مسئله از حوزه زمان به فرکانس انتقال یابد. سیس معادله دیفرانسیل جزئی حاصل با استفاده از یک تبدیل فوریه ٔ مناسب به یک معادله معمولی ساده شده است. در اینجـا از تئـوری اشـترم لییوویـل^۲ برای استخراج تبدیل فوریه منطبق با شرایط مرزی بهره بردهایم. با توجه به شرایط مرزی مسئله و همچنین معادلات پیوستگی دما و شار حرارت در مرز بین لایهها یک دستگاه معادلات برای ضرایب سری فوریه حاصل خواهد شد که این دستگاه با استفاده از الگوریتم توماس ٔ حل شده و جوابها به

صورت روابط بازگشتی ارائه شده است. در نهایت تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس معکوس اعمال شده است تا توزیع دما در حوزه زمان بهدست آید. مهمترین مشکل در روند کار حل انتگرال مختلط پیچیده مربوط به تبدیل لاپلاس معکوس است که در اینجا از روشی موسوم به روش توابع مرومرفیک⁶ جهت حل آن بهره جستهایم. از نتایج حاصل برای رسم نمودارهای مرتبط با دمای متوسط لمینیت و کانتورهای توزیع دما در زمانهای مختلف استفاده شده است. همچنین، نمودارهای مربوط به تغییرات نرخ سردشدن پینفین با ضرایب هدایت و ابعاد پره رسم و با کارهای دیگران مقایسه شده است.



شکل ۱ هندسه و شرایط مرزی مربوط به پره

۲- هدایت در مواد مرکب

در این بخش، به صورت مختصر مسئله انتقال حرارت هدایتی در مواد مرکب چندلایه معرفی شده است. رابطه فوریه برای انتقال حرارت در محیطهای اورتوتروپ به صورت کلی زیر نوشته می شود[۲۱]:

$$\begin{cases} q_x \\ q_y \\ q_z \end{cases} = - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix}$$
(1)

5. Meromorphic Function Method

^{1.} Laplace Transformation

^{2.} Fourier Transformation

^{3.} Sturm-Liouville Theorem

^{4.} Thomas Algorithm

$$\overline{k_{11}} = m_l^2 k_{11} + n_l^2 k_{22}
\overline{k_{22}} = n_l^2 k_{11} + m_l^2 k_{22}
\overline{k_{33}} = k_{22}
\overline{k_{12}} = \overline{k_{21}} = m_l n_l (k_{11} - k_{22})
\overline{k_{13}} = \overline{k_{31}} = 0
\overline{k_{23}} = \overline{k_{32}} = 0$$
(7)

در این روابط $\theta \cos \theta$ با m_l و $\sin \theta$ با n_l نشان داده شده است. از آنجایی که در مطالعه حاضر انتقال حرارت هدایتی در پرههای استوانهای مورد بررسی قرار گرفته است، بایستی مسئله در مختصات استوانهای حل شود. الیاف در هر لایه به دور استوانه در جهتهای مشخص پیچیده شدهاند و r، φ و zمولفههای دستگاه مختصات فرعی (مرجع) هستند.

θ به صورت زاویه بین دو خط مماس بر استوانه یکی در جهت الیاف و دیگری در جهت φ تعریف میشود. در دستگاه مختصات فرعی رابطه فوریه در یک ماده اورتوتروپ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} q_r \\ q_{\phi} \\ q_z \end{cases} = - \begin{bmatrix} \overline{k}_{11} & \overline{k}_{12} & \overline{k}_{13} \\ \overline{k}_{21} & \overline{k}_{22} & \overline{k}_{23} \\ \overline{k}_{31} & \overline{k}_{32} & \overline{k}_{33} \end{bmatrix} \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{1}{\partial T} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{cases}$$
(f)

از آنجا که در دستگاه مختصات استوانهای زاویه الیاف نسبت به مولفه دوم یعنی arphi تعریف شده است، ضرایب هدایت (معادله ۳) بایستی بازآرایی شوند.

$$k_{11} = k_{22}$$

$$\overline{k}_{22} = m_l^2 k_{11} + n_l^2 k_{22}$$

$$\overline{k}_{33} = n_l^2 k_{11} + m_l^2 k_{22}$$

$$\overline{k}_{12} = \overline{k}_{21} = 0$$

$$\overline{k}_{13} = \overline{k}_{31} = 0$$

$$\overline{k}_{23} = \overline{k}_{32} = m_l n_l (k_{11} - k_{22}) \qquad (\Delta)$$

با اعمال معادله موازنه انرژی بـرای یـک المـان اسـتوانهای و استفاده از روابط (۴) در (۵)، معادلـه انتقـال حـرارت دوبعـدی ناپایا در لمینیت استوانهای بهدست خواهد آمد:

$$\overline{k}_{11} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \overline{k}_{33} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + (\overline{k}_{13} + \overline{k}_{31}) \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial z} + \frac{k_{13}}{r} \frac{\partial T}{\partial z} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$
(9)

که در این رابطه q شار حرارتی، k_{ij} ضریب انتقال حرارت هدایتی و T دماست. رابطه بین ضرایب انتقال حرارت به طور کامل در مراجع معرفی شده است[۲۲–۲۳]. با توجه به این که لمینیتهای کامپوزیتی از چیدن لایههای مختلف با راستای الیاف متفاوت ساخته میشوند، از دو دستگاه مختصات اصلی الیاف متفاوت ساخته میشوند، از دو دستگاه مختصات اصلی مرکب استفاده میشود[۲۴] به طوری که محور r_1 در راستای الیاف، محور r_2 عمود بر راستای الیاف در صفحه لایه کامپوزیتی و محور r_3 عمود بر صفحه لایه قرار دارند. نحوه قرار گیری این دستگاههای مختصات در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲ دستگاههای مختصات اصلی و فرعی

حال با توجه به تعریف دستگاه مختصات مرجع (دستگاه فرعی)، میتوان کمیتهای فیزیکی را در جهتهای ثابت بررسی کرد. در هر لایه بین دستگاه مختصات اصلی و فرعی به اندازه زاویه θ انحراف وجود دارد و محور x_3 دستگاه مختصات اصلی با محور z دستگاه مختصات فرعی همجهت است. در دستگاه مختصات اصلی رابطه فوریه برای یک ماده مرکب به صورت زیر است [۲۵]:

$$\begin{cases} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ on \end{cases} = - \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{22} \end{bmatrix}_{on} \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x_1} \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} \end{bmatrix}_{on}$$
 (7)

با استفاده از یک دوران به اندازه θ می توان از محور مختصات فرعی به اصلی رسید، به طوری که اگر ضرایب انتقال حرارت در جهات اصلی با $\begin{bmatrix} k \end{bmatrix}$ و در جهات فرعی با $\begin{bmatrix} \overline{k} \end{bmatrix}$ نشان داده شود، داریم: دورهٔ یازدهم، شمارهٔ ۴/ زمستان ۱۳۹۰

که f(r,z) میتواند هر تابع دلخواهی باشد. ثابتهای a و b میتواند هر تابع دلخواهی باشد. ثابتهای r(r,z) به تر تیب ابعادی مشابه ضریب انتقال حرارت جابه جایی، یعنی W/mK، و ضریب انتقال حرارت هدایتی، یعنی w/m²K دارند. شایان ذکر است که شرایط مرزی خطی در جهت طولی در کلی ترین شکل خود درنظر گرفته شده است. همچنین شرط مرزی تقارن و یا دما محدود را میتوان برای قسمت مرکزی استوانه در نظر گرفت. در ادامه به منظور انتقال معادل انرژی (۹) از حوزه زمان (1) به حوزه فرکانس (۶) از تبدیل لاپلاس استفاده شده است (۶) از تبدیل لاپلاس استفاده شده است.

$$\pounds\left\{\phi(r,z,t)\right\} = \overline{\phi}\left(r,z,s\right) \tag{11}$$

با اعمال تبدیل لاپلاس و شرایط اولیه روی معادله (۹)، معادله انرژی به صورت زیر در میآید:

$$\alpha_r \frac{\partial^2 \overline{\phi}}{\partial r^2} + \alpha_r \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial r} + \alpha_{z,i} \frac{\partial^2 \overline{\phi}}{\partial z^2} - s\overline{\phi} = 0$$
(17)

علاوه بر این، شرایط مرزی نیز در حوزه فرکانس به صورت زیر بیان می شوند:

$$\overline{\phi}(r,0,s) = \phi_b / s. \tag{1-14}$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}(r,L,s)}{\partial z} = 0. \tag{(Y-1f)}$$

$$a\overline{\phi}(r_{n_l},z,s) + b\frac{\partial\overline{\phi}(r_{n_l},z,s)}{\partial r} = \overline{f}(z,s) \tag{(7-14)}$$

که

۲۵

$$\overline{f}(r,z,s) = \pounds \{ f(r,z,t) \}$$
(10)

در ادامه لازم است تا با استفاده از قضیه اشترم-لیوویل تبدیل فوریه مناسب استخراج شود[۲۶]. با اعمال قضیه اشترم-لیوویل در راستای محور z، تبدیل فوریه تابع دلخواه g تحت شرایط مرزی مسئله (معادلات (۱۴–۱) و (۱۴–۲)) به-دست خواهد آمد:

$$F(g) = \frac{2}{L} \int_0^L \left[g(z) \sin(\lambda_n z) \right] dz \tag{19}$$

که مقادیر ویژه λ_n از رابطه زیر بهدست میآید.

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}, \ n = 0, 1, 2, \dots$$
(1Y)

حال با توجه به تبدیل فوریه بهدست آمده (معادلـه ۱۶) و استفاده از انتگرال جزء به جزء، مشتق دوم نسبت به z بهدست میآید. که در آن *p* و _p به ترتیب نمایانگر چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه در فشار ثابتاند.

از طرفی در بحث حاضر انتقال حرارت هدایتی در محیطهای چندلایه مورد توجه است؛ بنابراین بایستی رابطه بین لایهها توسط معادلات پیوستگی مربوط به دما و شارحرارت درنظر گرفته شود. با توجه به شکل ۱، اگر $r = r_i$ مرز بین دو لایه مجاور i = 1 باشد، پیوستگی دما و شار حرارت به صورت زیر خواهد بود:

$$T^{(i)} = T^{(i+1)} \tag{1-Y}$$

$$\frac{\partial T^{(i)}}{\partial r} = \frac{\partial T^{(i+1)}}{\partial r} \tag{(Y-Y)}$$

۳- حل تحلیلی هدایت حرارتی غیردایم

در این قسمت، یک حل تحلیلی برای انتقال حرارت ناپایا تحت شرایط مرزی کلی در سطح پره ارائه شده است. شرایط مرزی ارائهشده میتواند دربرگیرنده انواع شرایط مرزی شامل شرایط مرزی نوع اول، دوم و سوم باشد. برای سادهسازی، پروفیل دمای اصلاحشده به شکل زیر تعریف شده است:

$$\phi(r,z,t) = T(r,z,t) - T_i \qquad (\lambda)$$

که _آ نمایانگر دمای اولیه است. در این صورت، معادله انتقـال حرارت دوبعدی به صورت زیر درخواهد آمد:

$$\alpha_r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \alpha_r \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \alpha_{z,i} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial \phi}{\partial t}$$
(9)

که

$$\alpha_r = \frac{k_{22}}{\rho c_p} \tag{1-1}$$

$$\alpha_{z,i} = \frac{n_i^2 k_{11} + m_i^2 k_{22}}{\rho c_p}$$
 (Y-1.)

توجه به این مورد ضروری است که $\alpha_{z,i}$ تابعی از زاویه الیاف بوده و لایه به لایه تغییر می کند. شرایط اولیه و مرزی به صورت زیر بیان شده است: (((-())) $\alpha_{z,i} = 1 - 2 - n$

$$(r, 2, 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n_l$$

$$\phi(r,0,t) = \phi_b \tag{(7-11)}$$

$$\frac{\partial \phi(r,L,t)}{\partial z} = 0 \tag{(-11)}$$

$$a\phi(r_{n_l},z,t) + b\frac{\partial\phi(r_{n_l},z,t)}{\partial r} = f(z,t) \tag{(f-11)}$$

$$F\left(g^{"}\right) = \left\{\frac{2\lambda_{n}}{L}\left[\frac{\phi_{b}}{s}\right] - \lambda_{n}^{2} F\left(g\right)\right\}$$
(1A)

حال اگر این تبدیل فوریه را بر روی معادله (۹) اعمال کنیم، خواهیم داشت:

$$\alpha^{*} \frac{\partial^{2} U}{\partial r^{2}} + \alpha^{*} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \left(\lambda_{n}^{2} + \frac{s}{\alpha_{z,i}}\right) U$$
$$= \frac{2\lambda_{n}}{L} \times \left[-\frac{\phi_{end}}{s}\right]$$
(19)

که

$$\alpha^* = \frac{\alpha_r}{\alpha_{z,i}} \tag{(Y \cdot)}$$

همچنین، شرط مرزی کلی در جهت r (معادله (۱۴–۳)) به صورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$a U(r_{n_l}, n, s) + b \frac{\partial U(r_{n_l}, n, s)}{\partial r} = F(n, s)$$
(1)

که در آن:
$$U(r,n,s) = F\left(\overline{\phi}(r,z,s)\right)$$
 (۱-۲۲)

$$F(n,s) = F\left(\overline{f}(z,s)\right) \tag{Y-YY}$$

جواب کلی معادله (حوزه فرکانس) در هـر لایـه از لمینیـت کامپوزیتی به صورت زیر خواهد بود:

$$U^{(i)}(r,n,s) = a_n^{(i)} I_0(\omega_{n,s}r) + b_n^{(i)} K_0(\omega_{n,s}r) + w^{(i)}(r,n,s)$$
(YY)

که

$$\omega_{n,s,i} = \sqrt{\lambda_n^2 + \frac{s}{\alpha_{z,i}}} \tag{(YF)}$$

و w(r,n) پاسخ غیرهمگن معادله (۱۹) است و در حالت کلی برابر است با:

$$w^{(i)}(r,n,s) = \left(\frac{2\lambda_n}{L} \times \frac{-\phi_b}{s}\right) \times \left[I_0\left(\omega_{n,s,i}r\right) \times \int_{r_0}^{r_{n_l}} \left[r \times K_0\left(\omega_{n,s,i}r\right)\right] dr + K_0\left(\omega_{n,s,i}r\right) \times \int_{r_0}^{r_{n_l}} \left[r \times I_0\left(\omega_{n,s,i}r\right)\right] dr\right] (\Upsilon\Delta)$$

در روابط بالا I_0 و K_0 به ترتیب توابع بسل اصلاحشده نوع اول و دوم از مرتبه صفرند. در نهایت با اعمال شرایط مرزی در جهت r و پیوستگی دما و شار حرارت در مرز بین لایهها ضرایب $a_{n,s}$ و $b_{n,s}$ بهدست میآیند:

•
$$a_{n,s}^{(n_l)} \left[aI_0 \left(\omega_{n,s,n_l} r_{n_l} \right) + b \omega_{n,s,n_l} I_1 \left(\omega_{n,s,n_l} r_{n_l} \right) \right] + b_{n,s}^{(n_l)} \left[aK_0 \left(\omega_{n,s,n_l} r_{n_l} \right) - b \omega_{n,s,n_l} K_1 \left(\omega_{n,s,n_l} r_{n_l} \right) \right] = F(n,s) - a w^{(n_l)}(r_{n_l}, n, s) - b \frac{\partial w^{(n_l)}(r_{n_l}, n, s)}{\partial r}$$
(1-79)
• I; شرط مرزی تقارن محوری در مرکز استوانه نتیجه می شود:

$$b_{n,s}^{(1)} = 0 \tag{(Y-Y)}$$

$$U^{(i)}(r_{i},n,s) = U^{(i+1)}(r_{i},n,s) \Rightarrow$$

$$a_{n,s}^{(i)}I_{0}(\omega_{n,s,i}r_{i}) + b_{n,s}^{(i)}K_{0}(\omega_{n,s,i}r_{i})$$

$$- a_{n,s}^{(i+1)}I_{0}(\omega_{n,s,i+1}r_{i}) + b_{n,s}^{(i+1)}K_{0}(\omega_{n,s,i+1}r_{i})$$

$$= w^{(i+1)}(r_{i},n,s) - w^{(i)}(r_{i},n,s) \qquad (\Upsilon-\Upsilon\mathcal{F})$$

$$\frac{\partial U^{(i)}\left(r_{i},n,s\right)}{\partial r} = \frac{\partial U^{(i+1)}\left(r_{i},n,s\right)}{\partial r} \Longrightarrow$$
$$a_{n,s}^{(i)}\omega_{n,s,i}I_{1}\left(\omega_{n,s,i}r_{i}\right) + b_{n,s}^{(i)}p_{n,s,i}K_{1}\left(\omega_{n,s,i}r_{i}\right) - a_{n,s}^{(i+1)}\omega_{n,s,i+1}I_{1}\left(\omega_{n,s,i+1}r_{i}\right) + b_{n,s}^{(i+1)}\omega_{n,s,i+1}\times$$

$$K_{1}\left(\omega_{n,s,i+1}r_{i}\right) = \frac{\partial w^{(i+1)}\left(r_{i},n,s\right)}{\partial r} - \frac{\partial w^{(i)}\left(r_{i},n,s\right)}{\partial r} \quad (\pounds - \Upsilon \mathcal{F})$$

 I_1 و K_1 به ترتیب توابع بسل اصلاحشده نوع اول و دوم از مرتبه یک هستند. حال برای تعیین ضرایب $a_{n,s}^{(i)}$ و $a_{n,s}^{(i)}$ بایستی در هر n و برای تمامی لایهها دستگاه معادلات شامل روابط (۲-۲)، (۲-۲)، (۲-۳) و (۴-۲۶) حـل شـوند. دستگاه معادلات حاصل یک دستگاه پنج قطری است کـه در مقالـه حاضر، با استفاده از الگوریتم توماس، ماتریس ضرایب پنجقطری مذکور به یک ماتریس دوقطری تبدیل شده است که درایههای مروی قطر اصلی همگی مساوی یک هستند. در ادامه، با استفاده از روابط بین سطرها در دستگاه معادلات به دست آمـده، روابط بازگشتی زیر برای محاسبه $a_{n,s}$ و $a_{n,s}$ به ازای مقادیر مختلف n حاصل شده است.

Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-01

$$\gamma_{i} = \frac{I_{0}\left(\omega_{n,s,i}r_{i}\right)}{\chi_{i} \times K_{0}\left(\omega_{n,s,i+1}r_{i}\right) - I_{0}\left(\omega_{n,s,i+1}r_{i}\right)}$$
(Y-Y9)

$$\psi_{i} = \frac{\pi_{i} \times K_{0}\left(\omega_{n,s,i+1}r_{i}\right) + K_{0}\left(\omega_{n,s,i}r_{i}\right)}{\chi_{i} \times K_{0}\left(\omega_{n,s,i+1}r_{i}\right) - I_{0}\left(\omega_{n,s,i+1}r_{i}\right)}$$
(F-Y9)

$$E_{i} = \pi_{i} \left[\left(\frac{\partial w^{(i+1)}(r_{i}, n, s)}{\partial r} - \frac{\partial w^{(i)}(r_{i}, n, s)}{\partial r} \right) - \omega_{n,s,i} \left(w^{(i+1)}(r_{i}, n, s) - w^{(i)}(r_{i}, n, s) \right) I_{1} \left(\omega_{n,s,i+1} r_{i} \right) \right]$$

$$(\Delta - \Upsilon \mathbf{9})$$

$$F_{i} = \frac{E_{i} \times K_{0}\left(\omega_{n,s,i+1}r_{i}\right) - w^{(i+1)}\left(r_{i},n,s\right) - w^{(i)}\left(r_{i},n,s\right)}{\chi_{i} \times K_{0}\left(\omega_{n,s,i+1}r_{i}\right) - I_{0}\left(\omega_{n,s,i+1}r_{i}\right)}$$
(۶-۲۹)

در نهایت با مشخص شدن ضرایب $a_{n,s}$ و $b_{n,s}$ برای هر لایه می توانیم توزیع درجه حرارت (در حوزه فرکانس) لایه های مختلف را با اعمال تبدیل فوریه معکوس مشخص کنیم [۲۶].

$$\overline{\phi}^{(i)}(r,z,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n,s,i}^{(i)} I_0\left(\omega_{n,s,i}r\right) + b_{n,s}^{(i)} K_0\left(\omega_{n,s,i}r\right) + w^{(i)}(r,n,s) \right) \\ \times \left(a_1 \sin\left(\lambda_n z\right) - b_1 \lambda_n \cos\left(\lambda_n z\right) \right)$$
 (\mathbb{V} ·)

شایان ذکر است که در رابطه بالا ضرایب $a_{n,s}^{(i)}$ و $b_{n,s}^{(i)}$ و شایان ذکر است که در رابطه بالا ضرایب $a_{n,s,i}^{(i)}$ و همچنین آرگومان توابع بسل ($\omega_{n,s,i}$) همگی تابعی از s میباشند. دمای لایهها در حوزه زمان و مکان با اعمال تبدیل لاپلاس معکوس روی معادله (۳۰) بهدست خواهد آمد:

$$\phi (r, z, t) = \mathfrak{t}^{-1} \left\{ \overline{\phi} (r, z, s) \right\}$$
$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} \overline{\phi} (r, z, s) ds \qquad (\ref{eq:product})$$

در رابطه (۳۱)، c عدد ثابت مختلطی است که بخش حقیقی کلیه قطبهای تابع $\overline{\phi}$ از بخش حقیقی عدد c بزرگتر است. با توجه به پیچیدگی بسیار زیاد انتگرال مختلط فوق، به نظر می رسد که به دست آوردن رابطه مشخصی از محاسبه این انتگرال کار بسیار دشوار و یا غیر ممکن است. در اینجا از روشی موسوم به روش تابع مرومرفیک [۲۷] جهت محاسبه انتگرال فوق استفاده شده است. مطابق این روش، یک تابع به صورت زیر بر روی $\overline{\phi}$ برازش می شود:

$$\begin{cases} a_n^{(1)} = M_n^{(1)} \\ b_n^{(1)} = 0 \end{cases}$$
 (1-TY)

$$\begin{cases} b_n^{(i)} = N_n^{(i)} - \alpha_n^{(i)} . a_n^{(i)} \\ a_n^{(i)} = M_n^{(i)} - \beta_n^{(i)} . b_n^{(i)} \end{cases}, \ 1 < i < n_l - 1 \tag{Y-YY}$$

$$b_n^{(n_l)} = N_n^{n_l} - \alpha_n^{(n_l)} . a_n^{(n_l)}$$
(Y-YY)

ضرایب
$$lpha_n$$
، eta_n ، M_n و M_n برای هر لایـه از روابـط زیـر
پیروی میکنند:

$$\alpha_{n,s}^{(n_l)} = \frac{a I_0(\omega_{n,s,n_l} r_{n_l}) + b \omega_{n,s,n_l} I_1(\omega_{n,s,n_l} r_{n_l})}{a K_0(\omega_{n,s,n_l} r_{n_l}) - b \omega_{n,s,n_l} K_1(\omega_{n,s,n_l} r_{n_l})} \quad (1-\Upsilon \Lambda)$$

$$M_{N_l}^{(n_l)} = F(n,s) - a W^{(n_l)}(r_{n_l}, n, s) - b \frac{\partial W^{(n_l)}(r_{n_l}, n, s)}{\partial r}$$

$$N_{n,s}^{(n_l)} = \frac{P(r,s) - \omega m (n_l,s,s) - \omega}{a K_0(\omega_{n,s,n_l}r_{n_l}) - b \omega_{n,s,n_l}K_1(\omega_{n,s,n_l}r_{n_l})}$$

$$(\Upsilon - \Upsilon \Lambda)$$

$$\begin{cases} \beta_{n,s}^{(i+1)} = \frac{\pi_i}{\chi_i - \alpha_{n,s}^{(i+1)}} \\ M_{n,s}^{(i+1)} = \frac{E_i - N_{n,s}^{(i+1)}}{\chi_i - \alpha_{n,s}^{(i+1)}} \\ \alpha_{n,s}^{(i)} = \frac{\gamma_i}{\psi_i - \beta_{n,s}^{(i+1)}} \\ N_{n,s}^{(i)} = \frac{F_i - M_{n,s}^{(i+1)}}{\psi_i - \beta_{n,s}^{(i+1)}} \end{cases}, 1 < i < n_l - 1$$
 (Y-YA)

$$M_n^{(1)} = \frac{N_n^{(1)}}{\alpha_n^{(1)}}$$
(f-TA)

برای اجتناب از پیچیدگی و طولانی شدن عبارات فوق، ضرایب برای اجتناب از پیچیدگی و طولانی شدن عبارات فوق، ضرایب $F_i = I_i (\eta_i \cdot \eta_i) \cdot I_i (\eta_i \cdot \eta_i) \cdot I_i (\eta_i \cdot \eta_i)$

$$\frac{-I_0\left(\omega_{n,s,i}r_i\right)K_1\left(\omega_{n,s,i}r_i\right) - I_1\left(\omega_{n,s,i}r_i\right)K_0\left(\omega_{n,s,i}r_i\right)}{\frac{\omega_{n,s,i}}{\omega_{n,s,i}}I_0\left(\omega_{n,s,i}r_i\right)K_1\left(\omega_{n,s,i+1}r_i\right) + I_1\left(\omega_{n,s,i}r_i\right)K_0\left(\omega_{n,s,i+1}r_i\right)}$$
(1-19)

$$\chi_{i} = \frac{-\frac{\omega_{n,s,i+1}}{\omega_{n,s,i}}I_{0}(\omega_{n,s,i}r_{i})I_{1}(\omega_{n,s,i+1}r_{i}) + I_{0}(\omega_{n,s,i+1}r_{i})I_{1}(\omega_{n,s,i}r_{i})}{\frac{\omega_{n,s,i}}{\omega_{n,s,i}}I_{0}(\omega_{n,s,i}r_{i})K_{1}(\omega_{n,s,i+1}r_{i}) + I_{1}(\omega_{n,s,i}r_{i})K_{0}(\omega_{n,s,i+1}r_{i})}$$

$$(\Upsilon-\Upsilon9)$$

محمدحسن کیهانی و همکاران

$$\overline{\phi}^{(i)}(r,z,s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\kappa_i}{s + \theta_i}$$
(YY)

$$\phi^{(i)}(r,z,t) = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i \exp(-\vartheta_i t)$$
(TT)

۴- نتایج و بحث

در این بخش، سعی شده است که با ارائه یک نمونه عملی توانایی حل ارائهشده در بررسی مسائل مربوط به پرههای چندلایه کامپوزیتی برای آرایشهای مختلف الیاف نشان داده شود. مسئله در حالت ناپایدار حل شده است و درستی جواب در حالت پایدار (بعد از رسیدن به جواب پایدار) با حل تحلیلی آقایان بهادر و بارکهن [۱۵] برای نرخ انتقال حرارت از پرههای اورتوتروپ (یکلایه) مقایسه شده است. شرایط مرزی به کاربرده شده در این مقاله شامل شرط مرزی دما ثابت و عایق در دو انتهای پره و شرط مرزی جابهجایی در سطح پره است. جدول ۸ هندسه و شرایط مرزی حاکم بر مسئله را نشان میدهد. مساوی ۲۳ⁿ کاربر و ظرفیت گرمایی ویژه به ترتیب مساوی ۲۹۳۰ و کاره رو لارو Kg/m در نظر گرفته شده است. سایر متغیرهای دخیل در حل مسئله در توضیحات مربوط به هر نمودار شرح داده خواهد شد.

جدول ۱ هندسه و شرایط مرزی پره

قطر پرہ	٠/٩
طول پره (cm)	۵
دمای اولیه (°c)	۴۵
دمای پایه پره (°c)	۹۵
دمای محیط (°c)	۴۵
تعداد لايهها	۵

به منظور بررسی اثر زاویه الیاف روی توزیع درجه حرارت و نرخ سردشدن پره، سه آرایش مختلف از الیاف به شرح زیر درنظر گرفته شده است:

 زاویه الیاف در تمامی لایهها مساوی صفر باشد و یا به عبارتی دیگر تمامی الیاف در جهت Ø پیچیده شده باشند. در این حالت انتقال حرارت مشابه هدایت در یک پره ایزوتروپ خواهد بود.

- زاویه الیاف در تمامی لایهها مساوی °۹۰ باشد که در این صورت الیاف در جهت z قرار گرفته و انتقال حرارت شبیه هدایت در مواد اورتوتروپ با ضرایب هدایت $k_{zz} = k_{II}$ و $k_{rr} = k_{22}$
- الیاف به شکل یک لمینیت شبهایزوتروپ چندلایه قرار
 گرفته باشند([°۴۱۵, ۲۷۰°, ۲۲۵°, ۲۲۵°, ۱۳۵°).

قبل از هر چیز، به منظور بررسی توزیع درجه حرارت ناپایدار در لمینیت کامپوزیتی پروفیل دمای بیبعد به صورت زیر تعریف شده است:

$$T^{*}(r,z,t) = \frac{T(r,z,t) - T_{\infty}}{T_{b} - T_{\infty}}$$
(٣٤)

شکل ۳ تغییرات دمای میانگین بی بعد نسبت به زمان را در دو مقدار متفاوت از ضریب جابه جایی نشان می دهد. همان طور که از شکل ۳ بر می آید با افزایش ضریب جابه جایی زمان رسیدن به حالت پایدار کاهش پیدا می کند که این امر ناشی از افزایش نرخ انتقال حرارت بین پره و محیط است. این نمودارها به ازای سه آرایش ایزوتروپ، شبه ایزوتروپ و اورتوتروپ رسم شدهاند. از آنجایی که در حالت اورتوتروپ الیاف در جهت *z* مرتب می شوند انتقال حرارت محیطی از پره کاهش خواهد یافت و در نتیجه بیشترین میانگین دمایی در این حالت اتفاق می انقد و به طور عکس در آرایش ایزوتروپ کمترین مقدار میانگین دمایی را شاهد خواهیم بود.



شکل ۳ تغییرات دمای میانگین بیبعد با زمان به ازای ضرایب جابهجایی و آرایش الیاف مختلف (K₁₁ = 30 W/m.K, K₂₂ = 20 W/m.K)

از آنجا که مسئله مورد بررسی به صورت متقارن محوری است

توزيع دما در جهت heta تغيير نمى کند و کانتورهاى دما در

زمانهای مختلف بهصورت برشهای قطاعی نشان داده شدهاند.

به منظور بررسی الگوهای مختلف توزیع دما در زوایای مختلف الیاف، کانتورهای توزیع دمای پره در زمانهای گوناگون و به ازای ضرایب جابهجایی مختلف رسم شده است (شکل ۴).

t=750s t=2000s t=1000s 59 t=500s 51 t=1000s t=4000s 50 58 49 57 48 56 t=2500s t=6000s 47 t=10000s t=10000s 55 t=5000s t=8000s $h = 1000 \, W/m^2 K$ ايزوتروپيک و $h = 100 \, W/m^2 K$ ایزوتروپیک و t=750s t=2000s 53 62 t=500s t=1000s 52 61 t=1000s t=4000s 51 60 50 59 49 58 t=2500s t=6000s 48 57 t=10000s t=10000s 47 t=5000s t=8000s $h = 1000 \, W/m^2.K$ شبه ایزوتروپیک و $h = 100 \, W/m^2 K$ شبه ایزوتروپیک و t=2000s t=750s 64 t=1000s t=500s 54 63 t=1000s t=4000s 62 52 61 50 60 t=2500s t=6000s 59 48 t=10000s t=10000s t=5000s t=8000s $h = 1000 \, W/m^2.K$ اورتوتروپیک و $h = 100 \, W/m^2 K$ اور توتروپيک و



محمدحسن کیهانی و همکاران

یافت به طوری که در ضرایب جابهجایی پایین مانند $h = 1 \cdot \cdot W / m^r K$ پره مشاهده نمی شود. از دیگر موارد قابل توجه در شکل ۶ ناچیزبودن نرخ تغییرات سردشدن پره در نسبت L/D های بالاست به طوری که بعد از رسیدن به یک نسبت خاص L/D های (مثلاً نسبت I = 1 - 1 - 1 به ازای $M^r K$ (مثلاً نسبت (h = 1 - 1) دیگر افزایش طول پره تاثیری در نرخ انتقال حرارت از آن ندارد.



شكل ۵ تغييرات نرخ سردشدن پره با نسبت هدايت براى ضرايب جابهجايى و آرايش الياف مختلف (K₂₂ = 20 W/mK , L = 5 cm, D = 0.9 cm)



شكل ۶ تغييرات نرخ سردشدن پره با نسبت طول به قطر پره برای ضرایب جابهجایی و آرایش الیاف مختلف (K^{*} = 1.5, K₂₂ = 20 W/mK, D = 0.9 cm

۵- نتیجهگیری

در مقاله حاضر، یک حل تحلیلی برای انتقال حرارت هدایتی غیردایم در پرههای چندلایه کامپوزیتی ارائه شده است. شرایط همان طور که از شکل ۴ پیداست، سطح دمایی در حالت شبه ایزوتروپ همیشه بین مقدار ماکزیمم مربوط به حالتی که زاویه الیاف همگی برابر °۹۰ است و حالت مینیمم که تمامی زوایا برابر صفر فرض شدهاند قرار دارد. همچنین تاثیر زاویه الیاف بر توزیع دما در ضرایب جابه جایی پایین محسوس تر است طوری که دمای ماکزیمم در حالت اور توتروپ و ایزوتروپ در ضرایب ۱۰۰ و W/m²K به ترتیب ۵ و ۲° ۳ اختلاف را نشان می دهد.

در این مقاله، از حل تحلیلی آقایان بهادر و بارکهن [۱۵] به عنوان معیاری برای سنجش درستی حل حاضر بهره بردهایم. آنها در مقاله خود اثرات ضریب هدایت اورتوتروپیک را در یک پینفین تکلایه در حالت پایدار مورد بررسی قرار دادهاند. حل مذکور حالت سادهشدهای از مسئله ما میباشد که در آن زاویه الیاف در تمامی لایهها را مساوی°۹۰ قرار داده (حالت اورتوتروپیک) و حل حالت پایدار را بهدست آوردهایم.

به منظور بررسی اثرات تغییر ضرایب هدایت روی نرخ سردشدن پره، نسبت هدایت به صورت $K^* = K_{11}/K_{22}$ تعریف شده است. شکل ۵ تغییرات نرخ سردشدن پره با نسبت هدایت برای ضرایب جابهجایی و آرایش الیاف مختلف در حالت پایدار را نشان میدهد. همانطور که مشاهده میکنید نرخ این تغییرات برای آرایش الیاف ایزوتروپیک به مراتب محسوس تر است. همچنین، هرچه نرخ انتقال حرارت از پره افزایش مییابد (ضرایب جابهجایی حرارتی بیشتر) این تغییرات نیز بیشتر میشود. نتایج حاصل از کار بهادر و بارکهن[۱۵] نیز در شکل ۵ نشان داده شده است. همانطور که انتظار میرفت این دو نشان داده شده است. همانطور که انتظار میرفت این دو

شکل ۶ تاثیرات تغییر طول پره روی نرخ سردشدن آن (در حالت پایدار) را در ضرایب جابهجایی و آرایش الیاف مختلف نشان می دهد. تغییرات طول پره به صورت تغییرات نسبت L/D و با فرض ثابت بودن قطر پره اعمال شده است. در اینجا نیز نتایج با مقاله بهادر و بار کهن [۱۵] مقایسه شده است. همان طور که انتظار می دفت سازگاری کامل بین این دو حل دیده می شود (البته نتایج در مرجع [۱۵] فقط به ازای ضرایب جابهجایی ۱۰۰ و ۲/m²K ۲۰۰۰ گزارش شده است). همان طور که از شکل ۶ مشخص است با افزایش ضریب جابهجایی اثر آرایش الیاف بر نرخ سردشدن افزایش خواهد

مرزی به کار گرفته شده در سطح پره کلی بوده که می تواند به تمامی انواع شرایط مرزی خطی، نوع اول، دوم و یا سوم ساده شود. از جمله مهم ترین نتایج به دست آمده از حل حاضر می توان به موارد ذیر اشاره کرد:

- به دلیل حالت کلی شرایط مرزی گرمایی درنظر گرفته شده،
 حل حاضر میتواند در بسیاری از کاربردهای عملی برای
 محاسبه توزیع دما و تنشهای حرارتی مفید واقع شود.
- با توجه به تحلیلی و دقیق بودن حل حاضر، از نتایج حاصله می توان به عنوان معیاری برای سنجش حلهای عددی و تقریبی بهره جست.
- نرخ انتقال حرارت از پره در حالتهایی که زاویه الیاف صفر و
 ۹۰° است به ترتیب ماکزیمم و مینیمم است و در سایر
 حالتها نرخ سردشدن بین این دو حالت حدی قرار دارد.

۶- فهرست علايم

$$b,a$$
 d رایب دلخواه معادله (۲-۱۱)

 b_n, a_n
 d رایب سری فوریه دما در معادله ۲۰

 b_n, a_n
 c
 $acc ثابت مختلط
 c_p
 c_p
 d رفیت گرمایی ویژه در فشار ثابت

 g,f
 $relas

 g,f
 $relas

 d
 $relas

 g,f
 $relas

 g,f
 $relas

 $relas
 $relas

 $relas
 $relas

 k_{ij}
 $relas

 k_{ij}
 k_{ij}
 k_{ij}
 k_{ij}
 (W/mK)
 k_{ij}
 (W/mK)
 k_{ij}
 k_{ij}
 k_{ij}
 k_{ij}
 k_{ij}
 k_{ij}
 k_{ij}
 (W/mK)
 k_{ij}
 $k_{ij}$$$$$$$$$$$$

- $T-T_i$ دمای اصلاحشده،
 - مقادير ويژه

φ

λ

زاویه انحراف بین محورهای مختصات heta

- 9 قطبهای تابع فوریه دما
 9 چگالی
 - پ کې *F* تبديل فوريه
 - £ تبدیل لایلاس
- تبدیل لایلاس معکوس f⁻¹
 - زیرنویس و بالانویسها

- يايه پره b
- 0 مرتبه صفر (بحث توابع بسل)
- مرتبه اول (بحث توابع بسل)

۷– منابع

- [1] Corlay C., Advani S. G., "Temperature Distribution in a Thin Composite Plate Exposed to a Concentrated Heat Source", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 50 No. 4, 2007, pp. 2883-2894.
- [2] Iyengar V., "Transient Thermal Conduction in Rectangular Fiber Reinforced Composite Laminates", Adv. Compos. Mater., Vol. 4, No. 4, 1995, pp. 327-342.
- [3] Sunao S., Takashi I., "Numerical Analysis of Heat Conduction Effect Corresponding to Infrared Stress Measurements in Multilamina CFRP Plates", *Adv. Compos. Mater.*, Vol. 8, No. 3, 1999, pp. 269-279.
- [4] Guo T. et al., "Temperature Distribution of Thick Thermo Set Composites", *J. Model. Simul. Mater. Sci. Eng.*, Vol. 12, No. 2, 2004, pp. 443-452.
- [5] Chatterjee J., Henry D. P., Ma F., Banerjee P. K., "An Efficient BEM Formulation for 3-Dimensional Steady-State Heat Conduction Analysis of Composites", *Int. J. Heat Mass Transf.*, Vol. 51, 2008, pp. 1439-1452.
- [6] Yvonnet J., He Q. C., Toulemonde C., "Numerical Modeling of the Effective Conductivities of Composites with Arbitrarily Shaped Inclusions and Highly Conducting Interface", *Composites Science and Technology*, Vol. 68, No. 13, 2008, pp. 2818-2825.
- [7] Argyris J., Tenek L., Oberg F., "A Multilayer Composite Triangular Element for Steady-State

Approach", Computers and Chemical Engineering, Vol. 26, No. 3, 2002, pp. 1621-1632.

- [17] Kayhani, M.H., Shariati, M., Norouzi, M., Karimi Demneh, M.; "Exact solution of conductive heat transfer in cylindrical composite laminate", Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 46, 2009, pp 83-94.
- [18] Kayhani M. H., Norouzi M., Amiri Delouei A., "A General Analytical Solution for Heat Conduction in Cylindrical Multilayer Composite Laminates", *Int. J. Thermal Science*, Vol. 52, 2012, pp. 73-82.
- [19] Hassan N., Thompson J. E., Batra R. C., Hulcher A. B., Song X., Loos A. C., "A Heat Transfer Analysis of the Fiber Placement Composite Manufacturing Process", *Journal of REINFORCED PLASTICS AND COMPOSITES*, Vol. 24, No. 8, 2005, pp. 869-888.
- [20] Newnham P., Abrate S., "Finite Element Analysis of Heat Transfer in Anisotropic Solids: Application to Manufacturing Problems", *Journal* of *Reinforced Composites and Plastics*, Vol. 12, No. 1, 1993, pp. 854-864.
- [21] Ozisik M. N., *Heat Conduction*, Second Ed., New York, Wiley, 1993.
- [22] Fung, Y. C., *Foundation of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.
- [23] Powers, J. M., "On the Necessity of Positive Semi-Definite Conductivity and Onsager Reciprocity in Modeling Heat Conduction in Anisotropic Media", J. Heat Transf. Trans. Asme, Vol. 126, No. 5, 2004, pp. 670-675.
- [24] Herakovich C. T., *Mechanics of Fibrous Composites*, New York, Wiley, 1998.
- [25] Halpin J. C., *Primer on Composite Materials Analysis*, Boca Raton, CRC Press, 1992.
- [26] Myint, T., Debnath L., *LinearPartial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Boston, Birkhauser, 2007.
- [27] Bronshtein I. N., Semendyayev K. A., Musiol G., Muehlig H., *Hand book of mathematic*, Berlin, Springer, 1998, pp. 124.

Conduction/Convection/Radiation Heat Transfer in Complex Shells", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng*, Vol. 120, 1995, pp. 271-301.

- [8] Ma C. C., Chang S. W., "Analytical Exact Solutions of Heat Conduction Problems for Anisotropic Multilayered Media", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, No. 9, 2004, pp. 1643-1655.
- [9] Hsieh M. H., Ma C. C., "Analytical Investigations for Heat Conduction Problems in Anisotropic Thin-Layer Media with Embedded Heat Sources", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, No. 20, 2002, pp. 4117-4132.
- [10] Oseloka O., "Heat Conduction in Composite Media: A Boundary Integral Approach", *Journal* of Computers & Chemical Engineering, Vol. 26, No. 1, 2002, pp. 1621-1632.
- [11] Sun Y., Wichman I. S., "On Transient Heat Conduction in a One-Dimensional Composite Slab", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, 2004, pp 1555-1559.
- [12] Lu X., Tervola P., Viljanen M., "Transient Analytical Solution to Heat Conduction in Multi-Dimensional Composite Cylinder Slab", *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. 49, 2006, pp. 1107-1114.
- [13] Haji-Sheikh A., Beck J. V., Agonater D., "Steady-State Heat Conduction in Multi-Layer Bodies", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, No. 5, 2003, pp. 2363-2379.
- [14] Singh S., Jain P. K., Uddin R., "Analytical Solution to Transient Heat Conduction in Polar Coordinates with Multiple Layers in Radial Direction", *Int. J. Thermal Sciences*, Vol. 47, 2008, pp. 261-273.
- [15] Bahadur R., Bar-Cohen A., "Orthotropic Thermal Conductivity Effect on Cylindrical Pin Fin Heat Transfer", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 50, No. 2, 2007, pp. 1155-1162.
- [16] Onyejekwe O. O., "Heat Conduction in Composite Media: a Boundary Integral