مجله مهندسی مکانیک مدرس، دی 1393، دوره 14، شماره 10، ص‌ص 205-210

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

# اثرات محیط سیال روی ارتعاشات رزوناتور میکروتیر با استفاده از تئوری میکروپولار

مینا قنبری[1]، سیامک حسین پور[2*]، قادر رضازاده

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز
2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز
3- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه
* تبریز، صندوق پستی 513351996، hossainpour@sut.ac.ir

**اطلاعات مقاله**

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 31 فروردین 1393
پذیرش: 28 اردیبهشت 1393
ارائه در سایت: 06 مهر 1393

*کلید واژگان:*
سیستم های الکترومکانیکی در ابعاد میکرو
تئوری میکروپولار
میرایی فیلم فشرده سیال

**چکیده**

در این مقاله به بررسی میرایی فیلم فشرده سیال در میکرو رزوناتور با بکارگیری تئوری میکروپولار پرداخته شده است. مدل پیشنهادی، شامل یک میکروتیر دوسر گیر دار است که توسط صفحاتی در بالا و پایین تیر احاطه شده است. در میکرو فاصله بین میکروتیر و صفحات ثابت هوا قرار دارد. معادله استخراج شده حاکم بر ارتعاش عرضی میکروتیر با استفاده از تئوری گرادیان کرنش و همین طور معادله غیرخطی رینولدز استخراج شده حاکم بر میدان فشار سیال با استفاده از تئوری میکروپولار، خطی سازی شده و بعد از بی بعد سازی با بکارگیری روش عددی گلرکین جداسازی و بصورت عددی حل شده‌اند. هدف از حل معادلات بدست آوردن فرکانس های میرایی و در نهایت فاکتور کیفیت سیستم است. سپس اثرات پارامترهای میکروپولار روی مقادیر فاکتور کیفیت مورد مطالعه قرارگرفته و درادامه روی اختلاف مقادیر بدست آمده برای فاکتور کیفیت با بکارگیری تئوری کلاسیک و تئوری های میکروپولار برای سیال و گرادیان کرنش برای میکروتیر مطالعه و بررسی لازم انجام می‌گیرد. نشان داده می‌شود که بکارگیری تئوری میکروپولار جهت مدل کردن میدان سیال مقادیر فاکتور کیفیت را کمتر از حالت کلاسیک پیش بینی می‌کند و همین طور بکارگیری تئوری گرادیان کرنش جهت مدل کردن میکروتیر مقادیر فاکتور کیفیت را بیشتر از حالت کلاسیک پیش بینی می‌کند. در نهایت تأثیر پارامترهایی چون عدد فشردگی، فشار محیط و همین طور پارامترهای هندسی میکروتیر روی اختلاف مقادیر فاکتور کیفیت مورد بررسی قرار می‌گیرد.

# Effect of fluid media on vibration of a microbeam resonator using micropolar theory

Mina Ghanbari[1], Siamak Hossainpour [2*], Ghader Rezazadeh[3]

1- Department of Mechanic Engineering, Sahand University of Technology, Tabriz, Iran
2- Department of Mechanical Engineering, Sahand University of Technology, Tabriz, Iran
3- Department of Mechanical Engineering, Urmia University, Urmia, Iran
* P.O.B. 513351996, Tabriz, Iran, hossainpour@sut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 20 April 2014
Accepted 18 May 2014
Available Online 28 September 2014

*Keywords:*
MEMS
Micro-polar theory
Squeeze film damping

ABSTRACT

In this paper, squeeze film damping in a micro-beam resonator based on micro-polar fluid theory has been investigated. The proposed model for this study consists of a clamped-clamped micro-beam suspended between two fixed stratums. The gap between the micro-beam and stratums is filled with air. Equation of motion governing the transverse deflection of the micro-beam based on strain gradient theory and also non-linear Reynolds equation of the fluid field based on micro-polar theory have been non-dimensionalized, linearized and solved simultaneously to calculate the quality factor of the squeeze film damping. The effect of non-dimensional length scale parameter of the air and micro-beam for different values of micro-polar coupling parameter has been investigated. It has been shown that applying micro-polar theory underestimates and also applying strain gradient theory overestimates the values of quality factor that are obtained in the case of classic theory. The quality factor of the squeeze film damping for different values of non-dimensional length of the beam, squeeze number and non-dimensional pressure have been calculated and compared to the obtained values of quality factor based on classic theory.

## 1- مقدمه

سیستم های الکترومکانیکی در ابعاد میکرو[1] و در ابعاد نانو[2] رشد چشمگیری در دهه‌های اخیر به ویژه در 50 سال اخیر داشته‌اند. در ابتدای سال 1990میلادی، این سیستم ها با رشد پروسه‌های ساخت مدارهای مجتمع پا به عرصه ظهور گذاشتند که در آن تمامی سنسورها و عملگرها از ماده سیلیکون ساخته می‌شدند.

از آن زمان به بعد سرمایه گذاری‌های کلانی در زمینه سیستم های الکترومکانیکی در ابعاد میکرو و نانو صورت گرفت به طوری که طبق اظهارات ستاد فناوری نانو، در سال 2015 میلادی سهم این سیستم ها در تجارت جهانی بالغ بر 1 تریلیون دلار خواهد شد که به پیشرفت‌های تحقیقاتی قابل

1- MEMS
2- NEMS

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
M. Ghanbari, S. Hossainpour, Gh. Rezazadeh, Effect of fluid media on vibration of a microbeam resonator using micropolar theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 10, pp. 205-210, 2014 (In Persian)

[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25 ]

[ DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.10.6.3 ]

ملاحظه‌ای در این زمینه خواهد انجامید. به طور کلی می‌توان گفت سایز کوچک، وزن کم، دوام زیاد و هزینه پایین این سیستم ها سبب شده که در زمینه‌های مختلف ازجمله صنایع هوافضا، بیومکانیک، پتروشیمی و پزشکی و ... مورد استفاده قرارگرفته و در نتیجه مورد توجه بسیاری از محققان و پژوهشگران قرار گیرند. از جمله این سیستم ها می‌توان به میکرو پمپ‌ها، میکروسنسورها، شتاب سنج‌ها و میکرورزوناتورها اشاره کرد که اکثر آنها با تعامل سیال با محیط جامد سروکار دارند. نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهند که مدلهای کلاسیک محیط پیوسته مدل های خوبی برای پیش بینی رفتار سیال در ابعاد کوچک نیست. در صورتی که ابعاد مشخصه هندسی جریان به اندازه کافی کوچک باشد اطلاعات هیدرودینامیکی ثبت شده از جریان سیال از جمله دبی حجمی، سرعت متوسط، افت فشار و.. از مقادیری که توسط معادلات نویر استوکس برای این مشخصه‌های جریان پیش بینی می‌شود اختلاف زیادی نشان می‌دهند [۱،2]. نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهند که تئوری سیال میکروپولار[1] ارائه‌شده توسط ارینگن در سال 1966 که در آن چرخش مولکول‌های سیال نیز در نظر گرفته‌شده تئوری خوبی برای مدل کردن جریان سیالات در ابعاد میکرو بوده و پیش بینی های هیدرودینامیکی جریان سیال سازگاری بسیار خوبی با نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهند [۳،4]. تحقیقات مختلفی در زمینه بررسی اثرات سیال در میکروساختارها از جمله مبحث میرایی فیلم فشرده سیال که در طراحی بسیاری از طرح های در ابعاد میکرو از جمله میکرورزوناتورها از اهمیت بالایی برخوردار است انجام شده است [۵،6]. نیوول در سال 1966 اثرات میرایی را در رزوناتورهای شامل میکروتیرهای یک سر گیردار مورد مطالعه قرار داد [7].

او بازه فشار از خلأ تا فشار اتمسفریک را به سه ناحیه تقسیم کرد. در ناحیه اول یعنی فشارهای خیلی پایین میرایی غالب میرایی ذاتی سیستم است. در ناحیه دوم که فشار بیشتر از ناحیه اول است میرایی غالب میرایی هوا خواهد بود که ناشی از انتقال مومنتوم حین برخورد مولکول‌های هوا با ساختار در حال حرکت است. در این ناحیه ایشان اثرات جسم صلب در حال حرکت را روی تغییرات مومنتوم خطی مولکولهای گاز مورد مطالعه قرار داد. ایشان نشان دادند که در ناحیه سوم که فشار نزدیک به فشار اتمسفر است میرایی غالب، میرایی لزج بوده و مستقل از فشار است. بلچ در سال 1983 معادله رینولدز خطی سازی شده تراکم پذیر را جهت آنالیز مسائل میرایی فیلم فشرده بکار برد [8]. او با حل تئوری معادله خطی سازی شده رینولدز در دو حالت صفحه صلب مرتعش مستطیلی شکل و دایره‌ای عباراتی برای نیروهای میرایی و فنریت بدست آورد. زوک در سال 1992 به نتایج آزمایشگاهی در مورد اندازه فاکتور کیفیت در مورد میکروبیم های دو سر گیر دار در فشارهای پایین دست یافت که این نتایج با نتایج بدست آمده از مدل نیوول هم خوانی خوبی نشان می‌داد [9]. بائو در سال 2002 مدل انتقال انرژی را جهت مطالعه اثرات ساختار در حال حرکت روی تغییر انرژی جنبشی مولکولهای گاز بکار برد [10]. ایشان معادله‌ای برای فاکتور کیفیت مشابه آنچه نیوول در سال 1966 ارائه کرده بود بدست آورد که با پهنای فاصله نسبت مستقیم و با طول صفحه نسبت عکس داشت. ایشان نتایج تئوری خود را با نتایج آزمایشگاهی زوک مقایسه نمود و هم خوانی خوبی در نتایج مشاهده کرد. مک کارتی در سال 2002 با مدل کردن یک سوییچ به صورت تیر یک سر گیردار توزیع فشار را در داخل فاصله بین میکروتیر و زیرلایه از طریق روش انتگرالی بدست آورد [11]. زنگ در سال 2004 بدون در نظر گرفتن خیز استاتیکی ناشی از اعمال ولتاژ DC رزوناتور را به صورت یک تیر دوسرگیردار در حال ارتعاش در مود ارتعاشی اول مدل کرد. او توزیع فشار را در میکروفاصله بین تیر و زیرلایه به صورت سری‌های مثلثاتی فرض نمود [12]. پندی و پرتاب در سال 2007 خصوصیات میرایی را برای سه مود ارتعاشی اول یک رزوناتور بدست آوردند [13]. آنها معادله خطی سازی شده تراکم پذیر رینولدز کوپل شده با معادله ارتعاشی تیر را با استفاده از توابع گرین بدون در نظر گرفتن خیز استاتیکی ناشی از بار DC حل نمودند. میرایی میکروبیم با تحریک الکتریکی با در نظر گرفتن خیز استاتیکی توسط لیی[2] در سال 2007 مورد مطالعه قرار گرفت ولی وابستگی لزجت موثر سیال به فاصله اولیه بین میکروتیر و زیر لایه در نظر گرفته نشده بود. نایفه و یونس در سال 2007 ارتعاش میکروصفحه تحت ولتاژ DC بالا و بدون صرف نظر از خیز استاتیکی را به ازای فشارهای گاز مختلف مورد مطالعه قرار دادند و توزیع فشار را با بکارگیری روش اغتشاش بدست آوردند [14]. چاترجی و پوهیت در سال 2010 میرایی فیلم فشرده در میکرورزوناتورهای با تحریک الکترواستاتیکی با اعمال ولتاژ های DC بالا و AC خیلی پایین را در سه مود ارتعاشی اول تیر به ازای فشارهای محیط مختلف مورد مطالعه قرار دادند [15]. آنها مدل تئوریک یک میکروتیر با تحریک الکترواستاتیکی را توسعه دادند که در آن وابستگی لزجت موثر سیال به فاصله اولیه بین میکروتیر و زیر لایه از طریق عدد نادسن ارتباط داده می‌شد. در اکثر کارهای اشاره شده فوق میدان سیال با تئوری کلاسیک مدل سازی شده که برای سیال در ابعاد میکرو مناسب نیست.

با توجه به رشد چشمگیر سیستم های در ابعاد میکرو و در ارتباط بودن اکثر این سیستم ها با تعامل بین محیط جامد و جریان سیال و با توجه به اینکه در اکثر طرح ها میدان سیال با استفاده از تئوری کلاسیک مدل سازی شده، در این مقاله به بررسی میرایی فیلم فشرده سیال در میکرورزوناتور با بکارگیری تئوری میکروپولار پرداخته می‌شود. مدل پیشنهادی شامل یک تیر دو سر گیردار است که بین لایه های ثابت در بالا و پایین احاطه شده است. در میکرو فاصله بین تیر و لایه‌ها، فیلم نازک فشرده‌ای از سیال که گاز است قرار می‌گیرد. معادله حاکم بر ارتعاش عرضی آزاد تیر با بکارگیری تئوری گرادیان کرنش و معادله غیرخطی رینولدز حاکم بر میدان فشار سیال با بکارگیری تئوری میکروپولار استخراج شده و پس از خطی سازی، این دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای، توسط روش عددی گلرکین جداسازی و در نهایت حل می‌شوند. پس از حل معادلات و بدست آوردن فرکانس های میرایی، در نهایت فاکتور کیفیت[3] محاسبه می‌شود. در ادامه در مورد اختلاف مقادیر بدست آمده برای فاکتور کیفیت با استفاده از تئوری میکروپولار و حالت کلاسیک مطالعه و بررسی لازم انجام می‌گیرد.

## 2- تئوری میکروپولار

این تئوری اولین بار توسط برادران کسرات[4] به عنوان تئوری کسرات مطرح شد که در آن علاوه بر تنش ها، اثرات کوپل تنش ها نیز بر یک المان مادی در نظر گرفته می‌شد. با مطرح شدن اثرات دینامیکی در این تئوری توسط ارینگن، این تئوری با عنوان تئوری میکروپولار شناخته شد. در این تئوری میدان برداری سرعت $V$ و میدان برداری چرخش $\phi$ دو کمیت سینماتیکی مستقل از هم بوده و تنسور تنش یک تانسور نامتقارن است.

### 2-1- معادلات متشکله

معادلات متشکله حاکم بر میدان سیال در این تئوری به صورت روابط (1) و (2) می‌باشند [16،17]:

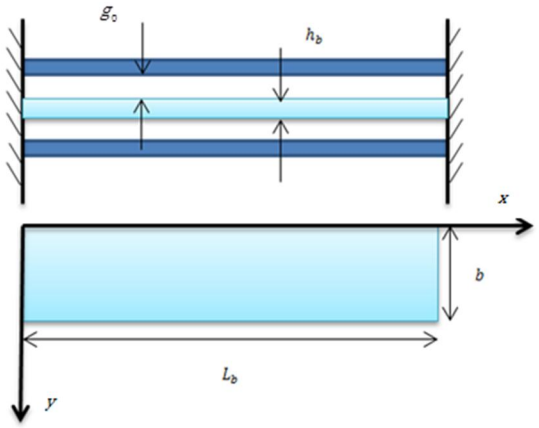
$$t_{KL} = (-P + \lambda D_{RR})\delta_{KL} + (2\mu + k)D_{KL} + k\varepsilon_{KLM}(R_M - \phi_M) \qquad (1)$$

1- Micropolar

2- Lee
3- Quality factor
4- Cosserat



[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25 ]
[ DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.10.6.3 ]




**شکل 1** مدل پیشنهادی میکرورزوناتور جهت بررسی میرایی فیلم فشرده سیال

$$m_{KL}=\alpha\delta_{KL}\frac{\partial\phi_M}{\partial X_M}+\beta\frac{\partial\phi_K}{\partial X_L}+\gamma\frac{\partial\phi_L}{\partial X_L} \tag{2}$$

در روابط فوق $\mu$ لزجت دینامیکی، K لزجت گردابی، $P$ فشارمودینامیکی، $\alpha$ ، $\beta$، $\gamma$ ضرایب لزجت گرادیان چرخش سیال و $D_{kl}=\frac{1}{2}(V_{k,l}+V_{l,k})$ تانسور تغییرشکل میدان سیال می باشد.

## 2-2- معادلات بقا

معادلات بقا میدان سیال در این تئوری به صورت روابط (3) و (4) می‌باشند[1]:

$$\frac{\partial t_{lk}}{\partial X_l}+\rho\left(\vec{f}_k-\vec{a}_k\right)=0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial m_{lk}}{\partial x_l}+\rho\left(\vec{l}_k-I\ddot{\vec{\phi}}_k\right)-\varepsilon_{ilk}t_{lk}=0 \tag{4}$$

رابطه (3)، معادله بقای مومنتوم خطی و رابطه (4)، معادله بقای مومنتوم زاویه ای در تئوری میکروپولار است. $\vec{f}$ نیروی حجمی و $\vec{l}$ کوپل حجمی وارد بر المان حجم، $\vec{a}$ شتاب خطی و $\ddot{\vec{\phi}}$ شتاب زاویه ای المان هستند. $I$ میکراواینرسی نامیده شده و تابعی از مربع پارامتر طول مشخصه سیال است.

توصیف مدل پیشنهادی و معادلات حاکم بر آن

مدل پیشنهادی همانگونه که در شکل 1 نشان داده شده است شامل یک تیر دو سرگیردار بوده که صفحات ثابتی در بالا و پایین آن قرار گرفته است. در فاصله بین میکروتیر و صفحات ثابت هوا قرار گرفته است. در این مدل نسبت پهنای تیر به فاصله هوایی بزرگ فرض شده است و همین طور خیز تیر کوچک درنظرگرفته شده است. معادله حاکم بر ارتعاش عرضی میکرو تیر در حضور نیروی ناشی از میدان فشار سیال با بکارگیری تئوری گرادیان کرنش به صورت رابطه (5) است[18-20].

$$\left(\left(EI+bh_bP_6^{'}\right)\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}-P_7I\frac{\partial^6 w(x,t)}{\partial x^6}+\rho bh_b\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\right.$$
$$=-2\int_0^b\left(p(x,y,t)-p_a\right)dy \tag{5}$$

در رابطه بالا، $x$, $y$ مختصات در امتداد طول و پهنای تیر ، $EI$ صلبیت خمشی، $w$ خیز تیر، $L_b$ ، $b$ و $h_b$ به ترتیب طول، پهنا و ضخامت تیر و $\rho$ چگالی تیر می‌باشند. $p(x,y,t)$ فشار مطلق هوا در فاصله بین میکروتیر و صفحات ثبت در جهت‌های $x$, $y$ و زمان $t$ و $p_a$ فشار محیط می باشد. ضرایب $P_6^{'}$ و $P_7$ در تئوری گرادیان کرنش به صورت روابط (6) و (7) تعریف می‌شوند [19]:

$$P_6^{'}=-8Gl_0^2\nu+Gl_2^2\nu^2+2Gl_0^2+Gl_2^2+2Gl_2^2\nu+\frac{16}{15}Gl_1^2\nu$$
$$+\frac{8}{15}Gl_1^2\nu^2+\frac{8}{15}Gl_1^2+8Gl_0^2\nu^2 \tag{6}$$

$$P_7=2Gl_0^2-8Gl_0^2\nu+\frac{4}{5}Gl_1^2+\frac{4}{5}Gl_1^2\nu^2+\frac{8}{5}Gl_1^2\nu+8Gl_0^2\nu^2 \tag{7}$$

در روابط (6) و (7)، $l_0$ ، $l_1$ و $l_2$ پارامترهای طول مشخصه تیر، $G$ مدول برشی و $\nu$ ضریب پواسون تیر می باشد.

شرایط مرزی معادله (5) طبق روابط (8) تا (10) عبارت‌اند از [19]:

$$w(0,t)=w(L_b,t)=0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial w(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial w(L_b,t)}{\partial x}=0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w(L_b,t)}{\partial x^2}=0 \tag{10}$$

معادله غیر خطی رینولدز حاکم بر میدان فشار سیال با بکارگیری تئوری میکروپولار بصورت رابطه (11) می باشد [21]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\left(h_f^3+12l^2h_f-6Nlh_f^2\coth\left(\frac{Nh_f}{2l}\right)\right)\right]p\frac{\partial p}{\partial x}\right\}$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\left(h_f^3+12l^2h_f6Nlh_f^2\coth\left(\frac{Nh_f}{2l}\right)\right)\right]p\frac{\partial p}{\partial y}\right\}$$
$$=12\eta_{eff}\left(p\frac{\partial h_f}{\partial t}+h_f\frac{\partial p}{\partial t}\right) \tag{11}$$

در رابطه بالا $h_f$ فاصله متغیر بین میکروتیر و صفحات ثابت موازی و $\eta_{eff}$ ویسکوزیته موثر سیال بوده و تابعی از عدد نادسن می‌باشند. در این مقاله از رابطه ارائه شده توسط ویژولا جهت محاسبه ویسکوزیته موثر استفاده شده است. $0\le N\le 1$ ، پارامتر کوپلینگ و $l$ ، پارامتر طول مشخصه سیال پارامترهای میکروپولار نامیده می‌شوند. در حالت حدی وقتی $l\to 0$ معادله (11) به معادله رینولدز سیال نیوتنی تبدیل می‌شود. شرایط مرزی معادله (11) طبق روابط (12) و (13) عبارت‌اند از[22] :

$$p(x,0,t)=p(x,b,t)=p_a \tag{12}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0,y,t)=\frac{\partial p}{\partial x}(L_b,y,t)=0 \tag{13}$$

با بکارگیری پارامترهای بی بعد زیر طبق روابط (14) و (15):

$$X=\frac{x}{L_b},\ Y=\frac{y}{b},\ W=\frac{w}{g_0},\ Z=\frac{z}{g_0},\ T=\frac{t}{s},\quad P=\frac{p}{p_a} \tag{14}$$

$$L=\frac{l}{g_0},\quad H=\frac{h}{g_0}=1-W \tag{15}$$

که در آن $g_0$ ، فاصله اولیه بین میکروتیر و صفحات ثابت می باشد معادلات (5) و (11) به فرم زیر در می‌آیند. طبق روابط (16) و (17) داریم:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial X^4}-B'\frac{\partial^6 W}{\partial X^6}+\frac{\partial^2 W}{\partial T^2}=-2P_{non}\int_0^1(P-1)dY \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial X}\left\{\left[\left(H^3+12L^2H-6NLH^2coth\left(\frac{NH}{2L}\right)\right)\right]P\frac{\partial P}{\partial X}\right\}$$
$$+\beta^2\frac{\partial}{\partial Y}\left\{\left[\left(H^3+12L^2H-6NLH^2\coth\left(\frac{NH}{2L}\right)\right)\right]P\frac{\partial P}{\partial Y}\right\}$$
$$=\sigma\left(P\frac{\partial H}{\partial T}+H\frac{\partial P}{\partial T}\right) \tag{17}$$

که در آن

$$\beta=\frac{L_b}{b},\ B'=\frac{P_7I}{\left(EI+bh_bP_6^{'}\right)L_b^2},\ p_{non}=\frac{bp_aL_b^4}{EIg_0}\ \text{و}\ \sigma=\frac{12\mu L_b^2}{sg_0^2p_a}$$



[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25 ]
[ DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.10.6.3 ]

که عدد فشردگی نامیده شده و معیاری از میزان تراکم پذیری سیال می‌باشند.

شرایط مرزی بی بعد شده معادلات (16) و (17) طبق روابط (18) تا (22) عبارت‌اند از:

$$w(0,t)=w(1,t)=0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial w(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial w(1,t)}{\partial x}=0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w(1,t)}{\partial x^2}=0 \tag{20}$$

$$p(x,0,t)=p(x,b,t)=1 \tag{21}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0,y,t)=\frac{\partial p}{\partial x}(L_b,y,t)=0 \tag{22}$$

با توجه به اینکه ارتعاشات تیر کوچک فرض شده است بنابراین تغییرات فشار از فشار محیط در هر نقطه از دامنه سیال را می‌توان کوچک فرض نمود و میدان فشار را به صورت رابطه (23) نوشت:

$$P(X,Y,T)=\frac{p}{p_a}=1+P_d \tag{23}$$

با جایگذاری رابطه (23) در معادله (17) و خطی سازی حول $p_a$، معادله (17) به فرم رابطه (24) در می‌آید:

$$\left\{\left[(12L^2-6NL\coth\left(\frac{N}{2L}\right)\right]\frac{\partial^2 P_d}{\partial X^2}\right\}+\beta^2\left\{\left[(12L^2-6NL\coth\left(\frac{N}{2L}\right)\right]\frac{\partial^2 P_d}{\partial Y^2}\right\}=\sigma\left\{\frac{\partial P_d}{\partial T}-\frac{\partial W}{\partial T}\right\} \tag{24}$$

با شرایط مرزی طبق روابط (25) و (26):

$$P_d(X,0,T)=P_d(X,1,T)=0 \tag{25}$$

$$P_d(X,0,T)=P_d(X,1,T)=0 \tag{26}$$

## 3- حل عددی

برای حل عددی معادلات (15) و (16) به روش گلرکین جواب‌های تقریبی برای $W(X,T)$ و $P_d(X,Y,T)$ به فرم روابط (27) و (28) در نظر می‌گیریم:

$$W(X,T)\cong\sum_{k=1}^{r}q_k(T)\psi_k(X) \tag{27}$$

$$P_d(X,Y,T)\cong\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}u_{ij}(T)\varphi_i(X)\phi_j(Y) \tag{28}$$

با جایگذاری روابط (27) و (28) درمعادلات (16) و (24) به روابط (29) و (30) می رسیم:

$$\begin{aligned}\Re(W(X,T)) &= \sum_{k=1}^{r}\ddot{q}_k(T)\psi_k(X)+\sum_{k=1}^{r}q_k(T)\psi_k^{IV}(X)\\ &-\beta'\sum_{k=1}^{r}q_k(T)\psi_k^{VI}(X)\\ &+2P_{non}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}u_{ij}(T)\varphi_i(X)\int_0^1\phi_j(Y)dY=0\\ \mathrm{I}\,(P_d(X,Y,T)) &= \left[\left(1+12L^2-6\mathrm{NL}\coth\left(\frac{N}{2L}\right)\right)\right]\times\\ &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}u_{ij}(T)\varphi_i''(X)\phi_j(Y)\\ &+\beta^2\left[\left(1+12L^2-6\mathrm{NL}\coth\left(\frac{N}{2L}\right)\right)\right]\end{aligned} \tag{29}$$

$$-\sigma\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\dot{u}_{ij}(T)\varphi_i(X)\phi_j(Y)=0 \tag{30}$$

با بکارگیری روش کاهش مرتبه گلرکین معادلات به فرم زیر بدست می‌آیند. طبق روابط (31) و (32) داریم:

$$\sum_{k=1}^{r}M_{fk}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{r}K_{fk}q_k+2D_1\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}E_{fi}^{(1)}E_j^{(2)}u_{ij}=0$$
$$f=1,\dots r \tag{31}$$

$$D_2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}G_{qi}^{(1)}G_{gj}^{(2)}u_{ij}+\beta^2 D_2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}G_{qi}^{(3)}G_{gj}^{(4)}u_{ij}$$
$$-D_3\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}C_{qi}^{(1)}C_{gj}^{(2)}\dot{u}_{ij}+D_3\sum_{k=1}^{r}C_{qk}^{(3)}C_g^{(4)}\dot{q}_k=0$$
$$q=1,\dots n\,,\quad g=1,\dots m \tag{32}$$

با ضرایب زیر طبق روابط (33):

$$M_{fk}=\int_0^1\psi_f(X)\psi_k(X)dX\ ,\quad K_{fk}=\int_0^1\psi_f(X)\psi_k^{IV}(X)dX$$
$$-\beta'\int_0^1\psi_f(X)\psi_k^{VI}(X)dX\ ,\quad E_{fi}^{(1)}=\int_0^1\psi_f(X)\varphi_i(X)dX$$
$$E_j^{(2)}=\int_0^1\phi_j(Y)dY\quad,\quad G_{qi}^{(1)}=\int_0^1\varphi_q(X)\varphi_i''(X)dX$$
$$G_{gj}^{(2)}=\int_0^1\phi_g(Y)\phi_j(Y)dY\quad,\quad G_{qi}^{(3)}=\int_0^1\varphi_q(X)\varphi_i(X)dX$$
$$G_{gj}^{(4)}=\int_0^1\phi_g(Y)\phi_j''(Y)dY\ ,\ C_{qi}^{(1)}=\int_0^1\varphi_q(X)\varphi_i(X)dX$$
$$C_{gj}^{(2)}=\int_0^1\phi_g(Y)\phi_j(Y)dY\ ,\ C_{qk}^{(3)}=\int_0^1\varphi_q(X)\psi_k(X)dX$$
$$C_g^{(4)}=\int_0^1\phi_g(Y)dY\ ,\ D_1=p_{non}$$
$$D_2=\left(1+12L^2-6\mathrm{NL}\coth\left(\frac{N}{2L}\right)\right),\quad D_3=\sigma \tag{33}$$

با بکارگیری توابع شکل $\psi_k(X)=\sin^2(k\pi X)$ ، $\varphi_i(X)=\sin^2(i\pi X)$، $\phi_j(Y)=\sin(j\pi Y)$ که شرایط مرزی (17-21) را ارضا کنند و با انتگرال‌گیری همزمان از معادلات (29) و (30) ، فرکانس های میرای سیستم به صورت اعداد موهومی بدست آمده و در نهایت مقادیر فاکتور کیفیت به صورت رابطه (34) محاسبه می‌شوند:

$$\text{فاکتورکیفیت}=\frac{1}{2}\left|\frac{\mathrm{Re}(\omega)}{\mathrm{Im}(\omega)}\right| \tag{34}$$

## 4- نتایج عددی

خصوصیات مواد و همین طور هندسه میکروتیر مورد مطالعه در این مقاله در جدول 1 آورده شده است. نتایج عددی بدست آمده برای میکروتیر با پارامترهای هندسی ذکر شده در جدول 1 همگرایی خوبی را به ازای $r$=5 نشان می‌دهد. جهت اعتبار سنجی کار با توجه به نبود نتایج عددی برای تیر دوسر گیردار، مقادیر ضریب دمپینگ بدست آمده در این مقاله با در نظر گرفتن پارامترهای طراحی بکار گرفته‌شده توسط پرندی وپرتاب برای میکروتیر دو سر آزاد با مقادیر بدست آمده توسط پرندی وپرتاب و چاترجی و پوهیت مقایسه شده و در جدول 2 آورده شده است. جهت بررسی اثرات میکروپولار روی فرکانس های طبیعی میرای سیستم، مقادیر فاکتور کیفیت رزوناتور به ازای مقادیر مختلف طول مشخصه بی بعد ($L$) و همین طورمقادیر مختلف پارامتر



[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25 ]
[ DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.10.6.3 ]

کوپلینگ هوا ( $N$ ) در فشار محیط 1000Pa، با فرض تیر کلاسیک محاسبه شده و در نمودار 2 نشان داده شده است. با توجه به مقدار آزمایشگاهی بدست آمده برای پارامتر کوپلینگ در مورد سیال آب در [1]، می‌توان برای این پارامتر در مورد هوا بازه‌ای بین صفر تا 0/4 در نظر گرفت. نتایج نمودارشکل 2 نشان می‌دهد مقادیر فاکتور کیفیت با افزایش طول مشخصه بی بعد هوا و پارامتر کوپلینگ کاهش می‌یابد. همین طور نتایج نشان می‌دهند که با بکارگیری تئوری میکروپولار جهت مدل کردن میدان میکروسیال، مقادیر بدست آمده برای فاکتور کیفیت کمتر از مقادیری است که در حالت مدل کردن کلاسیک میدان سیال بدست می‌آیند. با فرض $l_0 = l_1 = l_2 = \hat{l}$ ، در شکل 2 اثرات طول مشخصه بی بعد میکروتیر $\left(\hat{l}/h_b\right)$ روی مقادیر فاکتور کیفیت به ازای مقادیر مختلف پارامتر کوپلینگ هوا بررسی شده و مقادیر بدست آمده در نمودار شکل 3 نشان داده شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش طول مشخصه بی بعد میکروتیر مقادیر فاکتور کیفیت افزایش می‌یابند.

همین طور نتایج نشان می‌دهند که با بکارگیری تئوری گرادیان کرنش جهت مدل کردن میکروتیر ، مقادیر بدست آمده برای فاکتور کیفیت بیشتر از مقادیری است که در حالت مدل کردن کلاسیک تیر بدست می‌آیند.

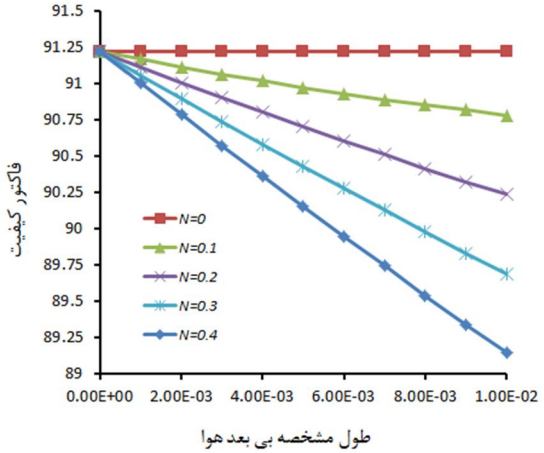
اختلاف مقادیر فاکتور کیفیت با بکارگیری تئوری های کلاسیک و میکروپولار برای میدان سیال برای نسبت‌های مختلف طول به پهنای میکروتیر برای تیرهای با ضخامت‌های مختلف در ابعاد میکرومتر ($h_b$) بدست آمده و نتایج برای فشار محیط 1000 پاسکال در شکل 4 نشان داده شده است.

**جدول 1** خصوصیات ماده و همین طور هندسه میکروتیر مورد مطالعه در این مقاله

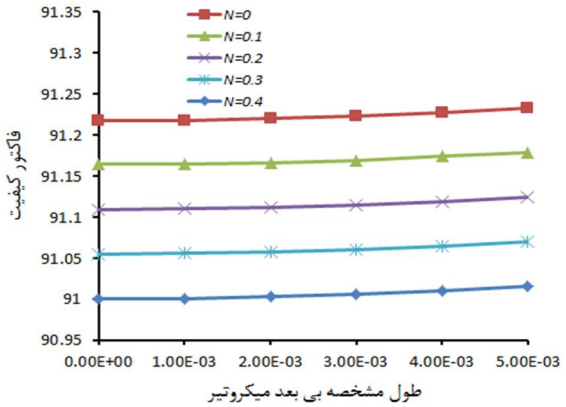
| پارامترها | اندازه |
|---|---|
| چگالی | 2700 (kg.m-3) |
| مدول یانگ | 70(GPa) |
| مدول برشی | 26(GPa) |
| طول تیر | 300(μm) |
| پهنای تیر | 20(μm) |
| ضخامت تیر | 2(μm) |
| فاصله اولیه | 1/5(μm) |

**جدول 2** مقایسه مقادیر بدست آمده برای ضریب میرایی تیر یک سر آزاد با بکارگیری روش های مختلف

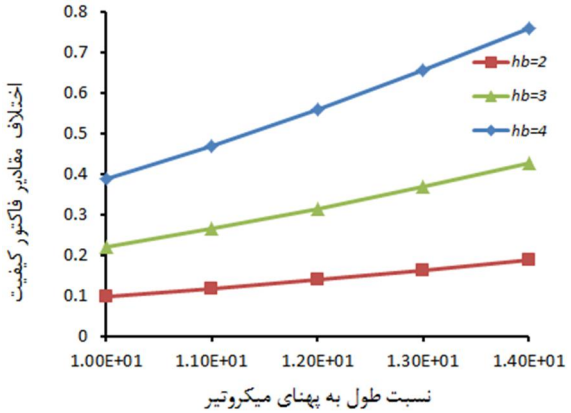
| این مقاله | چاترجی وپو هیت ( مدل نیمه تحلیلی)[15] | پرندی و پرتاب (مدل تحلیلی) [13] | پرندی و پرتاب (آزمایشگاهی) [13] |
|---|---|---|---|
| 0/4122 | 0/4484 | 0/422 | 0/415 |



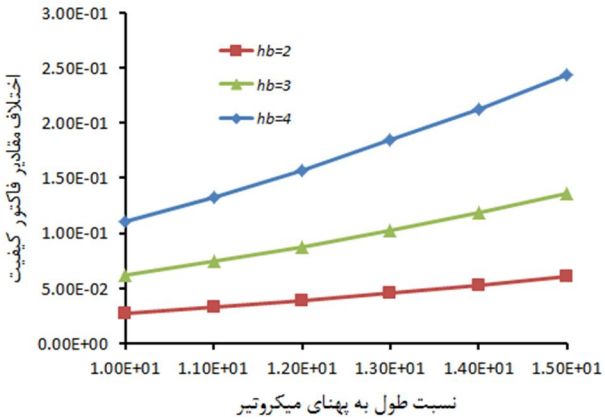

**شکل 2** اثرات پارامترهای میکروپولار روی مقادیر فاکتور کیفیت




**شکل 3** اثرات طول مشخصه بی بعد میکروتیر روی مقادیر فاکتور کیفیت




**شکل 4** اختلاف مقادیر فاکتور کیفیت بر حسب نسبت طول به پهنای میکروتیر با بکار گیری تئوری های کلاسیک و میکروپولار برای میدان سیال



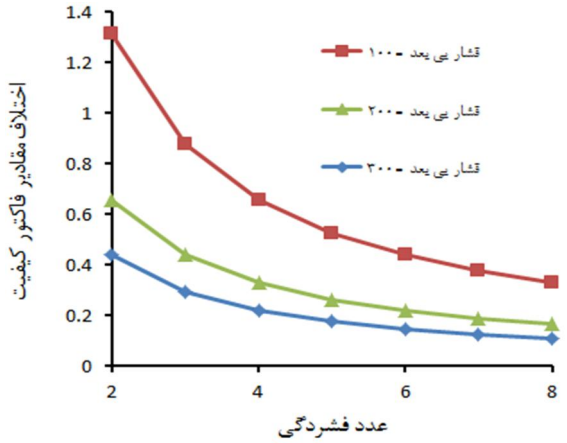

**شکل 5** اختلاف مقادیر فاکتور کیفیت بر حسب نسبت طول به پهنای میکروتیر با بکار گیری تئوری های کلاسیک و گرادیان کرنش برای میکروتیر

نتایج نشان می‌دهند که در تیر با ضخامت مشخص هرچه نسبت طول به پهنای تیر افزایش می‌یابد میزان اختلاف افزایش پیدا می‌کند. همچنین مشاهده می‌شود که به ازای نسبت مشخص طول به پهنای تیر، در تیرهای با ضخامت بیشتر این اختلاف بیشتر می باشد.

میزان اختلاف فاکتور کیفیت با بکارگیری تئوری های کلاسیک و گرادیان کرنش برای میکروتیر به ازای نسبت های مختلف طول به پهنای میکروتیر برای تیرهای با ضخامت‌های مختلف (با ابعاد میکرومتر) بدست آمده و نتایج برای فشار محیط 1000 پاسکال در شکل 5 نشان داده شده است. از روی شکل مشاهده می‌شود که در تیرهای با نسبت طول به پهنای بیشتر و همین طور با ضخامت بیشتر این اختلاف بیشتر می باشد.



[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25 ]
[ DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.10.6.3 ]




**شکل 6** اثرات عدد فشردگی و فشار بی بعد روی اختلاف مقادیر فاکتور کیفیت

میزان اختلاف فاکتور کیفیت با بکارگیری تئوری های کلاسیک و میکروپولار برای میدان سیال برای اعداد فشردگی و همین طور فشارهای بی بعد مختلف در شکل 6 آورده شده است. نتایج نشان می‌دهند که در اعداد فشردگی و همچنین فشارهای بی بعد پایین این اختلاف بیشتر می باشد.

## 5- نتیجه گیری

در مقاله حاضر، میرایی فیلم فشرده سیال در میکرورزوناتور با استفاده از تئوری میکروپولار جهت مدلسازی میدان سیال و همچنین تئوری گرادیان کرنش جهت مدلسازی میکروتیر مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. هدف بدست آوردن ضریب میرایی معادلی برای سیستم با بکارگیری تئوری های فوق می باشد. مدل پیشنهادی شامل یک میکروتیر دو سر گیردار است که توسط لایه‌های ثابتی در بالا و پایین آن احاطه شده است. فاصله بین این لایه‌ها و میکروتیر با هوا پر شده است. معادلات کوپل حاکم بر میدان سیال و ارتعاش عرضی تیر در حضور میدان فشار سیال با بکارگیری روش عددی گلرکین جداسازی شده و حل عددی شده‌اند. هدف از حل معادلات بدست آوردن مقادیر فاکتور کیفیت برای این میکروزروناتور است که یکی از پارامترهای مهم در طراحی بسیاری از طرح های در ابعاد میکرو می باشد. اثر پارامترهای میکروپولار روی مقادیر فاکتور کیفیت بررسی شده و نشان داده شده است که بکارگیری تئوری میکروپولار مقادیر فاکتور کیفیت را کمتر از مقادیر پیش بینی شده در حالت کلاسیک پیش بینی می‌نماید. سپس اثر طول مشخصه میکروتیر روی مقادیر فاکتور کیفیت بررسی و نشان داده است که بکار گیری تئوری گرادیان کرنش جهت مدل کردن میکرو تیر مقادیر فاکتور کیفیت را بیشتر از مقادیر حالت کلاسیک پیش بینی می‌نماید که با بکار گیری همزمان هر دو تئوری بسته به میزان پارامترهای میکروپولار و همین طور طول مشخصه بی بعد تیر هر کدام از حالات فوق می‌تواند اتفاق بیفتد. در ادامه تأثیر نسبت طول به پهنای میکروتیر و همین طورضخامت میکروتیر روی اختلاف اندازه فاکتور کیفیت در نتیجه بکارگیری تئوری های میکروپولار وگرادیان کرنش مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که در تیرهای با نسبت طول به پهنای بیشتر و همین طور ضخیم تر این اختلاف بیشتر می باشد. در انتها تأثیر عدد فشردگی و فشار بی بعد بر این اختلاف بررسی شد و در اعداد فشردگی و فشارهای بی بعد شده پایین اختلاف بیشتری مشاهده گردید.

## 6- مراجع

[1] A. Kucaba-Pietal, Microchannels flow modeling with the micro-polar fluid theory, *Bulletin of the polish Academy of sciences*, Vol. 53, pp. 209-214, 2004.

[2] A. Kucaba-Pietal, Applicability of the micropolar fluid theory in solving microfluidics problems, in *Proceeding of The First European Conference on Microfluidics*, Bologna, 2008.

[3] I. Papautsky, J.Brazzle, T. Ameel, A.B. Frazier, Laminar fluid behavior in microchannels using micropolar fluid theory, *Sensors and Actuators*, A, Vol. 73, No. 2, pp. 101-108, 1999.

[4] A. C. Eringen, Linear theory of micropolar viscoelasticity, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 5, pp. 191-204, 1967.

[5] S. Afrang, Small size and low loss resonator type DMTL phase shifter, *Microelectronics Journal*, Vol. 44, No. 4, pp. 442-453, 2013.

[6] R. Shabani, H. Hatami, F. G. Golzar, S. Tariverdilo, G. Rezazadeh, coupled vibration of a cantilever micro-beam submerged in a bounded incompressible domain, *Acta Mechanica*, Vol.224, pp.841-850, 2013.

[7] W.E. Newell, Miniaturization of tuning forks, *Science*, Vol. 161, pp. 1320–1326, 1968.

[8] J. J. Blech, On isothermal squeeze films, *Journal of Lubrication Technology* A, Vol. 105, pp. 615–620, 1983.

[9] J.D. Zook, D.W. Burns, H. Guckel, J .J. Sniegowski, R .L. Engelstad and Z. Feng, Characteristics of polysilicon resonant microbeams, *Sensors and Actuators* A, Vol. 35 , pp. 290–294, 1992.

[10] M. Bao, H. Yang, H. Yin and Y. Sun, Energy transfer model for squeeze-film air damping in low vacuum, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 12, pp. 341–346, 2002.

[11] B. Mccarthy, G. Adams, N. McGruer and D. Potter, A dynamic model, including contact bounce of an electrostatically actuated microswitch, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 11, pp. 276–283, 2002.

[12] C. Zhang.,G. Xu and Q. Jiang , Characterization of the squeeze film damping effect on the quality factor of a microbeam resonator, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 14, pp. 1302–1306, 2004.

[13] A. K. Pandey and R. Pratap, Effect of flexural modes on squeeze film damping in MEMS cantilever resonators, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 17, pp. 2475–2484, 2007.

[14] M. I. Younis and A. H. Nayfeh, Simulation of squeeze-film damping of microplates actuated by large electrostatic load, *ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. 2, pp. 101–112, 2007.

[15] S. Chaterjee, G. Pohit, Squeeze-film damping characteristics of cantilever microresonators for higher modes of flexural vibration, *International Journal of Engineering, Science and Technology*, Vol. 2, pp. 187-199, 2010.

[16] G. Ahmadi, Stability of linear micropolar elasic media, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 11,pp. 1111-1117, 1975.

[17] S. Afrang, Small size and low loss resonator type DMTL phase shifter, *Microelectronics Journal*, Vol. 44, No. 4, pp. 442-453, 2013.

[18] H. M. Sadeghi, Size- dependent dynamic pull-in instability of vibrating electrically actuated microbeams based on the strain gradient elastisity theory, *Act Astronautica*, Vol. 95, pp. 111-123, 2014.

[19] L. L. Ke, Y. Sh. Wang, Size effect on dynamic stability of functionally graded microbeams based on a modified couple stress theory, *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 342-350, 2011.

[20] A. Karami mohammadi, M. Abbasi, Investigation of the size effect on the vibrational behavior of an AFM microcantilever with a sidewall probe, using strain gradient elasticity theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 13,pp. 90-99, 2014. (In Persian)

[21] N. B. Naduvinamani and G. B. Marali, Dynamic Reynolds equation for micropolar fluid lubrication of porous slider bearings, *Journal of Marine Science and Technology* , Vol. 16, No. 3, pp. 182-180, 2008.

[22] P. Li, R. Hu and Y. Fang, A new model for squeeze film damping of electrically actuated microbeams under the effect of a static deflection, *Journal of micromechanics and microengineering*, Vol. 17,pp. 1242-1251, 2007.



[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25 ]
[ DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.10.6.3 ]