مجله مهندسی مکانیک مدرس، مهر 1396، دوره 17، شماره 7، ص ص 236-244

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بررسی تحلیلی و عددی پدیده آشوب در دینامیک وضعیت یک ماهواره در مدار بیضوی

محمدرضا چگینی[1]، سید حسین ساداتی[2*]، حسن سالاریه[3]

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
3- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران
* تهران، صندوق پستی 193951999، sadati@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 28 فروردین 1396
پذیرش: 20 خرداد 1396
ارائه در سایت: 29 تیر 1396

کلید واژگان:
آشوب
ماهواره صلب
مدار بیضوی
تبدیلات سرت-آندویر
نگاشت پوانکاره

چکیده

در این مقاله، به بررسی تحلیلی و عددی پدیده آشوب در دینامیک وضعیت یک ماهواره صلب تحت تاثیر گشتاور اغتشاشی گرادیان جاذبه ناشی از حرکت در یک مدار بیضوی می‌پردازیم. در بخش تحلیلی، هدف اثبات وجود آشوب و سپس به‌دست آوردن رابطه‌ای برای عرض ناحیه آشوب براساس پارامترهای سیستم است. در بخش عددی، هدف اعتبارسنجی بخش تحلیلی با کمک دو روش عددی نگاشت پوانکاره و حساسیت به شرایط اولیه است. برای این کار ابتدا همیلتونین سیستم بدون اغتشاش استخراج می‌شود. این همیلتونین دارای سه درجه آزادی است. این در حالی است که دینامیک وضعیت در حالت بدون اغتشاش دارای دو ثابت حرکت شامل انرژی و ممنتم است. با استفاده از این دو ثابت حرکت و با کمک تبدیل کانونیکال سرت-آندویر، همیلتونین سیستم بدون اغتشاش کاهش مرتبه داده شده و تبدیل به یک سیستم یک درجه آزادی می‌شود. در ادامه، اغتشاشات ناشی از گرادیان جاذبه به خاطر حرکت در مدار بیضوی براساس متغیرهای سرت-آندویر و زمان تخمین زده می‌شود. در نتیجه این تخمین و ساده‌سازی، همیلتونین جدید سیستم یک درجه آزادی و تابعی از زمان می‌شود. پس از آن، تئوری ملنیکف برای اثبات وجود آشوب حول مدارات هتروکلینیک سیستم استفاده می‌گردد. به کمک این تئوری، ضخامت لایه آشوب در فضای متغیرهای سرت-آندویر به صورت یک رابطه تحلیلی تخمین زده می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که روابط تحلیلی تطابق بسیار خوبی با نتایج عددی دارند. همچنین نتایج نشان می‌دهد که حتی برای خروج از مرکزهای بزرگ نیز این روابط صادق است.

Analytical and Numerical Analysis of Chaos in Attitude Dynamics of a Satellite in an Elliptic Orbit

Mohammad Reza Chegini[1], Seyed Hossein Sadati[1*], Hassan Salarieh[2]

1- Department of Mechanical Engineering, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran
2- Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran
* P.O.B. 193951999, Tehran, Iran, sadati@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 17 April 2017
Accepted 10 June 2017
Available Online 20 July 2017

Keywords:
Chaos
Rigid satellite
Elliptic Orbit
Serret-Andoyer Transformation
Poincare Map

ABSTRACT

In this paper, we investigate chaos in attitude dynamics of a rigid satellite in an elliptic orbit analytically and numerically. The goal in the analytical part is to prove the existence of chaos and then to find a relation for the width of chaotic layers based on the parameters of the system. The numerical part is aimed at validating the analytical method using the Poincare maps and the plots obtained on the sensitivity to initial conditions. For this end, first, the Hamiltonian for the unperturbed system is derived. This Hamiltonian has three degrees of freedom due to the three-axis free rotation of the satellite. However, the unperturbed attitude dynamics has two first-integrals of motion, namely, the energy and the angular momentum. Next, we use the Serret-Andoyer transformation and reduce the unperturbed system Hamiltonian to one-degree of freedom. Then, the gravity gradient perturbation due to moving in an elliptic orbit is approximated in Serret-Andoyer variables and time. Due to this approximation and simplification, the system Hamiltonian transforms to a one-degree-of-freedom non-autonomous one. After that, Melnikov’s method is used to prove the existence of chaos around the heteroclinic orbits of the system. Finally, a relation for calculating the width of chaotic layers around the heteroclinic orbits in the Poincare map of the Serret-Andoyer variables is analytically derived. Results show that the analytical method gives a good approximation of the width of chaotic layers. Moreover, the results show that the analytical method is accurate even for orbits with large eccentricities.

1- مقدمه

بررسی آشوب در دینامیک ماهواره‌ها از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است چرا که دینامیک ماهواره در شرایط آشوب دارای رفتاری غیرنوسانی و در نتیجه تا حدی غیرقابل پیش‌بینی است. بررسی آشوب در ماهواره‌ها قدمتی در حدود چهل سال دارد. اما بررسی و اثبات آشوب به صورت تحلیلی همواره با دشواری‌هایی روبرو بوده است. این دشواری‌ها به خاطر وجود درجات آزادی

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. R. Chegini, S. H. Sadati, H. Salarieh, Analytical and Numerical Analysis of Chaos in Attitude Dynamics of a Satellite in an Elliptic Orbit, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 7, pp. 236-244, 2017 (in Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.7.28.0]

بالا در سیستم است. مهم‌ترین روش اثبات تحلیلی آشوب روش ملنیکف است [1]. البته روش‌های تحلیلی دیگری نیز مانند روش خمینه ریچی[1] [3,2] و یا روش فاز-انرژی[2] [5,4] وجود دارند که دامنه کاربرد کمتری دارند و به آن‌ها کمتر پرداخته شده است. از طرف دیگر کاربرد روش ملنیکف محدود به سیستم‌های صفحه‌ای (یعنی دارای دو درجه آزادی در فضای فاز و یا داشتن یک درجه آزادی همیلتونین) به همراه یک اغتشاش زمانی پریودیک است. هر چند افرادی مانند ویگنیز[3]، هولمز[4]، یاگاساکی[5]، کاماسا[6] و ژنگ[7] سعی در گسترش این روش‌ها برای درجات آزادی بالاتر کرده‌اند.

ویگینز و همکاران روش بررسی تحلیلی آشوب را به سیستم‌های به همراه اغتشاش شبه‌پریودیک [6]، سیستم‌های سه درجه داری نوساناتی که به آرامی تغییر می‌کنند [8,7] و حالت‌های کلی‌تر بیان شده به صورت متغیرهای عمل-زاویه[8] [9] توسعه دادند. هولمز و همکاران برای سیستم همیلتونین دو درجه آزادی [10] و همیلتونین‌های دارای درجات آزادی بیشتر از دو که به صورت متغیرهای عمل-زاویه بیان شده‌اند [12,11] به بررسی آشوب پرداختند. یاگاساکی روش ویگنیز برای اغشاش شبه‌پریودیک را به صورت کلی‌تر بررسی و اثبات کرد [13] و همچنین به بررسی آشوب در سیستم با دو درجه آزادی همیلتونین و داری نقاط تعادل زینی-مرکزی[9] پرداخت [14]. کاماسا و همکاران روش ملنیکف را برای سیستم‌های با چند پالس گسترش دادند [15]. ژنگ و همکاران روش کاماسا را برای سیستم غیرخودگردان[10] چهار و شش درجه آزادی در فضای فاز توسعه دادند [17,16]. با این حال برای یک سیستم داری بیشتر از دو درجه آزادی همیلتونین و یا سه درجه آزادی در فضای فاز روش کلی برای اثبات آشوب وجود ندارد. در نتیجه در بررسی دینامیک وضعیت و مدار یک ماهواره به صورت همزمان (که در این حالت سیستم دارای حداقل پنج درجه آزادی همیلتونین است) و یا در بررسی دینامیک وضعیت با فرض این‌که دینامیک مدار سیستم تحت تاثیر دینامیک وضعیت نباشد (که در این حالت سیستم دارای حداقل سه درجه آزادی همیلتونین و زمان است)، اثبات آشوب به صورت تحلیلی انجام نشده است. بنابراین پژوهشگران مختلف همواره در جستجوی ساده‌سازی معادلات سیستم و کاهش درجه آن‌ها بوده‌اند. از جمله مهمترین این کارها شامل بررسی حرکت پیچ (شیب)[11] ماهواره صلب [19,18]، ماهواره غیرصلب [20] و ماهواره مغناطیسی [21] در مدار بیضوی است. دیگر مقالات مهم شامل در نظر گرفتن بخشی از اغتشاش برای کاهش درجات آزادی سیستم (دو مثال در مرجع [22] داده شده است) و یا در نظر گرفتن ماهواره صلب در مدار دایروی است [23].

البته در کنار روش‌های تحلیلی همواره روش‌های مختلف عددی نیز مورد توجه بوده است چرا که در روش‌های عددی بررسی آشوب، درجات آزادی سیستم اهمیت چندانی ندارند و با بالا رفتن درجات آزادی تنها هزینه محاسباتی بالا می‌رود. مهم‌ترین این روش‌ها روش نمای لیاپانف است که در صورت داشتن یک نمای لیاپانف مثبت سیستم آشوبناک خواهد بود [26-24].

[1] Ricci Manifold
[2] Energy-Phase Method
[3] Wiggins
[4] Holmes
[5] Yagasaki
[6] Camassa
[7] Zhang
[8] Action-Angle Variables
[9] Saddle-Center
[10] Non-Autonomous
[11] Pitch

هدف این پژوهش بررسی تحلیلی و عددی آشوب در دینامیک وضعیت یک ماهواره صلب است. این ماهواره تحت تاثیر گشتاور اغتشاشی گرادیان جاذبه ناشی از حرکت در یک مدار بیضوی است. در بخش تحلیلی، هدف ساده‌سازی معادلات دینامیک وضعیت ماهواره با استفاده از تبدیل سرت-آندویر و روش میانجی[12] است تا بتوان از روش ملنیکف در اثبات آشوب استفاده کرد. دیگر هدف بخش تحلیلی به دست آوردن یک رابطه برای شناسایی بخشی از فضای حالت سیستم است که با قرار دادن شرایط اولیه در آن ناحیه سیستم رفتار آشوبناک و غیرقابل پیش‌بینی از خود نشان می‌دهد. در بخش عددی این پژوهش، هدف اعتبارسنجی بخش تحلیلی با استفاده از رسم نگاشت پوانکاره و نمودارهای حساسیت به شرایط اولیه برای چند حالت مختلف می‌باشد.

در این مقاله، ابتدا با استفاده از تبدیل سرت-آندویر به کاهش درجات سیستم یک جسم صلب بدون اغتشاش پرداخته می‌شود و سپس با استفاده از روش میانجی[13] که به وسیله اریبس[14] و الیپ[15] ارائه شده است [27] به کاهش کلی سیستم مغشوش به یک همیلتونین دو درجه آزادی که دارای ممان‌های اینرسی پریودیک با زمان است پرداخته می‌شود. در مرجع [28] پنگ[16] و لیو[17] سعی در اثبات آشوب با استفاده مدل ساده شده [27] نموده‌اند. پژوهش ارائه شده در این مقاله ادامه آن کار است با این تفاوت‌های مهم: 1- پنگ و لیو از تبدیل سرت-آندویر برای کاهش درجات آزادی استفاده نکرده‌اند، 2- بررسی آن‌ها تنها برای خروج از مرکزهای بسیار کوچک است و 3- پنگ و لیو به صورت عددی آشوب را با استفاده از نگاشت پوانکاره بررسی نکرده و ضخامت ناحیه آشوب را براساس پارامترهای سیستم ارائه نداده‌اند.

2- توصیف سیستم

سیستم مورد مطالعه در این مقاله یک ماهواره صلب در مدار بیضوی می‌باشد. در این سیستم، بدون از دست دادن کلیت، فرض بر آن است که ممان‌های اینرسی اصلی سیستم از رابطه $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3$ پیروی می‌کنند که در آن $\gamma_i = 1/I_i$ و $\mathrm{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ ماتریس ممان اینرسی ماهواره است. دو دستگاه مختصات اینرسی $x_0y_0z_0$ و بدنی xyz در نظر می‌گیریم به‌طوری که دستگاه اینرسی به مرکز زمین متصل است و مرکز دستگاه بدنی در مرکز جرم ماهواره قرار دارد و همراه با آن دوران می‌کند (شکل 1). بردار $\vec{r}$ نشان

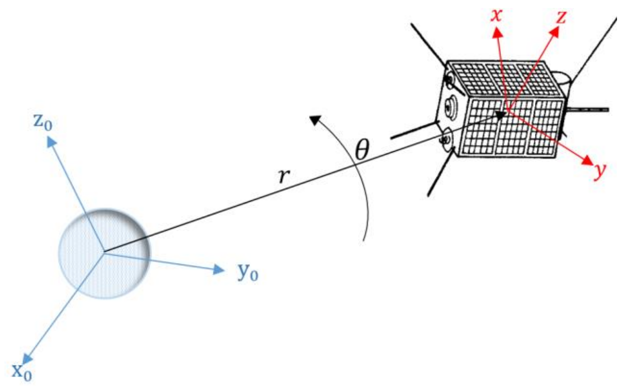

Fig. 1 Schematic figure of the satellite

شکل 1 نمای شماتیک ماهواره

[12] Intermediary
[13] Intermediary
[14] Arribas
[15] Elipe
[16] Peng
[17] Liu

دهنده موقعیت مرکز جرم ماهواره نسبت به دستگاه اینرسی $x_0y_0z_0$ است و فرض بر این است که این بردار همواره در صفحه x_0y_0 قرار دارد. به بیان دیگر $\vec{r} = [r\cos(\theta)\,, r\sin(\theta)\,, 0]^{\mathrm{T}}$ که در آن پارمترهای r و θ بیان‌کننده شعاع مدار و زاویه مدار می‌باشند.

برای نشان دادن دوران دستگاه بدنی نسبت به دستگاه اینرسی از دو حالت استفاده می‌کنیم: 1- با استفاده از سه زاویه اویلر ψ_1، ψ_2 و ψ_3 و 2- با استفاده از پنج زاویه h، l، g، J و I (شکل 2). جزئیات این دوران‌ها برای حالت اول به صورت:

1- دوران حول محور z_0 به اندازه ψ_1 به طوری که محور x_0 روی محور x' قرار گیرد

2- دوران حول محور x' به اندازه ψ_2 به صورتی که محور z_0 روی محور z قرار گیرد

3- دوران حول محور z به اندازه ψ_3 به صورتی که محور x' روی محور x قرار گیرد

و برای حالت دوم به صورت زیر است.

1- دوران حول محور z_0 به اندازه h به طوری که محور x_0 روی محور i قرار گیرد

2- دوران حول محور i به اندازه I به صورتی که محور z_0 روی محور $k = \vec{G}/|\vec{G}| = i \times j$ قرار گیرد. در اینجا $\vec{G}$ بردار ممنتم زاویه‌ای است.

3- دوران حول محور k به اندازه g به صورتی که محور i روی محور j قرار گیرد

4- دوران حول محور j به اندازه J به صورتی که محور k روی محور z قرار گیرد

5- دوران حول محور z به اندازه l به صورتی که محور j روی محور x قرار گیرد

براساس این حالت‌ها ماتریس دوران به صورت زیر می‌شود.

$$R = R_3(\psi_3)R_1(\psi_2)R_3(\psi_1) = R_3(l)R_1(J)R_3(g)R_1(I)R_3(h) \tag{1}$$

که در آن

$$R_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x) & \sin(x) \\ 0 & -\sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}$$
$$R_3(x) = \begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) & 0 \\ -\sin(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

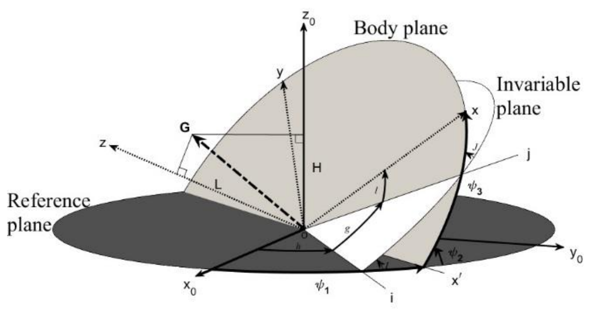

Fig. 2 Transformation from the reference frame to the body frame in two cases

شکل 2 تبدیل از دستگاه مرجع به دستگاه به بدنی در دو حالت

همان‌طور که در "شکل 2" دیده می‌شود، استفاده از سه زاویه ψ_1، ψ_2 و ψ_3 برای دوران فقط شامل دو صفحه به نام صفحه اینرسی[1] و صفحه بدنه[2] می‌شود اما استفاده از پنج زاویه h، l، g، J و I یک صفحه دیگر به نام صفحه نامتغیر[3] را نیز شامل می‌شود. صفحه نامتغیر صفحه‌ای است که عمود بر بردار مومنتم زاویه است و در صورتی که به یک جسم اغتشاش خارجی وارد نشود همواره ثابت می‌ماند که این موجب کاهش مرتبه و ساده‌سازی سیستم می‌شود که در بخش‌های بعد به آن می‌پردازیم.

3- معادلات حاکم بر سیستم

با استفاده از معادله (2)، بردار سرعت دورانی ماهواره بیان شده در دستگاه بدنی به صورت زیر می‌شود

$$\omega^{\times} = -\dot{R}R^{\mathrm{T}} \rightarrow \omega \quad = \begin{bmatrix} \sin(\psi_2)\sin(\psi_3)\,\dot{\psi}_1 + \cos(\psi_3)\,\dot{\psi}_2 \\ \sin(\psi_2)\cos(\psi_3)\,\dot{\psi}_1 - \sin(\psi_3)\,\dot{\psi}_2 \\ \cos(\psi_2)\,\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

بر این اساس انرژی جنبشی به صورت زیر می‌شود.

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_1^2}{\gamma_1} + \frac{\omega_2^2}{\gamma_2} + \frac{\omega_3^2}{\gamma_3}\right) + \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2\right) \tag{4}$$

و با فرض این‌که ابعاد ماهواره نسبت به اندازه مدار بسیار کوچک‌تر است (که فرض بسیار معقولی برای ماهواره‌ها است)، در این صورت تقریب انرژی پتانسیل سیستم به صورت زیر می‌شود [29]

$$V = -\frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{2r^3}\left(\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}\right)(1 - 3\alpha_1^2) + \left(\frac{1}{\gamma_3} - \frac{1}{\gamma_2}\right)(1 - 3\alpha_3^2)\right) \tag{5}$$

که در آن بردار $(\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3)$ کسینوس هادی‌های بین بردار $\vec{r}$ و مختصات بدنی است. یعنی

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = R\frac{\vec{r}}{r} \tag{6}$$

با تعریف لاگرانژین به صورت $\mathcal{L} = T - V$، ممنتم‌های مزدوج متغیرهای سیستم به صورت زیر به دست می‌آید.

$$P_{q_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}; q = [\psi_1.\psi_2.\psi_3.r.\theta] \tag{7}$$

و در نتیجه همیلتونین سیستم به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\mathcal{H} = \sum P_{q_i}\,\dot{q}_i - \mathcal{L} \tag{8}$$

با ساده‌سازی، این همیلتونین را به سه بخش به‌صورت زیر می‌توان تقسیم کرد.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_K + \mathcal{H}_E + \mathcal{H}_C \tag{9}$$

که در آن

$$\mathcal{H}_K = \frac{1}{2}\left(P_r^2 + \frac{P_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{\mu}{r}$$
$$\mathcal{H}_E = \frac{1}{2}\vec{G}^{\mathrm{T}}\mathrm{I}^{-1}\vec{G}$$
$$\mathcal{H}_C = -\frac{\mu}{2r^3}\left(\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}\right)(1 - 3\alpha_1^2) + \left(\frac{1}{\gamma_3} - \frac{1}{\gamma_2}\right)(1 - 3\alpha_3^2)\right) \tag{10}$$

و

[1] Reference Plane
[2] Body Plane
[3] Invariable Plane

$$\vec{G} = \begin{bmatrix} \csc(\psi_2)\sin(\psi_3) & \cos(\psi_3) & -\cot(\psi_2)\sin(\psi_3) \\ \csc(\psi_2)\cos(\psi_3) & -\sin(\psi_3) & -\cot(\psi_2)\cos(\psi_3) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_{\psi_1} \\ P_{\psi_2} \\ P_{\psi_3} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\mathrm{I}^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{bmatrix} \tag{12}$$

در معادله (10)، $\mathcal{H}_K$ مانند همیلتونین حرکت یک جسم نقطه‌ای در مدار است و $\mathcal{H}_E$ شبیه همیلتونین حرکت دورانی یک جسم صلب حول مرکز جرم خود است و در حقیقت همان همیلتونین حرکت دورانی یک جسم صلب بدون اغتشاش است. $\mathcal{H}_C$ همیلتونینی است که به خاطر کوپل دینامیک مدار و وضعیت به وجود می‌آید و در حقیقت اثرات گرادیان جاذبه روی دینامیک وضعیت را نشان می‌دهد. اما دینامیک وضعیت بدون اغتشاش را می‌توان با استفاده از تبدیل سرت-آندویر کاهش درجه داد. برای این کار از پنج زاویه h، l، g، J و I به صورت نشان داده در "شکل 2" کمک میگیریم. در صورت استفاده از این زاویه‌ها در همیلتونین $\mathcal{H}_E$، بردار ممنتم‌های زاویه‌ای به صورت زیر می‌شود (شکل 2).

$$\vec{G} = \begin{bmatrix} \sqrt{G^2 - L^2}\sin(l) \\ \sqrt{G^2 - L^2}\cos(l) \\ L \end{bmatrix} \tag{13}$$

که در آن G اندازه بردار $\vec{G}$ یعنی $G = |\vec{G}|$ است. با استفاده از این تبدیل که معروف به تبدیل سرت-آندویر است درجات آزادی دوران یک جسم صلب بدون اغتشاش خارجی از سه درجه به یک درجه کاهش پیدا می‌کند (برای جزییات بیشتر در مورد این تبدیل به [30] مراجعه شود). با استفاده از این تبدیل روابط زیر نیز بین زوایای اویلر و زوایای h، l، g، J و I برقرار می‌گردد.

$$\begin{aligned} &\cos(\psi_2) = \cos(I)\cos(J) - \sin(I)\sin(J)\cos(g) \\ &\sin(\psi_2)\cos(\psi_1 - l) = \cos(I)\sin(J) + \sin(I)\cos(\mathrm{J})\cos(\mathrm{g}) \\ &\sin(\psi_2)\sin(\psi_1 - l) = \sin(I)\sin(g) \\ &\sin(\psi_2)\cos(\psi_3 - h) = \sin(I)\cos(J) + \cos(I)\sin(\mathrm{J})\cos(\mathrm{g}) \\ &\sin(\psi_2)\sin(\psi_3 - h) = \sin(J)\sin(g) \end{aligned} \tag{14}$$

براساس این روابط بردار کسینوس هادی در معادله (6) به صورت زیر می‌شود

$$\begin{aligned} \alpha\_1 = \{&\cos(h)(\cos(g)\cos(l) - \cos(J)\sin(g)\sin(l)) \\ &+ \sin(h)(\sin(I)\sin(J)\sin(l) \\ &- \cos(I)(\cos(l)\sin(g) \\ &+ \cos(g)\cos(J)\sin(l)))\}\ \cos(\theta) \\ &+ \{\sin(h)(\cos(g)\cos(l) \\ &- \cos(J)\sin(g)\sin(l)) \\ &+ \cos(h)(-\sin(I)\sin(J)\sin(l) \\ &+ \cos(I)(\cos(l)\sin(g) \\ &+ \cos(g)\cos(J)\sin(l)))\}\sin(\theta) \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 = \{&-\cos(h)\ (\cos(J)\cos(l)\sin(g) + \cos(g)\sin(l)) \\ &+ \sin(h)\ (-\cos(g)\cos(I)\cos(J)\cos(l) \\ &+ \cos(l)\sin(I)\sin(J) \\ &+ \cos(I)\sin(g)\sin(l))\}\cos(\theta) \\ &+ \{-\sin(h)\ (\cos(J)\cos(l)\sin(g) \\ &+ \cos(g)\sin(l)) \\ &+ \cos(h)\ (\cos(g)\cos(I)\cos(J)\cos(l) \\ &- \cos(l)\sin(I)\sin(J) \\ &- \cos(I)\sin(g)\sin(l))\}\sin(\theta) \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \alpha\_3 = \{&\cos(J)\sin(h)\sin(I) + (\cos(h)\sin(g) \\ &+ \cos(g)\cos(I)\sin(h))\sin(J)\}\ \cos(\theta) \\ &+ \{\sin(g)\sin(h)\sin(J) \\ &- \cos(h)(\cos(J)\sin(I) \\ &+ \cos(g)\cos(I)\sin(J))\ \sin(\theta)\} \end{aligned} \tag{17}$$

در این روابط

$$\cos(J) = \frac{L}{G}, \cos(I) = \frac{H}{G}, \sin(J) = \frac{\sqrt{G^2-L^2}}{G}, \sin(I) = \frac{\sqrt{G^2-H^2}}{G}$$

با جایگذاری معادلات (15)- (17) در معادله (10) همیلتونین سیستم به صورت متغیرهای سرت-آندویر بیان می‌شود. همان‌طور که در این معادلات دیده می‌شود ترم اغتشاشی ناشی از گرادیان جاذبه باعث می‌شود که همیلتونین سیستم از یک درجه آزادی در حالت بدون اغتشاش (یا بدون کوپلینک) به یک همیلتونین با پنج درجه آزادی در حالت با اغشاش تبدیل شود. بنابراین برای این‌که بتوان از روش‌های تحلیلی برای بررسی آشوب استفاده کرد نیاز به کاهش درجه این همیلتونین است. برای این کار ابتدا فرض می‌کنیم که دینامیک مدار ماهواره تحت تاثیر دینامیک وضعیت قرار نگیرد. به بیان دیگر همیلتونین $\mathcal{H}_K$ به صورت مستقل برای به دست آوردن پاسخ زمانی دینامیک مدار استفاده می‌شود. با این کار همیلتونین سیستم از پنج درجه به سه درجه به همراه زمان تبدیل می‌شود. در مرحله بعد با استفاده از یک تبدیل کانونیکال و میانگین‌گیری، که به روش میانجی معروف است، این همیلتونین را با یک همیلتونین یک درجه آزادی غیرخودگردان تقریب می‌زنیم.

4- کاهش مرتبه معادلات سیستم

در این بخش همیلتونین سیستم را کاهش درجه می‌دهیم. برای این کار ابتدا فرض می‌کنیم که دینامیک وضعیت اثری بر دینامیک مدار ندارد و بر این اساس پاسخ زمانی دینامیک مدار را به صورت یک تابع پریودیک مناسب به دست می‌آوریم. دلیل به‌دست آوردن دینامیک مدار به صورت پریودیک آن است که بعدا بتوان از روش ملنیکف برای بررسی آشوب استفاده کرد. با این کار همیلتونین سیستم از پنج درجه به سه درجه به همراه زمان تبدیل می‌شود. سپس با استفاده از یک تبدیل کانونیکال معروف به روش میانجی همیلتونین سیستم را دو درجه دیگر کاهش داده و درنهایت به یک همیلتونین یک درجه غیرخودگردان می‌رسیم که مناسب برای استفاده در روش ملنیکف است.

4-1- پاسخ زمانی دینامیک مدار

در صورت بزرگ بودن فاصله ماهواره تا زمین و یا بزرگ بودن نسبت متوسط سرعت دورانی وضعی به سرعت دورانی مداری، می‌توان از اثرات دینامیک وضعیت بر مدار صرف‌نظر کرد [27] و در نتیجه دینامیک مدار سیستم را به صورت غیرکوپل از دینامیک وضعیت بررسی کرد. در این صورت $\mathcal{H}_E$ به صورت جداگانه برای استخراج معادلات مداری استفاده می‌شود که در حقیقت شبیه همان حرکت یک جرم متمرکز (نقطه‌ای) در مدار است و حل آن به صورت زیر می‌باشد [31].

$$\begin{cases} r = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta)} = \dfrac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(\theta)} = a(1 - e\cos(E)) \\ \cos(E) = \dfrac{e + \cos(\theta)}{1 + e\cos(\theta)} \\ \sqrt{\dfrac{\mu}{a^3}}\, t = E - e\sin(E) \end{cases} \tag{18}$$

که در آن p پارامتر مداری، a نصف قطر بزرگ بیضی مدار، e خروج از مرکز بیضی، E آنومالی مرکزی[1] و μ ثابت استاندارد گرانش است. با توجه به روابط (18) مشاهده می‌شود که متغیرهای مداری برحسب زمان کاملا مشخص هستند. از طرف حل متغیرهای مداری به‌صورت فرم بسته وجود ندارد و عموما به‌صورت سری بیان می‌شود. حل زمانی آنومالی مرکزی به‌صورت زیر است [31].

$$E = M + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{J}_n(ne)\sin(nM) \tag{19}$$

که در آن J_n تابع بسل نوع اول است و $M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}t$. از طرف دیگر از آن‌جایی که $1/r^3$ در معادلات اغتشاشی ظاهر می‌شود نیاز به‌دست آورن پاسخ زمانی آن داریم. با قرار دادن E از معادله (19) در معادله (18) و استفاده از سری تیلور حول $e = 0$ داریم.

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{a^3}\sum_{n=0}^{\infty}B_n\cos(nM) \tag{20}$$

که برای چند جمله ابتدایی B_nها به صورت زیر هستند.

$$\begin{cases} B_0 = 1 + \frac{3e^2}{2} + \frac{15e^4}{8} + \frac{35e^6}{16} \\ B_1 = 3e + \frac{27e^3}{8} + \frac{261e^5}{64} + \frac{14309e^7}{3072} \\ B_2 = \frac{9e^2}{2} + \frac{7e^4}{2} + \frac{141e^6}{32} \\ B_3 = \frac{53e^3}{8} + \frac{393e^5}{128} + \frac{24753e^7}{5120} \\ B_4 = \frac{77e^4}{8} + \frac{129e^6}{80} \\ B_5 = \frac{1773e^5}{128} - \frac{4987e^7}{3072} \\ B_6 = \frac{3167e^6}{160} \\ B_7 = \frac{432091e^7}{15360} \end{cases} \tag{21}$$

4-2- استفاده از روش میانجی[2]

در روش میانجی از یک تبدیل کانونیکال استفاده می‌شود به نحوی که تابع ژاکوبی-همیلتون از رابطه زیر به دست می‌آید [27].

$$W = \int(\mathcal{H}_C - \bar{\mathcal{H}}_C)dt \tag{22}$$

که در آن

$$\bar{\mathcal{H}}_C = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{H}_C dg\, dh \tag{23}$$

با استفاده از این تبدیل، متغیرهای جدید سیستم و تابع همیلتونین دینامیک وضعیت به همراه اغتشاش به صورت زیر می‌شوند (برای جزئیات بیشتر در مورد چگونگی این تبدیل به مرجع [27] و مراجع در آن مراجعه شود).

$$\begin{cases} (l,g,h) = (l,g,h) + \frac{\partial W}{\partial(L,G,H)} \\ (L,G,H) = (L,G,H) + \frac{\partial W}{\partial(l,g,h)} \end{cases}$$
$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_E + \mathcal{H}_C = \mathcal{H}_0 + \varepsilon\mathcal{H}_1 \tag{24}$$

که در آن

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_E = \frac{1}{2}(\gamma_1\sin(l)^2 + \gamma_2\cos(l)^2)(G^2 - L^2) + \frac{1}{2}\gamma_3 L^2$$
$$\mathcal{H}_1 = \bar{\mathcal{H}}_C = \frac{3\mu}{8r^3}\left(1 - \frac{3H^2}{G^2}\right)\times$$
$$\left(\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}\right)\sin(l)^2\left(\frac{G^2 - L^2}{G^2}\right) + \left(\frac{1}{\gamma_3} - \frac{1}{\gamma_2}\right)\left(\frac{L^2}{G^2}\right)\right)$$
$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\frac{G}{2\mathcal{H}_0} \tag{25}$$

روابط (20)، (24) و (25) نشان می‌دهند که با استفاده از این تبدیل و روش، سیستم اکنون دارای دو درجه آزادی می‌باشد و در نتیجه می‌توان از روش ملنیکف برای بررسی آشوب استفاده کرد که در بخش بعد به آن می‌پردازیم.

5- بررسی آشوب

5-1- بررسی تحلیلی آشوب

با حل معادله (24) زمانی که پارامتر $\varepsilon = 0$ است مدارات هتروکلینیک به صورت زیر به دست می‌آیند [32]

$$\begin{cases} \tilde{L} = \pm G\eta\,\mathrm{sech}(nt) \\ \sin(\tilde{l}) = \pm\frac{\sqrt{1-\eta^2}\mathrm{sech}(nt)}{\sqrt{1-\eta^2\mathrm{sech}(nt)^2}} \\ \cos(\tilde{l}) = \pm\frac{\tanh(nt)}{\sqrt{1-\eta^2\mathrm{sech}(nt)^2}} \\ n = G\sqrt{(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_2-\gamma_3)} \\ \eta = \sqrt{\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\gamma_1-\gamma_3}} \end{cases} \tag{26}$$

با استفاده از این مدارات هتروکلینیک، تابع ملنیکف به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty}\{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1\}(\tilde{l}, \tilde{L}, t + t_0)dt \tag{27}$$

که در آن $\{.,.\}$ براکت پواسون است. با ساده‌سازی رابطه (27) داریم

$$M(t_0) = \frac{3\left(1 - \frac{3H^2}{G^2}\right)n(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_2-\gamma_3)\mu}{4\gamma_1\gamma_2\gamma_3} \times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sech}(nt)^2\tanh(nt)}{r(t+t_0)^3}dt \tag{28}$$

که با جایگذاری معادله (9) تبدیل می‌شود به

$$M(t_0) = \frac{3\left(1 - \frac{3H^2}{G^2}\right)n(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_2-\gamma_3)\mu}{4\gamma_1\gamma_2\gamma_3 a^3} \times\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sech}(nt)^2\tanh(nt)\sum_{j=0}^{\infty}B_j\cos\left(j\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t+t_0)\right)dt \tag{29}$$

با حل این انتگرال با استفاده از نرم‌افزار داریم

$$M(t_0) = -\frac{3\left(1 - \frac{3H^2}{G^2}\right)\mu^2\pi}{8\gamma_1\gamma_2\gamma_3 G^2 a^6} \times\sum_{j=0}^{\infty}B_j j^2\,\mathrm{csch}\left(\frac{j\pi}{2n}\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\right)\sin\left(j\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}t0\right) \tag{30}$$

با توجه به معادله (30) دیده می‌شود که تابع ملنیکف در $t_0 = 0$ صفر می‌شود به‌طوری که مشتق آن نسبت به t_0 در این نقطه صفر نیست. بنابراین براساس روش ملنیکف سیستم آشوبناک است.

[1] Eccentric Anomaly
[2] Intermediary

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.7.28.0]

از تابع ملنیکف علاوه بر اثبات آشوب می‌توان در بررسی عرض ناحیه آشوبناک نیز استفاده کرد. عرض ناحیه آشوبناک به ما کمک می‌کند تا بتوان شرایط اولیه‌ای که باعث می‌شود سیستم رفتار آشوبناک و غیرقابل پیش‌بینی داشته باشد را شناسایی کنیم و تا حد امکان از ورود به این ناحیه خودداری نماییم. با ضرب کردن ماکزیمم تابع ملنیکف در پارامتر ε می‌توان تقریبی از عرض ناحیه آشوب را به صورت زیر به دست آورد [33].

$$|\Delta\mathcal{H}| \le \varepsilon M_{\max} \tag{31}$$

که در آن

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{H} &= \mathcal{H}_0(l,L) - \mathcal{H}_0(\tilde{l},\tilde{L})\\ &= \mathcal{H}_0(l,L) - \mathcal{H}_0(0,0)\\ &= \frac{1}{2}(\gamma_1 \sin(l)^2 + \gamma_2 \cos(l)^2)(G^2 - L^2) + \frac{1}{2}\gamma_3 L^2\\ &\quad - \frac{1}{2}\gamma_2 G^2\end{aligned} \tag{32}$$

با جایگذاری معادله (32) در معادله (31) و بی‌بعدسازی برای تحلیل بهتر داریم

$$\left|\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} - 1\right)\sin(l)^2 + \left(\frac{\gamma_3}{\gamma_2} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\sin(l)^2 - \cos(l)^2\right)\left(\frac{L}{G}\right)^2\right| \le \frac{2\varepsilon M_{\max}}{\gamma_2 G^2} \tag{33}$$

برای استفاده از معادله (33) نیاز به دست آوردن ماکزیمم تابع ملنیکف داریم برای این کار از تابع ملنیکف مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم و با به‌دست آوردن ریشه‌های آن و جایگذاری در تابع ملنیکف ماکزیمم آن را پیدا می‌کنیم. با برابر صفر قرار دادن مشتق تابع ملنیکف داریم

$$\frac{dM(t_0)}{dt_0} = 0 \rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} A_j \cos(jx) = 0$$

$$\begin{cases} A_j = B_j j^3 \operatorname{csch}\left(\dfrac{j\pi}{2n}\sqrt{\dfrac{\mu}{a^3}}\right)\\ \qquad x = \sqrt{\dfrac{\mu}{a^3}}\, t0 \end{cases} \tag{34}$$

از طرف دیگر، با استفاده از رابطه زیر معادله (34) را می‌توان به یک چند جمله‌ای تبدیل کرد

$$\begin{cases} \cos(jx) = T_j(\cos(x))\\ T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (x^2-1)^k x^{n-2k} \end{cases} \tag{35}$$

با جایگذاری رابطه (35) در (34) به چند جمله‌ای زیر می‌رسیم

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j \sum_{k=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} \binom{j}{2k} (x^2-1)^k x^{j-2k} = 0 \tag{36}$$

که ریشه‌های آن به آسانی به کمک روش‌های عددی برای جملات محدود به دست می‌آید. با قرار دادن این ریشه‌ها در تابع ملنیکف می‌توان ماکزیمم آن را به آسانی محاسبه کرد.

5-2- بررسی عددی آشوب و مقایسه با نتایج تحلیلی

در این بخش به بررسی عددی آشوب با استفاده از نمودارهای حساسیت به شرایط اولیه و همچنین نگاشت‌های پوانکاره پرداخته و آن‌ها را با نتایج به دست آمده از روش تحلیلی مقایسه می‌کنیم.

برای مثال‌های عددی فرض می‌کنیم که نصف قطر بزرگ بیضی مدار و ممان‌های اینرسی ماهواره ثابت هستند و تنها ممنتم زاویه‌ای کل و خروج از مرکز بیضی مدار متغیر هستند. پارمترهای ثابت در جدول 1 آورده شده است.

در سه مثال اول مقدار خروج از مرکز را برابر با 0.5 فرض می‌کنیم و G را به نحوی تغییر می‌دهیم که مقدار $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2$ به ترتیب برابر با 0.01، 0.005 و 0.001 باشد و در سه مثال دوم G را برابر با 0.1 فرض می‌کنیم و خروج از مرکز را به نحوی تغییر می‌دهیم که مقدار $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2$ به ترتیب برابر با 0.01، 0.005 و 0.001 باشد.

برای رسم نگاشت‌های پوانکاره نقاط حاصل از پریود مداری 2π در نظر گرفته شده‌اند. داخل خطوط قرمز (خطچین) عرض ناحیه آشوب براساس روابط تحلیلی است (معادله 33). برای رسم نمودارهای حساسیت به شرایط اولیه، فرض می‌کنیم که شرایط اولیه به صورت $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = [0.0001001\ ,0,0.0001\ ,0]$ هستند.

نتایج بررسی عددی در "شکل‌های 3 تا 14" آورده شده است. همان‌طور که در این شکل‌ها دیده می‌شود بررسی تحلیلی تخمین نسبتا مناسبی برای عرض ناحیه آشوب می‌دهد. اما با مقایسه "شکل‌های 3 و 9"، "شکل‌های 5 و 11" و "شکل‌های 7 و 13" دیده می‌شود که تخمین تحلیلی عرض ناحیه آشوبناک برای خروج از مرکزهای کوچکتر به حل عددی نزدیکتر است.

"شکل‌های 4، 6، 8، 10، 12 و 14" نشان می‌دهند که سیستم در ناحیه آشوبناک کاملا رفتار غیرقابل پیش‌بینی دارد به نحوی که برای دو شرایط اولیه بسیار نزدیک به هم بعد از مدت کوتاهی دو حرکت کاملا متفاوت داریم. از طرف دیگر این شکل‌ها نشان می‌دهند که هر چقدر مقدار ماکزیمم تابع ملنیکف ضرب در پارامتر ε بزرگتر باشد، دو پاسخ زمانی سریعتر از هم فاصله می‌گیرند.

"شکل‌های 3 تا 8" نشان می‌دهند که هر چقدر مقدار G بزرگتر باشد، ماکزیمم تابع ملنیکف و عرض ناحیه آشوب کوچکتر می‌شود. دلیل این اتفاق این است که با افزایش مقدار G، در حالی که سایر پارمترها ثابت هستند، در حقیقت مقدار سرعت دوارنی وضعی ماهواره افزایش می‌یابد که خود به معنای کمتر شدن زمان برای تاثیر گشتاور گرادیان جاذبه بر روی دینامیک وضعیت

جدول 1 پارمترها استفاده شده در مثال‌ها

Table 1 Parameters used in the examples

a km	μ (m^3s^{-2})	H (Nm)	γ_3 ($kg^{-1}m^{-2}$)	γ_1 ($kg^{-1}m^{-2}$)	γ_2 ($kg^{-1}m^{-2}$)
7000	3.986×10^{14}	0	0.0175	0.0357	0.025

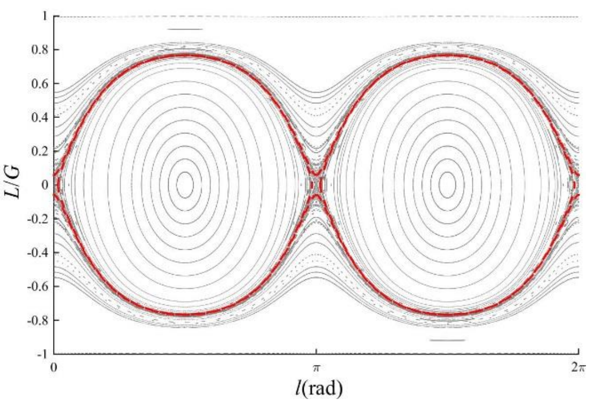

Fig. 3 Poincare map for $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.001$, G=0.325 (kgm^2/s), and e=0.5. Between the red (dashed) lines is the width of chaotic layers predicted by the analytical method.

شکل 3 نگاشت پوانکاره برای $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.001$، G=0.325 (kgm^2/s) و e=0.5. بین خطوط قرمز (خطچین) عرض ناحیه آشوبناک براساس پیش‌بینی روابط تحلیلی است.

ماهواره است. از طرف دیگر "شکل‌های 9 تا 14" نشان می‌دهند که با افزایش مقدار خروج از مرکز مدار ماهواره، ماکزیمم تابع ملنیکف و عرض ناحیه آشوب بزرگتر می‌شود. دلیل این اتفاق افزایش دامنه نوسان گشتاور گرادیان جاذبه با افزایش مقدار خروج از مرکز e است.

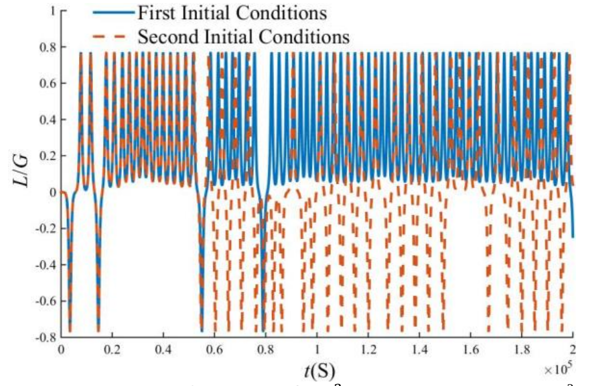

Fig. 4 Time response for $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.001$, G=0.325 (kgm^2/s), and e=0.5 and for two sets of initial conditions: $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = [0.0001001\ ,0,0.0001\ ,0]$.

شکل 4 پاسخ زمانی برای $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.001$، G=0.325 (kgm^2/s) و e=0.5 و برای دو شرایط اولیه به صورت $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = [0.0001001\ ,0,0.0001\ ,0]$

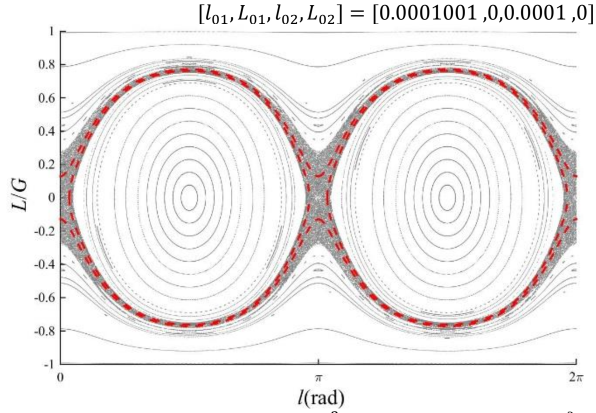

Fig. 5 Poincare map for $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.005$, G=0.191 (kgm^2/s), and e=0.5. Between the red (dashed) lines is the width of chaotic layers predicted by the analytical method.

شکل 5 نگاشت پوانکاره برای $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.005$، G=0.191 (kgm^2/s) و e=0.5. بین خطوط قرمز (خطچین) عرض ناحیه آشوبناک براساس پیش‌بینی روابط تحلیلی است.

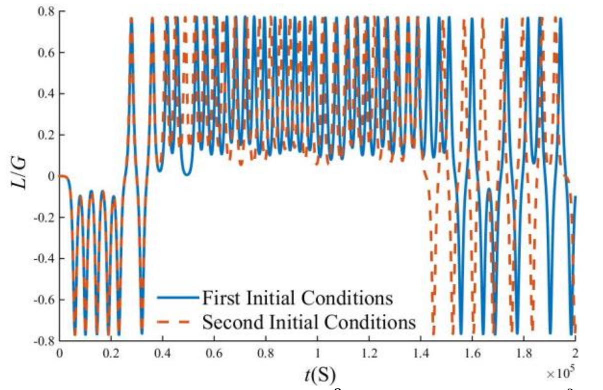

Fig. 6 Time response for $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.005$, G=0.191 (kgm^2/s), and e=0.5 and for two sets of initial conditions: $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = [0.0001001\ ,0,0.0001\ ,0]$.

شکل 6 پاسخ زمانی برای $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.001$، G=0.325 (kgm^2/s) و e=0.5 و برای دو شرایط اولیه به‌صورت $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = [0.0001001\ ,0,0.0001\ ,0]$

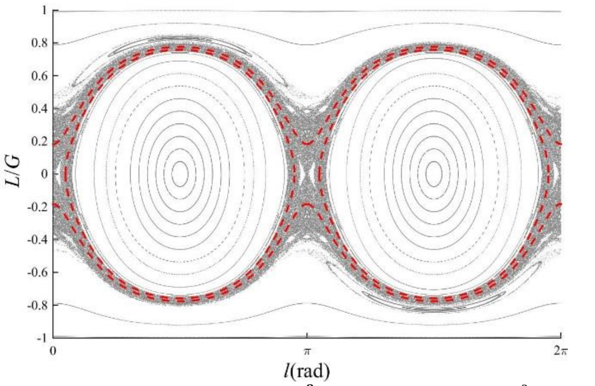

Fig. 7 Poincare map for $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.01$, G=0.148 (kgm^2/s), and e=0.5. Between the red (dashed) lines is the width of chaotic layers predicted by the analytical method.

شکل 7 پاسخ زمانی برای $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.01$، G=0.148 (kgm^2/s) و e=0.5 و برای دو شرایط اولیه به صورت $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = [0.0001001\ ,0,0.0001\ ,0]$

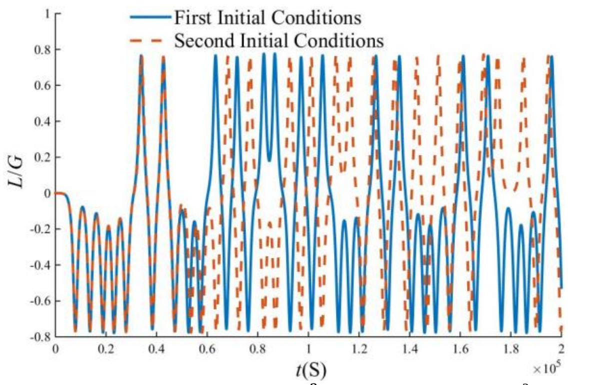

Fig. 8 Time response for $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.01$, G=0.148 (kgm^2/s), and e=0.5 and for two sets of initial conditions: $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = [0.0001001\ ,0,0.0001\ ,0]$.

شکل 8 پاسخ زمانی برای $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.01$، G=0.148 (kgm^2/s) و e=0.5 و برای دو شرایط اولیه به صورت $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = [0.0001001\ ,0,0.0001\ ,0]$

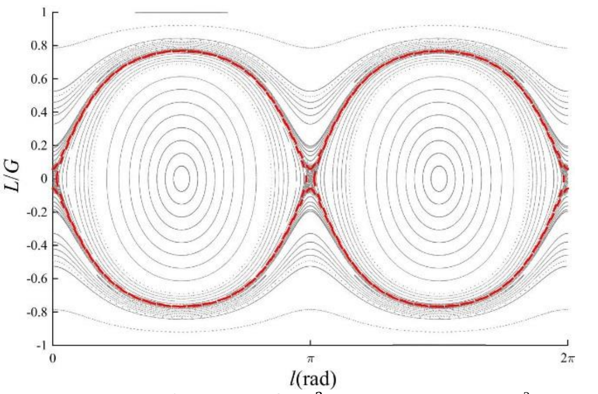

Fig. 9 Poincare map for $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.001$, G=0.1 (kgm^2/s), and e=0.032. Between the red (dashed) lines is the width of chaotic layers predicted by the analytical method.

شکل 9 نگاشت پوانکاره برای $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.001$، G=0.1 (kgm^2/s) و e=0.032. بین خطوط قرمز (خطچین) عرض ناحیه آشوبناک براساس پیش‌بینی روابط تحلیلی است.

6- نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی آشوب در دینامیک وضعیت یک ماهواره صلب در مدار

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.7.28.0]

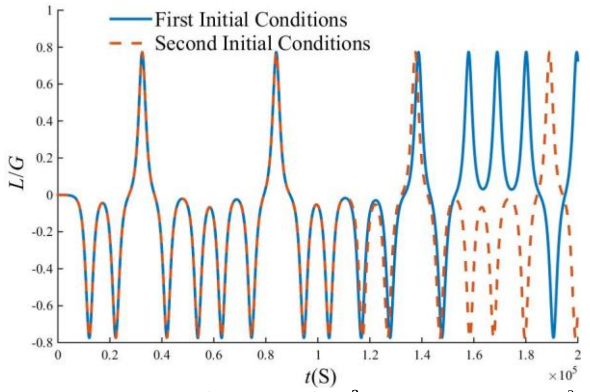

Fig. 10 Time response for $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.001$, G=0.1 (kgm^2/s), and e=0.032 and for two sets of initial conditions: $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = [0.0001001\ ,0,0.0001\ ,0]$.

شکل 10 پاسخ زمانی برای $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.001$، G=0.1 (kgm^2/s) و e=0.032 و برای دو شرایط اولیه به‌صورت $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = [0.0001001\ ,0,0.0001\ ,0]$

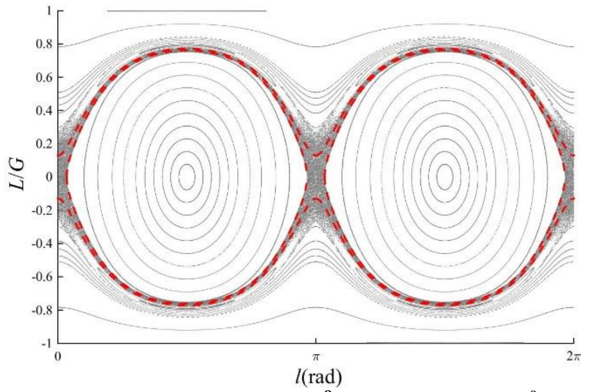

Fig. 11 Poincare map for $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.005$, G=0.1 (kgm^2/s), and e=0.147. Between the red (dashed) lines is the width of chaotic layers predicted by the analytical method.

شکل 11 نگاشت پوانکاره برای $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.005$، G=0.1 (kgm^2/s) و e=0.147. بین خطوط قرمز(خط‌چین) عرض ناحیه آشوبناک بر اساس پیش‌بینی روابط تحلیلی است.

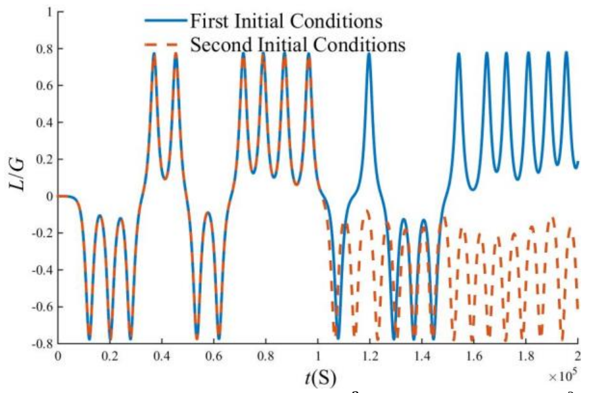

Fig. 12 Time response for $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.005$, G=0.1 (kgm^2/s), and e=0.147 and for two sets of initial conditions: $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = [0.0001001\ ,0,0.0001\ ,0]$.

شکل 12 پاسخ زمانی برای $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.005$، G=0.1 (kgm^2/s) و e=0.147 و برای دو شرایط اولیه به صورت $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = [0.0001001\ ,0,0.0001\ ,0]$

بیضوی پرداخته شد. به‌دلیل اهمیت بالای بررسی تحلیلی آشوب، سیستم به نحوی تقریب زده شد که بتوان از روابط تحلیلی آشوب (روش ملنیکف) بهره

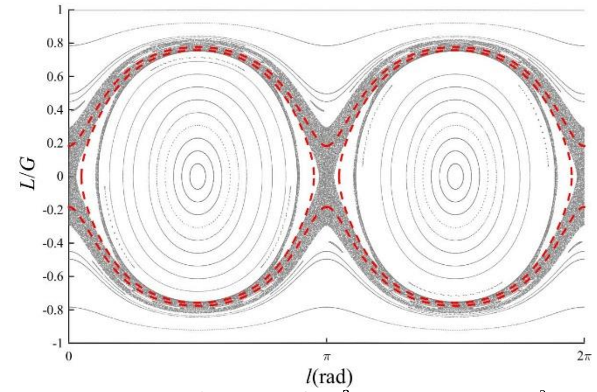

Fig. 13 Poincare map for $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.01$, G=0.1 (kgm^2/s), and e=0.264. Between the red (dashed) lines is the width of chaotic layers predicted by the analytical method.

شکل 13 نگاشت پوانکاره برای $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.01$، G=0.1 (kgm^2/s) و e=0.264. بین خطوط قرمز(خط‌چین) عرض ناحیه آشوبناک براساس پیش‌بینی روابط تحلیلی است.

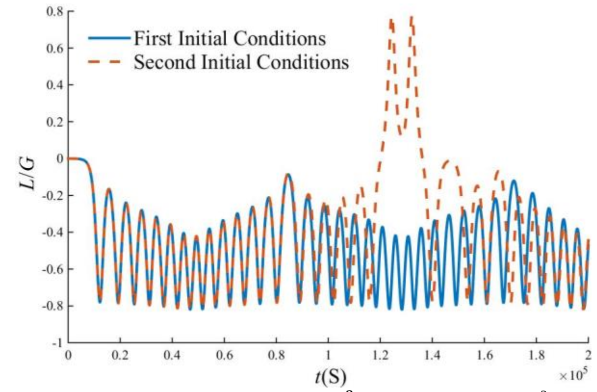

Fig. 14 Time response for $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.01$, G=0.1 (kgm^2/s), and e=0.264 and for two sets of initial conditions: $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = [0.0001001\ ,0,0.0001\ ,0]$.

شکل 14 پاسخ زمانی برای $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.01$، G=0.1 (kgm^2/s) و e=0.264 و برای دو شرایط اولیه به صورت $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = [0.0001001\ ,0,0.0001\ ,0]$

گرفت. سپس نتایج تحلیلی برای چند حالت با نتایج عددی مقایسه شدند. روش مقایسه براساس عرض ناحیه آشوب در نگاشت پوانکاره و همچنین حساسیت به شرایط اولیه در پاسخ زمانی بود. نتایج نشان داد که روابط تحلیلی تطابق بسیار خوبی با نتایج عددی دارند. همچنین نتایج نشان داد که علاوه بر اثبات آشوب، نتایج تحلیلی کمک بسیار خوبی برای بررسی شرایط آشوبناک شدن ماهواره (شامل پارامترهای سیستم و شرایط اولیه) ارائه می‌دهند که می‌تواند در طراحی ماهواره‌ها و یا کنترل آن دارای حائز اهمیت باشد.

7- مراجع

[1] V. K. Melnikov, On the stability of the center for time-periodic perturbation, *Proceedings of Moscow Mathematical Society*, Vol. 12, No. 1, pp. 3-52, 1963.

[2] S. M. Abtahi, S. H. Sadati, H. Salarieh, Chaotic dynamics of spin-orbit motion in a gyrostat satellite using ricci method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 9, pp. 12-25, 2013. (In Persian فارسی)

[3] M. Abtahi, *Modeling of Roto-Translatory Motion of Gyrostat Satellite and Controlling its Chaotic Attitude*, PhD Thesis, Department of Mechanical Engineering, Khajeh Nasir Toosi University of Technology, Tehran, 2013. (In Persian فارسی)

[4] G. Haller, S. Wiggins, N-pulse homoclinic orbits in perturbations of resonant Hamiltonian systems, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol.

130, No. 1, pp. 25-101, 1995.

[5] G. Haller, *Chaos Near Resonance*, pp. 231-285, Springer Science & Business Media, 1999.

[6] S. W. Shaw, Chaos and three-dimensional horseshoes in slowly varying oscillators, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, No. 4, pp. 959-968, 1988.

[7] S. Wiggins, P. Holmes, Periodic orbits in slowly varying oscillators, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, Vol. 18, No. 3, pp. 592-611, 1987.

[8] S. Wiggins, P. Holmes, Homoclinic orbits in slowly varying oscillators, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, Vol. 18, No. 3, pp. 612-629, 1987.

[9] S. Wiggins, *Global Perturbation Methods for Detecting Chaotic Dynamics in: Global Bifurcations and Chaos*, pp. 334-474, Springer, New York, 1988.

[10] P. J. Holmes, J. E. Marsden, Horseshoes in perturbations of Hamiltonian systems with two degrees of freedom, *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 82, No. 4, pp. 523-544, 1982.

[11] P. J. Holmes, J. E. Marsden, Horseshoes and Arnold diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups, *Indiana University Mathematics Journal*, Vol. 32, No. 2, pp. 273-309, 1983.

[12] P. J. Holmes, J. E. Marsden, Melnikov’s method and Arnold diffusion for perturbations of integrable Hamiltonian systems, *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 23, No. 4, pp. 669-675, 1982.

[13] K. Yagasaki, Chaotic dynamics of quasi-periodically forced oscillators detected by Melnikov’s method, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, Vol. 23, No. 5, pp. 1230-1254, 1992.

[14] K. Yagasaki, Horseshoes in two-degree-of-freedom Hamiltonian systems with saddle-centers, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 154, No. 4, pp. 275-296, 2000.

[15] R. Camassa, G. Kovačič, S. K. Tin, A Melnikov method for homoclinic orbits with many pulses, *Archive for Rational Mechanics and Analysi*s, Vol. 143, No. 2, pp. 105-193, 1998.

[16] W. Zhang, J. Zhang, M. Yao, The extended Melnikov method for non-autonomous nonlinear dynamical systems and application to multi-pulse chaotic dynamics of a buckled thin plate, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 11, No. 3, pp. 1442-1457, 2010.

[17] W. Hao, W. Zhang, M. Yao, Multipulse chaotic dynamics of six-dimensional nonautonomous nonlinear system for a honeycomb sandwich plate, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 24, No. 11, pp. 1450138, 2014.

[18] M. Staby, G. Gray, Chaos in gravity gradient satellite pitch dynamics via the method of Melnikov, *Advances in the Astronautical Sciences*, Vol. 84, No. 1, pp. 441-449, 1993.

[19] H. Karasopoulos, D. Richardson, Chaos in the pitch equation of motion for the gravity-gradient satellite, *Guidance, Navigation and Control Conference*, Hilton Head Island, United States of America, August 10-12, 1992.

[20] M. Iñarrea, V. Lanchares, Chaotic pitch motion of an asymmetric non-rigid spacecraft with viscous drag in circular orbit, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 41, No. 1, pp. 86-100, 2006.

[21] M. Iñarrea, Chaos and its control in the pitch motion of an asymmetric magnetic spacecraft in polar elliptic orbit, *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 40, No. 4, pp. 1637-1652, 2009.

[22] B. Tabarrok, X. Tong, Melnikov's method for rigid bodies subject to small perturbation torques, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 66, No. 4, pp. 215-230, 1996.

[23] J. Kuang, S. Tan, A. T. Leung, Chaotic attitude tumbling of an asymmetric gyrostat in a gravitational field, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 25, No. 4, pp. 804-814, 2002.

[24] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J. M. Strelcyn, Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them, Part 1: Theory, *Meccanica*, Vol. 15, No. 1, pp. 9-20, 1980.

[25] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano, Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 16, No. 3, pp. 285-317, 1985.

[26] M. Sayanjali, *Chaos Analysis and Trajectory Design in Four Body Problem*, PhD Thesis, Department of Aerospace Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, 2015. (In Persian فارسی)

[27] M. Arribas, A. Elipe, Attitude dynamics of a rigid body on a Keplerian orbit: A simplification, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 55, No. 3, pp. 243-247, 1993.

[28] J. Peng, Y. Liu, Chaotic attitude motion of a satellite on a Keplerian elliptic orbit, *Technische Mechanik*, Vol. 20, No. 4, pp. 311-318, 2000.

[29] P. C. Hughes, *Spacecraft Attitude Dynamics*, pp. 233-247, Courier Corporation, 2012 .

[30] P. Gurfil, A. Elipe, W. Tangren, M. Efroimsky, The Serret-Andoyer formalism in rigid-body dynamics: I. Symmetries and perturbations, *Regular and Chaotic Dynamics*, Vol. 12, No. 4, pp. 389-425, 2007.

[31] M. J. Sidi, *Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach*, pp. 8-27, Cambridge university press, 1997.

[32] A. Deprit, A. Elipe, Complete reduction of the euler–poinsot problem, *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 41, No. 4, pp. 603-628, 1993.

[33] G. M. Zaslavskiî, R. Sagdeev, D. Usikov, *Weak Chaos and Quasi-Regular Patterns*, pp. 36-142, Cambridge University Press, 1992 .