مجله مهندسی مکانیک مدرس، فوق‌العاده اسفند 1393، دوره 14، شماره 13، ص ص 107- 118

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

کاربرد روش سلول محدود در پیش‌بینی آسیب نرم با درنظرگرفتن اثر بسته‌شدن ترک‌ها

امیرحسین حدادگر اصفهانی[1]، محمد مشایخی[2*]، جمشید پرویزیان[2]

1- کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان
2- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان
* اصفهان، کدپستی 83111-84156، mashayekhi@cc.iut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 10 خرداد 1393
پذیرش: 23 تیر 1393
ارائه در سایت: 12 مهر 1393

کلید واژگان:
آسیب نرم
روش سلول محدود
اثر بسته شدن ترک‌ها

چکیده

در این مقاله، روش سلول محدود برای پیش‌بینی آسیب نرم و رشد ترک در شرایط کرنش‌های کوچک و کارسختی غیرخطی همسان به کار گرفته می‌شود. در گام اول یک مدل الاستیک- پلاستیک- آسیب مبتنی بر مدل اصلاح شده لمتر، توسعه داده شد و به صورت یک زیربرنامه که انتگرال‌گیری عددی از معادلات ساختاری آن به صورت ضمنی است، به روش سلول محدود پیاده‌سازی گردید. هم‌چنین اثر بسته شدن ریزترک‌ها که به صورت قابل ملاحظه‌ای نرخ رشد آسیب را در بارگذاری فشاری به تاخیر می‌اندازد، درنظر گرفته شد. روش سلول محدود ترکیبی از روش دامنه مجازی و روش اجزای محدود مرتبه بالا است و نشان داده می‌شود که برای حل مسایل با هندسه‌های پیچیده که شبکه‌بندی آن دشوار است، روشی موثر است. سلول محدود تولید شبکه ساده و سریع را با نرخ همگرایی بالای روش اجزای محدود مرتبه بالا، ترکیب می‌کند. در ادامه، عملکرد روش سلول محدود و مدل آسیب، با تحلیل مثال‌های متنوع و مقایسه آن‌ها با نتایج تجربی معتبر، اعتبارسنجی شد. نتایج به‌دست آمده نشان داد مدل اصلاح شده لمتر می‌تواند به عنوان ابزاری کارآ و سریع برای پیش بینی آسیب نرم و شکست در فرآیندهای شکل‌دهی فلزات مورد استفاده قرار گیرد.

Using the finite cell method to predict ductile damage with crack closure effect

Amir Hosein Hadadgar Esfahani[1], Mohammad Mashayekhi[2*], Jamshid Parvizian[2]

1- Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran
2- Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran
*P.O.B. 84156-83111 Isfahan, Iran, mashayekhi@cc.iut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 31 May 2014
Accepted 14 July 2014
Available Online 04 October 2014

Keywords:
Ductile damage
Finite cell method
Crack closure effect

ABSTRACT

In this paper, the Finite Cell Method (FCM) is used to predict the ductile damage and crack evolution in ductile materials under small strains and nonlinear isotropic hardening conditions. In the first step, a fully coupled elastic-plastic-damage model based on modified Lemaitre ductile damage model was developed and implemented into FCM implicit codes. Also, the effect of micro-crack closure, which may dramatically decrease the rate of damage growth under compression, was incorporated and its computational implementation discussed. The FCM is the result of combining the p-version finite element and fictitious domain methods, and has been shown to be effective in solving problems with complicated geometries for which the meshing procedure can be quite expensive. It, therefore, combines fast and simple mesh generation with a high convergence rate inherited from p-FEM. The performance of the FCM and damage model was verified by means of numerical examples and the results were compared with experimental observation. The results showed that modified Lemaitre damage model can be used as a quick and accurate tool to predict ductile damage and fracture in metal forming processes.

1- مقدمه

مکانیک آسیب[1] از زمینه‌های جدید مهندسی است که به بررسی رفتار و پاسخ مواد تضعیف شده می‌پردازد. مکانیک آسیب پیوسته، تلاش می‌کند تا بین مکانیک پیوسته کلاسیک و مکانیک شکست[2] ارتباط برقرار کند. مکانیک شکست، از ابتدا وجود یک ترک ماکروسکوپی در ماده را فرض می‌کند و سپس به بررسی رشد آن می‌پردازد، ولی مکانیک آسیب از مراحل ابتدایی‌تر که همان پیدایش و وقوع عیوب در ماده است تا گسترش ترک ماکروسکوپی یعنی حوزه مکانیک شکست، به بررسی مسأله می‌پردازد.

آسیب در ماده پروسه‌ای میکروسکوپیک است که باعث تغییر در ساختار ماده شده و زوال خواص ماده از جمله کرنش نرمی و یا کاهش مدول الاستیسیته را به همراه دارد. هنگام فرآیند آسیب بافت ماده با تغییراتی همراه است که می‌توان به جوانه زنی، رشد و به هم پیوستن حفره‌های میکروسکوپیک و ترک‌های ریز تحت بارگذاری‌های مختلف اشاره نمود. شکل 1 مراحل گسترش آسیب ماده در یک نمونه را نشان می‌دهد[1].

1- Damage Mechanics
2- Fracture Mechanics

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

A. H. Hadadgar Esfahani, M. Mashayekhi, J. Parvizian, Using the finite cell method to predict ductile damage with crack closure effect, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 13, pp. 107-118, 2015 (In Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.13.15.8]

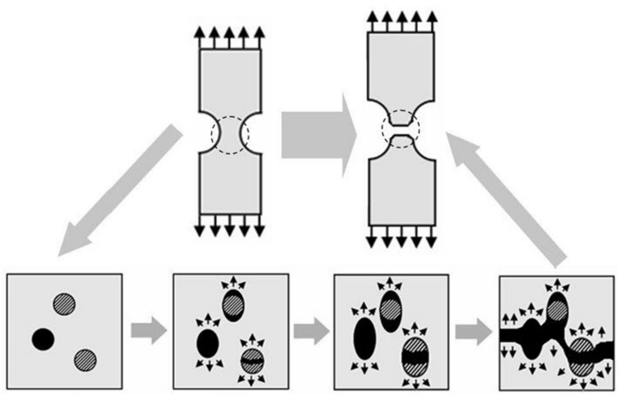
کاچانوف در سال 1958 اساس روش مکانیک آسیب را پایه‌گذاری نمود[2]. وی کاهش سفتی و زوال ماده را به ترک‌های ریز درون آن نسبت داد که می‌توان آنرا توسط یک پارامتر آسیب ماکروسکوپی اندازه‌گیری کرد. این مدل در مسایل خزش به کار گرفته شد. لمتر [3] مبنای مکانیک آسیب پیوسته را در دهه 1990 تدوین نمود و از آن زمان تاکنون، پیشرفت‌های زیادی در زمینه مکانیک آسیب به وجود آمده است.

یکی از ابزارهای عددی مناسب و جدیدی که برای شبیه‌سازی مکانیک آسیب می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد، روش سلول‌های محدود[1] است. این روش عددی شبکه‌بندی مساله را به طور قابل توجهی ساده می‌سازد و نیاز به المان‌ها و شبکه‌بندی‌های پیچیده را حذف می‌کند. ایده اصلی روش سلول محدود، ساده‌سازی شبکه‌بندی حوزه تقریب با به کارگیری روش دامنه مجازی[2] است و با استفاده از تکنیک‌هایی مثل اصلاح روش انتگرال‌گیری و اجزای محدود مرتبه بالا[3]، جواب‌ها به دقت مورد نظر می‌رسند. در سال 2007 پرویزیان و همکاران مبنای اصلی روش سلول‌های محدود را معرفی کردند و برای تحلیل مسایل مختلف از جمله صفحات سوراخ‌دار، محیط‌های متخلخل و نقاط منفرد در حالت الاستیک خطی دو بعدی به کار گرفتند[4].

در ادامه دوستر و همکاران در سال 2008 از روش سلول‌های محدود برای حل مسایل پیچیده سه‌بعدی سود بردند[5]. اخیراً کاربرد روش سلول محدود در بهینه‌سازی توپولوژی، مسایل غیرخطی هندسی، شکل‌های پیچیده و تغییرشکل‌های بزرگ مورد استفاده قرار گرفته است[6-10]. در سال 2012 مسایل الاستوپلاستیک به روش سلول محدود توسط عابدیان و همکاران مورد تحلیل قرار گرفت[11،12] و هم اکنون کاربرد روش سلول محدود در زمینه مکانیک آسیب مورد توجه قرار گرفته است[13].

2- مدل آسیب اصلاح شده لمتر

مبانی مکانیک آسیب پیوسته برای آسیب نرم اولین بار توسط لمتر ارایه شد[3]. در این مدل، آسیب یک متغیر ترمودینامیکی است که تضعیف ماده را بیان می‌کند و بیان‌گر کاهش تحمل بار در یک فرآیند برگشت‌ناپذیر است. این زوال در حالت الاستیک، کاهش مدول الاستیسیته و یا به عبارت دیگر باعث نرمی ماده می‌شود و در حالت پلاستیک، کاهش تنش تسلیم را به دنبال دارد. در اثر تغییر شکل پلاستیک، حفره‌ها و ترک‌های ریز رشد کرده و به یکدیگر می‌پیوندند تا آسیب نرم اتفاق افتد. در مدل اصلاح شده لمتر رفتار ماده در



شکل 1 میکرومکانیزم گسترش آسیب در ماده شامل جوانه زنی، هسته‌ای شدن حفره‌ها، رشد و به هم پیوستن آنها[1]

1- Finite Cell Method
2- Fictitious domain method
3- High order Finite Element Method

کشش و فشار متفاوت در نظر گرفته می‌شود و در تحلیل مسایل الاستیک- پلاستیک- آسیب، اثر بسته‌شدن ترک‌ها لحاظ می‌گردد[3].

در مدل استاندارد لمتر تنش موثر به صورت زیر معرفی شده است:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D} \tag{1}$$

آزمایش‌های تجربی نشان می‌دهد که ریزترک‌ها و ریزحفره‌ها که در بارگذاری‌های کششی باز می‌شوند، در اثر نیروهای فشاری بازشدگی آنها با تاخیر مواجه می‌شود و در مواردی بسته خواهند شد. برای این منظور برای تنش‌های فشاری در حالت تنش تک محوره رابطه تنش بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-hD} \tag{2}$$

پارامتر h اثر بسته شدن ریزترک‌ها را نشان می‌دهد که مقدار آن توسط آزمایش‌های متعددی بر روی فلزات، بین 0/05 تا 0/5 ارزیابی شده است[3]. شکل 2 نمودار تنش کرنش در حالت الاستیک یک بعدی را نشان می‌دهد، با توجه به نمودار اثر بسته شدن ترک‌ها در بارگذاری‌های فشاری مشخص است.

اکنون مساله اصلی، تشخیص کششی یا فشاری بودن تنش در حالت سه‌بعدی در هر نقطه است که این امر به کمک تفکیک مولفه‌های اصلی تانسور تنش به مقادیر مثبت و منفی صورت می‌گیرد. اگر در فضای تنش‌های اصلی، تانسور تنش به صورت زیر نشان داده شود:

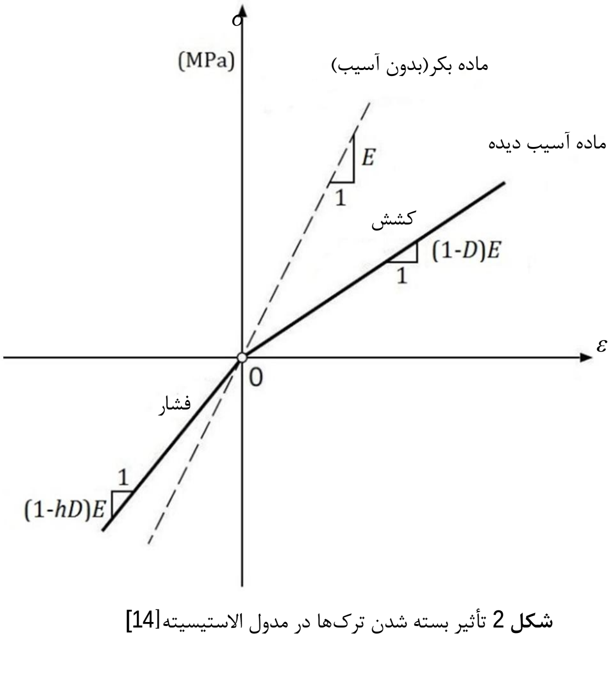
$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

با تعریف تابع براکت علامت می‌توان مولفه‌های مثبت و منفی تنش‌های اصلی را تفکیک کرد و تانسور تنش را به صورت معادله 5 نوشت.

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$\sigma = \sigma^+ + \sigma^- = \begin{bmatrix} \langle\sigma_1\rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle\sigma_2\rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle\sigma_3\rangle \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\langle-\sigma_1\rangle & 0 & 0 \\ 0 & -\langle-\sigma_2\rangle & 0 \\ 0 & 0 & -\langle-\sigma_3\rangle \end{bmatrix} \tag{5}$$

σ^+ تانسور مولفه‌های کششی تنش و σ^- تانسور مولفه‌های فشاری تنش خواهند بود.



شکل 2 تأثیر بسته شدن ترک‌ها در مدول الاستیسیته[14]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.13.15.8]

قانون دوم ترمودینامیک برای مسایل الاستیک-پلاستیک-آسیب یعنی نامعادله کلازیوس- دوهم به صورت رابطه 6 قابل بیان است:

$$\sigma : \dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} - R\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eq}} - Y\dot{D} \geq 0 \tag{6}$$

در اینجا $\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ تانسور نرخ کرنش پلاستیک، $\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eq}}$ نرخ کرنش پلاستیک معادل $\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eq}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\|\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\|$، R کارسختی همسانگرد و Y نرخ رهایی انرژی آسیب اصلاح شده و یا متغیر وابسته به آسیب است.

$$-Y_{n+1} = \frac{1}{2E(1-D)^2}\left[(1+\nu)\sigma^{+}:\sigma^{+} - \nu\langle tr\sigma\rangle^2\right] + \frac{h}{2E(1-hD)^2}\left[(1+\nu)\sigma^{-}:\sigma^{-} - \nu\langle -tr\sigma\rangle^2\right] \tag{7}$$

σ_{eq} تنش معادل $\sigma_{\mathrm{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\|s\|$، s تانسور تنش انحرافی، E مدول یانگ و ν ضریب پواسون است. عبارت $-Y\dot{D}$ بیانگر اتلاف انرژی به واسطه فرآیند زوال داخلی ماده است. معادلات رشد متغیرهای داخلی از تابع پتانسیل اتلاف Ψ به‌دست می‌آیند. Ψ یک تابع محدب اسکالر از متغیرهای داخلی است که قابل تفکیک به دو مولفه پلاستیک و آسیب است. Ψ برای فرآیندهای با کارسختی و آسیب همسان قابل بیان به شکل زیر است:

$$\Psi = \Psi^{\mathrm{p}} + \Psi^{\mathrm{d}} = f + \frac{r}{(1-D)(s+1)}\left(\frac{-Y}{r}\right)^{s+1} \tag{8}$$

r و s پارامترهای آسیب ماده هستند که به روش تغییرات مدول الاستیسیته یا تغییرات ریزسختی[1] و از طریق آزمون کشش محاسبه می‌شوند. f نیز بیان‌گر سطح تسلیم است.

$$f = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\|s\|}{(1-D)} - \sigma_{\mathrm{y}}(R) \tag{9}$$

بر مبنای تئوری قانون جریان پلاستیک، جریان پلاستیک در جهت عمود بر سطح تسلیم بوده، از این رو معادله جریان پلاستیک عبارت است از:

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \dot{\gamma}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{s}{\|s\|} = \dot{\gamma}\frac{3}{2}\frac{s}{\sigma_{\mathrm{eq}}} \tag{10}$$

معادلات رشد متغیرهای داخلی عبارتند از:

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eq}} = -\dot{\gamma}\frac{\partial\Psi}{\partial R} = \dot{\gamma} \tag{11-الف}$$

$$\dot{D} = -\dot{\gamma}\frac{\partial\Psi}{\partial Y} = \dot{\gamma}\frac{1}{(1-D)}\left(\frac{-Y}{r}\right)^{s} \tag{11-ب}$$

γ ضریب پلاستیک است که باید شرایط سازگاری در بارگذاری و باربرداری را ارضا نماید:

$$\dot{\gamma} \geq 0\,, f \leq 0\,, \dot{\gamma}f = 0 \tag{12}$$

از آنجا که معادلات رشد متغیرهای داخلی دارای رفتار غیرخطی شدیدی هستند، باید از یک الگوریتم انتگرال‌گیری کارآ در این زمینه استفاده کرد.

2-1- الگوریتم انتگرال گیری عددی

در این بخش برای مدل آسیب نرم اصلاح شده لمتر، از معادلات ساختاری الاستیک-پلاستیک- آسیب انتگرال‌گیری می‌شود. در این رویکرد الگوریتمی بیان می‌شود که رفتار ماده در حالت کشش و فشار را یکسان در نظر نمی‌گیرد.

در این الگوریتم، در بازه زمانی $[t_{\mathrm{n}}, t_{\mathrm{n+1}}]$ با معلوم بودن مقادیر $D_{\mathrm{n}}, R_{\mathrm{n}}, \varepsilon_{\mathrm{n}}, \sigma_{\mathrm{n}}$ در زمان t_{n} و با اعمال نمو کرنش $\Delta\varepsilon$ مقادیر $D_{\mathrm{n+1}}, R_{\mathrm{n+1}}, \varepsilon_{\mathrm{n+1}}, \sigma_{\mathrm{n+1}}$ در زمان $t_{\mathrm{n+1}}$ محاسبه می‌شود. اساس انتگرال‌گیری از معادلات ساختاری الاستیک پلاستیک آسیب به صورت ضمنی[2] و بر مبنای الگوریتم نگاشت برگشتی است.

قدم اول در این الگوریتم پیش‌بینی گام به صورت الاستیک است. در این صورت متغیرهای داخلی وابسته به گام پلاستیک همان متغیرهای زمان t_n خواهند بود.

$$\varepsilon^{\mathrm{e,trial}}_{\mathrm{n+1}} = \varepsilon^{\mathrm{e}}_{\mathrm{n}} + \Delta\varepsilon \quad , \quad \varepsilon^{\mathrm{p,trial}}_{\mathrm{eq,n+1}} = \varepsilon^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eq,n}} \tag{13}$$

از این رو تانسور تنش کوشی آزمایشی برابرست با:

$$\sigma^{\mathrm{trial}} = \sigma_{\mathrm{n}} + C^{\mathrm{e}}:\Delta\varepsilon \tag{14}$$

که C^{e} ماتریس سختی در حالت الاستیک است. با تقسیم تنش به مولفه‌های هیدروستاتیکی و انحرافی خواهیم داشت:

$$s^{\mathrm{trial}} = s_{\mathrm{n}} + 2G\Delta e \quad , \quad p^{\mathrm{trial}} = p_{\mathrm{n}} + K\Delta\vartheta \tag{15}$$

در این روابط، p تنش هیدرواستاتیکی، G مدول برشی، K مدول حجمی، e تانسور کرنش انحرافی و ϑ کرنش حجمی است.

قدم دوم بررسی امکان وقوع حالت پلاستیک است. با دانستن مقادیر متغیرها می‌توان تابع تسلیم را محاسبه کرد:

$$f^{\mathrm{trial}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\|s^{\mathrm{trial}}\|}{(1-D_{\mathrm{n}})} - (\sigma_{\mathrm{y0}} + R_{\mathrm{n}}) \tag{16}$$

در صورتی که $f^{\mathrm{trial}} < 0$ باشد جریان پلاستیک واقع نشده و آسیب رشد نکرده است و می‌توان نوشت:

$$\sigma_{n+1} = \sigma^{\mathrm{trial}}, \quad \varepsilon^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eq,n+1}} = \varepsilon^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eq,n}}, \quad D_{\mathrm{n+1}} = D_{\mathrm{n}} \tag{17}$$

در صورتی که $f^{\mathrm{trial}} \geq 0$ باید اصلاح پلاستیک صورت گیرد. در این-صورت باید از معادلات 10 و 11 به روش اویلر پسرو انتگرال‌گیری شود.

$$\varepsilon^{\mathrm{p}}_{\mathrm{n+1}} = \varepsilon^{\mathrm{p}}_{\mathrm{n}} + \Delta\gamma\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{s^{\mathrm{trial}}}{\|s^{\mathrm{trial}}\|} \tag{18}$$

$$\varepsilon^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eq,n+1}} = \varepsilon^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eq,n}} + \Delta\gamma \tag{19}$$

$$D_{\mathrm{n+1}} = D_n + \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{\mathrm{n+1}})}\left(\frac{-Y_{\mathrm{n+1}}}{r}\right)^{s} \tag{20}$$

معادلات فوق به همراه تنش حاصل، باید شرط سازگاری در انتهای گام پلاستیک را ارضا کنند:

$$f_{\mathrm{n+1}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\|s_{\mathrm{n+1}}\|}{(1-D_{\mathrm{n+1}})} - \left(\sigma_{\mathrm{y0}} + R_{\mathrm{n+1}}\right) = 0 \tag{21}$$

مطابق الگوریتم اصلاح پلاستیک می‌توان معادله 21 را به صورت زیر نوشت:

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\|s^{\mathrm{trial}}\| - 3G\Delta\gamma - (1-D_{\mathrm{n+1}})\left[\sigma_{\mathrm{y0}} + R_{\mathrm{n+1}}\right] = 0 \tag{22}$$

و یا:

$$D = D_{\mathrm{n+1}} = D(\Delta\gamma) = 1 - \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\|s^{\mathrm{trial}}\| - 3G\Delta\gamma}{\sigma_{\mathrm{y0}} + R_{\mathrm{n+1}}} \tag{23}$$

که D_{n+1} به صورت ضمنی تابع $\Delta\gamma$ خواهد شد. با قرار دادن معادله 23 در معادله 20 یک معادله غیرخطی برحسب پارامتر پلاستیک یعنی معادله 24 به‌دست می‌آید.

$$D - D_{\mathrm{n}} - \frac{\Delta\gamma}{(1-D)}\left(\frac{-Y_{n+1}}{r}\right)^{s} = 0 \tag{24}$$

بنابراین طبق معادله رشد آسیب، باید در ناحیه پلاستیک رابطه زیر برقرار باشد:

1- Micro hardness

2- Implicit

$$F(\Delta\gamma)=\begin{cases} D=0\,, & \varepsilon^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eq}}<\varepsilon^{\mathrm{p}}_{\mathrm{D}} \\ D-D_{\mathrm{n}}-\dfrac{\Delta\gamma}{(1-D)}\left(\dfrac{-Y}{r}\right)^{s}=0\,, & \varepsilon^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eq}}\geq\varepsilon^{\mathrm{p}}_{\mathrm{D}} \end{cases} \quad (25)$$

در این رابطه $\varepsilon^{\mathrm{p}}_{\mathrm{D}}$ کرنش پلاستیک آستانه شروع رشد آسیب است، در معادله 25 روابط سطح تسلیم و رشد آسیب باهم ترکیب شده‌اند.

در نهایت با محاسبه $\Delta\gamma$ از معادله 25 با استفاده از روش‌های تکرار نظیر نیوتون- رافسون و بهره‌گیری از روش‌های عددی مناسب [15-18] می‌توان مقادیر بهنگام شده تنش‌ها، کرنش‌ها، آسیب و مدول مماسی در حالت الاستیک- پلاستیک- آسیب را طبق مجموعه روابط 26 محاسبه نمود:

$$s_{\mathrm{n}+1}=(1-\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{2G\Delta\gamma}{\|s^{\mathrm{trial}}\|})s^{\mathrm{trial}} \quad \text{(26-الف)}$$

$$p_{\mathrm{n}+1}=p^{\mathrm{trial}},\ \ \sigma_{n+1}=s_{\mathrm{n}+1}+p_{\mathrm{n}+1}I \quad \text{(26-ب)}$$

$$\varepsilon^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eq,n}+1}=\varepsilon^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eq,n}}+\Delta\gamma\,,\varepsilon^{\mathrm{e}}_{\mathrm{n}+1}=\frac{1}{2G}s_{\mathrm{n}+1}+\frac{1}{3K}p_{\mathrm{n}+1}I \quad \text{(26-پ)}$$

$$D_{n+1}=D(\Delta\gamma) \quad \text{(26-ت)}$$

$$C^{\mathrm{epd}}=\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon} \quad \text{(26-ث)}$$

3- روش سلول محدود

بیشتر معادلات دیفرانسیل که در حوزه مهندسی استفاده می‌شوند به کمک روش‌های عددی مانند روش تفاضلات متناهی، روش اجزای محدود، روش حجم‌های متناهی، روش المان مرزی حل می‌شوند. در دهه‌های اخیر روش اجزای محدود به سرعت گسترش یافت و امروزه معروف‌ترین و متداول‌ترین روش عددی است که در حل مسایل عددی مهندسی مکانیک به‌کار می‌رود. در این روش با تفکیک ناحیه حل[1] به قسمت‌های کوچک و تقریب حل مورد نظر در هر یک از این اجزا، معادلات حل می‌گردد، ولی با این وجود هنوز از مشکلاتی در تحلیل مسایلی مانند محیط‌های متخلخل یا هندسه‌های پیچیده رنج می‌برد. عمده این مشکلات و محدودیت‌ها عبارتند از:

محدودیت برای حل مسایل ناپیوستگی: مسایلی مانند ترک و حفره که دارای ناپیوستگی قوی[2] و مسایلی مانند مواد کامپوزیتی که دارای ناپیوستگی ضعیف[3] هستند و در آنها پرش و ناپیوستگی بر روی متغیرهایی مثل کرنش و جابه‌جایی وجود دارد.

هزینه بالای شبکه بندی مساله: شبکه بندی مسایل پیچیده و دست‌یابی به المان‌های مطلوب، زمان زیادی از حل مساله را به خود اختصاص می‌دهد و گاهی نیاز به تلاش چندین‌باره دارد. مثلاً مسایل حوزه بیومکانیک مثل شبکه‌بندی استخوان بسیار دشوار است.

شبکه‌بندی مجدد[4] هنگام حل مساله: مورد دیگری که مستلزم صرف زمان زیاد است، حل مسایل دارای تغییر شکل‌های بزرگ[5] است که شکل المان از حالت استاندارد اولیه خارج می‌شود و برای افزایش دقت حل لازم است شبکه بندی مجدد انجام گیرد. به عنوان مثال در مسایل دارای ترک، با گسترش ترک هنگام حل، باید شبکه بندی مجدد انجام گیرد.

برای برطرف‌کردن مشکلات فوق، محققین روش‌های جدیدی را مثل روش‌های بدون شبکه[6] پایه‌ریزی کردند. در این روش‌ها وابستگی مساله به المان و شبکه‌بندی‌های پرهزینه و پیچیده حذف شد ولی در این میان مشکلات اساسی مثل زمان حل بالا و عدم ارضای شرایط مرزی به وجود آمد.

امروزه با وجود روش‌های جدید اجزای محدود گسترش یافته[7] و اجزای محدود تعمیم یافته[8]، در مدل‌سازی مسایلی نظیر گسترش ترک، از روش بدون شبکه کمتر استفاده می‌شود. این روش‌ها با داشتن مزیت روش اجزای محدود، با غنی‌سازی‌های محلی و کلی، قادر به حل مسایل ناپیوستگی هستند[19-21].

اخیراً در تحقیقی که در دانشگاه صنعتی مونیخ[9] در سال 2007 انجام شد، روش سلول محدود برای حل مسایل دوبعدی و سه‌بعدی ارایه گردید. استفاده از روش سلول محدود برای مسایل زیر شاخص خواهد بود: مسایلی که هندسه جسم با گذر زمان تغییر می‌کند، مسایلی با محیط متخلخل که دارای ناپیوستگی هستند و مسایل دارای هندسه پیچیده مانند بافت‌های استخوانی یا بدنه اتومبیل.

روش سلول‌های محدود یک روش عددی دامنه مجازی بر مبنای روش اجزای محدود مرتبه بالاست. بنابراین قابلیت شبکه بندی ساده روش دامنه مجازی و نرخ همگرایی بالای اجزا محدود مرتبه بالا را به صورت همزمان دارا است. روش دامنه مجازی توسط ساولو برای مسایل مقدار مرزی ارایه شد[22،23]. روش اجزای محدود مرتبه بالا نیز برای افزایش نرخ همگرایی روش اجزای محدود معرفی گردید[24]. در روش سلول محدود یک شبکه- بندی ثابت بر روی دامنه ایجاد می‌گردد و میدان حل با استفاده از روش اجزای محدود مرتبه بالا درون یابی می‌شود.

فرم ضعیف معادله تعادل در یک مساله الاستیک خطی عبارت است از:

$$B(u,v)=F(v) \quad (27)$$

که در آن ترم دوخطی[10] عبارتست از:

$$B(u,v)=\int_{\Omega}[Lu]^{\mathrm{T}}C[Lv]d\Omega \quad (28)$$

که در آن u جابه‌جایی، v تابع آزمایش، L عملگر کرنش و C ماتریس سختی الاستیک است. با فرض Γ_{N} به عنوان مرز نویمن با بارگذاری معین، تابعک خطی[11] برابر است با:

$$F(v)=\int_{\Omega}v^{\mathrm{T}}fd\Omega+\int_{\Gamma_{\mathrm{N}}}v^{\mathrm{T}}\bar{t}d\Gamma \quad (29)$$

که در آن f بردار نیروهای حجمی و $\bar{t}$ بارگذاری تعریف شده بر روی مرز نویمن[12] و $\Gamma_{\mathrm{N}}\subset\Gamma$ است. شرط مرزی دیریشله[13] بر روی مرز $\Gamma_{\mathrm{D}}\subset\Gamma$ اعمال می‌شود ($\partial\Omega=\Gamma_{\mathrm{N}}\cup\Gamma_{\mathrm{D}}\,,\ \Gamma_{\mathrm{N}}\cap\Gamma_{\mathrm{D}}=\emptyset$).

$$u=\bar{u} \qquad \Gamma_{\mathrm{D}} \quad (30)$$

برای حل معادله 27، با استفاده از روش مرتبه بالای سلول محدود گالرکین، دامنه Ω به دامنه Ω_{e} تعمیم داده می‌شود.

شکل 3 دامنه Ω_{e} را نشان می‌دهد که دامنه فیزیکی Ω را در بر می‌گیرد. جابجایی در مرز این دو محیط با یکدیگر برابر است که نشان دهنده پیوستگی محیط Ω_{e} است. بازه جدید تنها این مزیت را دارد که می‌توان آن را با سلول- های مربعی منظم، گسسته‌سازی نمود. مرز بین ناحیه Ω و $\Omega_{\mathrm{e}}\backslash\Omega$ به صورت $\Gamma_{\mathrm{I}}=\partial\Omega\backslash(\partial\Omega\cap\partial\Omega_{\mathrm{e}})$ تعریف می‌گردد.

متغیر تغییر مکان u به صورت زیر تعریف می‌شود:

1- Computational domain
2- Strong discontinuity
3- Weak discontinuity
4- Remeshing
5- Large deformations
6- Mesh free methods

7- Extended finite element method
8- Generalized finite element method
9- Technischen Universität München (TUM)
10- Bilinear functional
11- Linear functional
12- Neumann boundry condition
13- Dirichlet

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.13.15.8]

$$u = \begin{cases} u^1 & \Omega \\ u^2 & \Omega_\mathrm{e}\backslash\Omega \end{cases} \qquad (31)$$

و در ناحیه بین Ω و $\Omega_\mathrm{e}\backslash\Omega$ یعنی Γ_I می‌توان نوشت:

$$u^1 = u^2 \qquad \Gamma_\mathrm{I} \qquad \text{(32-الف)}$$

$$t^1 = t^2 \qquad \Gamma_\mathrm{I} \qquad \text{(32-ب)}$$

و شرایط مرزی در $\partial\Omega_\mathrm{e}$ به صورت زیر است:

$$\bar{t} = 0 \qquad \Gamma_\mathrm{e,N} \qquad \text{(33-الف)}$$

$$\bar{u} = 0 \qquad \Gamma_\mathrm{e,D} \qquad \text{(33-ب)}$$

که در این رابطه $\Gamma_\mathrm{e,N}$ و $\Gamma_\mathrm{e,D}$ مرزهای نیومن و دیریشله برای $\partial\Omega_\mathrm{e}$ هستند ($\partial\Omega_\mathrm{e} = \Gamma_\mathrm{e,N}\cup\Gamma_\mathrm{e,D}$, $\Gamma_\mathrm{e,N}\cap\Gamma_\mathrm{e,D} = \emptyset$).

اکنون معادلات 27 تا 29 در دامنه Ω_e برای استفاده از روش سلول محدود بازنویسی می‌شود:

$$B_\mathrm{e}(u,v) = F_\mathrm{e}(v) \qquad (34)$$

$$B_\mathrm{e}(u,v) = \int_{\Omega} [Lu]^\mathrm{T} C[Lv]d\Omega + \int_{\Omega_\mathrm{e}\backslash\Omega} [Lu]^\mathrm{T} 0[Lv]d\Omega = \int_{\Omega_\mathrm{e}} [Lu]^\mathrm{T} C_\mathrm{e}[Lv]d\Omega \qquad (35)$$

$$C_\mathrm{e} = \alpha C, \alpha = \begin{cases} 1, & \Omega \\ 0, & \Omega_\mathrm{e}\backslash\Omega \end{cases} \qquad (36)$$

$$F_\mathrm{e}(v) = \int_{\Omega_\mathrm{e}} v^\mathrm{T} f d\Omega + \int_{\Gamma_\mathrm{N}} v^\mathrm{T}\bar{t}d\Gamma + \int_{\Gamma_\mathrm{e,N}} v^\mathrm{T}\bar{t}d\Gamma \qquad (37)$$

که ترم آخر معادله 37 با توجه به معادله 33 صفر است.

در معادله 36، پارامتر α برابر صفر، نشان‌دهنده یک ماده با سختی بسیار کم است که برای جلوگیری از تکین‌شدن ماتریس سختی به جای صفر، مقدار آن یک عدد بسیار کوچک متناسب با نوع مساله در نظر گرفته می‌شود.

دامنه تعمیم یافته جدید را می‌توان با سلول‌های مربعی ساده به صورتی که در شکل 4 نشان داده شده است، گسسته سازی نمود. اتحاد تمامی سلول‌ها، دامنه تعمیم یافته را نشان می‌دهد:

$$\Omega_\mathrm{e} = \bigcup_{\mathrm{c}=1}^{\mathrm{m}} \Omega_\mathrm{c} \qquad (38)$$

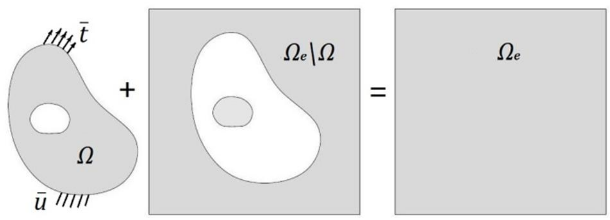
که در آن Ω_c دامنه‌ای است که به‌وسیله یک سلول معرفی شده است. دامنه تعمیم یافته توسط m سلول تقسیم بندی می‌شود.

بنابراین در این حالت سه نوع سلول وجود دارد:

سلول‌هایی که کاملاً خارج از ناحیه Ω قرار دارند، نادیده گرفته شده و α برای آنها صفر تعریف می‌شود.

سلول‌هایی که کاملاً داخل ناحیه Ω قرار دارند، α برای آنها یک تعریف شده و بنابراین برای تعیین ماتریس سختی محلی و بردار بار محلی مشکلی وجود ندارد زیرا برای انتگرال گیری، توابع زیر انتگرال پیوسته است.

سلول‌هایی که به‌وسیله مرز ناحیه Ω قطع می‌شوند به دلیل این‌که برای آنها توابع زیر انتگرال ناپیوسته می‌شوند، دقت و روش انتگرال‌گیری اهمیت دارد که در قسمت بعد به آن پرداخته می‌شود.



شکل 3 توسعه دامنه فیزیکی در یک دامنه مجازی ساده

رابطه 35 برای دامنه گسسته شده به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$B(u,v) = \sum_{\mathrm{c}=1}^{\mathrm{m}} \int_{\Omega_\mathrm{e}} [Lu]^\mathrm{T} \alpha C[Lv]d\Omega \qquad (39)$$

برای تقریب جابه‌جایی بر حسب جابه‌جایی گره‌ها نیز از توابع شکل سلسله مراتبی[1] استفاده می‌شود.

$$u = NU \;, \qquad v = NV \qquad (40)$$

که در آن N ماتریس توابع شکل و U بردار جابجایی گره‌ها است. با استفاده از فرمولاسیون روش گالرکین و قراردادن معادله 40 در معادلات 35 و 37، فرمولاسیون اصلی روش سلول محدود به دست می‌آید:

$$KU = F \qquad (41)$$

F بردار نیرو و K ماتریس سختی کل است، ماتریس سختی کل حاصل برهم گذاردن ماتریس‌های سختی سلولی می‌باشد که از رابطه زیر به دست می‌آید.

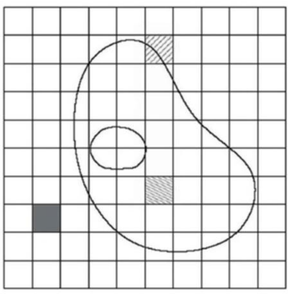
$$K^\mathrm{c} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (LN)^\mathrm{T} \alpha C(LN)|J|\, d\xi d\eta \qquad (42)$$

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x(\xi,\eta)}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x(\xi,\eta)}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \qquad (43)$$

حاصل ضرب LN معمولاً به عنوان ماتریس استاندارد کرنش جابه‌جایی B شناخته می‌شود. با توجه به سادگی شکل سلول‌ها دترمینان ماتریس جاکوبین نگاشت[2] $|J| = detJ$ به سادگی محاسبه می شود که یکی از مزیت‌های این روش جهت افزایش سرعت حل است.

3-1- انتگرال گیری عددی از توابع گسسته

سلول‌هایی که به‌وسیله مرز ناحیه فیزیکی نمونه قطع می‌شوند، باعث ایجاد ناپیوستگی‌هایی در توابع انتگرال‌گیری می‌شوند و بنابراین برای حل این مشکل باید از روش‌های کارآ در این زمینه استفاده کرد. روش انتگرال‌گیری تطبیقی کوادتری[3] و آکتری[4] یکی از روش‌های انتگرال‌گیری پرکاربرد در حل مسایل ناپیوستگی است. از کوادتری در گسسته سازی یک فضای دوبعدی و از آکتری برای تقسیم بندی فضای سه‌بعدی استفاده می‌شود. همان‌طور که در شکل 5 مشاهده می‌شود، در کوادتری هر سلول مادر[5] که بوسیله مرز ناحیه قطع می‌شود به چهار زیرسلول[6] با رتبه انتگرال‌گیری یکسان تقسیم‌بندی می‌گردد، هر سلول فرزند نیز مجدداً به چهار زیرسلول تقسیم شده و این فرآیند تا رسیدن به دقت مورد نظر دایماً تکرار می‌شود.



شکل 4 دامنه تعمیم یافته Ω_e به‌وسیله سلول‌های مربعی ساده تقسیم بندی شده است

1- Hierarchic
2- Mapping
3- Quadtree
4- Octree
5- Paraent cell
6- Sub cell (Child cell)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.13.15.8]

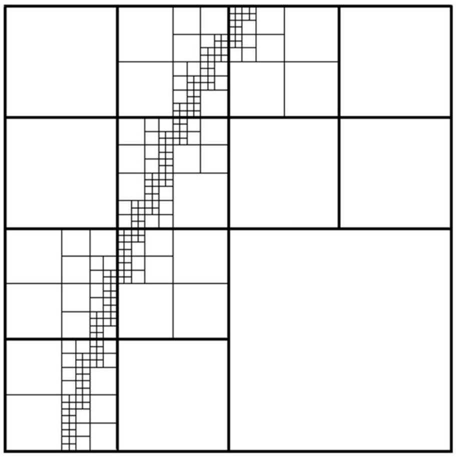
با استفاده از کوادتری، ماتریس سختی یک سلول را مطابق شکل 6 می‌توان با انتگرال‌گیری ترکیبی روی زیرسلول‌ها n_{sc} به دست آورد. در انتگرال‌گیری تمام نقاط گوس زیرسلول‌ها در نظر گرفته می‌شود و هر نقطه گوس با پارامتر α که به مکانش بستگی دارد، مشخص می‌شود یعنی اگر نقطه گوس در ناحیه فیزیکی مساله باشد α برابر یک و در غیر این‌صورت صفر است.

$$K^{c}=\sum_{sc=1}^{n_{sc}}\int\int B_{c}^{T}(\xi(r))\alpha(x(\xi(r)))CB_{c}(\xi(r))detJ_{c}det\tilde{J}_{c}^{sc}drds \tag{44}$$

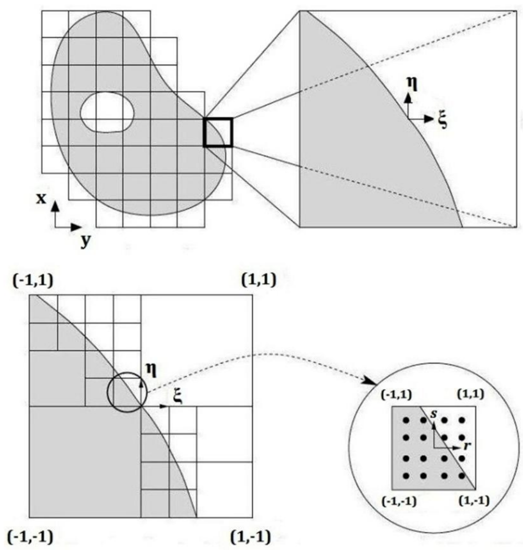
در رابطه 44 لازم است که دترمینان ماتریس ژاکوبین که به خاطر تغییر در متغیرهاست، در محاسبات وارد شود. همچنین بایستی یک نگاشت خطی اعمال شود تا رابطه‌ای بین مختصات زیرسلول‌ها (r,s) و سلول (ξ,η) برقرار شود.

4- حل مسایل عددی

تحلیل مسایل به روش سلول محدود با استفاده از نرم افزار ادهاک[1] در سیستم عامل لینوکس و با به‌کارگیری حل‌گر اسپولز[2] انجام می‌گیرد، هم‌چنین شبکه‌بندی و اصلاح شبکه توسط زیربرنامه‌هایی[3] در نرم افزار ادهاک انجام می‌شود. در این قسمت با استفاده از مدل آسیب نرم لمتر اصلاح شده، که الگوریتم آن به زبان برنامه نویسی C نوشته شده است، به تحلیل چند مساله پرداخته می‌شود.



شکل 5 تقسیم بندی صفحه با کوادتری[11]



شکل 6 انتگرال‌گیری ترکیبی از زیرسلول ها و ارتباط (r,s) و (x,y) [11]

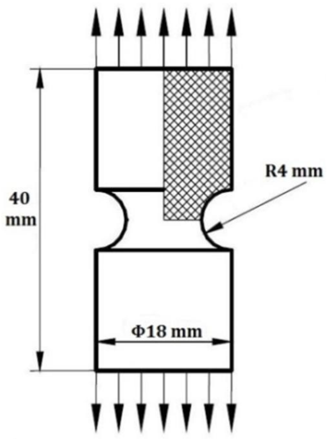
4-1- میله شیاردار

در این بخش آزمون کشش تک محوره یک میله استوانه‌ای با شیار جانبی، برای سنجش مدل آسیب نرم و زیربرنامه تدوین شده، مورد استفاده قرار می‌گیرد. آزمون کشش به صورت گسترده‌ای در هر دو تحلیل تجربی و عددی برای آسیب نرم توسط محققان استفاده شده است[25-29]. در این آزمون، یک نمونه شکاف‌دار مطابق شکل 7 تحت بارگذاری کششی قرار می‌گیرد و مشاهدات تجربی نشان می‌دهد که شکستگی از مرکز نمونه آغاز و در ادامه به صورت شعاعی به سمت ریشه نمونه انتشار پیدا می‌کند.

مطابق شکل 7 به دلیل وجود تقارن محوری میله استوانه‌ای شکاف‌دار، مدل سازی نمونه به صورت دوبعدی متقارن محوری انجام می‌شود. بار اعمالی به‌صورت جابه‌جایی محوری (عمودی) یکنواخت در لبه بالا افزایش می‌یابد. خواص ماده مورد استفاده در تحلیل حاضر (فولاد کم کربن) در جدول 1 آمده است[14].

تجزیه و تحلیل این فرآیند با استفاده از جابه‌جایی محوری تدریجی انجام شده است. شبیه‌سازی تا زمانی که آسیب در یکی از نقاط انتگرال‌گیری گوس به عدد بحرانی یعنی D_{cr} برسد، می‌تواند ادامه پیدا می‌کند. از نظر عددی مقدار بحرانی پارامتر آسیب یک در نظر گرفته می‌شود ولی در بسیاری از کاربردهای عملی D_{cr} عددی بین 0/3 تا 0/8 است[3].

برای تحلیل مساله ابتدا باید حوزه تقریب را به صورت مجازی طبق آنچه گفته شد توسعه داد، مطابق شکل 8 ابتدا یک صفحه مستطیلی را با سلول‌های مربعی به ابعاد 1×1 شبکه‌بندی کرده و سپس معادله ربع دایره معرفی می‌شود تا سلول‌هایی که کاملاً خارج از ناحیه حل قرار دارند، نادیده گرفته شوند و برای سلول‌هایی که مرز ناحیه را قطع می‌کنند لازم است که از روش انتگرال‌گیری مناسب استفاده شود. برای مسایل دو بعدی انتگرال‌گیری تطبیقی کوادتری و اصلاح زیرسلول به وسیله آن مناسب است. شکل 9 سلول بندی نمونه به همراه اصلاح کوادتری برای انتگرال‌گیری تطبیقی کوادتری را نشان می‌دهد.



شکل 7 نمونه تقارن محوری تحت کشش

1- Adhoc
2- Spools
3- do mesh, netzgin, MeshIO

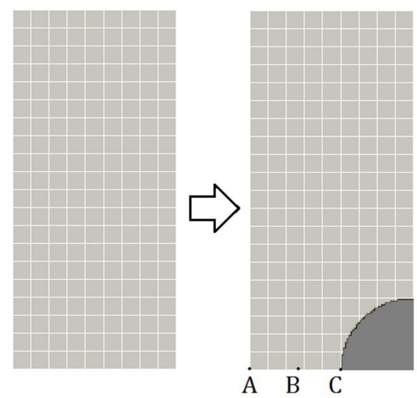
شکل 10 نشان می‌دهد که در هنگام مراحل اولیه از فرآیند بارگذاری حداکثر آسیب در نزدیکی ریشه شکاف است (نقطه C) و به تدریج با افزایش بارگذاری ناحیه آسیب گسترش می‌یابد و منطقه حداکثر آسیب به تدریج به سمت مرکز نمونه حرکت می‌کند (نقطه A) و در آن ناحیه تمرکز می‌یابد. سرانجام در مرحله پایانی با جابه‌جایی حدود 0/55 میلی‌متر آسیب به شدت در مرکز نمونه متمرکز شده و بنابراین، شروع شکست را باید در این منطقه انتظار داشت.

در شکل 11 برای سه نقطه A، B و C نمودار تنش معادل میزز برحسب کرنش پلاستیک معادل رسم شده است. با توجه به شکل می‌توان مشاهده کرد نقطه A که در مرکز نمونه است نسبت به سایر نقاط به شدت دچار زوال شده و قابلیت تحمل بار آن کم شده است و در آستانه گسیختگی و شکست قرار دارد.

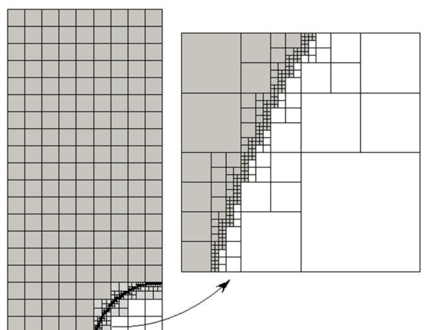
جهت راستی آزمایی روش سلول محدود، میله شیاردار تحت بارگذاری محوری به روش اجزای محدود نیز مورد تحلیل قرار گرفت و نتایج دو روش با یکدیگر مقایسه گردید. مقادیر پارامتر آسیب و مکان بیشترین مقدار آسیب به

جدول 1 پارامترها و خواص ماده مورد استفاده برای نمونه تحت کشش[14]

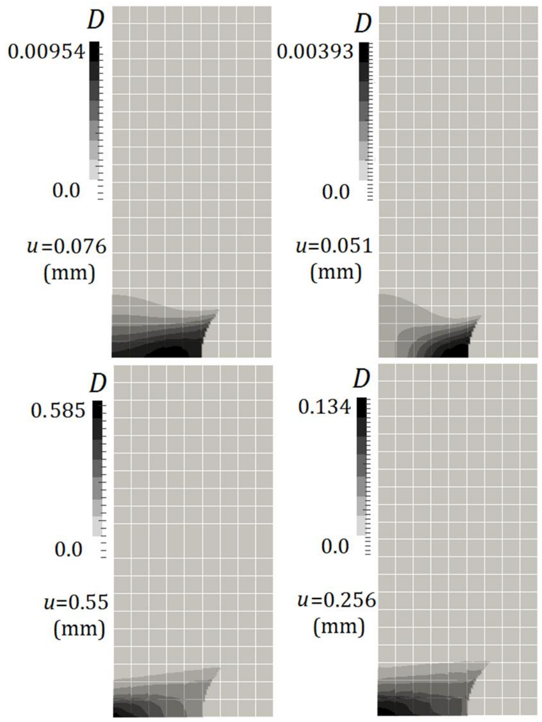
خواص ماده	مقدار
E (MPa)	210000
ν	0/3
σ_{y0} (MPa)	620
σ_y (MPa)	620+3300(1-exp(-0/4 ε_{eq}^{p}))
r (MPa)	3/5
s	1
h	0/05



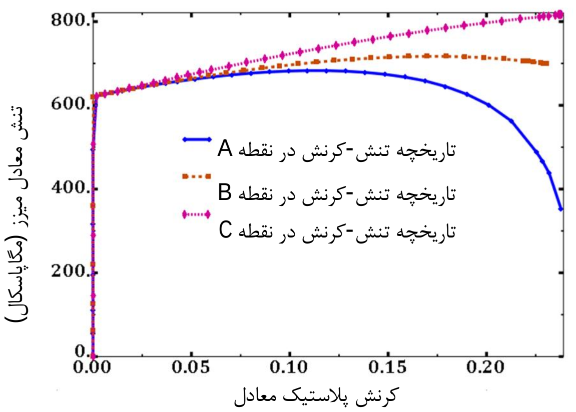
شکل 8 شبکه میله شیاردار به روش سلول محدود



شکل 9 شبکه سلول محدود به همراه اصلاح کوادتری برای انتگرال‌گیری تطبیقی



شکل 10 پارامتر آسیب در تحلیل سلول محدود برای میله شیاردار تحت کشش



شکل 11 تنش معادل میزز برحسب کرنش پلاستیک معادل برای سه نقطه A، B و C

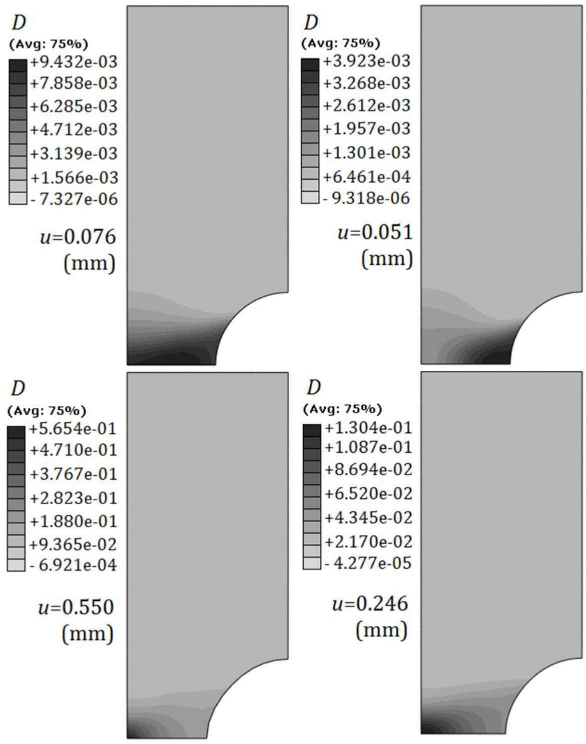
روش اجزای محدود در شکل 12 آمده است. مقایسه شکل‌های 10 و 12 از تطابق نتایج روش سلول محدود و اجزای محدود حکایت می‌کند. جدول 2 مقدار و مکان بیشترین مقدار پارامتر آسیب در دو تحلیل اجزای محدود و سلول محدود را نشان می‌دهد.

نمودار تنش موثر میزز نسبت به جابه‌جایی عمودی انتهای میله برای مرکز نمونه (نقطه A) برای دو روش در شکل 13 آمده است. اختلاف محدود دو منحنی، صحت نتایج روش سلول محدود را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که زمان تحلیل این مساله در مقایسه با روش اجزای محدود، حدود 30 درصد افزایش یافت.

این پیش بینی با نتایج عددی نتو [30] و تجربی هنکاک و مکنزی [31] تطابق دارد و نشان می‌دهد شروع شکست در نمونه از مرکز آغاز شده و با انتشار شعاعی به سمت ریشه ادامه پیدا می‌کند. در شکل 14 نتیجه آزمایش تجربی هنکاک و در شکل 15 نتایج تحلیل عددی نتو آمده است.

می‌توان دلیل رشد سریع آسیب در مرکز نمونه را به رشد سریع تنش سه

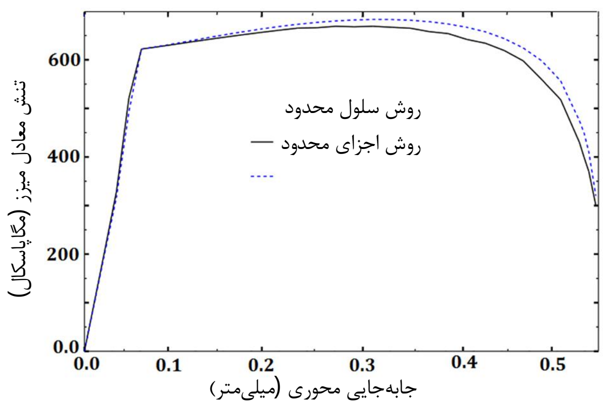
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.13.15.8]



شکل 12 پارامتر آسیب در تحلیل اجزای محدود برای میله شیاردار تحت کشش

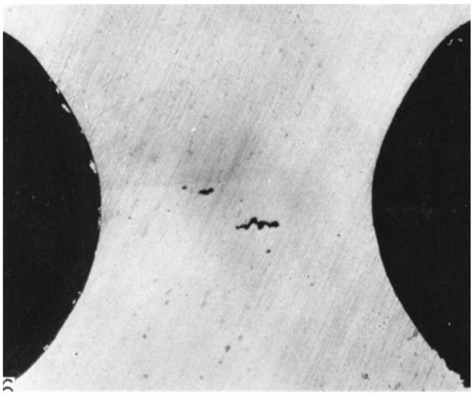
جدول 2 مقایسه نتایج روش سلول محدود و اجزای محدود

u(mm)	D_{max} (سلول محدود)	D_{max} (اجزای محدود)	محل وقوع ماکزیمم آسیب
0/051	0/00393	0/003923	"ریشه شکاف"
0/076	0/00954	0/009432	"ریشه شکاف به سمت مرکز"
0/256	0/134	0/1304	"مرکز نمونه"
0/550	0/585	0/5654	"مرکز نمونه"

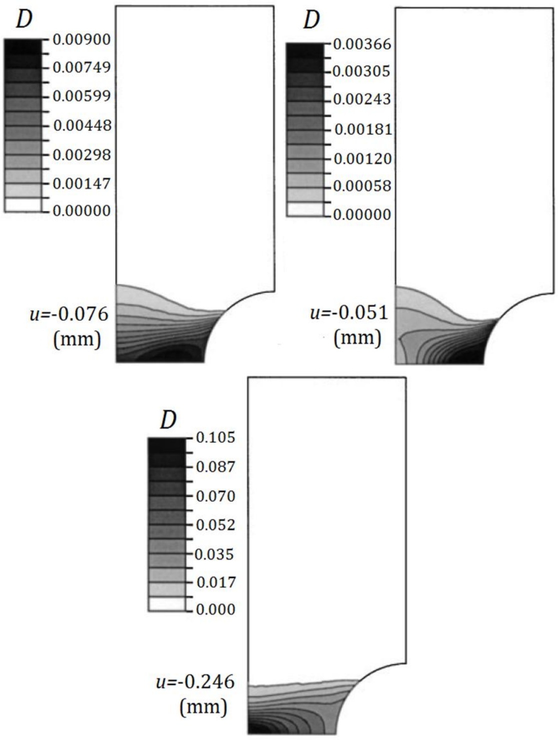


شکل 13 نمودار تنش معادل میزز برحسب جابجایی محوری برای مرکز نمونه به دو روش اجزای محدود و سلول محدود

محوره (نسبت تنش هیدرواستاتیک به تنش معادل= $\frac{p}{\sigma_{eq}}$) نسبت داد که این مقدار در مرکز نمونه بیشتر است. در مدل‌های الاستیک-پلاستیک-آسیب، کرنش پلاستیک معادل و تنش سه محوره نقش مهمی در رشد آسیب دارند.



شکل 14 مشاهدات هنکاک در شروع شکست در مرکز میله شیاردار تحت کشش[31]



شکل 15 نتایج عددی نتو برای میله شیاردار تحت کشش[30]

شکل 16 تاریخچه پارامتر آسیب و کرنش پلاستیک معادل را نسبت به جابه‌جایی انتهای نمونه برای المان مرکز نمونه یعنی A نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که پارامتر آسیب در انتهای بارگذاری به شدت افزایش می‌یابد ولی افزایش کرنش پلاستیک معادل تقریباً به صورت خطی است. لازم به ذکر است که در این مساله به دلیل وجود بارگذاری کششی، اثر بسته شدن ترک ها در بارگذاری فشاری مشهود نیست.

در ادامه، نمونه تحت بارگذاری فشاری قرار می‌گیرد و اثر بسته شدن ترک‌ها در مقایسه با بارگذاری کششی بررسی می‌شود. در صورتی که با همان هندسه و شبکه به میله جابه‌جایی محوری فشاری اعمال شود، نتایجی مطابق شکل 17 حاصل می‌گردد.

در ابتدا با جابه‌جایی یکسان نسبت به حالت کشش، مقادیر پارامتر آسیب به دلیل بسته شدن ترک‌ها بسیار کمتر است. به عنوان مثال در حالت کشش

با جابه‌جایی 0/256 میلی‌متر، ماکزیمم مقدار آسیب 0/134 بود، درصورتی‌که در حالت فشار با جابه‌جایی 0/256- میلی‌متر، ماکزیمم مقدار آسیب 0/00474 است. هم‌چنین در حالت کشش، ناحیه حداکثر آسیب از ریشه شکاف (نقطه C) شروع شده و به سمت مرکز نمونه (نقطه A) حرکت می‌کند و در نهایت با رسیدن به پارامتر بحرانی آسیب، نمونه از مرکز شروع به شکست می‌کند، در صورتی که در حالت فشاری پس از آن که ناحیه حداکثر آسیب از ریشه به سمت مرکز نمونه حرکت کرد، به دلیل اثر بسته شدن ترک‌ها در مرکز نمونه، مجدداً ناحیه ماکزیمم آسیب به سمت ریشه شکاف جابه‌جا می‌گردد و در آن محل متمرکز می‌شود.

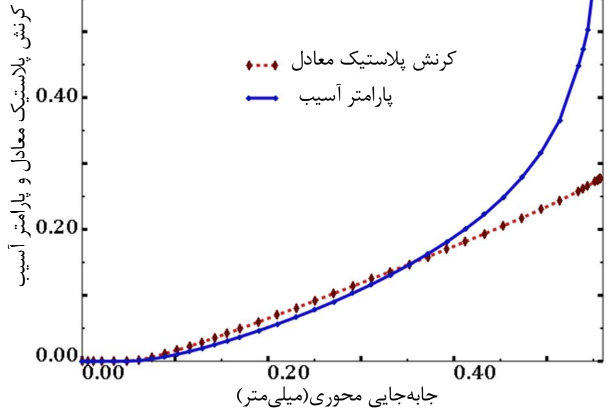
در شکل 18 نمودار پارامتر آسیب نسبت به جابه‌جایی عمودی انتهای میله آمده است، این شکل نشان می‌دهد در جابه‌جایی‌های بسیار کوچک (جابه‌جایی کمتر از 0/07- میلی‌متر) ناحیه ماکزیمم آسیب در نزدیکی شیار میله است (نقطه C) و با افزایش بارگذاری به سمت مرکز حرکت کرده (نقطه A) و مجدداً ماکزیمم آسیب به سمت شیار جهت‌گیری می‌کند.

4-2- نمونه متقارن تحت فشار

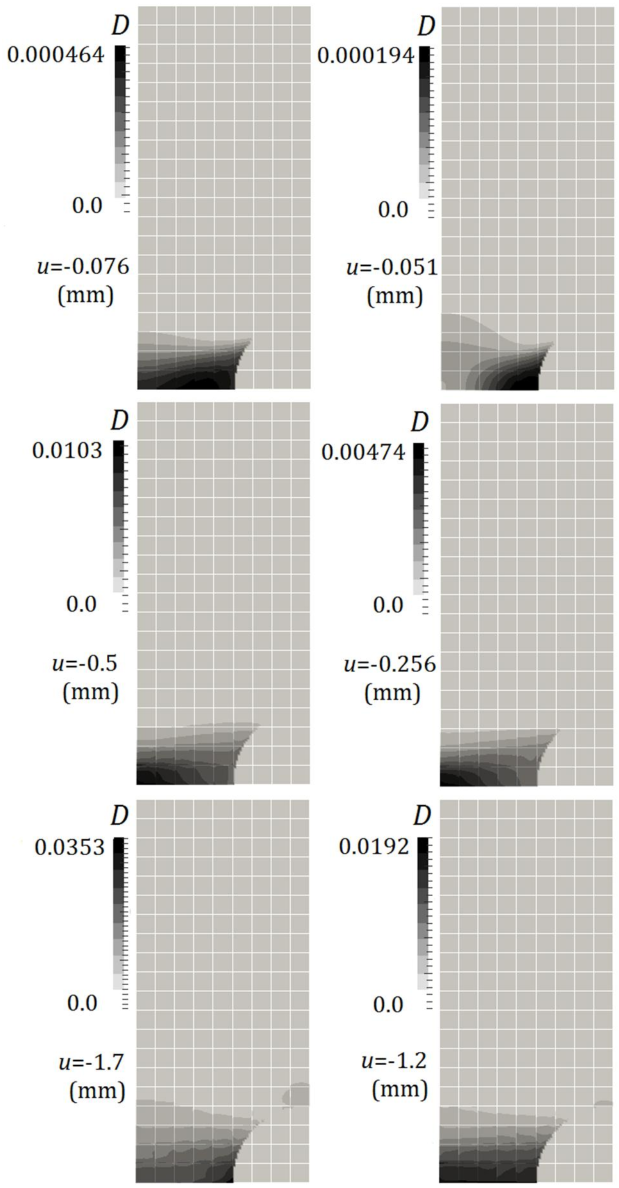
در این قسمت نمونه تقارن محوری که تحت بارگذاری فشاری است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به شکل 19، تحلیل یک چهارم نمونه به‌صورت متقارن‌محوری کفایت می‌کند. مشخصات ماده مورد استفاده در جدول 3 آمده است. این آزمایش برای سه مقدار پارامتر h بررسی می‌شود تا اثر بسته‌شدن ترک‌ها در پیش‌بینی صحیح نقطه شروع آسیب تعیین گردد. مطابق شکل 20 یک‌چهارم نمونه به‌صورت مستطیلی به ابعاد 7/5 × 5 با 150 سلول گسسته‌سازی شده است. در این فرآیند مرز بالایی نمونه تحت جابه‌جایی فشاری قرار می‌گیرد و منطقه بحرانی برای شروع شکست مشخص می‌گردد.

با جابه‌جایی فشاری عمودی 0/3- میلی‌متر برای مرز بالایی نمونه در سه مقدار متفاوت پارامتر بسته شدن ترک‌ها، نتایج پارامتر آسیب و نقاط بحرانی در شکل 21 آمده است. با توجه به شکل مشخص است که در صورتی که اثر بسته شدن ترک‌ها محسوس باشد (h=0.05) ناحیه بحرانی شروع شکست نرم از دو سمت بالا و پایین لبه بالایی جسم یعنی نقاط A و B است و ماکزیمم آن در سمت بالایی (نقطه A) است ولی با نادیده گرفتن اثر بسته شدن ترک‌ها، ناحیه بحرانی در قسمت پایینی (نقطه B) پیش‌بینی می‌شود.

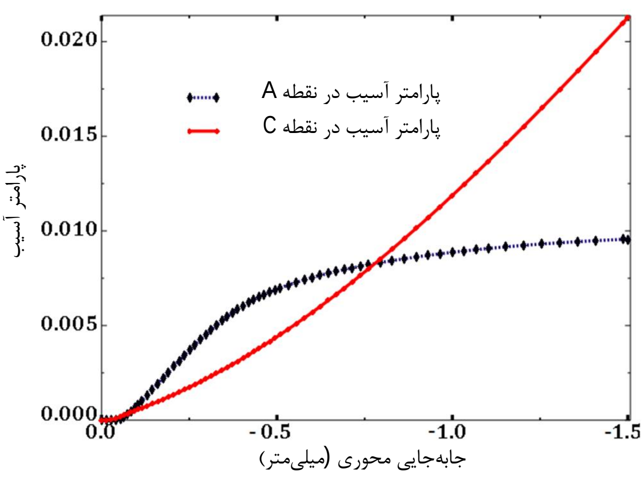
با توجه به شکل 22 که پارامتر آسیب را برای دو نقطه بحرانی A و B نشان می‌دهد، می‌توان دریافت که در نقطه A به دلیل تنش کششی بیشتر و



شکل 16 تاریخچه پارامتر آسیب و کرنش پلاستیک معادل در المان مرکز نمونه (A)



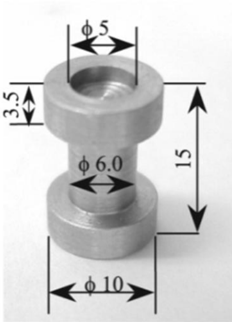
شکل 17 مقادیر پارامتر آسیب در تحلیل سلول محدود میله شیاردار تحت فشار در جابه‌جایی‌های مختلف



شکل 18 مقادیر پارامتر آسیب نسبت به جابجایی عمودی در تحلیل سلول محدود فشار میله شیاردار

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.13.15.8]

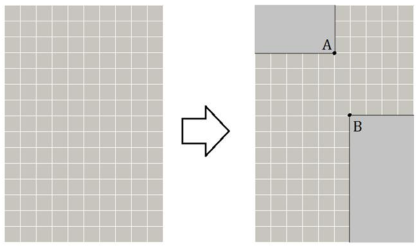
باز شدن ترک‌ها، پارامتر آسیب مقدار بیشتری نسبت به سایر نقاط دارد و شروع شکست را می‌توان در این ناحیه پیش بینی نمود. در صورتی که نتایج حاصل با مشاهدات آکیاما و همکاران در شکل 23 مقایسه شود[32]، مشخص می‌گردد که نتایج ماکزیمم آسیب با در نظر گرفتن بسته شدن ترک‌ها با مشاهدات تجربی هماهنگ است.



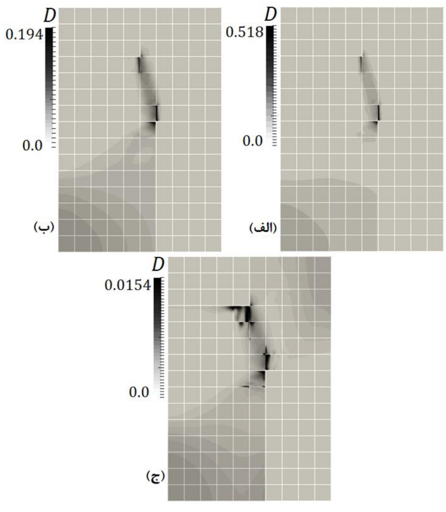
شکل 19 هندسه مساله تحت فشار به صورت تقارن محوری[32]

جدول 3 پارامترها و خواص ماده مورد استفاده برای نمونه متقارن محوری تحت فشار[33]

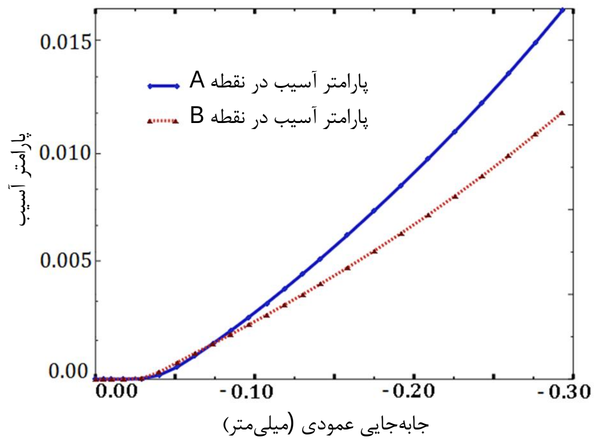
خواص ماده	مقدار
E (MPa)	210000
ν	0/3
σ_{y0} (MPa)	294
σ_y (MPa)	294+159/3(1-exp(-5/82 ε_{eq}^{p}))
r (MPa)	3/5
s	1



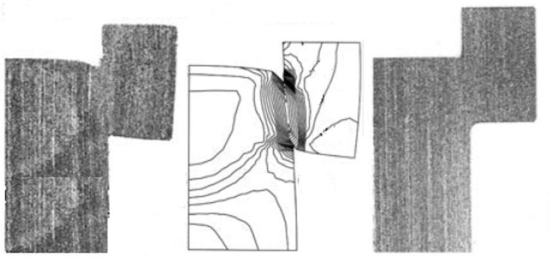
شکل 20 شبکه نمونه تحت فشار به روش سلول محدود



شکل 21 مقادیر پارامتر آسیب برای نمونه متقارن تحت فشار به روش سلول محدود الف: h=1.0 ب: h=0.5 ج: h=0.05



شکل 22 پارامتر آسیب نمونه تحت فشار به روش سلول محدود با h=0.05



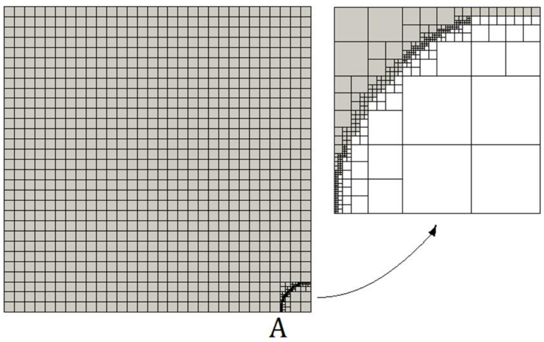
الف) نمونه اولیه		ب) نمونه بعد از 10 درصدکاهش ارتفاع

شکل 23 آزمایش فشار سرد نمونه متقارن[32]

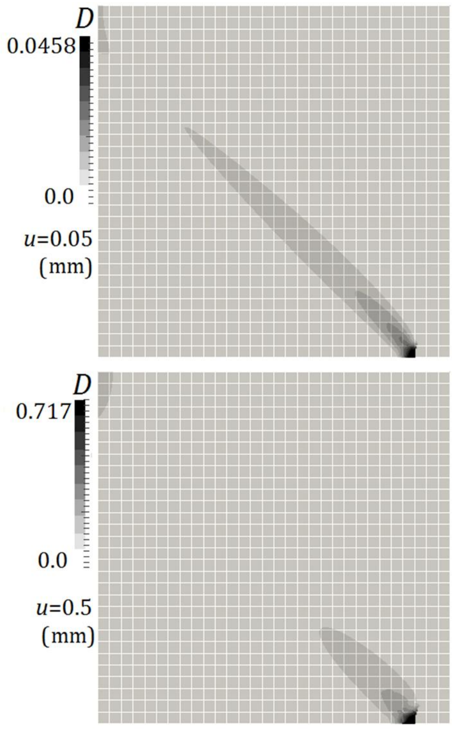
4-3- صفحه مربعی سوراخ‌دار

در این قسمت یک صفحه مربعی سوراخ‌دار در حالت کرنش صفحه‌ای که تحت بارگذاری کششی و فشاری است، در نظر گرفته می‌شود. با توجه به شکل 24 به دلیل رعایت تقارن یک چهارم صفحه در نظر گرفته شده است (در پایین و راست صفحه شرط تقارن افزوده شده است و جابجایی عمودی به مرز بالایی اعمال می‌شود) و خواص ماده نیز در جدول 1 آمده است. مطابق شکل 24 صفحه به ابعاد 10 × 10 با سوراخ ربع دایره به شعاع 1 توسط 900 سلول گسسته سازی شده است و از روش انتگرال‌گیری تطبیقی کوادتری در مکان سوراخ دایره‌ای استفاده می‌شود.

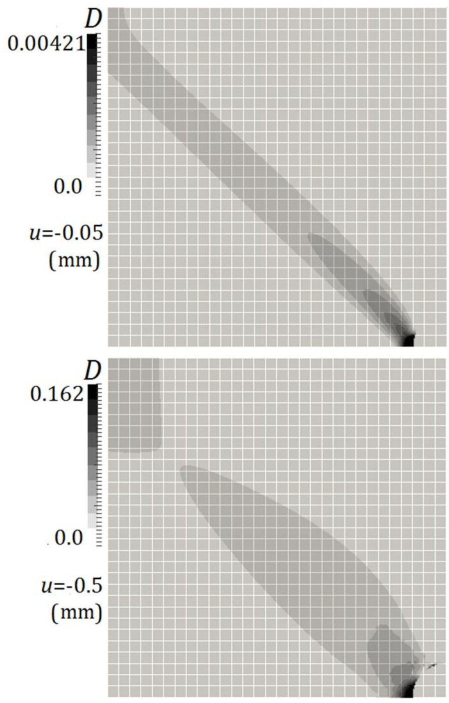
همان‌گونه که در شکل‌های 25 و 26 مشخص است، در همان بارگذاری‌های ابتدایی حداکثر آسیب در کنار سوراخ دایره‌ای و در مرز تقارن افقی است، با افزایش بارگذاری حداکثر آسیب در ناحیه‌ای کوچک‌تر متمرکز می‌شود، تفاوت بارگذاری کششی و فشاری مقدار پارامتر آسیب است که در بارگذاری فشاری به دلیل بسته شدن ترک‌ها مقدار آسیب کمتر است ولی مکان آن تفاوت چندانی ندارد.



شکل 24 شبکه سلول محدود صفحه سوراخ‌دار به همراه اصلاح کوادتری برای انتگرال‌گیری تطبیقی



شکل 25 مقادیر پارامتر آسیب در تحلیل سلول محدود صفحه سوراخ‌دار تحت کشش

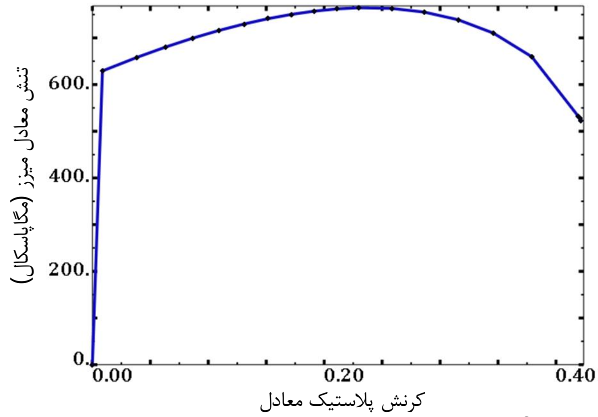


شکل 26 مقادیر پارامتر آسیب در تحلیل سلول محدود صفحه سوراخ‌دار تحت فشار

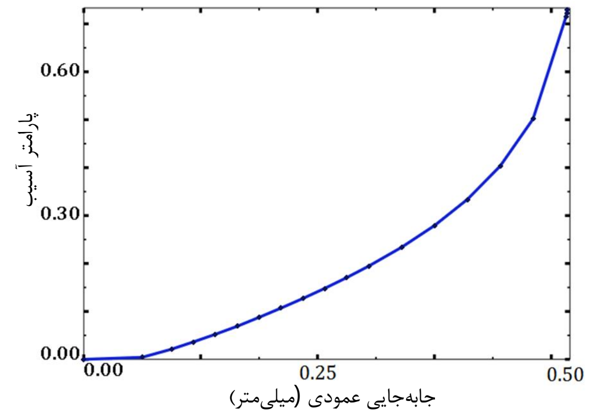
منحنی‌های تنش موثر برحسب کرنش پلاستیک معادل و پارامتر آسیب برحسب جابه‌جایی عمودی برای صفحه سوراخ‌دار تحت کشش در نقطه A، در شکل‌های 27 و 28 آمده است.

5- جمع بندی و نتیجه گیری

در این تحقیق رشد آسیب در مواد نرم با در نظر گرفتن اثر بسته‌شدن ترک‌ها در بارگذاری‌های فشاری به کمک روش سلول محدود مورد بررسی قرار



شکل 27 مقادیر تنش معادل نسبت به کرنش پلاستیک معادل برای نقطه A در تحلیل سلول محدود کشش صفحه سوراخ‌دار



شکل 28 مقادیر پارامتر آسیب نسبت به جابجایی عمودی برای نقطه A در تحلیل سلول محدود کشش صفحه سوراخ‌دار

گرفت. ابتدا با انتخاب مدل آسیب اصلاح شده لمتر، یک فرمول‌بندی مناسب برای مسایل الاستیک- پلاستیک- آسیب استخراج و یک الگوریتم بهینه جهت حل ارایه گردید. در این مدل، با اضافه کردن متغیر بسته شدن ترک‌ها یعنی h و جداسازی تنش‌های کششی و فشاری، معادلات پایه لمتر، به ویژه معادله نرخ رهایی انرژی آسیب با پیچیدگی‌هایی همراه شد.

در گام بعد، روابط، معادلات و الگوریتم مدل اصلاح شده لمتر به صورت زیربرنامه ضمنی برای استفاده در روش سلول محدود پیاده‌سازی گردید. سپس برای اعتبارسنجی مدل آسیب و هم‌چنین استفاده از مزایای روش سلول محدود، چندین مساله کاربردی تحلیل و بررسی شد و نتایج آن با نتایج تجربی و عددی معتبر مقایسه گردید.

نتایج تحلیل نشان می‌دهد روش سلول محدود با ایجاد شبکه‌بندی ساده برای مسایل پیچیده و دارای ناپیوستگی، توانایی حل مسایل در زمینه‌های مختلف مهندسی از جمله مکانیک آسیب را دارا است و با توجه به جدید بودن آن، قابلیت‌های آن در حال افزایش است. هم‌چنین می‌توان از مدل اصلاح شده لمتر به عنوان ابزاری دقیق و سریع برای پیش‌بینی آسیب نرم و شروع جوانه‌زنی و شکست نمونه در انواع فرآیندهای شکل‌دهی فلزات استفاده کرد.

6- مراجع

[1] C. Soyarslan, *Modelling damage for elastoplasticity,* Department of Civil Engineering, Ph.D thesis, Middle East Technical University, 2008.
[2] L.M. Kachanov, Time of the rupture process under creep condition. *Izv. Akad. Nauk.SSSR, Otd. Tekhn. Nauk,* pp. 26-31, 1958.
[3] J. Lemaitre, J., *A Course on Damage Mechanics,* Springer Verlag, Berlin,

principal space, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 171,* pp. 463-489,1998.

[19]A. Yazid, N. Abdelkader, H. Abdelmadjid, A state of the art review of the X-FEM for computational fracture mechanics. *Applied Mathematical Modelling,* 2009. 33(12): pp. 4269-4282, 2009.

[20]Y. Abdelaziz, A. Hamouine, A survey of the extended finite element. *Computers & Structures,* pp. 1141-1151, 2008.

[21]T.Belytschko, R. Gracie, G. Ventura, A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 17(4), 043001, 2009.

[22]V. Saulev, A method for automatization of the solution of boundary value problems on high performance computers, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR v144,* pp. 497-500, 1962. (In Russian)

[23]V. Saulev, On the solution of some boundary value problems on high performance computers by fictitious domain method. *Siberian Math. J,* pp. 912-925, 1963.

[24]B.A. Szabo, I. Babuska, *Finite element analysis,* Wiley-Interscience, 1991.

[25]J.W. Hancock, A.C. Mackenzie, On the mechanism of ductile fracture in high strength steels subjected to multi-axial stress-states, *J. Mech. Phys. Solids* 24, pp. 147–169, 1976.

[26]A. Benallal, R. Billardon, J. Lemaitre, Continuum damage mechanics and local approach to fracture: numerical procedures, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 92,* pp. 141–155, 1991.

[27]S. Cescotto, Y.Y. Zhu, Modelling of ductile fracture initiation during bulk forming. *Computational plasticity: fundamentals and applications,* in: E. Onate, D.R.J. Owen (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Conference,* 1995.

[28]M. Vaz Jr, D.R.J. Owen, Aspects of ductile fracture and adaptive mesh refinement in damaged elasto-plastic materials, *Int. J. Numer. Meth. Engrg. 50,* pp. 29–54, 2001.

[29]P. O. Bouchard, L. Bourgeon, S. Fayolle, K. Mocellin, An enhanced Lemaitre model formulation for materials processing damage computation, *Int J Mater Form,* pp. 299–315, 2011.

[30]E.A. de Souza Neto, A fast, one-equation integration algorithm for the Lemaitre ductile damage model, *Commun. Numer. Meth. Engng,* pp. 541-554, 2002.

[31]J.W. Hancock, A.C. Mackenzie, On the mechanism of ductile fracture in high strength steels subjected to multi-axial stress-states, *J. Mech. Phys. Solids 24,* pp. 147–169, 1976.

[32]M. Akiyama, Y. Neishi, Y. Adachi, K. Terada, Trigger for the occurrence of grain coarsening phenomenon of BS304S31 austenite stainless steel under small plastic strain at high temperature, *Engineering Computations,* 20(5/6), pp. 499-512, 2003.

[33]M. Mashayekhi, Prediction of Central Burst in Forward Extrusion Using Continuum Damage Mechanics, *Esteghlal Mechanical Engineering,* 29(1), pp. 74-85, 2013. (In Persian)

1992.

[4] J. Parvizian , A. Duester, E. Rank , Finite Cell Method: h- and p-extension for embedded domain problems in Solid Mechanics. *Computational Mechanics,* 41, pp. 121-133, 2007.

[5] A. Duester, J. Parvizian, Z. Yang, E. Rank, The Finite Cell Method for 3D problems of solid mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 197, pp. 3768-3782, 2008.

[6] A. Duester, J. Parvizian, E. Rank, Topology optimization based on the finite cell method. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics,* 10, pp. 151-152, 2010.

[7] E. Rank, J. Parvizian, Z. Yang, A. Duester, A high order embedded domain method. *International Workshop on High-Order Finite Element Methods,* Herrsching, Munich, 17-19 May, 2007.

[8] A. Duester, J. Parvizian, E. Rank, Z. Yang, The Finite cell method for orthopedic simulation. mini-symposium on higher order and hp methods with applications to elliptic and maxwell problems, *9th US National Congress on Computational Mechanics,* San Francisco, CA, July 23-26, 2007.

[9] D. Schillinger, M. Ruess, N. Zander, Y. Bazilevs, A. Düster, E. Rank, Small and large deformation analysis with the p- and B-spline versions of the Finite Cell Method, *Computational Mechanics*, *50*(4), pp. 445-478 2011.

[10]D. Schillinger, A. Duster, E. Rank, The hp-d-adaptive finite cell method for geometrically nonlinear problems of solid mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 89(9), pp. 1171-1202, 2012.

[11]A. Abedian, J. Parvizian, A. Duester, E. Rank, The finite cell method for the J2 flow theory of plasticity, *Finite Elements in Analysis and Design*, *69*, pp. 37-47, 2013.

[12]A. Abedian, J. Parvizian, A. Duester, H. Khademyzadeh, E. Rank, Finite cell method for elasto-plastic problems. *Proceedings of the Tenth International Conference on Computational Structures Technology,* Valencia, Spain, September 14-17, 2010.

[13]M. Ranjbar, M. Mashayekhi, J. Parvizian, A. Düster, E. Rank, Using the finite cell method to predict crack initiation in ductile materials, *Computational Materials Science,* 82, pp. 427–434, 2014.

[14]E.A. de Souza Neto, *Computational Methods for Plasticity,* JohnWiley, 2008.

[15]P. Chadwick, R.W. Ogden, A theorem on tensor calculus and its application to isotropic elasticity, *Arch. Rat. Mech. Anal. 44,* pp.54–68, 1971.

[16]D.E. Carlson, A. Hoger, The derivative of a tensor-valued function of a tensor, *Quart. Appl. Math. 44,* pp. 409–423, 1986.

[17]C. Miehe, Computation of isotropic tensor functions, *Commun. Numer. Meth. Engrg. 9,* pp. 889–896, 1993.

[18]D. Peric, E.A. de Souza Neto, A new computational model for tresca plasticity at finite strains with an optimal parametrization in the