ماهنامه علمى پژوهشى



دانگاه زمیت مدرس

mme.modares.ac.ir

بررسی تحلیلی و عددی پدیده آشوب در دینامیک وضعیت یک ماهواره در مدار بیضوی

محمدرضا چگينى¹، سىيد حسين ساداتى^{*2}، حسن سالاريه³

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

3- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

* تېران، صندوق پستى 193951999، sadati@kntu.ac.ir

چکیدہ	اطلاعات مقاله
در این مقاله، به بررسی تحلیلی و عددی پدیده آشوب در دینامیک وضعیت یک ماهواره صلب تحت تاثیر گشتاور اغتشاشی گرادیان جاذبه ناشی از حرکت در یک مدار بیضوی میپردازیم. در بخش تحلیلی، هدف اثبات وجود آشوب و سپس بهدست آوردن رابطهای برای عرض ناحیه آشوب براساس پارامترهای سیستم است. در بخش عددی، هدف اعتبارسنجی بخش تحلیلی با کمک دو روش عددی نگاشت پوانکاره و حساسیت به	مقاله پژوهشی کامل دریافت: 28 فروردین 1396 پذیرش: 20 خرداد 1396 ارائه در سایت: 29 تیر 1396
شرایط اولیه است. برای این کار ابتدا همیلتونین سیستم بدون اغتشاش استخراج میشود. این همیلتونین دارای سه درجه آزادی است. ایر حالی است که دینامیک وضعیت در حالت بدون اغتشاش دارای دو ثابت حرکت شامل انرژی و ممنتم است. با استفاده از این دو ثابت حرکت کمک تبدیل کانونیکال سرت–آندویر، همیلتونین سیستم بدون اغتشاش کاهش مرتبه داده شده و تبدیل به یک سیستم یک درجه آز میشود. در ادامه، اغتشاشات ناشی از گرادیان جاذبه به خاطر حرکت در مدار بیضوی براساس متغیرهای سرت-آندویر و زمان تخمین	<i>کلید واژگان:</i> آشوب ماهواره صلب مدار بیضوی تبدیلات سرت–آندوریر نگاشت پوانکاره
میشود. در نتیجه این تخمین و سادهسازی، همیلتونین جدید سیستم یک درجه ازادی و تابعی از زمان میشود. پس از آن، تئوری ملنیکف برای اثبات وجود آشوب حول مدارات هتروکلینیک سیستم استفاده میگردد. به کمک این تئوری، ضخامت لایه آشوب در فضای متغیرهای سرت– آندویر به صورت یک رابطه تحلیلی تخمین زده میشود. نتایج نشان میدهد که روابط تحلیلی تطابق بسیار خوبی با نتایج عددی دارند. همچنین نتایج نشان میدهد که حتی برای خروج از مرکزهای بزرگ نیز این روابط صادق است.	

Analytical and Numerical Analysis of Chaos in Attitude Dynamics of a Satellite in an Elliptic Orbit

Mohammad Reza Chegini¹, Seyed Hossein Sadati^{1*}, Hassan Salarieh²

1- Department of Mechanical Engineering, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

* P.O.B. 193951999, Tehran, Iran, sadati@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION ABSTRACT In this paper, we investigate chaos in attitude dynamics of a rigid satellite in an elliptic orbit analytically Original Research Paper Received 17 April 2017 and numerically. The goal in the analytical part is to prove the existence of chaos and then to find a Accepted 10 June 2017 relation for the width of chaotic layers based on the parameters of the system. The numerical part is Available Online 20 July 2017 aimed at validating the analytical method using the Poincare maps and the plots obtained on the sensitivity to initial conditions. For this end, first, the Hamiltonian for the unperturbed system is Keywords: derived. This Hamiltonian has three degrees of freedom due to the three-axis free rotation of the Chaos Rigid satellite satellite. However, the unperturbed attitude dynamics has two first-integrals of motion, namely, the Elliptic Orbit energy and the angular momentum. Next, we use the Serret-Andoyer transformation and reduce the Serret-Andoyer Transformation unperturbed system Hamiltonian to one-degree of freedom. Then, the gravity gradient perturbation due Poincare Map to moving in an elliptic orbit is approximated in Serret-Andoyer variables and time. Due to this approximation and simplification, the system Hamiltonian transforms to a one-degree-of-freedom nonautonomous one. After that, Melnikov's method is used to prove the existence of chaos around the heteroclinic orbits of the system. Finally, a relation for calculating the width of chaotic layers around the heteroclinic orbits in the Poincare map of the Serret-Andoyer variables is analytically derived. Results show that the analytical method gives a good approximation of the width of chaotic layers. Moreover, the results show that the analytical method is accurate even for orbits with large eccentricities.

نتیجه تا حدی غیرقابل پیش بینی است. بررسی آشوب در ماهوارهها قدمتی در حدود چهل سال دارد. اما بررسی و اثبات آشوب به صورت تحلیلی همواره با دشواریهایی روبرو بوده است. این دشواریها به خاطر وجود درجات آزادی

بررسی آشوب در دینامیک ماهوارهها از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است چرا که دینامیک ماهواره در شرایط آشوب دارای رفتاری غیرنوسانی و در

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

1- مقدمه

M. R. Chegini, S. H. Salati, H. Salatieh, Analytical and Numerical Analysis of Chaos in Attitude Dynamics of a Satellite in an Elliptic Orbit, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 7, pp. 236-244, 2017 (in Persian)



بالا در سیستم است. مهم ترین روش اثبات تحلیلی آشوب روش ملنیکف است [1]. البته روشهای تحلیلی دیگری نیز مانند روش خمینه ریچی ([3,2] و یا روش فاز⊣نرژی۲[5,4] وجود دارند که دامنه کاربرد کمتری دارند و به آنها کمتر پرداخته شده است. از طرف دیگر کاربرد روش ملنیکف محدود به سیستمهای صفحهای (یعنی دارای دو درجه آزادی در فضای فاز و یا داشتن یک درجه آزادی همیلتونین) به همراه یک اغتشاش زمانی پریودیک است. هر چند افرادی مانند ویگنیز^۳، هولمز[†]، یاگاساکی^۵، کاماسا^۶و ژنگ^۷ سعی در گسترش این روشها برای درجات آزادی بالاتر کردهاند.

ویگینز و همکاران روش بررسی تحلیلی آشوب را به سیستمهای به همراه اغتشاش شبه پریودیک [6]، سیستمهای سه درجه داری نوساناتی که به آرامی تغییر میکنند [8,7] و حالتهای کلی تر بیان شده به صورت متغیرهای عمل-زاویه [9] توسعه دادند. هولمز و همکاران برای سیستم همیلتونین دو درجه آزادی [10] و همیلتونینهای دارای درجات آزادی بیشتر از دو که به صورت متغیرهای عمل-زاویه بیان شدهاند [12,11] به بررسی آشوب پرداختند. یاگاساکی روش ویگنیز برای اغشاش شبه پریودیک را به صورت کلی تر بررسی و اثبات کرد [13] و همچنین به بررسی آشوب در سیستم با دو درجه آزادی همیلتونین و داری نقاط تعادل زینی-مرکزی^۹ پرداخت [14]. کاماسا و همکاران روش ملنیکف را برای سیستمهای با چند پالس گسترش دادند [15]. ژنگ و همکاران روش کاماسا را برای سیستم غیرخودگردان^{۱۰} چهار و شش درجه آزادی در فضای فاز توسعه دادند [17,16]. با این حال برای یک سیستم داری بیشتر از دو درجه آزادی همیلتونین و یا سه درجه آزادی در فضای فاز روش کلی برای اثبات آشوب وجود ندارد. در نتیجه در بررسی دینامیک وضعیت و مدار یک ماهواره به صورت همزمان (که در این حالت سیستم دارای حداقل پنج درجه آزادی همیلتونین است) و یا در بررسی دینامیک وضعیت با فرض این که دینامیک مدار سیستم تحت تاثیر دینامیک وضعیت نباشد (که در این حالت سیستم دارای حداقل سه درجه آزادی همیلتونین و زمان است)، اثبات آشوب به صورت تحلیلی انجام نشده است. بنابراین پژوهشگران مختلف همواره در جستجوی ساده سازی معادلات سیستم و کاهش درجه آن ها بودهاند. از جمله مهمترین این کارها شامل بررسی حرکت پیچ (شیب)^{۱۱} ماهواره صلب [19,18]، ماهواره غیرصلب [20] و ماهواره مغناطیسی [21] در مدار بیضوی است. دیگر مقالات مهم شامل در نظر گرفتن بخشی از اغتشاش برای کاهش درجات آزادی سیستم (دو مثال در مرجع [22] داده شده است) و یا در نظر گرفتن ماهواره صلب در مدار دایروی است [23].

البته در کنار روشهای تحلیلی همواره روشهای مختلف عددی نیز مورد توجه بوده است چرا که در روشهای عددی بررسی آشوب، درجات آزادی سیستم اهمیت چندانی ندارند و با بالا رفتن درجات آزادی تنها هزینه محاسباتی بالا میرود. مهمترین این روشها روش نمای لیاپانف است که در صورت داشتن یک نمای لیاپانف مثبت سیستم آشوبناک خواهد بود .[26-24]

- Ricci Manifold Energy-Phase Method Wiggins Holmes Yagasaki
- Camassa
- Zhang Action-Angle Variables
- Saddle-Center
- Non-Autonomous
- 11 Pitch

هدف این پژوهش بررسی تحلیلی و عددی آشوب در دینامیک وضعیت یک ماهواره صلب است. این ماهواره تحت تاثیر گشتاور اغتشاشی گرادیان جاذبه ناشی از حرکت در یک مدار بیضوی است. در بخش تحلیلی، هدف سادهسازی معادلات دینامیک وضعیت ماهواره با استفاده از تبدیل سرت-آندویر و روش میانجی^{۱۲} است تا بتوان از روش ملنیکف در اثبات آشوب استفاده کرد. دیگر هدف بخش تحلیلی به دست آوردن یک رابطه برای شناسایی بخشی از فضای حالت سیستم است که با قرار دادن شرایط اولیه در آن ناحیه سیستم رفتار آشوبناک و غیرقابل پیشبینی از خود نشان میدهد. در بخش عددی این پژوهش، هدف اعتبارسنجی بخش تحلیلی با استفاده از رسم نگاشت پوانکاره و نمودارهای حساسیت به شرایط اولیه برای چند حالت مختلف مى باشد.

در این مقاله، ابتدا با استفاده از تبدیل سرت-آندویر به کاهش درجات سیستم یک جسم صلب بدون اغتشاش پرداخته می شود و سپس با استفاده از روش ميانجي^{١٣} که به وسيله اريبس^{١۴} و اليپ^{١٥} ارائه شده است [27] به کاهش کلی سیستم مغشوش به یک همیلتونین دو درجه آزادی که دارای ممانهای اینرسی پریودیک با زمان است پرداخته می شود. در مرجع [28] پنگ^{۱۶} و لیو^{۱۷} سعی در اثبات آشوب با استفاده مدل ساده شده [27] نمودهاند. پژوهش ارائه شده در این مقاله ادامه آن کار است با این تفاوتهای مهم: 1- پنگ و لیو از تبدیل سرت-آندویر برای کاهش درجات آزادی استفاده نکردهاند، 2- بررسی آنها تنها برای خروج از مرکزهای بسیار کوچک است و 3- پنگ و لیو به صورت عددی آشوب را با استفاده از نگاشت پوانکاره بررسی نكرده و ضخامت ناحیه آشوب را براساس پارامترهای سیستم ارائه ندادهاند.

2- توصيف سيستم

سیستم مورد مطالعه در این مقاله یک ماهواره صلب در مدار بیضوی می باشد. در این سیستم، بدون از دست دادن کلیت، فرض بر آن است که ممانهای اينرسي اصلي سيستم از رابطه $\gamma_3 < \gamma_2 > \gamma_1 > \gamma_2$ پيروي ميکنند که در آن دو است. دو $I = ext{diag}(I_1, I_2, I_3)$ و $\gamma_i = 1/I_i$ دستگاه مختصات اینرسی xyz و بدنی xyz در نظر می گیریم بهطوری که دستگاه اینرسی به مرکز زمین متصل است و مرکز دستگاه بدنی در مرکز جرم ماهواره قرار دارد و همراه با آن دوران می کند (شکل 1). بردار \vec{r} نشان



Fig. 1 Schematic figure of the satellite

12	Intermed	liar
13	Intermed	liaı

- 14 Arribas
- ¹⁵ Elipe
- ¹⁶ Peng ¹⁷ Liu

دهنده موقعیت مرکز جرم ماهواره نسبت به دستگاه اینرسی $x_0y_0z_0$ است و فرض بر این است که این بردار همواره در صفحه x_0y_0 قرار دارد. به بیان heta دیگر $r = [r\cos(heta), r\sin(heta), 0]^{\mathrm{T}}$ دیگر $\vec{r} = [r\cos(heta), r\sin(heta), 0]^{\mathrm{T}}$ بیان کننده شعاع مدار و زاویه مدار میباشند.

برای نشان دادن دوران دستگاه بدنی نسبت به دستگاه اینرسی از دو –2 و ψ_3 و ψ_2 ، ψ_1 حالت استفاده می کنیم: 1 - با استفاده از سه زاویه اویلر ψ_1 ، ψ_2 و با استفاده از ينج زاويه *I ،g ،l ،h و I* (شكل 2). جزئيات اين دورانها براي حالت اول به صورت:

- دوران حول محور z_0 به اندازه ψ_1 به طوری که محور x_0 روی محور -1 ′x قرار گیرد
- -2- دوران حول محور x' به اندازه ψ_2 به صورتی که محور z_0 روی محور -2 z قرار گیرد
- دوران حول محور z به اندازه ψ_3 به صورتی که محور x' روی محور -3 x قرار گیرد
 - و برای حالت دوم به صورت زیر است.
- i دوران حول محور x_0 به اندازه h به طوری که محور x_0 روی محور -1قرار گیرد
- -2- دوران حول محور i به اندازه I به صورتی که محور z_0 روی محور -2 قرار گیرد. در اینجا $ec{G}$ بردار ممنتم زاویهای $k=ec{G}/ec{G}ec{I}=i imes j$ است.
- j به صورتی که محور i روی محور g i به صورتی که محور i روی محور -3قرار گیرد
- z دوران حول محور j به اندازه J به صورتی که محور k روی محور -4قرار گیرد
- x دوران حول محور z به اندازه l به صورتی که محور j روی محور -5 قرار گیرد

ـود.

$$R = R_3(\psi_3)R_1(\psi_2)R_3(\psi_1) = R_3(l)R_1(J)R_3(g)R_1(I)R_3(h)$$
(1)

که در آن

$$R_{1}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x) & \sin(x) \\ 0 & -\sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}$$
$$R_{3}(x) = \begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) & 0 \\ -\sin(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(2)



Fig. 2 Transformation from the reference frame to the body frame in two cases

شکل 2 تبدیل از دستگاه مرجع به دستگاه به بدنی در دو حالت

 ψ_2 ، ψ_1 همان طور که در "شکل 2" دیده می شود، استفاده از سه زاویه ψ_1 و ψ_3 برای دوران فقط شامل دو صفحه به نام صفحه اینرسی و صفحه بدنه ψ_3 می شود اما استفاده از پنج زاویه h، h g، l g l مک صفحه دیگر به نام صفحه Jنامتغیر^۳ را نیز شامل میشود. صفحه نامتغیر صفحهای است که عمود بر بردار مومنتم زاویه است و در صورتی که به یک جسم اغتشاش خارجی وارد نشود همواره ثابت میماند که این موجب کاهش مرتبه و سادهسازی سیستم می شود که در بخش های بعد به آن می پردازیم.

3- معادلات حاكم بر سيستم

با استفاده از معادله (2)، بردار سرعت دورانی ماهواره بیان شده در دستگاه بدنی به صورت زیر میشود

$$\omega^{\times} = -\dot{R}R^{\mathrm{T}} \to \omega = \begin{bmatrix} \sin(\psi_{2})\sin(\psi_{3})\dot{\psi}_{1} + \cos(\psi_{3})\dot{\psi}_{2} \\ \sin(\psi_{2})\cos(\psi_{3})\dot{\psi}_{1} - \sin(\psi_{3})\dot{\psi}_{2} \\ \cos(\psi_{2})\dot{\psi}_{1} + \dot{\psi}_{3} \end{bmatrix}$$
(3)

بر این اساس انرژی جنبشی به صورت زیر میشود.

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_1^2}{\gamma_1} + \frac{\omega_2^2}{\gamma_2} + \frac{\omega_3^2}{\gamma_3} \right) + \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \left(r \dot{\theta} \right)^2 \right)$$
(4)

و با فرض این که ابعاد ماهواره نسبت به اندازه مدار بسیار کوچکتر است (که فرض بسیار معقولی برای ماهوارهها است)، در این صورت تقریب انرژی پتانسیل سیستم به صورت زیر می شود [29]

$$V = -\frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{2r^3} \left(\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2} \right) (1 - 3\alpha_1^2) + \left(\frac{1}{\gamma_3} - \frac{1}{\gamma_2} \right) (1 - 3\alpha_3^2) \right)$$
(5)

مختصات بدنی است. یعنی

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = R \frac{\vec{r}}{r}$$
(6)

با تعریف لاگرانژین به صورت $\mathcal{L} = T - V$ ، ممنتمهای مزدوج متغیرهای سیستم به صورت زیر به دست میآید.

$$P_{q_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q_i}}; q = [\psi_1, \psi_2, \psi_3, r, \theta]$$
⁽⁷⁾

$$\mathcal{H} = \sum_{i} P_{q_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \tag{8}$$

با سادهسازی، این همیلتونین را به سه بخش بهصورت زیر می توان تقسيم كرد.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_K + \mathcal{H}_E + \mathcal{H}_C \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{K} &= \frac{1}{2} \left(P_{r}^{2} + \frac{P_{\theta}^{2}}{r^{2}} \right) - \frac{\mu}{r} \\ \mathcal{H}_{E} &= \frac{1}{2} \vec{G}^{\mathrm{T}} \mathbf{I}^{-1} \vec{G} \\ \mathcal{H}_{C} &= -\frac{\mu}{2r^{3}} \left(\left(\frac{1}{\gamma_{1}} - \frac{1}{\gamma_{2}} \right) (1 - 3\alpha_{1}^{2}) + \left(\frac{1}{\gamma_{3}} - \frac{1}{\gamma_{2}} \right) (1 - 3\alpha_{3}^{2}) \right) \end{aligned}$$
(10)

Γ*α*, **Γ**

DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.7.28.0

¹ Reference Plane

² Body Plane

³ Invariable Plane

 $\vec{G} =$

$$\begin{bmatrix} \csc(\psi_{2})\sin(\psi_{3}) & \cos(\psi_{3}) & -\cot(\psi_{2})\sin(\psi_{3}) \\ \csc(\psi_{2})\cos(\psi_{3}) & -\sin(\psi_{3}) & -\cot(\psi_{2})\cos(\psi_{3}) \\ 0 & 0 & 1 \\ \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} P_{\psi_{1}} \\ P_{\psi_{2}} \\ P_{\psi_{3}} \end{bmatrix}$$
(11)

$$\mathbf{I}^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0\\ 0 & \gamma_2 & 0\\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{bmatrix}$$
(12)

در معادله (10)، \mathcal{H}_{K} مانند همیلتونین حرکت یک جسم نقطهای در مدار است و \mathcal{H}_{E} شبیه همیلتونین حرکت دورانی یک جسم صلب حول مرکز جرم خود است و در حقیقت همان همیلتونین حرکت دورانی یک جسم صلب بدون اغتشاش است. \mathcal{H}_{C} همیلتونینی است که به خاطر کوپل دینامیک مدار و وضعیت به وجود می آید و در حقیقت اثرات گرادیان جاذبه روی دینامیک و ضعیت را نشان می دهد. اما دینامیک وضعیت بدون اغتشاش را می توان با استفاده از تبدیل سرت-آندویر کاهش درجه داد. برای این کار از پنج زاویه h، I. g. I g I می دورت نشان داده در "شکل 2" کمک میگیریم. در صورت استفاده از این زاویه ها در همیلتونین \mathcal{H}_{E} بردار ممنتمهای زاویه ای مورت زیر می شود (شکل 2).

$$\vec{G} = \begin{bmatrix} \sqrt{G^2 - L^2} \sin(l) \\ \sqrt{G^2 - L^2} \cos(l) \end{bmatrix}$$
(13)

که در آن G اندازه بردار G یعنی |G| = B است. با استفاده از این تبدیل که معروف به تبدیل سرت-آندویر است درجات آزادی دوران یک جسم صلب بدون اغتشاش خارجی از سه درجه به یک درجه کاهش پیدا می کند (برای جزییات بیشتر در مورد این تبدیل به [30] مراجه شود). با استفاده از این تبدیل روابط زیر نیز بین زوایای اویلر و زوایای h، h g، J و I برقرار می گردد.

 $\begin{aligned} \cos(\psi_2) &= \cos(I)\cos(J) - \sin(I)\sin(J)\cos(g) \\ \sin(\psi_2)\cos(\psi_1 - l) &= \cos(I)\sin(J) + \sin(I)\cos(J)\cos(g) \\ \sin(\psi_2)\sin(\psi_1 - l) &= \sin(I)\sin(g) \\ \sin(\psi_2)\cos(\psi_3 - h) &= \sin(I)\cos(J) + \cos(I)\sin(J)\cos(g) \\ \sin(\psi_2)\sin(\psi_3 - h) &= \sin(J)\sin(g) \end{aligned}$ (14) $\begin{aligned} \sin(\psi_2)\sin(\psi_3 - h) &= \sin(J)\sin(g) \\ \sin(\psi_2)\sin(\psi_3 - h) &= \sin(J)\sin(g) \\ \sin(\psi_3)\sin(U)\sin(U)\sin(U)\sin(U)\sin(U) \end{aligned}$

(16)

در این روابط $\cos(I) = \frac{L}{G}, \cos(I) = \frac{H}{G}, \sin(I) = \frac{\sqrt{G^2 - L^2}}{G}, \sin(I) = \frac{\sqrt{G^2 - H^2}}{G}$ با جایگذاری معادلات (15)- (17) در معادله (10) همیلتونین سیستم به صورت متغیرهای سرت-آندویر بیان می شود. همان طور که در این معادلات دیده میشود ترم اغتشاشی ناشی از گرادیان جاذبه باعث میشود که همیلتونین سیستم از یک درجه آزادی در حالت بدون اغتشاش (یا بدون کوپلینک) به یک همیلتونین با پنج درجه آزادی در حالت با اغشاش تبدیل شود. بنابراین برای این که بتوان از روشهای تحلیلی برای بررسی آشوب استفاده کرد نیاز به کاهش درجه این همیلتونین است. برای این کار ابتدا فرض مى كنيم كه ديناميك مدار ماهواره تحت تاثير ديناميك وضعيت قرار نگیرد. به بیان دیگر همیلتونین \mathcal{H}_K به صورت مستقل برای به دست آوردن پاسخ زمانی دینامیک مدار استفاده می شود. با این کار همیلتونین سیستم از پنج درجه به سه درجه به همراه زمان تبدیل می شود. در مرحله بعد با استفاده از یک تبدیل کانونیکال و میانگین گیری، که به روش میانجی معروف است، این همیلتونین را با یک همیلتونین یک درجه آزادی غیرخودگردان تقريب مىزنيم.

4- کاهش مرتبه معادلات سیستم

در این بخش همیلتونین سیستم را کاهش درجه میدهیم. برای این کار ابتدا فرض می کنیم که دینامیک وضعیت اثری بر دینامیک مدار ندارد و بر این اساس پاسخ زمانی دینامیک مدار را به صورت یک تابع پریودیک مناسب به دست می آوریم. دلیل بهدست آوردن دینامیک مدار به صورت پریودیک آن است که بعدا بتوان از روش ملنیکف برای بررسی آشوب استفاده کرد. با این کار همیلتونین سیستم از پنج درجه به سه درجه به همراه زمان تبدیل می شود. سپس با استفاده از یک تبدیل کانونیکال معروف به روش میانجی همیلتونین یک درجه غیرخودگردان می رسیم که مناسب برای استفاده در روش ملنیکف است.

1-4- پاسخ زمانی دینامیک مدار

در صورت بزرگ بودن فاصله ماهواره تا زمین و یا بزرگ بودن نسبت متوسط سرعت دورانی وضعی به سرعت دورانی مداری، میتوان از اثرات دینامیک وضعیت بر مدار صرفنظر کرد [27] و در نتیجه دینامیک مدار سیستم را به صورت غیرکوپل از دینامیک وضعیت بررسی کرد. در این صورت \mathcal{H}_E به صورت جداگانه برای استخراج معادلات مداری استفاده میشود که در حقیقت شبیه همان حرکت یک جرم متمرکز (نقطهای) در مدار است و حل آن به صورت زیر میباشد [31].

$$\begin{cases} r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(\theta)} = a(1 - e\cos(E)) \\ \cos(E) = \frac{e + \cos(\theta)}{1 + e\cos(\theta)} \\ \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}t = E - e\sin(E) \end{cases}$$
(18)

که در آن p پارامتر مداری، a نصف قطر بزرگ بیضی مدار، p خروج از مرکز بیضی، \overline{E} آنومالی مرکزی^۱ و μ ثابت استاندارد گرانش است. با توجه به روابط (18) مشاهده میشود که متغیرهای مداری برحسب زمان کاملا مشخص هستند. از طرف حل متغیرهای مداری به صورت فرم بسته وجود ندارد و عموما به صورت سری بیان می شود. حل زمانی آنومالی مرکزی به صورت زیر است [31].

$$E = M + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(ne) \sin(nM)$$
(19)

که در آن J_n تابع بسل نوع اول است و $M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}t}$ از طرف دیگر از آنجایی که $1/r^3$ در معادلات اغشتاشی ظاهر میشود نیاز بهدست آورن پاسخ زمانی آن داریم. با قرار دادن E از معادله (19) در معادله (18) و استفاده از سری تیلور حول e = 0 داریم.

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{a^3} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(nM)$$
(20)

که برای چند جمله ابتدایی B_n ها به صورت زیر هستند.

$$B_{0} = 1 + \frac{3e^{2}}{2} + \frac{15e^{4}}{8} + \frac{35e^{6}}{16}$$

$$B_{1} = 3e + \frac{27e^{3}}{8} + \frac{261e^{5}}{64} + \frac{14309e^{7}}{3072}$$

$$B_{2} = \frac{9e^{2}}{2} + \frac{7e^{4}}{2} + \frac{141e^{6}}{32}$$

$$B_{3} = \frac{53e^{3}}{8} + \frac{393e^{5}}{128} + \frac{24753e^{7}}{5120}$$

$$B_{4} = \frac{77e^{4}}{8} + \frac{129e^{6}}{80}$$

$$B_{5} = \frac{1773e^{5}}{128} - \frac{4987e^{7}}{3072}$$

$$B_{6} = \frac{3167e^{6}}{160}$$

$$B_{7} = \frac{432091e^{7}}{15360}$$
(21)

2-4- استفاده از روش میانجی ۲

در روش میانجی از یک تبدیل کانونیکال استفاده می شود به نحوی که تابع ژاکوبی-همیلتون از رابطه زیر به دست می آید [27].

$$W = \int (\mathcal{H}_{c} - \bar{\mathcal{H}}_{c}) dt$$
(22)
که در آن

$$\overline{\mathcal{H}}_{C} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \mathcal{H}_{C} dg \, dh \tag{23}$$

با استفاده از این تبدیل، متغیرهای جدید سیستم و تابع همیلتونین دینامیک وضعیت به همراه اغتشاش به صورت زیر میشوند (برای جزئیات بیشتر در مورد چگونگی این تبدیل به مرجع [27] و مراجع در آن مراجعه شود).

$$\begin{cases} (l, g, h) = (l, g, h) + \frac{\partial W}{\partial (L, G, H)} \\ (L, G, H) = (L, G, H) + \frac{\partial W}{\partial (l, g, h)} \\ \mathcal{H} = \mathcal{H}_E + \mathcal{H}_C = \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1 \end{cases}$$
(24)

که در آن

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{0} &= \mathcal{H}_{E} = \frac{1}{2} (\gamma_{1} \sin(l)^{2} + \gamma_{2} \cos(l)^{2}) (G^{2} - L^{2}) + \frac{1}{2} \gamma_{3} L^{2} \\ \mathcal{H}_{1} &= \overline{\mathcal{H}}_{C} = \frac{3\mu}{8r^{3}} \left(1 - \frac{3H^{2}}{G^{2}} \right) \times \\ \left(\left(\frac{1}{\gamma_{1}} - \frac{1}{\gamma_{2}} \right) \sin(l)^{2} \left(\frac{G^{2} - L^{2}}{G^{2}} \right) + \left(\frac{1}{\gamma_{3}} - \frac{1}{\gamma_{2}} \right) \left(\frac{L^{2}}{G^{2}} \right) \right) \\ \varepsilon &= \sqrt{\frac{\mu}{a^{3}}} \frac{G}{2\mathcal{H}_{0}} \end{aligned}$$
(25)

روابط (20)، (24) و (25) نشان میدهند که با استفاده از این تبدیل و روش، سیستم اکنون دارای دو درجه آزادی میباشد و در نتیجه میتوان از روش ملنیکف برای بررسی آشوب استفاده کرد که در بخش بعد به آن میپردازیم.

5- بررسی آشوب

محاسبه مىشود

1-5- بررسی تحلیلی آشوب
با حل معادله (24) زمانی که پارامتر (= ٤ است مدارات هتروکلینیک به صورت زیر به دست میآیند [32]

$$\begin{cases} \tilde{L} = \pm G\eta \operatorname{sech}(nt) \\ \sin(\tilde{l}) = \pm \frac{\sqrt{1 - \eta^2} \operatorname{sech}(nt)}{\sqrt{1 - \eta^2} \operatorname{sech}(nt)^2} \\ \cos(\tilde{l}) = \pm \frac{\tanh(nt)}{\sqrt{1 - \eta^2} \operatorname{sech}(nt)^2} \\ n = G\sqrt{(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_2 - \gamma_3)} \\ \eta = \sqrt{\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_3}} \end{cases}$$
(26)

با استفاده از این مدارات هتروکلینیک، تابع ملنیکف بهصورت زیر

$$M(t_0) = \frac{3\left(1 - \frac{3H^2}{G^2}\right)n(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_2 - \gamma_3)\mu}{4\gamma_1\gamma_2\gamma_3a^3} \times \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}(nt)^2 \tanh(nt) \sum_{j=0}^{\infty} B_j \cos\left(j\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t+t_0)\right) dt$$
(29)

$$M(t_0) = -\frac{3\left(1 - \frac{3H^2}{G^2}\right)\mu^2\pi}{8\gamma_1\gamma_2\gamma_3G^2a^6} \times \sum_{j=0}^{\infty} B_j j^2 \operatorname{csch}\left(\frac{j\pi}{2n}\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\right) \sin\left(j\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}t0\right)$$
(30)

با توجه به معادله (30) دیده میشود که تابع ملنیکف در $t_0 = 0$ مفر میشود بهطوری که مشتق آن نسبت به t_0 در این نقطه صفر نیست. بنابراین

¹ Eccentric Anomaly ² Intermediary

از تابع ملنیکف علاوه بر اثبات آشوب میتوان در بررسی عرض ناحیه آشوبناک نیز استفاده کرد. عرض ناحیه آشوبناک به ما کمک میکند تا بتوان شرایط اولیهای که باعث میشود سیستم رفتار آشوبناک و غیرقابل پیشبینی داشته باشد را شناسایی کنیم و تا حد امکان از ورود به این ناحیه خودداری نماییم. با ضرب کردن ماکزیمم تابع ملنیکف در پارامتر ٤ میتوان تقریبی از عرض ناحیه آشوب را به صورت زیر به دست آورد [33].

(31)

که در آن

$$|\Delta \mathcal{H}| \leq \varepsilon M_{\max}$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{H} &= \mathcal{H}_0(l,L) - \mathcal{H}_0(\tilde{l},\tilde{L}) \\ &= \mathcal{H}_0(l,L) - \mathcal{H}_0(0,0) \\ &= \frac{1}{2}(\gamma_1 \sin(l)^2 + \gamma_2 \cos(l)^2)(G^2 - L^2) + \frac{1}{2}\gamma_3 L^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\gamma_2 G^2 \end{aligned}$$
(32)

با جایگذاری معادله (32) در معادله (31) و بیبعدسازی برای تحلیل بهتر داریم

$$\left| \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} - 1 \right) \sin(l)^2 + \left(\frac{\gamma_3}{\gamma_2} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sin(l)^2 - \cos(l)^2 \right) \left(\frac{L}{G} \right)^2 \right| \le \frac{2\varepsilon M_{\text{max}}}{\gamma_2 G^2}$$
(33)

برای استفاده از معادله (33) نیاز به دست آوردن ماکزیمم تابع ملنیکف داریم برای این کار از تابع ملنیکف مشتق گرفته و برابر صفر قرار میدهیم و با بهدست آوردن ریشههای آن و جایگذاری در تابع ملنیکف ماکزیمم آن را پیدا می کنیم. با برابر صفر قرار دادن مشتق تابع ملنیکف داریم

$$\frac{dM(t_0)}{dt_0} = 0 \rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} A_j \cos(jx) = 0$$

$$\begin{cases} A_j = B_j j^3 \operatorname{csch}\left(\frac{j\pi}{2n}\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\right) \\ x = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} t0 \end{cases}$$
(34)

از طرف دیگر، با استفاده از رابطه زیر معادله (34) را میتوان به یک چند جملهای تبدیل کرد

$$\begin{cases} \cos(jx) = T_j(\cos(x)) \\ T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} {n \choose 2k} (x^2 - 1)^k x^{n-2k} \\ \eta = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} {n \choose 2k} (x^2 - 1)^k x^{n-2k} \end{cases}$$
(35)

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j \sum_{k=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} {j \choose 2k} (x^2 - 1)^k x^{j-2k} = 0$$
(36)

که ریشههای آن به آسانی به کمک روشهای عددی برای جملات محدود به دست میآید. با قرار دادن این ریشهها در تابع ملنیکف میتوان ماکزیمم آن را به آسانی محاسبه کرد.

2-5- بررسی عددی آشوب و مقایسه با نتایج تحلیلی

در این بخش به بررسی عددی آشوب با استفاده از نمودارهای حساسیت به شرایط اولیه و همچنین نگاشتهای پوانکاره پرداخته و آنها را با نتایج به دست آمده از روش تحلیلی مقایسه میکنیم.

برای مثالهای عددی فرض میکنیم که نصف قطر بزرگ بیضی مدار و ممانهای اینرسی ماهواره ثابت هستند و تنها ممنتم زاویهای کل و خروج از مرکز بیضی مدار متغیر هستند. پارمترهای ثابت در جدول 1 آورده شده است.

در سه مثال اول مقدار خروج از مرکز را برابر با 0.5 فرض می کنیم و B را به نحوی تغییر می دهیم که مقدار $2 \varepsilon M_{
m max}/\gamma_2 G^2$ به ترتیب برابر با 2.00 و 0.001 باشد و در سه مثال دوم B را برابر با 0.10 فرض می کنیم و خروج از مرکز را به نحوی تغییر می دهیم که مقدار می کنیم و $2 \varepsilon M_{
m max}/\gamma_2 G^2$

برای رسم نگاشتهای پوانکاره نقاط حاصل از پریود مداری 2π در نظر گرفته شدهاند. داخل خطوط قرمز (خطچین) عرض ناحیه آشوب براساس روابط تحلیلی است (معادله 33). برای رسم نمودارهای حساسیت به شرایط اولیه، فرض میکنیم که شرایط اولیه به صورت [0, 0,000101] = [l₀₁, L₀₁, l₀₂, L₀₂] هستند.

نتایج بررسی عددی در "شکلهای 3 تا 14" آورده شده است. همان طور که در این شکلها دیده می شود بررسی تحلیلی تخمین نسبتا مناسبی برای عرض ناحیه آشوب می دهد. اما با مقایسه "شکلهای 3 و 9"، "شکلهای 5 و 11" و "شکلهای 7 و 13" دیده می شود که تخمین تحلیلی عرض ناحیه آشوبناک برای خروج از مرکزهای کوچکتر به حل عددی نزدیکتر است.

"شکلهای 4، 6، 8، 10، 12 و 14" نشان میدهند که سیستم در ناحیه آشوبناک کاملا رفتار غیرقابل پیش بینی دارد به نحوی که برای دو شرایط اولیه بسیار نزدیک به هم بعد از مدت کوتاهی دو حرکت کاملا متفاوت داریم. از طرف دیگر این شکلها نشان میدهند که هر چقدر مقدار ماکزیمم تابع ملنیکف ضرب در پارامتر ع بزرگتر باشد، دو پاسخ زمانی سریعتر از هم فاصله می گیرند.

"شکلهای 3 تا 8" نشان میدهند که هر چقدر مقدار G بزرگتر باشد، ماکزیمم تابع ملنیکف و عرض ناحیه آشوب کوچکتر میشود. دلیل این اتفاق این است که با افزایش مقدار G، در حالی که سایر پارمترها ثابت هستند، در حقیقت مقدار سرعت دوارنی وضعی ماهواره افزایش مییابد که خود به معنای کمتر شدن زمان برای تاثیر گشتاور گرادیان جاذبه بر روی دینامیک وضعیت

جدول 1 پارمترها استفاده شده در مثالها Table 1 Parameters used in the examples a μ Η γ₃ γ₁ γ₂ km (m³s⁻²) (Nm) (kg⁻¹m⁻²) (kg⁻¹m⁻²)



Fig. 3 Poincare map for $2\varepsilon M_{max}/\gamma_2 G^2 = 0.001$, G=0.325 (kgm²/s), and e=0.5. Between the red (dashed) lines is the width of chaotic layers predicted by the analytical method. g G=0.325 (kgm²/s) $2\varepsilon M_{max}/\gamma_2 G^2 = 0.001$ شکل 3 نگاشت پوانکاره برای

e=0.5 بين خطوط قرمز (خطچين) عرض ناحيه آشوبناک براساس پيشبيني روابط تحليلي است.

241



Fig. 7 Poincare map for $2\varepsilon M_{max}/\gamma_2 G^2 = 0.01$, G=0.148 (kgm²/s), and e=0.5. Between the red (dashed) lines is the width of chaotic layers predicted by the analytical method.

شکل 7 پاسخ زمانی برای $G=0.148 \text{ (kgm^2/s)}$ ، $2\varepsilon M_{\text{max}}/\gamma_2 G^2 = 0.01$ و e=0.5 و برای دو شرایط اولیه به صورت e=0.5 $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = [0.0001001, 0, 0.0001, 0]$



Fig. 8 Time response for $2\varepsilon M_{\text{max}}/\gamma_2 G^2 = 0.01$, G=0.148 (kgm²/s), and e=0.5 and for two sets of initial conditions: $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = [0.0001001, 0, 0.0001, 0].$

شکل 8 پاسخ زمانی برای $G=0.148~(\mathrm{kgm^2/s})$ ، $2\varepsilon M_{\mathrm{max}}/\gamma_2 G^2=0.01$ وe=0.5 e=0.5

 $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = [0.0001001, 0, 0.0001, 0]$



Fig. 9 Poincare map for $2\varepsilon M_{\text{max}}/\gamma_2 G^2 = 0.001$, *G*=0.1 (kgm²/s), and *e*=0.032. Between the red (dashed) lines is the width of chaotic layers predicted by the analytical method.

شكل 9 نگاشت پوانكاره براى $\mathcal{C}=0.01~(\mathrm{kgm^2/s})$ $\mathcal{C}=\mathcal{M}_{\mathrm{max}}/\gamma_2 G^2=0.001$ و $\mathcal{C}=0.032$ و $\mathcal{C}=0.032$ بين خطوط قرمز (خطچين) عرض ناحيه آشوبناک براساس پيش،ينی روابط تحليلی است.

6- نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی آشوب در دینامیک وضعیت یک ماهواره صلب در مدار

ماهواره است. از طرف دیگر "شکلهای 9 تا 14" نشان میدهند که با افزایش مقدار خروج از مرکز مدار ماهواره، ماکزیمم تابع ملنیکف و عرض ناحیه آشوب بزرگتر می شود. دلیل این اتفاق افزایش دامنه نوسان گشتاور گرادیان جاذبه با افزایش مقدار خروج از مرکز *e* است.



Fig. 4 Time response for $2\varepsilon M_{\text{max}}/\gamma_2 G^2 = 0.001$, G=0.325 (kgm²/s), and e=0.5 and for two sets of initial conditions:

 $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = [0.0001001, 0, 0.0001, 0].$

G=0.325 (kgm²/s)، $2\varepsilon M_{\text{max}}/\gamma_2 G^2 = 0.001$ و باسخ زمانی برای G=0.325 (kgm²/s) ، $2\varepsilon M_{\text{max}}/\gamma_2 G^2 = 0.001$ و برای دو شرایط اولیه به صورت e=0.5 [$l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}$] = [0.0001001, 0,0.0001, 0]



Fig. 5 Poincare map for $2\varepsilon M_{\text{max}}/\gamma_2 G^2 = 0.005$, G=0.191 (kgm²/s), and e=0.5. Between the red (dashed) lines is the width of chaotic layers predicted by the analytical method.

شکل 5 نگاشت پوانکاره برای $G=0.191~(\mathrm{kgm^2/s})~.2\varepsilon M_{\mathrm{max}}/\gamma_2 G^2=0.005$ و $G=0.191~(\mathrm{kgm^2/s})~.2\varepsilon M_{\mathrm{max}}/\gamma_2 G^2=0.005$ و . . بین خطوط قرمز (خطچین) عرض ناحیه آشوبناک براساس پیشبینی روابط تحلیلی است.



Fig. 6 Time response for $2\varepsilon M_{\text{max}}/\gamma_2 G^2 = 0.005$, *G*=0.191 (kgm²/s), and *e*=0.5 and for two sets of initial conditions: $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = [0.0001001, 0, 0.0001, 0]$.

G=0.325 (kgm²/s)، $2\varepsilon M_{\text{max}}/\gamma_2 G^2 = 0.001$ و برای دو شرایط اولیه به صورت e=0.5 e=0.5 $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = [0.0001001, 0, 0.0001, 0]$

DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.7.28.0]



Fig. 13 Poincare map for $2\varepsilon M_{\text{max}}/\gamma_2 G^2 = 0.01$, G=0.1 (kgm²/s), and e=0.264. Between the red (dashed) lines is the width of chaotic layers predicted by the analytical method.

شکل 13 نگاشت پوانکاره برای $G=0.1 ~(\mathrm{kgm^2/s})$ ، $2\varepsilon M_{\mathrm{max}}/\gamma_2 G^2 = 0.01$ و $G=0.1 ~(\mathrm{kgm^2/s})$ بین خطوط قرمز(خطچین) عرض ناحیه آشوبناک براساس پیش بینی روابط e=0.264 تحلیلی است.



Fig. 14 Time response for $2\varepsilon M_{\text{max}}/\gamma_2 G^2 = 0.01$, G=0.1 (kgm²/s), and e=0.264 and for two sets of initial conditions: [$l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}$] = [0.0001001,0,0.0001,0].

شکل 14 پاسخ زمانی برای 0.01 $G^{2}=0.1$ (kgm²/s) $2\varepsilon M_{\max}/\gamma_{2}G^{2}=0.01$ و $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = 0.264$ و برای دو شرایط اولیه به صورت [0.0001001, 0.00001, 0]

گرفت. سپس نتایج تحلیلی برای چند حالت با نتایج عددی مقایسه شدند. روش مقایسه براساس عرض ناحیه آشوب در نگاشت پوانکاره و همچنین حساسیت به شرایط اولیه در پاسخ زمانی بود. نتایج نشان داد که روابط تحلیلی تطابق بسیار خوبی با نتایج عددی دارند. همچنین نتایج نشان داد که علاوه بر اثبات آشوب، نتایج تحلیلی کمک بسیار خوبی برای بررسی شرایط آشوبناک شدن ماهواره (شامل پارامترهای سیستم و شرایط اولیه) ارائه میدهند که میتواند در طراحی ماهوارهها و یا کنترل آن دارای حائز اهمیت باشد.

7- مراجع

- V. K. Melnikov, On the stability of the center for time-periodic perturbation, *Proceedings of Moscow Mathematical Society*, Vol. 12, No. 1, pp. 3-52, 1963.
- [2] S. M. Abtahi, S. H. Sadati, H. Salarieh, Chaotic dynamics of spin-orbit motion in a gyrostat satellite using ricci method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 9, pp. 12-25, 2013. (In Persian (فارسی)
- [3] M. Abtahi, Modeling of Roto-Translatory Motion of Gyrostat Satellite and Controlling its Chaotic Attitude, PhD Thesis, Department of Mechanical Engineering, Khajeh Nasir Toosi University of Technology, Tehran, 2013. (In Persian, فارسی)
- [4] G. Haller, S. Wiggins, N-pulse homoclinic orbits in perturbations of resonant Hamiltonian systems, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol.



Fig. 10 Time response for $2\varepsilon M_{\text{max}}/\gamma_2 G^2 = 0.001$, G=0.1 (kgm²/s), and e=0.032 and for two sets of initial conditions: $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = [0.0001001, 0, 0.0001, 0].$

شكل 10 پاسخ زمانى براى 0.001 = G=0.1 (kgm²/s) ، $2\varepsilon M_{\text{max}}/\gamma_2 G^2 = 0.001$ و e=0.032 و e=0.032 و براى دو شرايط اوليه بهصورت e=0.031 [$l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}$] = [0.0001001,0,0.0001,0]



Fig. 11 Poincare map for $2\epsilon M_{\text{max}}/\gamma_2 G^2 = 0.005$, *G*=0.1 (kgm²/s), and e=0.147. Between the red (dashed) lines is the width of chaotic layers predicted by the analytical method.

شكل 11 نگاشت پوانكاره برای $\mathcal{E}EM_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.005$. (kgm²/s) $\mathcal{E}EM_{\max}/\gamma_2 G^2 = 0.005$ و e=0.147 و اساس پیش بنی e=0.147 روابط تحلیلی است.



Fig. 12 Time response for $2\varepsilon M_{\text{max}}/\gamma_2 G^2 = 0.005$, G=0.1 (kgm²/s), and e=0.147 and for two sets of initial conditions:

 $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = [0.0001001, 0, 0.0001, 0].$

شكل 12 پاسخ زمانى براى 6=0.1 (kgm²/s) ، $2\varepsilon M_{\rm max}/\gamma_2 G^2 = 0.005$ و G=0.1 (kgm²/s) ، $2\varepsilon M_{\rm max}/\gamma_2 G^2 = 0.005$ و براى دو شرايط اوليه به صورت e=0.147 $[l_{01}, L_{01}, l_{02}, L_{02}] = [0.0001001, 0, 0.0001, 0]$

بیضوی پرداخته شد. بهدلیل اهمیت بالای بررسی تحلیلی آشوب، سیستم به نحوی تقریب زده شد که بتوان از روابط تحلیلی آشوب (روش ملنیکف) بهره the gravity-gradient satellite, Guidance, Navigation and Control Conference, Hilton Head Island, United States of America, August 10-12, 1992.

- [20] M. Iñarrea, V. Lanchares, Chaotic pitch motion of an asymmetric non-rigid spacecraft with viscous drag in circular orbit, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 41, No. 1, pp. 86-100, 2006.
- [21] M. Iñarrea, Chaos and its control in the pitch motion of an asymmetric magnetic spacecraft in polar elliptic orbit, *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 40, No. 4, pp. 1637-1652, 2009.
- [22] B. Tabarrok, X. Tong, Melnikov's method for rigid bodies subject to small perturbation torques, Archive of Applied Mechanics, Vol. 66, No. 4, pp. 215-230, 1996.
- [23] J. Kuang, S. Tan, A. T. Leung, Chaotic attitude tumbling of an asymmetric gyrostat in a gravitational field, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 25, No. 4, pp. 804-814, 2002.
- [24] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J. M. Strelcyn, Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them, Part 1: Theory, Meccanica, Vol. 15, No. 1, pp. 9-20, 1980.
- [25] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano, Determining Lyapunov exponents from a time series, Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol. 16, No. 3, pp. 285-317, 1985.
- [26] M. Sayanjali, Chaos Analysis and Trajectory Design in Four Body Problem, PhD Thesis, Department of Aerospace Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, 2015. (In Persian فارسى)
- [27] M. Arribas, A. Elipe, Attitude dynamics of a rigid body on a Keplerian orbit: A simplification, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, Vol. 55, No. 3, pp. 243-247, 1993.
- [28] J. Peng, Y. Liu, Chaotic attitude motion of a satellite on a Keplerian elliptic orbit, Technische Mechanik, Vol. 20, No. 4, pp. 311-318, 2000. [29] P. C. Hughes, Spacecraft Attitude Dynamics, pp. 233-247, Courier
- Corporation, 2012.
- [30] P. Gurfil, A. Elipe, W. Tangren, M. Efroimsky, The Serret-Andoyer formalism in rigid-body dynamics: I. Symmetries and perturbations, Regular and Chaotic Dynamics, Vol. 12, No. 4, pp. 389-425, 2007.
- [31] M. J. Sidi, Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach, pp. 8-27, Cambridge university press, 1997.
- [32] A. Deprit, A. Elipe, Complete reduction of the euler-poinsot problem, Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 41, No. 4, pp. 603-628, 1993.
- [33] G. M. Zaslavskiî, R. Sagdeev, D. Usikov, Weak Chaos and Quasi-Regular Patterns, pp. 36-142, Cambridge University Press, 1992.

130, No. 1, pp. 25-101, 1995.

- G. Haller, Chaos Near Resonance, pp. 231-285, Springer Science & [5] Business Media, 1999.
- S. W. Shaw, Chaos and three-dimensional horseshoes in slowly varying [6] oscillators, Journal of Applied Mechanics, Vol. 55, No. 4, pp. 959-968, 1988.
- S. Wiggins, P. Holmes, Periodic orbits in slowly varying oscillators, SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 18, No. 3, pp. 592-611, 1987. [7] [8] S. Wiggins, P. Holmes, Homoclinic orbits in slowly varying oscillators,
- SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 18, No. 3, pp. 612-629, 1987. S. Wiggins, Global Perturbation Methods for Detecting Chaotic Dynamics [9]
- in: Global Bifurcations and Chaos, pp. 334-474, Springer, New York, 1988. [10] P. J. Holmes, J. E. Marsden, Horseshoes in perturbations of Hamiltonian systems with two degrees of freedom, Communications in Mathematical Physics, Vol. 82, No. 4, pp. 523-544, 1982.
- [11] P. J. Holmes, J. E. Marsden, Horseshoes and Arnold diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 32, No. 2, pp. 273-309, 1983.
- [12] P. J. Holmes, J. E. Marsden, Melnikov's method and Arnold diffusion for perturbations of integrable Hamiltonian systems, Journal of Mathematical Physics, Vol. 23, No. 4, pp. 669-675, 1982.
- [13] K. Yagasaki, Chaotic dynamics of quasi-periodically forced oscillators detected by Melnikov's method, SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 23, No. 5, pp. 1230-1254, 1992.
- [14] K. Yagasaki, Horseshoes in two-degree-of-freedom Hamiltonian systems with saddle-centers, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 154, No. 4, pp. 275-296, 2000.
- [15] R. Camassa, G. Kovačič, S. K. Tin, A Melnikov method for homoclinic orbits with many pulses, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. [16] W. Zhang, J. Zhang, M. Yao, The extended Melnikov method for non-
- autonomous nonlinear dynamical systems and application to multi-pulse chaotic dynamics of a buckled thin plate, Nonlinear Analysis: Real World Applications, Vol. 11, No. 3, pp. 1442-1457, 2010.
- [17] W. Hao, W. Zhang, M. Yao, Multipulse chaotic dynamics of six-dimensional nonautonomous nonlinear system for a honeycomb sandwich plate, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 24, No. 11, pp. 1450138, 2014.
- [18] M. Staby, G. Gray, Chaos in gravity gradient satellite pitch dynamics via the method of Melnikov, Advances in the Astronautical Sciences, Vol. 84, No. 1, pp. 441-449, 1993.
- [19] H. Karasopoulos, D. Richardson, Chaos in the pitch equation of motion for