http://mechanics.journals.modares.ac.ir
مجله علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
دوره ۱۱ شماره ۴ زمستان ۱۳۹۰ ص ص ۲۱-۳۲
دانشگاه تربیت مدرس
تاریخچه مقاله:
دریافت ۹۰/۲/۷
پذیرش ۹۰/۹/۱۰
ارائه در سایت ۹۰/۱۰/۳۰

بررسی تحلیلی انتقال حرارت غیردایمی اورتوتروپیک پین‌فین‌های کامپوزیتی

محمدحسن کیهانی[۱*]، محمود نوروزی[۲]، امین امیری دلوئی[۳]

۱- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
۲- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
۳- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
* شاهرود، صندوق پستی ۳۱۶، کد پستی ۳۶۱۹۹۹۵۱۶۱، h_kayhani@shahroodut.ac.ir

چکیده- در این مقاله، یک حل تحلیلی برای انتقال حرارت غیردایمی در پین فین‌های کامپوزیتی چندلایه با درنظر گرفتن شرایط مرزی کلی در سطح پره ارائه شده است. معادله انتقال حرارت هدایتی دوبعدی در حالت ناپایا برای لمینیت‌های اورتوتروپیک استخراج شده و مسئله با اعمال تبدیل لاپلاس از حوزه زمان به فرکانس انتقال یافته است. با استفاده از تئوری اشترم لیوویل یک تبدیل فوریه مناسب استخراج شده و دستگاه معادلاتی بر اساس شرایط مرزی پره و شرایط پیوستگی دما و شار حرارت در مرز بین لایه‌ها ساخته شده است. همچنین از روش توابع مرومرفیک برای محاسبه انتگرال مختلط پیچیده مربوط به تبدیل لاپلاس معکوس بهره برده شده است. نمودارهای مربوط به توزیع دمای غیردایم و تغییرات نرخ سردشدن پره رسم شده و نشان داده شده که اثر هدایت اورتوتروپیک، در نرخ‌های سردشدن بالا، محسوس‌تر است.

کلیدواژگان: حل تحلیلی، هدایت اورتوتروپیک، تئوری اشترم لیوویل، توابع مرومرفیک

Analytical investigation of orthotropic unsteady heat transfer in composite pin fins

M. H. Kayhani[1*], M. Norouzi[2], A. A. Delouei[3]

1- Associate Prof. of Mech. Eng., Shahrood Univ. of Technology, Shahrood, Iran
2- Assistant Prof. of Mech. Eng., Shahrood Univ. of Technology, Shahrood, Iran
3- PhD Student of Mech. Eng., Shahrood Univ. of Technology, Shahrood, Iran
*P. O. B. 316, P. Code: 3619995161, Shahrood, Iran, h_kayhani@shahroodut.ac.ir

Abstract- In this paper, an analytical solution of transient heat conduction in multi-layer composite pin fins under the general boundary conditions is presented. The 2D unsteady heat conduction equation in cylindrical coordinate system has been achieved for multi-layer orthotropic laminates. Laplace transformation is applied to change the solution's domain from time into the frequency. An appropriate Fourier transformation has been derived using the Strum-Liouville theorem and a set of equations are obtained based on the boundary conditions of fin and temperature/heat flux continuity at boundaries located between the layers. The Meromorphic function method is utilized to find the complicated complex integration of inverse Laplace. Diagrams of unsteady temperature distribution and cooling rate of pin fin have been depicted and it is shown that the effects of orthotropic conduction are more noticeable in high convection coefficients.

Keywords: Analytical Solution, Strum-Liouville Theorem, Orthotropic Conduction, Meromorphic Functions

[DOR: 20.1001.1.10275940.1390.11.4.1.5]

۱- مقدمه

پیشرفت‌های اخیر در زمینه طراحی و تولید سازه‌های کامپوزیتی آن‌ها را در زمره یکی از تاثیرگذارترین مواد در حوزه‌های مختلف صنعت، حمل‌ونقل، خطوط انتقال مایعات و ... قرار داده است. این پیشرفت‌ها عمدتاً ناشی از خواص منحصر به فرد این مواد مانند نسبت استحکام به وزن بالا، مقاومت به خوردگی، قابلیت شکل‌پذیری، هزینه‌های تولید پایین و ... است. بدیهی است که با افزایش روزافزون کاربرد این مواد دانش مرتبط با آن‌ها نیز گسترش یافته است.

مطالعات پیشین در زمینه انتقال حرارت مواد کامپوزیتی عمدتاً به بررسی‌های عددی محدود شده است. کرلی و ادوانی[۱] دمای یک صفحه کامپوزیتی نازک که در معرض یک منبع گرمایی متمرکز قرار دارد را با روش‌های عددی و تجربی به‌دست آورده‌اند. آن‌ها یک بررسی پارامتریک برای تعیین اعداد بی‌بعد مهم و تاثیرشان بر توزیع درجه حرارت صفحه ارائه داده‌اند. اینگار[۲] انتقال حرارت غیردایمی هدایتی را در یک ورق کامپوزیتی مورد بررسی قرار داده و از فرمولاسیون المان محدود برای تحلیل این مسئله استفاده کرده است. این تحلیل بر روی لمینیت گرافیت/ اپوکسی با آرایش الیاف $[0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ]$ و در شرایط مرزی مختلف انجام شده است. سونائو و همکاران[۳] حل عددی را برای انتقال حرارت پایدار هدایتی در ورق‌های کامپوزیتی ارائه کرده‌اند. آن‌ها اثرات انتقال حرارت بر روی لایه داخلی را که ناشی از القا خاصیت ترموپلاستیک ماده است مورد بررسی قرار دادند.

گو[۴] به طور عددی انتقال حرارت هدایتی در لمینیت‌های ضخیم را مطالعه کرده و با استفاده از روش المان محدود، انتقال حرارت غیردایمی را در حضور تولید انرژی داخلی بررسی کرده است. چترجی و همکاران[۵] با استفاده از فرمولاسیون مرز محدود اقدام به محاسبه انتقال حرارت پایدار در کامپوزیت‌های سه‌بعدی کرده‌اند. آن‌ها، با استفاده از توابع خطی و درجه چهار، توزیع دما و شار حرارتی را در این لمینیت‌ها به‌دست آوردند. یوونت و همکاران[۶] نیز فرمولاسیون مناسبی را بر مبنای روش المان محدود برای حل عددی انتقال حرارت موثر در کامپوزیت‌ها ارائه داده‌اند.

فعالیت‌هایی نیز در زمینه حل تحلیلی انتقال حرارت در مواد کامپوزیتی صورت گرفته است. آرگیریس و همکاران [۷] بررسی تحلیلی را بر روی انتقال حرارت در لمینیت‌های تخت مثلثی انجام داده‌اند. آن‌ها در فرمولاسیون خود اثر هر سه مکانیزم انتقال حرارت هدایتی، همرفتی و تشعشعی را بر لمینیت در نظر گرفتند. فرمولاسیون آن‌ها بر مبنای انتقال حرارت مرتبه اول لمینیت کامپوزیتی بود و تغییرات خطی را برای انتقال حرارت در جهت ضخامت لایه‌ها لحاظ کردند و در نهایت نشان دادند که استفاده از این فرمولاسیون از نظر هزینه محاسباتی بسیار موثرتر از محاسبات عددی است. ما و همکاران[۸-۹] حل تحلیلی انتقال حرارت هدایتی در محیط‌های چندلایه غیرایزوتروپیک را در دو حالت، بدون در نظر گرفتن منبع گرمایی و همراه با گرمایش داخلی، به طور جداگانه مورد بررسی قرار داده‌اند. آن‌ها با استفاده از یک تبدیل مختصات خطی مسئله انیزوتروپ را به شکل ساده ایزوتروپ تبدیل کرده و مسئله را حل کرده‌اند.

اوسلوکا[۱۰] نیز، با استفاده از توابع گرین و فرمول‌بندی انتگرالی معادله انتقال حرارت، پاسخی برای انتقال حرارت در واسط‌های کامپوزیتی به‌دست آورده است. سان و ویچمن[۱۱] در مقاله خود حلی تحلیلی از انتقال حرارت یک بعدی غیردایم در یک بلوک کامپوزیتی ارائه کرده‌اند. لو و همکاران[۱۲] انتقال حرارت در جداره‌های مرکب استوانه‌ای‌شکل را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها در تحلیل خود از روش جداسازی متغیرها استفاده کرده و نشان داده‌اند که حل آن‌ها دارای تطابق مناسبی با محاسبات عددی است. حاجی شیخ و همکاران[۱۳] یک فرمولاسیون ریاضی برای میدان دما در حالت پایدار در اجسام چندلایه و چندبعدی به‌دست آورده‌اند و در ادامه اثبات کرده‌اند که مقادیر ویژه برای حالتی که لایه‌ها همگن باشد حقیقی است، در حالی که برای حالت اورتوتروپ این مقادیر می‌توانند موهومی باشند. سینگ و همکاران[۱۴] حل تحلیلی انتقال حرارت هدایتی در مختصات قطبی چندلایه در جهت شعاعی را مورد بررسی قرار داده‌اند. بهادر و بارکهن[۱۵] یک حل تحلیلی برای توزیع دما و نرخ انتقال حرارت در پین‌فین‌های استوانه‌ای (تک‌لایه) با ضرایب هدایت گرمایی اورتوتروپ ارائه داده و سپس نتایج را با حل عددی به روش اجزا محدود مقایسه کرده‌اند. اونیجکوه[۱۶] یک حل دقیق برای انتقال حرارت در محیط‌های کامپوزیتی با استفاده از تئوری انتگرال مرزی ارائه داده است. کیهانی و همکاران[۱۷-۱۸] حل تحلیلی هدایت پایا

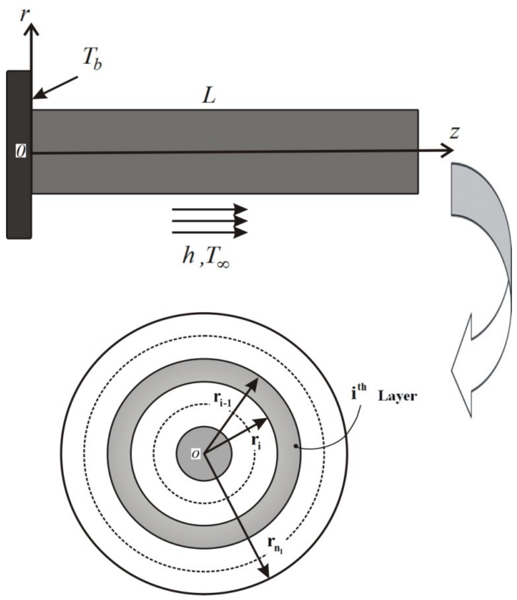
[DOR: 20.1001.1.10275940.1390.11.4.1.5]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1390.11.4.1.5]

در لمینیت‌های کامپوزیتی استوانه‌ای در جهت‌های شعاعی و زاویه‌ای (r,φ) و همچنین جهت‌های شعاعی و طولی (r,z) را مورد بررسی قرار داده‌اند. این حل‌ها تنها برای گذشت زمان‌های زیاد و حالت دایم معتبرند.

بررسی انتقال حرارت در فرایند تولید مواد مرکب نیز از اهمیت فراوانی برخوردار است. برای نمونه می‌توان به پژوهش حسن و همکارانش[۱۹] در زمینه تحلیل اثر انتقال حرارت در حین ترکیب الیاف و ماده زمینه اشاره کرد. در این پژوهش، شرح مناسبی از تئوری انتقال حرارت در لمینیت‌های کامپوزیتی ارائه شده است. نیونهام و آبرات[۲۰] نیز در مقاله خود به تحلیل انتقال حرارت کاربردی (کاربرد در فرایند تولید) به روش المان محدود در مواد غیرایزوتروپ پرداخته‌اند.

در مطالعه حاضر یک حل تحلیلی برای توزیع دمای غیردایم در پره‌های کامپوزیتی چندلایه (با درنظر گرفتن خواص اورتوتروپیک هر یک از لایه‌ها) ارائه شده و نرخ سردشدن پره در حالت پایا محاسبه شده است. پره مورد بررسی استوانه‌ای شکل بوده و الیاف در جهت‌های مشخص به دور آن پیچیده شده‌اند. شکل ۱ هندسه و لایه‌بندی مربوط به پین‌فین مورد بحث را نشان می‌دهد. زوایه الیاف در هر کدام از لایه‌های لمینیت می‌تواند تغییر کند. در این مقاله بر روی انتقال حرارت ناپایای متقارن دوبعدی در جهت‌های طولی و شعاعی (r,z) تمرکز کرده‌ایم. همچنین، شرایط مرزی در سطح تبادل حرارت با محیط به صورت کلی در نظر گرفته شده است تا در صورت نیاز تمامی مکانیزم انتقال حرارت را پوشش دهد. تبدیل لاپلاس[۱] بر روی معادله انرژی اعمال شده تا مسئله از حوزه زمان به فرکانس انتقال یابد. سپس معادله دیفرانسیل جزئی حاصل با استفاده از یک تبدیل فوریه[۲] مناسب به یک معادله معمولی ساده شده است. در اینجا از تئوری اشترم لیوویل[۳] برای استخراج تبدیل فوریه منطبق با شرایط مرزی بهره برده‌ایم. با توجه به شرایط مرزی مسئله و همچنین معادلات پیوستگی دما و شار حرارت در مرز بین لایه‌ها یک دستگاه معادلات برای ضرایب سری فوریه حاصل خواهد شد که این دستگاه با استفاده از الگوریتم توماس[۴] حل شده و جواب‌ها به صورت روابط بازگشتی ارائه شده است. در نهایت تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس معکوس اعمال شده است تا توزیع دما در حوزه زمان به‌دست آید. مهم‌ترین مشکل در روند کار حل انتگرال مختلط پیچیده مربوط به تبدیل لاپلاس معکوس است که در اینجا از روشی موسوم به روش توابع مرومرفیک[۵] جهت حل آن بهره جسته‌ایم. از نتایج حاصل برای رسم نمودارهای مرتبط با دمای متوسط لمینیت و کانتورهای توزیع دما در زمان‌های مختلف استفاده شده است. همچنین، نمودارهای مربوط به تغییرات نرخ سردشدن پین‌فین با ضرایب هدایت و ابعاد پره رسم و با کارهای دیگران مقایسه شده است.



شکل ۱ هندسه و شرایط مرزی مربوط به پره

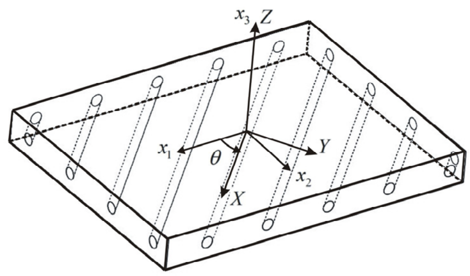
۲- هدایت در مواد مرکب

در این بخش، به صورت مختصر مسئله انتقال حرارت هدایتی در مواد مرکب چندلایه معرفی شده است. رابطه فوریه برای انتقال حرارت در محیط‌های اورتوتروپ به صورت کلی زیر نوشته می‌شود[۲۱]:

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} \qquad (۱)$$

1. Laplace Transformation
2. Fourier Transformation
3. Sturm-Liouville Theorem
4. Thomas Algorithm
5. Meromorphic Function Method

که در این رابطه q شار حرارتی، k_{ij} ضریب انتقال حرارت هدایتی و T دماست. رابطه بین ضرایب انتقال حرارت به طور کامل در مراجع معرفی شده است[۲۲-۲۳]. با توجه به این که لمینیت‌های کامپوزیتی از چیدن لایه‌های مختلف با راستای الیاف متفاوت ساخته می‌شوند، از دو دستگاه مختصات اصلی (x,y,z) و فرعی (x_1,x_2,x_3) برای بررسی خواص در مواد مرکب استفاده می‌شود[۲۴] به طوری که محور x_1 در راستای الیاف، محور x_2 عمود بر راستای الیاف در صفحه لایه کامپوزیتی و محور x_3 عمود بر صفحه لایه قرار دارند. نحوه قرارگیری این دستگاه‌های مختصات در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲ دستگاه‌های مختصات اصلی و فرعی

حال با توجه به تعریف دستگاه مختصات مرجع (دستگاه فرعی)، می‌توان کمیت‌های فیزیکی را در جهت‌های ثابت بررسی کرد. در هر لایه بین دستگاه مختصات اصلی و فرعی به اندازه زاویه θ انحراف وجود دارد و محور x_3 دستگاه مختصات اصلی با محور z دستگاه مختصات فرعی هم‌جهت است. در دستگاه مختصات اصلی رابطه فوریه برای یک ماده مرکب به صورت زیر است[۲۵]:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}_{on} = -\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{22} \end{bmatrix}_{on} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x_3} \end{Bmatrix}_{on} \quad (۲)$$

با استفاده از یک دوران به اندازه $-\theta$ می‌توان از محور مختصات فرعی به اصلی رسید، به طوری که اگر ضرایب انتقال حرارت در جهات اصلی با $[k]$ و در جهات فرعی با $[\bar{k}]$ نشان داده شود، داریم:

$$\begin{aligned} \bar{k}_{11} &= m_l^2 k_{11} + n_l^2 k_{22} \\ \bar{k}_{22} &= n_l^2 k_{11} + m_l^2 k_{22} \\ \bar{k}_{33} &= k_{22} \\ \bar{k}_{12} &= \bar{k}_{21} = m_l n_l \left(k_{11} - k_{22}\right) \\ \bar{k}_{13} &= \bar{k}_{31} = 0 \\ \bar{k}_{23} &= \bar{k}_{32} = 0 \end{aligned} \quad (۳)$$

در این روابط m_l با $\cos\theta$ و n_l با $\sin\theta$ نشان داده شده است. از آنجایی که در مطالعه حاضر انتقال حرارت هدایتی در پره‌های استوانه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است، بایستی مسئله در مختصات استوانه‌ای حل شود. الیاف در هر لایه به دور استوانه در جهت‌های مشخص پیچیده شده‌اند و r، φ و z مولفه‌های دستگاه مختصات فرعی (مرجع) هستند.

θ به صورت زاویه بین دو خط مماس بر استوانه یکی در جهت الیاف و دیگری در جهت φ تعریف می‌شود. در دستگاه مختصات فرعی رابطه فوریه در یک ماده اورتوتروپ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{Bmatrix} q_r \\ q_\phi \\ q_z \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & \bar{k}_{13} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & \bar{k}_{23} \\ \bar{k}_{31} & \bar{k}_{32} & \bar{k}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (۴)$$

از آنجا که در دستگاه مختصات استوانه‌ای زاویه الیاف نسبت به مولفه دوم یعنی φ تعریف شده است، ضرایب هدایت (معادله ۳) بایستی بازآرایی شوند.

$$\begin{aligned} \bar{k}_{11} &= k_{22} \\ \bar{k}_{22} &= m_l^2 k_{11} + n_l^2 k_{22} \\ \bar{k}_{33} &= n_l^2 k_{11} + m_l^2 k_{22} \\ \bar{k}_{12} &= \bar{k}_{21} = 0 \\ \bar{k}_{13} &= \bar{k}_{31} = 0 \\ \bar{k}_{23} &= \bar{k}_{32} = m_l n_l \left(k_{11} - k_{22}\right) \end{aligned} \quad (۵)$$

با اعمال معادله موازنه انرژی برای یک المان استوانه‌ای و استفاده از روابط (۴) در (۵)، معادله انتقال حرارت دوبعدی ناپایا در لمینیت استوانه‌ای به‌دست خواهد آمد:

$$\bar{k}_{11}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \bar{k}_{33}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + (\bar{k}_{13} + \bar{k}_{31})\frac{\partial^2 T}{\partial r \partial z} + \frac{\bar{k}_{13}}{r}\frac{\partial T}{\partial z} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۶)$$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1390.11.4.1.5]

که در آن ρ و c_p به ترتیب نمایانگر چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه در فشار ثابت‌اند.

از طرفی در بحث حاضر انتقال حرارت هدایتی در محیط‌های چندلایه مورد توجه است؛ بنابراین بایستی رابطه بین لایه‌ها توسط معادلات پیوستگی مربوط به دما و شارحرارت درنظر گرفته شود. با توجه به شکل ۱، اگر $r = r_i$ مرز بین دو لایه مجاور i و $i+1$ باشد، پیوستگی دما و شار حرارت به صورت زیر خواهد بود:

$$T^{(i)} = T^{(i+1)} \tag{۱-۷}$$

$$\frac{\partial T^{(i)}}{\partial r} = \frac{\partial T^{(i+1)}}{\partial r} \tag{۲-۷}$$

۳- حل تحلیلی هدایت حرارتی غیردایم

در این قسمت، یک حل تحلیلی برای انتقال حرارت ناپایا تحت شرایط مرزی کلی در سطح پره ارائه شده است. شرایط مرزی ارائه‌شده می‌تواند دربرگیرنده انواع شرایط مرزی شامل شرایط مرزی نوع اول، دوم و سوم باشد. برای ساده‌سازی، پروفیل دمای اصلاح‌شده به شکل زیر تعریف شده است:

$$\phi(r,z,t) = T(r,z,t) - T_i \tag{۸}$$

که T_i نمایانگر دمای اولیه است. در این صورت، معادله انتقال حرارت دوبعدی به صورت زیر درخواهد آمد:

$$\alpha_r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \alpha_r \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \alpha_{z,i}\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{۹}$$

که

$$\alpha_r = \frac{k_{22}}{\rho c_p} \tag{۱-۱۰}$$

$$\alpha_{z,i} = \frac{n_l^2 k_{11} + m_l^2 k_{22}}{\rho c_p} \tag{۲-۱۰}$$

توجه به این مورد ضروری است که $\alpha_{z,i}$ تابعی از زاویه الیاف بوده و لایه به لایه تغییر می‌کند. شرایط اولیه و مرزی به صورت زیر بیان شده است:

$$\phi^{(i)}(r,z,0) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n_l \tag{۱-۱۱}$$

$$\phi(r,0,t) = \phi_b \tag{۲-۱۱}$$

$$\frac{\partial \phi(r,L,t)}{\partial z} = 0 \tag{۳-۱۱}$$

$$a\,\phi(r_{n_l},z,t) + b\frac{\partial \phi(r_{n_l},z,t)}{\partial r} = f(z,t) \tag{۴-۱۱}$$

که $f(r,z)$ می‌تواند هر تابع دلخواهی باشد. ثابت‌های a و b به ترتیب ابعادی مشابه ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی، یعنی $\mathrm{W/m^2K}$، و ضریب انتقال حرارت هدایتی، یعنی $\mathrm{W/mK}$، دارند. شایان ذکر است که شرایط مرزی خطی در جهت طولی در کلی‌ترین شکل خود درنظر گرفته شده است. همچنین شرط مرزی تقارن و یا دما محدود را می‌توان برای قسمت مرکزی استوانه در نظر گرفت. در ادامه به منظور انتقال معادله انرژی (۹) از حوزه زمان (t) به حوزه فرکانس (s) از تبدیل لاپلاس استفاده شده است[۲۶].

$$\pounds\{\phi(r,z,t)\} = \bar{\phi}(r,z,s) \tag{۱۲}$$

با اعمال تبدیل لاپلاس و شرایط اولیه روی معادله (۹)، معادله انرژی به صورت زیر در می‌آید:

$$\alpha_r \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial r^2} + \alpha_r \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} + \alpha_{z,i}\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} - s\bar{\phi} = 0 \tag{۱۳}$$

علاوه بر این، شرایط مرزی نیز در حوزه فرکانس به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\bar{\phi}(r,0,s) = \phi_b / s. \tag{۱-۱۴}$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}(r,L,s)}{\partial z} = 0. \tag{۲-۱۴}$$

$$a\bar{\phi}(r_{n_l},z,s) + b\frac{\partial \bar{\phi}(r_{n_l},z,s)}{\partial r} = \bar{f}(z,s) \tag{۳-۱۴}$$

که

$$\bar{f}(r,z,s) = \pounds\{f(r,z,t)\} \tag{۱۵}$$

در ادامه لازم است تا با استفاده از قضیه اشترم-لیوویل تبدیل فوریه مناسب استخراج شود[۲۶]. با اعمال قضیه اشترم-لیوویل در راستای محور z، تبدیل فوریه تابع دلخواه g تحت شرایط مرزی مسئله (معادلات (۱۴-۱) و (۱۴-۲)) به‌دست خواهد آمد:

$$F(g) = \frac{2}{L}\int_0^L \left[g(z)\sin(\lambda_n z)\right]dz \tag{۱۶}$$

که مقادیر ویژه λ_n از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}, \; n = 0,1,2,\ldots \tag{۱۷}$$

حال با توجه به تبدیل فوریه به‌دست آمده (معادله ۱۶) و استفاده از انتگرال جزء به جزء، مشتق دوم نسبت به z به‌دست می‌آید.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1390.11.4.1.5]

$$F\left(g^{"}\right)=\left\{\frac{2\lambda_n}{L}\left[\frac{\phi_b}{s}\right]-\lambda_n^2\ F\left(g\right)\right\} \qquad (۱۸)$$

حال اگر این تبدیل فوریه را بر روی معادله (۹) اعمال کنیم، خواهیم داشت:

$$\alpha^*\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\alpha^*\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}-\left(\lambda_n^2+s/\alpha_{z,i}\right)U = \frac{2\lambda_n}{L}\times\left[-\frac{\phi_{end}}{s}\right] \qquad (۱۹)$$

که

$$\alpha^*=\frac{\alpha_r}{\alpha_{z,i}} \qquad (۲۰)$$

همچنین، شرط مرزی کلی در جهت r (معادله (۱۴-۳)) به صورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$a\ U(r_{n_l},n,s)+b\ \frac{\partial U(r_{n_l},n,s)}{\partial r}=F(n,s) \qquad (۲۱)$$

که در آن:

$$U(r,n,s)=F\left(\bar{\phi}(r,z,s)\right) \qquad (۱-۲۲)$$

$$F(n,s)=F\left(\bar{f}(z,s)\right) \qquad (۲-۲۲)$$

جواب کلی معادله (حوزه فرکانس) در هر لایه از لمینیت کامپوزیتی به صورت زیر خواهد بود:

$$U^{(i)}(r,n,s)= a_n^{(i)}I_0\left(\omega_{n,s}r\right)+b_n^{(i)}K_0\left(\omega_{n,s}r\right)+w^{(i)}(r,n,s) \qquad (۲۳)$$

که

$$\omega_{n,s,i}=\sqrt{\lambda_n^2+s/\alpha_{z,i}} \qquad (۲۴)$$

و $w(r,n)$ پاسخ غیرهمگن معادله (۱۹) است و در حالت کلی برابر است با:

$$w^{(i)}(r,n,s)=\left(\frac{2\lambda_n}{L}\times\frac{-\phi_b}{s}\right)\times\left[\begin{array}{l} I_0\left(\omega_{n,s,i}r\right)\times\int_{r_0}^{r_{n_l}}\left[r\times K_0\left(\omega_{n,s,i}r\right)\right]dr \\ +K_0\left(\omega_{n,s,i}r\right)\times\int_{r_0}^{r_{n_l}}\left[r\times I_0\left(\omega_{n,s,i}r\right)\right]dr\end{array}\right] \qquad (۲۵)$$

در روابط بالا I_0 و K_0 به ترتیب توابع بسل اصلاح‌شده نوع اول و دوم از مرتبه صفرند. در نهایت با اعمال شرایط مرزی در جهت r و پیوستگی دما و شار حرارت در مرز بین لایه‌ها ضرایب $a_{n,s}$ و $b_{n,s}$ به‌دست می‌آیند:

- اعمال شرط مرزی کلی در خارج پره (معادله ۲۱):

$$a_{n,s}^{(n_l)}\left[aI_0\left(\omega_{n,s,n_l}r_{n_l}\right)+b\omega_{n,s,n_l}I_1\left(\omega_{n,s,n_l}r_{n_l}\right)\right] +b_{n,s}^{(n_l)}\left[aK_0\left(\omega_{n,s,n_l}r_{n_l}\right)-b\omega_{n,s,n_l}K_1\left(\omega_{n,s,n_l}r_{n_l}\right)\right] =F(n,s)-a\,w^{(n_l)}(r_{n_l},n,s)-b\frac{\partial w^{(n_l)}\left(r_{n_l},n,s\right)}{\partial r} \qquad (۱-۲۶)$$

- از شرط مرزی تقارن محوری در مرکز استوانه نتیجه می‌شود:

$$b_{n,s}^{(1)}=0 \qquad (۲-۲۶)$$

- اعمال شرط پیوستگی دما در مرز بین لایه‌های i و $i+1$ (معادله ۷-۱):

$$U^{(i)}\left(r_i,n,s\right)=U^{(i+1)}(r_i,n,s)\Rightarrow$$
$$a_{n,s}^{(i)}I_0\left(\omega_{n,s,i}r_i\right)+b_{n,s}^{(i)}K_0\left(\omega_{n,s,i}r_i\right) - a_{n,s}^{(i+1)}I_0\left(\omega_{n,s,i+1}r_i\right)+b_{n,s}^{(i+1)}K_0\left(\omega_{n,s,i+1}r_i\right) =w^{(i+1)}\left(r_i,n,s\right)-w^{(i)}\left(r_i,n,s\right) \qquad (۳-۲۶)$$

- اعمال شرط پیوستگی شار حرارت در مرز بین لایه‌های i و $i+1$ (معادله ۷-۲):

$$\frac{\partial U^{(i)}\left(r_i,n,s\right)}{\partial r}=\frac{\partial U^{(i+1)}(r_i,n,s)}{\partial r}\Rightarrow$$
$$a_{n,s}^{(i)}\omega_{n,s,i}I_1\left(\omega_{n,s,i}r_i\right)+b_{n,s}^{(i)}p_{n,s,i}K_1\left(\omega_{n,s,i}r_i\right)- a_{n,s}^{(i+1)}\omega_{n,s,i+1}I_1\left(\omega_{n,s,i+1}r_i\right)+b_{n,s}^{(i+1)}\omega_{n,s,i+1}\times K_1\left(\omega_{n,s,i+1}r_i\right)=\frac{\partial w^{(i+1)}\left(r_i,n,s\right)}{\partial r}-\frac{\partial w^{(i)}\left(r_i,n,s\right)}{\partial r} \qquad (۴-۲۶)$$

I_1 و K_1 به ترتیب توابع بسل اصلاح‌شده نوع اول و دوم از مرتبه یک هستند. حال برای تعیین ضرایب $a_{n,s}^{(i)}$ و $b_{n,s}^{(i)}$، بایستی در هر n و برای تمامی لایه‌ها دستگاه معادلات شامل روابط (۲۶-۱)، (۲۶-۲)، (۲۶-۳) و (۲۶-۴) حل شوند. دستگاه معادلات حاصل یک دستگاه پنج قطری است که در مقاله حاضر، با استفاده از الگوریتم توماس، ماتریس ضرایب پنج‌قطری مذکور به یک ماتریس دوقطری تبدیل شده است که درایه‌های روی قطر اصلی همگی مساوی یک هستند. در ادامه، با استفاده از روابط بین سطرها در دستگاه معادلات به‌دست آمده، روابط بازگشتی زیر برای محاسبه $a_{n,s}$ و $b_{n,s}$ به ازای مقادیر مختلف n حاصل شده است.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1390.11.4.1.5]

$$\begin{cases} a_n^{(1)} = M_n^{(1)} \\ b_n^{(1)} = 0 \end{cases} \tag{۱-۲۷}$$

$$\begin{cases} b_n^{(i)} = N_n^{(i)} - \alpha_n^{(i)}.a_n^{(i)} \\ a_n^{(i)} = M_n^{(i)} - \beta_n^{(i)}.b_n^{(i)} \end{cases} ,\ 1 < i < n_l - 1 \tag{۲-۲۷}$$

$$b_n^{(n_l)} = N_n^{n_l} - \alpha_n^{(n_l)}.a_n^{(n_l)} \tag{۳-۲۷}$$

ضرایب α_n، β_n، N_n و M_n برای هر لایه از روابط زیر پیروی می‌کنند:

$$\alpha_{n,s}^{(n_l)} = \frac{a\, I_0\left(\omega_{n,s,n_l} r_{n_l}\right) + b\,\omega_{n,s,n_l} I_1\left(\omega_{n,s,n_l} r_{n_l}\right)}{a\, K_0\left(\omega_{n,s,n_l} r_{n_l}\right) - b\,\omega_{n,s,n_l} K_1\left(\omega_{n,s,n_l} r_{n_l}\right)} \tag{۱-۲۸}$$

$$N_{n,s}^{(n_l)} = \frac{F(n,s) - a\, w^{(n_l)}\left(r_{n_l},n,s\right) - b\dfrac{\partial w^{(n_l)}\left(r_{n_l},n,s\right)}{\partial r}}{a\, K_0\left(\omega_{n,s,n_l} r_{n_l}\right) - b\,\omega_{n,s,n_l} K_1\left(\omega_{n,s,n_l} r_{n_l}\right)} \tag{۲-۲۸}$$

$$\begin{cases} \beta_{n,s}^{(i+1)} = \dfrac{\pi_i}{\chi_i - \alpha_{n,s}^{(i+1)}} \\ M_{n,s}^{(i+1)} = \dfrac{E_i - N_{n,s}^{(i+1)}}{\chi_i - \alpha_{n,s}^{(i+1)}} \\ \alpha_{n,s}^{(i)} = \dfrac{\gamma_i}{\psi_i - \beta_{n,s}^{(i+1)}} \\ N_{n,s}^{(i)} = \dfrac{F_i - M_{n,s}^{(i+1)}}{\psi_i - \beta_{n,s}^{(i+1)}} \end{cases} ,\ 1 < i < n_l - 1 \tag{۳-۲۸}$$

$$M_n^{(1)} = \frac{N_n^{(1)}}{\alpha_n^{(1)}} \tag{۴-۲۸}$$

برای اجتناب از پیچیدگی و طولانی‌شدن عبارات فوق، ضرایب π_i، χ_i، γ_i، ψ_i، E_i و F_i به صورت جداگانه تعریف شده‌اند:

$$\pi_i = \frac{-I_0\left(\omega_{n,s,i} r_i\right) K_1\left(\omega_{n,s,i} r_i\right) - I_1\left(\omega_{n,s,i} r_i\right) K_0\left(\omega_{n,s,i} r_i\right)}{\dfrac{\omega_{n,s,i+1}}{\omega_{n,s,i}} I_0\left(\omega_{n,s,i} r_i\right) K_1\left(\omega_{n,s,i+1} r_i\right) + I_1\left(\omega_{n,s,i} r_i\right) K_0\left(\omega_{n,s,i+1} r_i\right)} \tag{۱-۲۹}$$

$$\chi_i = \frac{-\dfrac{\omega_{n,s,i+1}}{\omega_{n,s,i}} I_0\left(\omega_{n,s,i} r_i\right) I_1\left(\omega_{n,s,i+1} r_i\right) + I_0\left(\omega_{n,s,i+1} r_i\right) I_1\left(\omega_{n,s,i} r_i\right)}{\dfrac{\omega_{n,s,i+1}}{\omega_{n,s,i}} I_0\left(\omega_{n,s,i} r_i\right) K_1\left(\omega_{n,s,i+1} r_i\right) + I_1\left(\omega_{n,s,i} r_i\right) K_0\left(\omega_{n,s,i+1} r_i\right)} \tag{۲-۲۹}$$

$$\gamma_i = \frac{I_0\left(\omega_{n,s,i} r_i\right)}{\chi_i \times K_0\left(\omega_{n,s,i+1} r_i\right) - I_0\left(\omega_{n,s,i+1} r_i\right)} \tag{۳-۲۹}$$

$$\psi_i = \frac{\pi_i \times K_0\left(\omega_{n,s,i+1} r_i\right) + K_0\left(\omega_{n,s,i} r_i\right)}{\chi_i \times K_0\left(\omega_{n,s,i+1} r_i\right) - I_0\left(\omega_{n,s,i+1} r_i\right)} \tag{۴-۲۹}$$

$$E_i = \pi_i \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial w^{(i+1)}\left(r_i,n,s\right)}{\partial r} - \dfrac{\partial w^{(i)}\left(r_i,n,s\right)}{\partial r} \right) - \\ \omega_{n,s,i}\left(w^{(i+1)}\left(r_i,n,s\right) - w^{(i)}\left(r_i,n,s\right)\right) I_1\left(\omega_{n,s,i+1} r_i\right) \end{array} \right] \tag{۵-۲۹}$$

$$F_i = \frac{E_i \times K_0\left(\omega_{n,s,i+1} r_i\right) - w^{(i+1)}\left(r_i,n,s\right) - w^{(i)}\left(r_i,n,s\right)}{\chi_i \times K_0\left(\omega_{n,s,i+1} r_i\right) - I_0\left(\omega_{n,s,i+1} r_i\right)} \tag{۶-۲۹}$$

در نهایت با مشخص‌شدن ضرایب $a_{n,s}$ و $b_{n,s}$ برای هر لایه می‌توانیم توزیع درجه حرارت (در حوزه فرکانس) لایه‌های مختلف را با اعمال تبدیل فوریه معکوس مشخص کنیم[۲۶].

$$\begin{aligned} &\bar{\phi}^{(i)}(r,z,s) = \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty} \begin{array}{l} \left(a_{n,s}^{(i)} I_0\left(\omega_{n,s,i} r\right) + b_{n,s}^{(i)} K_0\left(\omega_{n,s,i} r\right) + w^{(i)}(r,n,s)\right) \\ \times\left(a_1 \sin\left(\lambda_n z\right) - b_1 \lambda_n \cos\left(\lambda_n z\right)\right) \end{array} \end{aligned} \tag{۳۰}$$

شایان ذکر است که در رابطه بالا ضرایب $a_{n,s}^{(i)}$ و $b_{n,s}^{(i)}$ و همچنین آرگومان توابع بسل ($\omega_{n,s,i}$) همگی تابعی از s می‌باشند. دمای لایه‌ها در حوزه زمان و مکان با اعمال تبدیل لاپلاس معکوس روی معادله (۳۰) به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \phi\left(r,z,t\right) &= \pounds^{-1}\left\{ \bar{\phi}\left(r,z,s\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} \bar{\phi}\left(r,z,s\right) ds \end{aligned} \tag{۳۱}$$

در رابطه (۳۱)، c عدد ثابت مختلطی است که بخش حقیقی کلیه قطب‌های تابع $\bar{\phi}$ از بخش حقیقی عدد c بزرگ‌تر است. با توجه به پیچیدگی بسیار زیاد انتگرال مختلط فوق، به نظر می‌رسد که به‌دست آوردن رابطه مشخصی از محاسبه این انتگرال کار بسیار دشوار و یا غیرممکن است. در اینجا از روشی موسوم به روش تابع مرومرفیک[۲۷] جهت محاسبه انتگرال فوق استفاده شده است. مطابق این روش، یک تابع به صورت زیر بر روی $\bar{\phi}$ برازش می‌شود:

[DOR: 20.1001.1.10275940.1390.11.4.1.5]

$$\bar{\phi}^{(i)}\left(r,z,s\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\kappa_i}{s+\vartheta_i} \qquad (۳۲)$$

در رابطه فوق، مقادیر ϑ_i معرف قطب‌های تابع $\bar{\phi}$ است. به این ترتیب انتگرال (۳۱) از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\phi^{(i)}\left(r,z,t\right)=\sum_{i=1}^{n}\kappa_i \exp(-\vartheta_i t) \qquad (۳۳)$$

۴- نتایج و بحث

در این بخش، سعی شده است که با ارائه یک نمونه عملی توانایی حل ارائه‌شده در بررسی مسائل مربوط به پره‌های چندلایه کامپوزیتی برای آرایش‌های مختلف الیاف نشان داده شود. مسئله در حالت ناپایدار حل شده است و درستی جواب در حالت پایدار (بعد از رسیدن به جواب پایدار) با حل تحلیلی آقایان بهادر و بارکهن[۱۵] برای نرخ انتقال حرارت از پره‌های اورتوتروپ (یک‌لایه) مقایسه شده است. شرایط مرزی به‌کاربرده شده در این مقاله شامل شرط مرزی دما ثابت و عایق در دو انتهای پره و شرط مرزی جابه‌جایی در سطح پره است. جدول ۱ هندسه و شرایط مرزی حاکم بر مسئله را نشان می‌دهد. همچنین، مقادیر چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه به ترتیب مساوی $۱۴۰۰\ \mathrm{kg/m^3}$و $۹۳۵\ \mathrm{J\,kg/K}$ درنظر گرفته شده است. سایر متغیرهای دخیل در حل مسئله در توضیحات مربوط به هر نمودار شرح داده خواهد شد.

جدول ۱ هندسه و شرایط مرزی پره

قطر پره	۰/۹
طول پره (cm)	۵
دمای اولیه (°c)	۴۵
دمای پایه پره (°c)	۹۵
دمای محیط (°c)	۴۵
تعداد لایه‌ها	۵

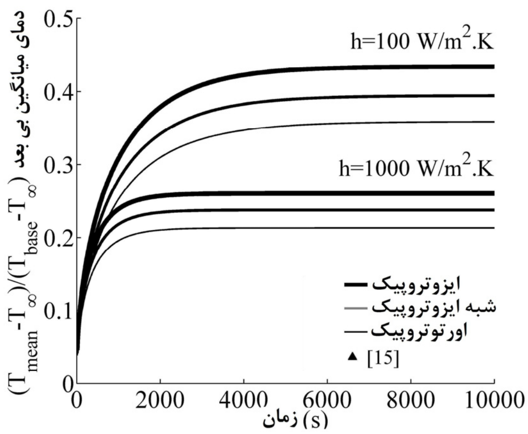
به منظور بررسی اثر زاویه الیاف روی توزیع درجه حرارت و نرخ سردشدن پره، سه آرایش مختلف از الیاف به شرح زیر درنظر گرفته شده است:

- زاویه الیاف در تمامی لایه‌ها مساوی صفر باشد و یا به عبارتی دیگر تمامی الیاف در جهت ϕ پیچیده شده باشند. در این حالت انتقال حرارت مشابه هدایت در یک پره ایزوتروپ خواهد بود.
- زاویه الیاف در تمامی لایه‌ها مساوی ۹۰° باشد که در این صورت الیاف در جهت z قرار گرفته و انتقال حرارت شبیه هدایت در مواد اورتوتروپ با ضرایب هدایت $k_{zz}=k_{11}$ و $k_{rr}=k_{22}$ خواهد بود.
- الیاف به شکل یک لمینیت شبه‌ایزوتروپ چندلایه قرار گرفته باشند([۳۱۵°, ۲۷۰°, ۲۲۵°, ۱۸۰°, ۱۳۵°, ۹۰°, ۴۵°, ۰°]).

قبل از هر چیز، به منظور بررسی توزیع درجه حرارت ناپایدار در لمینیت کامپوزیتی پروفیل دمای بی‌بعد به صورت زیر تعریف شده است:

$$T^*\left(r,z,t\right)=\frac{T\left(r,z,t\right)-T_\infty}{T_b-T_\infty} \qquad (۳۴)$$

شکل ۳ تغییرات دمای میانگین بی‌بعد نسبت به زمان را در دو مقدار متفاوت از ضریب جابه‌جایی نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل ۳ بر می‌آید با افزایش ضریب جابه‌جایی زمان رسیدن به حالت پایدار کاهش پیدا می‌کند که این امر ناشی از افزایش نرخ انتقال حرارت بین پره و محیط است. این نمودارها به ازای سه آرایش ایزوتروپ، شبه‌ایزوتروپ و اورتوتروپ رسم شده‌اند. از آنجایی که در حالت اورتوتروپ الیاف در جهت z مرتب می‌شوند انتقال حرارت محیطی از پره کاهش خواهد یافت و در نتیجه بیشترین میانگین دمایی در این حالت اتفاق می‌افتد و به طور عکس در آرایش ایزوتروپ کمترین مقدار میانگین دمایی را شاهد خواهیم بود.



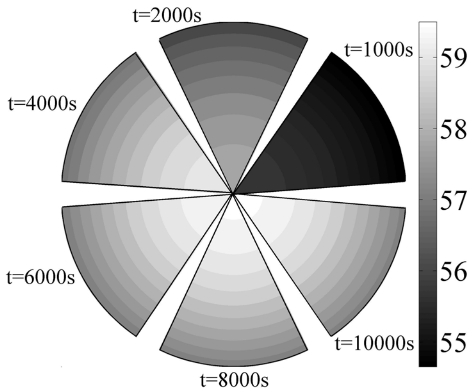
شکل ۳ تغییرات دمای میانگین بی‌بعد با زمان به ازای ضرایب جابه‌جایی و آرایش الیاف مختلف

$(\mathrm{K_{11}=30\,W/m.K},\ \mathrm{K_{22}=20\,W/m.K})$

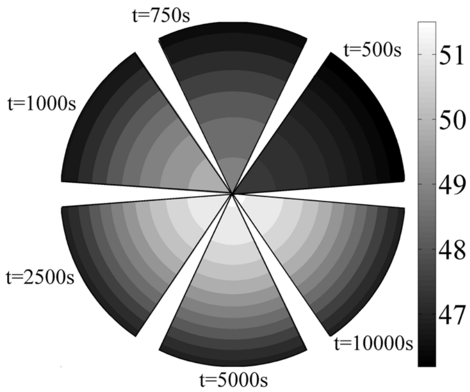
[DOR: 20.1001.1.10275940.1390.11.4.1.5]

به منظور بررسی الگوهای مختلف توزیع دما در زوایای مختلف الیاف، کانتورهای توزیع دمای پره در زمان‌های گوناگون و به ازای ضرایب جابه‌جایی مختلف رسم شده است (شکل ۴).

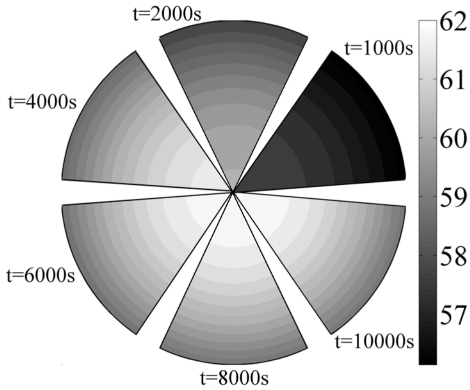
از آنجا که مسئله مورد بررسی به صورت متقارن محوری است توزیع دما در جهت θ تغییر نمی‌کند و کانتورهای دما در زمان‌های مختلف به‌صورت برش‌های قطاعی نشان داده شده‌اند.



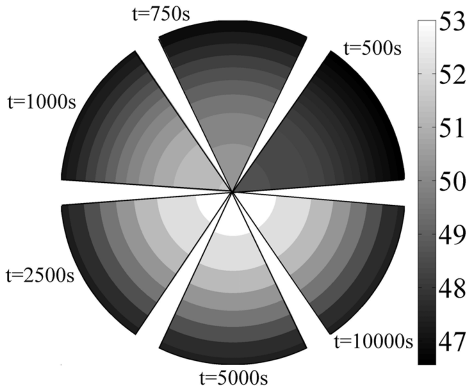
ایزوتروپیک و $h = 100\,W/m^2K$



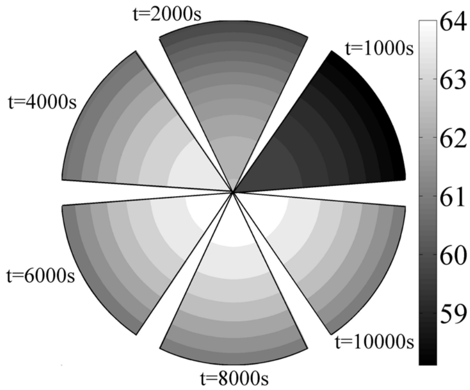
ایزوتروپیک و $h = 1000\,W/m^2K$



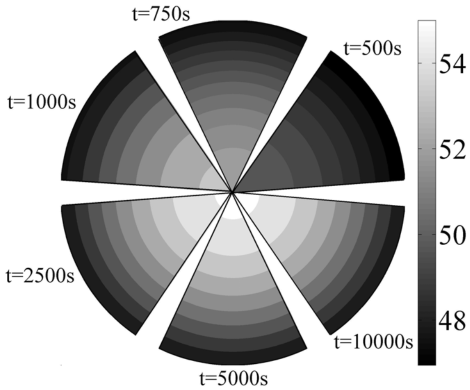
شبه ایزوتروپیک و $h = 100\,W/m^2K$



شبه ایزوتروپیک و $h = 1000\,W/m^2.K$



اورتوتروپیک و $h = 100\,W/m^2K$



اورتوتروپیک و $h = 1000\,W/m^2.K$

شکل ۴ کانتورهای توزیع دما در زمان‌های مختلف به ازای ضرایب جابه‌جایی و آرایش الیاف گوناگون
($K_{11} = 30\,W/mK$, $K_{22} = 20\,W/mK$)

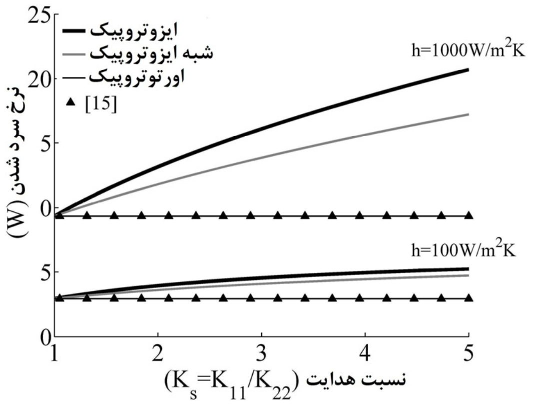
[DOR: 20.1001.1.10275940.1390.11.4.1.5]

همان‌طور که از شکل ۴ پیداست، سطح دمایی در حالت شبه‌ایزوتروپ همیشه بین مقدار ماکزیمم مربوط به حالتی که زاویه الیاف همگی برابر ۹۰° است و حالت مینیمم که تمامی زوایا برابر صفر فرض شده‌اند قرار دارد. همچنین تاثیر زاویه الیاف بر توزیع دما در ضرایب جابه‌جایی پایین محسوس‌تر است طوری که دمای ماکزیمم در حالت اورتوتروپ و ایزوتروپ در ضرایب ۱۰۰ و $۱۰۰۰\ \mathrm{W/m^2K}$ به ترتیب ۵ و ۳ $^\circ\mathrm{C}$ اختلاف را نشان می‌دهد.

در این مقاله، از حل تحلیلی آقایان بهادر و بارکهن[۱۵] به عنوان معیاری برای سنجش درستی حل حاضر بهره برده‌ایم. آن‌ها در مقاله خود اثرات ضریب هدایت اورتوتروپیک را در یک پین‌فین تک‌لایه در حالت پایدار مورد بررسی قرار داده‌اند. حل مذکور حالت ساده‌شده‌ای از مسئله ما می‌باشد که در آن زاویه الیاف در تمامی لایه‌ها را مساوی ۹۰° قرار داده (حالت اورتوتروپیک) و حل حالت پایدار را به‌دست آورده‌ایم.

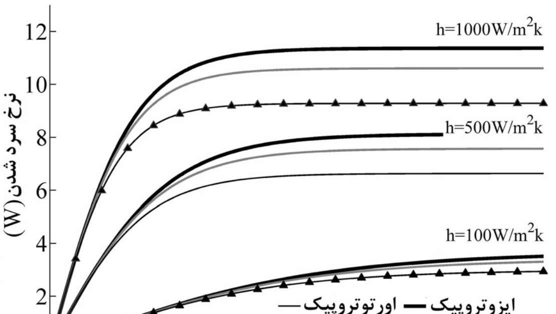
به منظور بررسی اثرات تغییر ضرایب هدایت روی نرخ سردشدن پره، نسبت هدایت به صورت $K^* = K_{11}/K_{22}$ تعریف شده است. شکل ۵ تغییرات نرخ سردشدن پره با نسبت هدایت برای ضرایب جابه‌جایی و آرایش الیاف مختلف در حالت پایدار را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌کنید نرخ این تغییرات برای آرایش الیاف ایزوتروپیک به مراتب محسوس‌تر است. همچنین، هرچه نرخ انتقال حرارت از پره افزایش می‌یابد (ضرایب جابه‌جایی حرارتی بیشتر) این تغییرات نیز بیشتر می‌شود. نتایج حاصل از کار بهادر و بارکهن[۱۵] نیز در شکل ۵ نشان داده شده است. همان‌طور که انتظار می‌رفت این دو جواب کاملاً بر یکدیگر منطبق‌اند.

شکل ۶ تاثیرات تغییر طول پره روی نرخ سردشدن آن (در حالت پایدار) را در ضرایب جابه‌جایی و آرایش الیاف مختلف نشان می‌دهد. تغییرات طول پره به صورت تغییرات نسبت L/D و با فرض ثابت‌بودن قطر پره اعمال شده است. در اینجا نیز نتایج با مقاله بهادر و بار کهن[۱۵] مقایسه شده است. همان‌طور که انتظار می‌رفت سازگاری کامل بین این دو حل دیده می‌شود (البته نتایج در مرجع [۱۵] فقط به ازای ضرایب جابه‌جایی ۱۰۰ و $۱۰۰۰\ \mathrm{W/m^2K}$ گزارش شده است). همان‌طور که از شکل ۶ مشخص است با افزایش ضریب جابه‌جایی اثر آرایش الیاف بر نرخ سردشدن افزایش خواهد یافت به طوری که در ضرایب جابه‌جایی پایین مانند $h = ۱۰۰\ \mathrm{W/m^2K}$ تفاوت چشمگیری در نرخ انتقال حرارت از پره مشاهده نمی‌شود. از دیگر موارد قابل توجه در شکل ۶ ناچیزبودن نرخ تغییرات سردشدن پره در نسبت L/D های بالاست به طوری که بعد از رسیدن به یک نسبت خاص L/D (مثلاً نسبت $L/D = 3$ به ازای $h = ۱۰۰۰\ \mathrm{W/m^2K}$) دیگر افزایش طول پره تاثیری در نرخ انتقال حرارت از آن ندارد.



شکل ۵ تغییرات نرخ سردشدن پره با نسبت هدایت برای ضرایب جابه‌جایی و آرایش الیاف مختلف

$(K_{22} = 20\,\mathrm{W/mK}, L = 5\,\mathrm{cm}, D = 0.9\,\mathrm{cm})$



شکل ۶ تغییرات نرخ سردشدن پره با نسبت طول به قطر پره برای ضرایب جابه‌جایی و آرایش الیاف مختلف

$(K^* = 1.5, K_{22} = 20\,\mathrm{W/mK}, D = 0.9\,\mathrm{cm})$

۵- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، یک حل تحلیلی برای انتقال حرارت هدایتی غیردایم در پره‌های چندلایه کامپوزیتی ارائه شده است. شرایط

مرزی به‌کار گرفته شده در سطح پره کلی بوده که می‌توانـد بـه تمامی انواع شرایط مرزی خطی، نوع اول، دوم و یا سـوم سـاده شود. از جمله مهم‌تـرین نتـایج بـه‌دسـت آمـده از حـل حاضـر می‌توان به موارد ذیر اشاره کرد:

- به دلیل حالت کلی شرایط مرزی گرمایی درنظر گرفته شـده، حل حاضر می‌توانـد در بسـیاری از کاربردهـای عملـی بـرای محاسبه توزیع دما و تنش‌های حرارتی مفید واقع شود.
- با توجه به تحلیلی و دقیق‌بودن حل حاضر، از نتـایج حاصـله می‌توان به عنوان معیاری برای سـنجش حـل‌هـای عـددی و تقریبی بهره جست.
- نرخ انتقال حرارت از پره در حالت‌هایی که زاویه الیاف صفر و 90° است بـه ترتیـب مـاکزیمم و مینـیمم اسـت و در سـایر حالت‌ها نرخ سردشدن بین این دو حالت حدی قرار دارد.

۶- فهرست علایم

b,a	ضرایب دلخواه معادله (۱۱-۴)
b_n, a_n	ضرایب سری فوریه دما در معادله ۳۰
c	عدد ثابت مختلط
c_p	ظرفیت گرمایی ویژه در فشار ثابت
g, f	توابع دلخواه
I	تابع بسل اصلاح‌شده نوع اول
K	تابع بسل اصلاح‌شده نوع دوم
K^*	نسبت هدایت پره K_{11}/K_{22}
k_{ij}	ضرایب هدایت اصلی $(\mathrm{W/m\,K})$
$\bar{k}_{ij}$	ضرایب هدایت فرعی $(\mathrm{W/m\,K})$
L	طول پره (m)
m_l	معرف $\cos\theta$
n_l	معرف $\sin\theta$
q	نرخ انتقال حرارت (W)
z, φ, r	محورهای مختصات قطبی
r_{n_l}	شعاع پره (m)
s	فرکانس $(1/\mathrm{s})$
T_i	دمای اولیه (K)
T_∞	دمای محیط (K)
ϕ	دمای اصلاح‌شده، $T-T_i$
λ	مقادیر ویژه
θ	زاویه انحراف بین محورهای مختصات
ϑ	قطب‌های تابع فوریه دما
ρ	چگالی
$\mathcal{F}$	تبدیل فوریه
£	تبدیل لاپلاس
$£^{-1}$	تبدیل لاپلاس معکوس

زیرنویس و بالانویس‌ها

i	شماره لایه
b	پایه پره
0	مرتبه صفر (بحث توابع بسل)
1	مرتبه اول (بحث توابع بسل)

۷- منابع

[1] Corlay C., Advani S. G., “Temperature Distribution in a Thin Composite Plate Exposed to a Concentrated Heat Source”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 50 No. 4, 2007, pp. 2883-2894.

[2] Iyengar V., “Transient Thermal Conduction in Rectangular Fiber Reinforced Composite Laminates”, *Adv. Compos. Mater.*, Vol. 4, No. 4, 1995, pp. 327-342.

[3] Sunao S., Takashi I., “Numerical Analysis of Heat Conduction Effect Corresponding to Infrared Stress Measurements in Multilamina CFRP Plates”, *Adv. Compos. Mater.*, Vol. 8, No. 3, 1999, pp. 269-279.

[4] Guo T. et al., “Temperature Distribution of Thick Thermo Set Composites”, *J. Model. Simul. Mater. Sci. Eng.*, Vol. 12, No. 2, 2004, pp. 443-452.

[5] Chatterjee J., Henry D. P., Ma F., Banerjee P. K., “An Efficient BEM Formulation for 3-Dimensional Steady-State Heat Conduction Analysis of Composites”, *Int. J. Heat Mass Transf.*, Vol. 51, 2008, pp. 1439-1452.

[6] Yvonnet J., He Q. C., Toulemonde C., “Numerical Modeling of the Effective Conductivities of Composites with Arbitrarily Shaped Inclusions and Highly Conducting Interface”, *Composites Science and Technology*, Vol. 68, No. 13, 2008, pp. 2818-2825.

[7] Argyris J., Tenek L., Oberg F., “A Multilayer Composite Triangular Element for Steady-State

[DOR: 20.1001.1.10275940.1390.11.4.1.5]

Approach", *Computers and Chemical Engineering*, Vol. 26, No. 3, 2002, pp. 1621-1632.
[17] Kayhani, M.H., Shariati, M., Norouzi, M., Karimi Demneh, M.; "Exact solution of conductive heat transfer in cylindrical composite laminate", Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 46, 2009, pp 83-94.
[18] Kayhani M. H., Norouzi M., Amiri Delouei A., "A General Analytical Solution for Heat Conduction in Cylindrical Multilayer Composite Laminates", *Int. J. Thermal Science*, Vol. 52, 2012, pp. 73-82.
[19] Hassan N., Thompson J. E., Batra R. C., Hulcher A. B., Song X., Loos A. C., "A Heat Transfer Analysis of the Fiber Placement Composite Manufacturing Process", *Journal of REINFORCED PLASTICS AND COMPOSITES*, Vol. 24, No. 8, 2005, pp. 869-888.
[20] Newnham P., Abrate S., "Finite Element Analysis of Heat Transfer in Anisotropic Solids: Application to Manufacturing Problems", *Journal of Reinforced Composites and Plastics*, Vol. 12, No. 1, 1993, pp. 854-864.
[21] Ozisik M. N., *Heat Conduction*, Second Ed., New York, Wiley, 1993.
[22] Fung, Y. C., *Foundation of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.
[23] Powers, J. M., "On the Necessity of Positive Semi-Definite Conductivity and Onsager Reciprocity in Modeling Heat Conduction in Anisotropic Media", *J. Heat Transf. Trans. Asme*, Vol. 126, No. 5, 2004, pp. 670-675.
[24] Herakovich C. T., *Mechanics of Fibrous Composites*, New York, Wiley, 1998.
[25] Halpin J. C., *Primer on Composite Materials Analysis*, Boca Raton, CRC Press, 1992.
[26] Myint, T., Debnath L., *LinearPartial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Boston, Birkhauser, 2007.
[27] Bronshtein I. N., Semendyayev K. A., Musiol G., Muehlig H., *Hand book of mathematic*, Berlin, Springer, 1998, pp. 124.

Conduction/Convection/Radiation Heat Transfer in Complex Shells", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng*, Vol. 120, 1995, pp. 271-301.
[8] Ma C. C., Chang S. W., "Analytical Exact Solutions of Heat Conduction Problems for Anisotropic Multilayered Media", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, No. 9, 2004, pp. 1643-1655.
[9] Hsieh M. H., Ma C. C., "Analytical Investigations for Heat Conduction Problems in Anisotropic Thin-Layer Media with Embedded Heat Sources", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, No. 20, 2002, pp. 4117-4132.
[10] Oseloka O., "Heat Conduction in Composite Media: A Boundary Integral Approach", *Journal of Computers & Chemical Engineering*, Vol. 26, No. 1, 2002, pp. 1621-1632.
[11] Sun Y., Wichman I. S., "On Transient Heat Conduction in a One-Dimensional Composite Slab", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, 2004, pp 1555-1559.
[12] Lu X., Tervola P., Viljanen M., "Transient Analytical Solution to Heat Conduction in Multi-Dimensional Composite Cylinder Slab", *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. 49, 2006, pp. 1107-1114.
[13] Haji-Sheikh A., Beck J. V., Agonater D., "Steady-State Heat Conduction in Multi-Layer Bodies", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, No. 5, 2003, pp. 2363-2379.
[14] Singh S., Jain P. K., Uddin R., "Analytical Solution to Transient Heat Conduction in Polar Coordinates with Multiple Layers in Radial Direction", *Int. J. Thermal Sciences*, Vol. 47, 2008, pp. 261-273.
[15] Bahadur R., Bar-Cohen A., "Orthotropic Thermal Conductivity Effect on Cylindrical Pin Fin Heat Transfer", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 50, No. 2, 2007, pp. 1155-1162.
[16] Onyejekwe O. O., "Heat Conduction in Composite Media: a Boundary Integral

[DOR: 20.1001.1.10275940.1390.11.4.1.5]