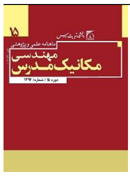
مجله مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1395، دوره 16، شماره 9، ص‌ص 186-194



ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل ارتعاشات یک تیر همراه با چاه غیرخطی انرژی تحت تحریک هارمونیک خارجی

علی ابراهیمی ممقانی[1]، سیامک اسماعیل زاده خادم[2*]

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

*تهران، صندوق پستی 14115-177، khadem@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 21 خرداد 1395
پذیرش: 20 مرداد 1395
ارائه در سایت: 24 شهریور 1395

کلید واژگان:
تیر اویلر برنولی
چاه غیرخطی انرژی
انشعابات هاپ
انشعابات زین اسبی
ناحیه منفصل فرکانسی

چکیده

در کار حاضر به تحلیل ارتعاشات یک تیر دوسرگیردار متصل به چاه غیرخطی انرژی (با فنر و دمپر غیرخطی) که تحت تحریک هارمونیک قرار دارد، پرداخته شده است. برای مدل کردن تیر از تئوری تیر اویلر-برنولی استفاده گردید و چاه غیرخطی انرژی نیز در مقاطع مختلف تیر وصل گردید و تأثیر پارامترهای مختلف بر روی رفتار دینامیک سیستم مورد تحلیل و بررسی قرار گیرند. همچنین شرایط لازم برای رخداد انشعابات هاپ و زین اسبی بررسی مطالعه شده است. ازآنجاکه در بررسی سیستم‌های ارتعاشاتی، به دست آوردن پاسخ فرکانسی به دلیل آن‌که بهترین محدوده کاهش ارتعاشات را نشان می‌دهد بسیار اهمیت دارد، روش متوسط‌گیری مختلط شونده برای حل سریع مسأله و یافتن پاسخ فرکانسی به کار گرفته شده است. از سوی دیگر برای صحه‌سنجی و مقایسه نتایج، از روش عددی (رانگ کوتای مرتبه چهارم) نیز استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهند که با نزدیک شدن محل نصب جاذب به تکیه‌گاه‌ها، احتمال رخداد انشعاب هاپ و زین اسبی به ترتیب، کاهش و افزایش می‌یابد و ناحیه منفصل فرکانسی در محدوده کوچک‌تری از دامنه تحریک خارجی تشکیل خواهد شد و پاسخ‌گذرای سیستم مدت زمان طولانی‌تری خواهد داشت. همچنین با افزایش دامنه نیروی تحریک خارجی، دامنه ماندگار سیستم به‌آرامی افزایش می‌یابد.

Vibration analysis of a beam under external periodic excitation using a nonlinear energy sink

Ali Ebrahimi Mamaghani, Siamak Esmaeilzade Khadem*

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
*P.O.B. 14115-177 Tehran, Iran, khadem@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 10 June 2016
Accepted 10 August 2016
Available Online 14 September 2016

Keywords:
Euler-Bernouli Beam
Nonlinear Energy Sink
Hopf Bifurcation
Saddle-node Bifurcations
Detached Resonance curve

ABSTRACT

This paper investigates vibration analysis of a clamped-clamped beam attached to a nonlinear energy sink (with nonlinear stiffness and damping) under an external harmonic force. The beam is modeled using the Euler-Bernouli beam theory. Different locations for nonlinear energy sink are chosen and the effects of various parameters on behavior of the system are considered. Required conditions for occurrence of the Saddle-node bifurcations and the Hopf bifurcations in the system are studied. In vibration analysis, the frequency response diagram of the system is very important because it shows the best regions for attenuation of vibration and is a good criterion for designing nonlinear energy sinks; hence Complexification-Averaging method is used to find the amplitude of oscillation in terms of excitation load simply. For validation and comparison, numerical simulation(Runge-Kuta method) is used. The results demonstrate that by approaching the position of nonlinear energy sink to the beam supports, probability of occurrence of the Hopf and the saddle-node bifurcations decreases and increases, respectively;detached response curve will be formed in smaller range of external amplitude force.Moreover, by increasing external amplitude force, the steady state amplitude of the system increases smoothly.

1-مقدمه

تحلیل دینامیک صنایع دریایی که در آب‌های عمیق وجود دارند، موضوع شمار زیادی از تحقیقات علمی است. در حقیقت، تجارب به‌دست‌آمده از این پژوهش‌ها می‌توانند در بسیاری از زمینه‌های مهندسی مانند خطوط انتقال نفت، حفاری و سیستم‌های انتقال قدرت مفید باشند.

به همین دلیل طی سال‌ها، تحلیل دینامیکی این سازه‌ها که در معرض جریان سیال وجود دارند، به‌طور گسترده مطالعه و بررسی شده‌اند [2,1]. دلیل اصلی ارتعاشات سازه‌های دریایی که منجر به خسارت و یا حتی شکست تجهیزات می‌شود، تقابل بین سازه و جریان سیال خارجی می‌باشد. به همین دلیل شماری از محققین نیز در این موضوع مطالعاتی انجام دادند [4,3]. درکل، به دلیل نیروهای هیدرودینامیکی، سازه‌های استوانه‌ای شکل تحت تأثیر ارتعاشات جانبی قرار می‌گیرند، مخصوصاً هنگامی‌که فرکانس اصلی سازه به فرکانس اصلی تحریک نزدیک باشد [5]. مطالعات در این زمینه ابتدا با مدل‌سازی خطی شروع شد [6] و سپس مدل‌های بهبودیافته‌ای با معادلات غیرخطی به مدل‌سازی لوله‌های حامل جریان داخلی پرداختند [7]. به همین دلیل، تحقیقات گوناگونی به‌منظور کنترل ارتعاشات این سیستم ها و جلوگیری از تغییر شکل‌های بزرگ در سازه‌ها (مانند تیرها، لوله‌ها و صفحات) ارائه شده‌اند. ازجمله این تحقیقات می‌توان به مطالعاتی در مورداستفاده از

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

A. Ebrahimi Mamaghani, S. Esmaeilzade Khadem, Vibration analysis of a beam under external periodic excitation using a nonlinear energy sink, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 9, pp. 186-194, 2016 (in Persian)

کنترلهای فعال اشاره نمود. این کنترلها متشکل از سیستم‌های مداربسته هستند که با توجه به تغییرات سیستم اصلی عمل می‌کنند [8, 9]. کنترل غیرفعال ارتعاشات سازه‌های دریایی تا به امروز به‌خوبی موردمطالعه قرار نگرفته است. همچنین کنترلهای فعال نیز به حس‌گر، تجهیزات و انرژی خارجی احتیاج دارند و در کل از راهکارهای پیچیده‌تری نسبت به کنترلهای غیرفعال استفاده می‌کنند. لازم به ذکر است که بازدهی کنترلهای غیرفعال مانند میراگر جرمی تنظیم شده[1]، نیز درصورتی‌که گستره فرکانس نیروی خارجی متغیر باشد به‌شدت پایین می‌آید.

در سال‌های اخیر چاه غیرخطی انرژی[2] به‌صورت گسترده‌ای، تحلیلی [10-12]و عددی [14,13]، به‌جای میراگرهای جرمی تنظیم شده، برای کاهش ارتعاشات سیستم‌های گسسته [15] و پیوسته [17,16] موردمطالعه قرارگرفته‌اند. از این جمله می‌توان به پژوهش احمدآبادی و خادم [18] اشاره کرد که کاهش ارتعاشات دامنه بالای یک سیستم دو درجه آزادی را با چاه غیرخطی انرژی را بررسی کردند. همچنین این دو محقق در تحقیقی دیگر [19] ارتعاشات خود تحریک یک دریل حفاری را مورد تحلیل و بررسی قراردادند. در ادامه کنی و همکاران [20] به طراحی و تحلیل یک چاه غیرخطی انرژی متصل به یک تیر تحت شرایط تکیه‌گاهی مختلف پرداختند و در پژوهشی دیگر کتی و همکاران [21] به کنترل ارتعاشات یک تیر غیرخطی همراه با یک چاه غیرخطی انرژی پرداختند. واکاکیس و همکاران [22] نیز به تحلیل انتقال انرژی هدفمند[3] توسط چاه غیرخطی انرژی در سیستم‌های مکانیکی پرداختند.

بر اساس مرور ادبیات، در این مقاله به شبیه‌سازی سازه‌های دریایی در اعماق دریا که تحت تأثیر جریان سیال خارجی می‌باشند پرداخته می‌شود. به همین منظور برای مدل کردن تیر از تئوری تیر اویلر-برنولی[4] استفاده خواهد شد. همچنین فرض خواهد شد یک نیروی هارمونیکی خارجی در کل طول تیر اثر خواهد کرد. از سوی دیگر یک جرم کوچک همراه با یک فنر و دمپر غیرخطی نیز به‌عنوان چاه غیرخطی انرژی در مقاطع مختلف تیر قرار خواهد گرفت و با رسم نمودارهای انشعابات زین اسبی[5]، انشعابات هاپ عام[6] و پاسخ فرکانسی[7]، تأثیرات استفاده از این جاذب در کنترل ارتعاشات یک تیر که تحت نیروی هارمونیکی خارجی متغیر است، تحلیل و بررسی خواهد شد.

2-مدل ریاضی

شکل 1 مدل کوپل شده یک تیر دوسرگیردار و یک چاه غیرخطی انرژی را نشان می‌دهد. برای تحلیل رفتار دینامیکی سیستم، بایستی با محاسبه روابط انرژی جنبشی و پتانسیل و کار نیروهای ناپایستار و استفاده از روش همیلتون، معادلات دینامیکی سیستم را استخراج نمود.

انرژی جنبشی کل سیستم (T_{tot}) که ترکیبی از انرژی جنبشی تیر (T_{b}) و چاه غیرخطی انرژی (T_{NES}) می‌باشد، به‌صورت رابطه (1) تعریف می‌شود:

$$T_{\mathrm{tot}} = T_{\mathrm{b}} + T_{\mathrm{NES}} \tag{1}$$

$$T_b = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{b}} A_b \int_0^L \dot{w}^2 dx = \frac{1}{2} m_{\mathrm{b}} \int_0^L \dot{w}^2 dx \tag{2}$$

$$T_{NES} = \frac{1}{2} m_{\mathrm{NES}} \dot{u}^2 \tag{3}$$

[1] Tunes Mass Damper (TMD)
[2] Nonlinear Energy Sink (NES)
[3] Target Energy Transfer (TET)
[4] Euler-Bernoulli beam theory
[5] Saddle-node bifurcations (SN)
[6] Generic Hopf bifurcations
[7] Frequency-response diagram

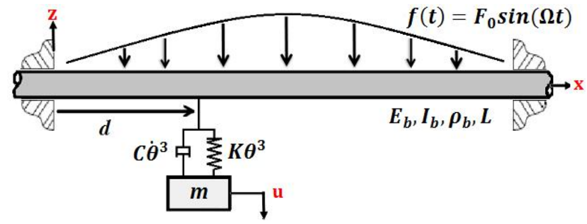


Fig. 1 A schematic view of horizontal clamped-clamped beam with nonlinear energy sink under harmonic external load

شکل 1 نمای کلی یک تیر دوسرگیردار افقی به همراه چاه غیرخطی نصب شده بر روی آن تحت نیروی هارمونیک خارجی

پارامتر L طول تیر، E_{b} مدول الاسیسیته تیر، I_{b} ممان اینرسی تیر، A_{b} مساحت سطح مقطع تیر، ρ_{b} چگالی تیر، m_{NES} جرم چاه غیرخطی انرژی و w(x,t) و u نیز به ترتیب جابجایی عرضی تیر و جابجایی مطلق چاه غیرخطی انرژی می‌باشند. انرژی پتانسیل کل سیستم (V_{tot}) که ترکیبی از انرژی پتانسیل تیر (V_{b}) و انرژی پتانسیل چاه غیرخطی انرژی (V_{NES}) می‌باشد نیز از رابطه (4) استخراج می‌شود:

$$V_{\mathrm{tot}} = V_{\mathrm{b}} + V_{\mathrm{NES}} \tag{4}$$

$$V_{\mathrm{b}} = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{b}} A_{\mathrm{b}} \int_0^L E_{\mathrm{b}} I_{\mathrm{b}} w_{\mathrm{xx}}^2 dx \tag{5}$$

$$V_{\mathrm{NES}} = \frac{1}{4} K[u - w \times \delta(x-d)]^4 \tag{6}$$

در رابطه (6) نیز $\delta(x)$ معرف تابع دلتای دیراک[8] و K مقدار فنریت چاه غیرخطی انرژی و d فاصله محل نصب جاذب از تکیه‌گاه تیر می‌باشد. در ادامه نیز برای استخراج کارهای ناپایستار از رابطه (7) استفاده خواهد شد:

$$W_{\mathrm{nc}} = F_0 \cos(\Omega t) \times w - \frac{1}{2} C \times [\dot{u} - \dot{w} \times \delta(x-d)]^4 \tag{7}$$

در رابطه (7) نیز C مقدار دمپینگ و Ω و F_0 به ترتیب فرکانس و دامنه تحریک خارجی می‌باشد. درنهایت با به‌کارگیری اصل همیلتون (رابطه (8))

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T_{\mathrm{tot}} - \delta V_{\mathrm{tot}} + \delta W_{\mathrm{nc}}) dt = 0 \tag{8}$$

معادلات حاکم بر سیستم به‌صورت معادلات (9) و (10) به دست خواهند آمد:

$$E_b I_b w_{xxxx} + \rho_{\mathrm{b}} A_{\mathrm{b}} \ddot{w} + K(w \times \delta(x-d) - u)^3 + C(\dot{w} \times \delta(x-d) - \dot{u})^3 = F_0 \cos(\Omega t) \tag{9}$$

$$m\ddot{u} + K\big(u - w \times \delta(x-d)\big)^3 + C(\dot{u} - \dot{w} \times \delta(x-d))^3 = 0 \tag{10}$$

برای جداسازی معادلات زمان و مکان با روش گالرکین[9]، از شکل مودهای یک تیر دوسرگیردار استفاده خواهد شد [23]:

$$\varphi_j(x) = \cosh(\lambda_j x) - \cos(\lambda_j x) - \frac{\sinh(\lambda_j l') - \sin(\lambda_j l')}{\cosh(\lambda_j l') - \cos(\lambda_j l')} \times [\sinh(\lambda_j x) - \sin(\lambda_j x)] \tag{11}$$

در رابطه (11) مقدار $\lambda_1 l'$ برای مود اول یک تیر دوسرگیردار عبارت است از: $\lambda_1 l' = 4.73$ که این مقدار از رابطه فرکانسی $\cosh(x)\cos(x) = 1$ به دست می‌آید. از سوی دیگر در مرجع [24] اثبات شده است که اگر در یک سیستم تحت ارتعاشات واداشته هارمونیکی یا تحریک با پهنای باند کوچک[10]،

[8] Delta Dirac Function
[9] Galerkin method
[10] Narrow band excitation

هنگامی‌که فرکانس‌های طبیعی سیستم اصلی به‌اندازه کافی از هم جدا باشند، می‌توان سیستم را یک مدل دو درجه آزادی در نظر گرفت که شامل چاه غیرخطی انرژی و سیستم اصلی منطبق بر فرکانس مورد نظر باشد. در این حالت با توجه به محاسبات انجام شده، می‌توان سیستم را به‌صورت دو درجه آزادی شامل مد اول (اصلی) تیر و چاه غیرخطی انرژی در نظر گرفت. در ادامه برای سادگی مقادیر بدون بعد رابطه (12) تعریف می‌شوند:

$$\bar{w} = \frac{w}{L}, \bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{u} = \frac{u}{L}, \bar{t} = \frac{t}{\tau}$$
$$\bar{d} = \frac{d}{L}, \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\tau}, \varepsilon = \frac{m_{\mathrm{NES}}}{\rho_{\mathrm{b}} A_{\mathrm{b}} L} \qquad (12)$$

که در این رابطه τ طبق رابطه (13) تعریف می‌شود:

$$\tau = \frac{L^2}{\lambda_1^2}\sqrt{\frac{\rho_b A_b}{E_b I_b}} \qquad (13)$$

با قرار دادن پارامترهای رابطه (13) در معادلات (9) و (10) و حذف علامت بار برای سادگی،معادلات بدون بعد حاکم بر سیستم مطابق رابطه (14) به دست خواهند آمد:

$$w_{xxxx} + \ddot{w} + \varepsilon\beta(w \times \delta(\mathrm{x}-\mathrm{d}) - u)^3$$
$$+\varepsilon\alpha(\dot{\mathrm{w}} \times \delta(\mathrm{x}-\mathrm{d}) - \dot{u})\text{^}3 = \varepsilon F\cos(\Omega t) \qquad (14)$$

$$\varepsilon\ddot{u} + \varepsilon\beta\big(u - w \times \delta(\mathrm{x}-\mathrm{d})\big)^3$$
$$+ \varepsilon\alpha\big(\dot{u} - \dot{w} \times \delta(\mathrm{x}-\mathrm{d})\big)^3 = 0 \qquad (15)$$

که در رابطه‌های (14) و (15) پارامترهای ظاهرشده بدون بعد، به‌صورت رابطه (16) تعریف خواهند شد:

$$F = \frac{F_0 L^4 \rho_{\mathrm{b}} A_{\mathrm{b}}}{\lambda_1^4 m_{\mathrm{NES}} E_{\mathrm{b}} I_{\mathrm{b}}} \ , \ \alpha = \frac{C L^2\sqrt{\rho_{\mathrm{b}} A_{\mathrm{b}}}}{\lambda_1^2 m_{\mathrm{NES}}\sqrt{E_{\mathrm{b}} I_{\mathrm{b}}}}$$
$$\beta = \frac{K L^6 \rho_{\mathrm{b}} A_{\mathrm{b}}}{\lambda_1^4 m_{\mathrm{NES}} E_{\mathrm{b}} I_{\mathrm{b}}} \qquad (16)$$

در ادامه با استفاده از روش جداسازی گالرکین معادلات با مشتقات جزئی تبدیل به معادلات دیفرانسیل معمولی خواهند شد، بنابراین جابجایی عرضی تیر را با رابطه (17) تخمین زده می‌شود:

$$w(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) q_j(x) \qquad (17)$$

که در رابطه (17)، q_j، j-امین مختصات عمومی وابسته به زمان و $\varphi_j(x)$، j-امین تابع ویژه یک تیر دوسرگیردار می‌باشد. دقت شود که در رابطه (17) توابع $\varphi_j(x)$ نرمالیزه شده‌اند (به عبارت دیگر $\int_0^1 \phi_i \phi_j\,dx = \delta_{ij}$). با قرار دادن رابطه (17) در معادلات (14) و (15) و انتگرال‌گیری بر روی تیر و با در نظر گرفتن یک مد برای تیر روابط (18) و (19) به دست می‌آیند:

$$+\alpha(\phi_1(d) \times \dot{q}_1(t) - \dot{u})^3] = \varepsilon F\cos(\Omega t) \qquad (18)$$

$$\varepsilon\ddot{u} + \varepsilon\beta\big(u - \phi_1(d) \times q_1(t)\big)^3$$
$$+\varepsilon\alpha(\dot{u} - \phi_1(d) \times \dot{q}_1(t))^3 = 0 \qquad (19)$$

ضرایب معادلات (18) و (19) که تابعی از پارامترهای فیزیکی و هندسی سیستم هستند در پیوست (الف) آورده شده‌اند. در معادلات (18) و (19) عدم تقارن معادلات باعث پیچیدگی می‌شود. به همین منظور،برای به دست آوردن معادلات متقارن، با فرض رابطه $q_1'(t) = \phi_1(d) \times q_1(t)$ و همچنین روابط $\phi_1(d) = \phi_{1d}$، $m_{11}' = m_{11}/\phi_{1d}^2$ و $k_{11}' = k_{11}/\phi_{1d}^2$ معادلات به شکل معادلات (20) و (21) به دست خواهند آمد:

$$m_{11}'\ddot{q}_1'(t) + k_{11}' q_1'(t)$$
$$+\varepsilon[\beta(q_1'(t) - u)^3 + \alpha(\dot{q}_1'(t) - \dot{u})^3] = \varepsilon\frac{F}{\phi_{1\mathrm{d}}}\cos(\Omega t) \qquad (20)$$

$$\varepsilon\ddot{u} + \varepsilon\beta\big(u - q_1'(t)\big)^3 + \varepsilon\alpha\big(\dot{u} - \dot{q}_1'(t)\big)^3 = 0 \qquad (21)$$

در رابطه (20) و (21)، $q_1(t)$ نشان‌دهنده جابجایی مود اول و $q_1'(t)$ نشان‌دهنده جابجایی تیر در محل اتصال به چاه غیرخطی انرژی می‌باشد. در ادامه برای سادگی، معادلات بدون علامت پریم آورده خواهند شد.

3-حل تحلیلی

مطابق ادبیات فن، با در نظر گرفتن نسبت جرمی کوچک ($1 \gg \varepsilon$)، با بررسی سیستم حول فرکانس طبیعی و همچنین با فرض روابط $k_{11} = m_{11}(\Omega^2 + \varepsilon\sigma)$، $q_1(t) = x_1(t)$ و $v(t) = x_2(t)$ می‌توان نوشت:

$$m_{11}\ddot{x}_1(t) + m_{11}(\Omega^2 + \varepsilon\sigma)x_1(t)$$
$$+\varepsilon[\beta\big(x_1(t) - x_2(t)\big)^3 + \alpha(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t))^3]$$
$$= \varepsilon\frac{F}{\phi_{1d}}\cos(\Omega t) \qquad (22)$$

$$\varepsilon\ddot{u} + \varepsilon\beta(x_2(t) - x_1(t))^3 + \varepsilon\alpha(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t))^3 = 0 \qquad (23)$$

3-1- روش متوسط گیری مختلط شونده

برای به دست آوردن رفتار پاسخ حالت پایدار سیستم، از روش متوسط گیری مختلط شونده [25] استفاده خواهد شد. با استفاده از این روش، دو بخش کند (مربوط به دامنه ارتعاشات تیر و جاذب) و تند (مربوط به فرکانس طبیعی سیستم) حرکت از یکدیگر جدا می‌شوند. با تغییر مختصات سیستم به مختصه‌های مرکز جرم ($v(t) = x_1(t) + \varepsilon x_2(t)$) و جابجایی نسبی ($w(t) = x_1(t) - \varepsilon x_2(t)$) و همچنین فرض یک حرکت غالب برای هر دو جابجایی تیر و جاذب که شامل حرکت با فرکانس طبیعی سیستم می‌باشد ($(t) = u_1(t), w(t) = w_1(t)$) رابطه (24) بدست می‌آید ($i = \sqrt{-1}$):

$$\psi_1(t) = \dot{u}_1(t) + i\Omega u_1(t)\ , \psi_2(t) = \dot{w}_1(t) + i\Omega w_1(t) \qquad (24)$$

با محاسبات ریاضی معادله (25) به دست خواهد آمد:

$$u_1(t) = \tfrac{\psi_1(t) + \psi_1^*(t)}{2i\Omega},\ \ w_1(t) = \tfrac{\psi_2(t) + \psi_2^*(t)}{2i\Omega}$$
$$\dot{u}_1(t) = \tfrac{\psi_1(t) + \psi_1^*(t)}{2},\ \ \dot{w}_1(t) = \tfrac{\psi_2(t) + \psi_2^*(t)}{2}$$
$$\ddot{u}_1(t) = \dot{\psi}_1(t) - \tfrac{i\Omega}{2}\big(\psi_1(t) + \psi_1^*(t)\big),$$
$$\ddot{w}_1(t) = \dot{\psi}_2(t) - \frac{i\Omega}{2}(\psi_2(t) + \psi_2^*(t)) \qquad (25)$$

در رابطه (25) علامت ستاره، نشان‌دهنده مزدوج می‌باشد. جدایی قسمت تند و کند رفتار ارتعاشی سیستم با تعریف رابطه (26) امکان‌پذیر می‌شود:

$$\psi_1(t) = \phi_1 e^{i\Omega t}\ \ ,\ \ \psi_1^*(t) = \phi_1^* e^{-i\Omega t}$$
$$\psi_2(t) = \phi_2 e^{i\Omega t}, \psi_2^*(t) = \phi_2^* e^{-i\Omega t} \qquad (26)$$
$$m_{11}\ddot{q}_1(t) + k_{11} q_1(t) + \varepsilon\phi_1(d)[\beta(\phi_1(d) \times q_1(t) - u)^3$$

در رابطه (26) $e^{i\Omega t}$ قسمت سریع حرکت و مربوط به حرکت و فرکانس طبیعی سیستم است و ϕ_1 و ϕ_2 به ترتیب دامنه مختلط حرکت مرکز جرم تیر و جاذب و حرکت نسبی تیر و جاذب را نشان می‌دهند. با قرار دان معادلات (26) در معادلات (23)، رابطه حاکم بر قسمت کند سیستم به‌صورت معادلات (27) و (28) به دست خواهد آمد (نگه‌داشتن ترم‌های شامل $e^{i\Omega t}$ و فاکتور گرفتن از ضریب $e^{i\Omega t}$):

$$\dot{\phi}_1(t) + \frac{\varepsilon}{8(1+\varepsilon)\Omega^3}(4F(1+\varepsilon)\Omega^3\phi_{1d} - 4i\phi_2(t)\Omega^3$$
$$-4i\phi_1(t)\Omega^4 + 3\phi_2(t)|\phi_2(t)|^2\alpha(1+\varepsilon)\Omega^3$$
$$+4i\phi_2(t)\varepsilon\sigma\Omega^2 - 3\phi_2(t)|\phi_2(t)|^2\alpha(1+\varepsilon)\Omega^3\phi_{1d}^2$$
$$+4i\phi_1(t)\sigma\Omega^2 + 3i\phi_2(t)|\phi_2(t)|^2\beta\phi_{1d}^2(1+\varepsilon)$$
$$-3i\phi_2(t)|\phi_2(t)|^2\beta(1+\varepsilon)) = 0 \qquad (27)$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi}_2(t) + \frac{1}{8(1+\varepsilon)\Omega^3}\big(&4i\phi_1(t)\varepsilon\sigma\Omega^3 \\
&-3\phi_2(t)|\phi_2(t)|^2\alpha\varepsilon(1+\varepsilon)\Omega^3\phi_{1d}^2 \\
&+4F\varepsilon(1+\varepsilon)\Omega^3\phi_{1d} + 4i\phi_2(t)\varepsilon^2\sigma\Omega^2 \\
&-3\phi_2(t)|\phi_2(t)|^2\alpha(1+\varepsilon)\Omega^3 \\
&+3i\phi_2(t)|\phi_2(t)|^2\beta(1+\varepsilon) \\
&+3i\phi_2(t)|\phi_2(t)|^2\beta\varepsilon(1+\varepsilon)\phi_{1d}^2 - 4i\phi_2(t)\Omega^4\big) = 0
\end{aligned} \tag{28}
$$

2-3- تحلیل انشعابات زین اسبی

بررسی نقاط سکون[1] معادلات سیستم اهمیت بالایی دارد چراکه نشان‌دهنده دامنه حرکت نوسانی حالت ماندگار[2] سیستم می‌باشد. به همین دلیل با برابر صفر قرار دادن مشتقات و وابستگی‌های زمانی و مقداری محاسبات ریاضی (استخراج ϕ_1 از رابطه (27) و قرار دادن در رابطه (28)) به صورت رابطه (29) به دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
&[9(\alpha^2\Omega^6+\beta^2)(\phi_{1d}^4\Omega^4 - 2\phi_{1d}^4\Omega^2 + \sigma^2)]|\phi_{20}|^6 \\
&+24\beta\sigma\Omega^4(\phi_{1d}^2\Omega^2 - \sigma)|\phi_{20}|^4 + [16\Omega^8\sigma^2]|\phi_{20}|^2 \\
&-16F^2\phi_{1d}^2\Omega^{10} = 0
\end{aligned} \tag{29}
$$

در رابطه (29) ϕ_{20} نقطه سکون (تعادل) تابع ϕ_2 می‌باشد. به‌عبارت دیگر ϕ_{2f} تخمین مناسبی از $w(t)$ می‌باشد و هرچه مقدار بزرگ‌تری داشته باشد و هم‌زمان ϕ_{10} مقدار کوچک‌تری داشته باشد، چاه غیرخطی انرژی کارایی بهتری خواهد داشت. با فرض $S = |\phi_{20}|^2$ رابطه (29) را می‌توان به صورت رابطه (30) نوشت:

$$
\begin{aligned}
&[9(\alpha^2\Omega^6+\beta^2)(\phi_{1d}^4\Omega^4 - 2\phi_{1d}^4\Omega^2 + \sigma^2)]S^3 \\
&+24\beta\sigma\Omega^4(\phi_{1d}^2\Omega^2 - \sigma)S^2 + [16\Omega^8\sigma^2]S \\
&-16F^2\phi_{1d}^2\Omega^{10} = 0
\end{aligned} \tag{30}
$$

رابطه (30) بسته به مقدار پارامترهای سیستم، یک یا سه ریشه خواهد داشت. به دلیل پیوستگی سیستم نیز انتظار می‌رود که یک سری نقاط انشعاب، شامل انشعابات زین اسبی و انشعاب هاپ عام در سیستم رخ دهد. برای تعیین محل انشعابات زین اسبی، علاوه بر برقرار بودن رابطه (30)، مشتق این عبارت نیز باید برابر صفر باشد [26]:

$$
\begin{aligned}
&[27(\alpha^2\Omega^6+\beta^2)(\phi_{1d}^4\Omega^4 - 2\phi_{1d}^4\Omega^2 + \sigma^2)]S^2 \\
&+48\beta\sigma\Omega^4(\phi_{1d}^2\Omega^2 - \sigma)S + 16\Omega^8\sigma^2 = 0
\end{aligned} \tag{31}
$$

3-3- تحلیل انشعابات هاپ

انشعاب هاپ عام ناحیه‌ای است که پاسخ کند سیستم در آن از حالت استاتیکی، دینامیکی شده و قسمت حقیقی مقادیر ویژه سیستم تغییر علامت می‌دهند. برای به دست آوردن این انشعاب، مقادیر اغتشاشی[3] مختلط بسیار کوچک $\delta_1(t)$ و $\delta_2(t)$ حول نقاط تعادل،مطابق رابطه (32) تعریف می‌شوند:

$$
\phi_1(t) = \phi_{10} + \delta_1(t), \phi_2(t) = \phi_{20} + \delta_2(t) \tag{32}
$$

با قرار دادن رابطه (32) در رابطه (27) و (28) و صرف‌نظر کردن از ترم‌های آشفتگی، معادلات دیفرانسیل کوپل شده حاکم (حول نقاط تعادل) به‌صورت روابط (33) و (34) به دست می‌آیند:

$$
\begin{aligned}
\dot{\delta}_1 = &\frac{\delta_1 i(\sigma - \Omega^2)}{2(1+\varepsilon)\Omega} + \frac{3i\varepsilon\delta_2^*(\alpha\Omega^3 - i\beta - i\phi_{1d}^2\beta)\phi_{20}^2}{8\Omega^3} \\
&+\frac{\varepsilon\delta_2}{8(1+\varepsilon)\Omega^3}\big(6|\phi_{20}|^2\alpha\Omega^3 + 6i\phi_{1d}^2|\phi_{20}|^2\beta(1+\varepsilon) \\
&+4i\Omega^4 - 6\phi_{1d}^2|\phi_{20}|^2\alpha(1+\varepsilon)\Omega^3 \\
&+6i|\phi_{20}|^2\beta(1+\varepsilon) + 4i\varepsilon\sigma\Omega^2\big)
\end{aligned} \tag{33}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\delta}_2 = &\frac{\delta_1 i(\varepsilon\sigma + \Omega^2)}{2(1+\varepsilon)\Omega} + \frac{3i\varepsilon\delta_2^*(\varepsilon\phi_{1d}^2 + 1)\beta\phi_{20}^2}{8\Omega^3} \\
&+i\delta_2\Big(\frac{i\phi_{1d}^2\alpha\varepsilon(1+\varepsilon)\Omega + i\alpha\Omega(1+\varepsilon) + \varepsilon\sigma - \Omega^2}{2(1+\varepsilon)\Omega} \\
&+\frac{3(\phi_{1d}^2 + 1)\beta|\phi_{20}|^2}{4\Omega^3}\Big)
\end{aligned} \tag{34}
$$

رابطه چندجمله‌ای مشخصه[4] سیستم کوپل شده خطی معادلات (33) و (34) به‌صورت رابطه (35) می‌باشد:

$$
\mu^4 + \gamma_1\mu^3 + \gamma_2\mu^2 + \gamma_3\mu + \gamma_4 = 0 \tag{35}
$$

ضرایب این رابطه در پیوست (ب) آورده شده‌اند. درصورتی‌که در رابطه (35) انشعاب هاپ رخ می‌دهد که این رابطه دارای یک جفت ریشه مختلط مزدوج خالص[5] به‌صورت $\mu = \pm i\omega_H$ باشد. درواقع ω_H فرکانس مشخصه[6] مدارهای متناوب موجود در سیستم و تولیدشده از انشعابات نقاط سکون می‌باشد. با جدا کردن بخش حقیقی و موهومی، روابط (36) و (37) به دست می‌آیند:

$$
\gamma_3^2 - \gamma_2\gamma_3\gamma_1 + \gamma_4\gamma_1^2 = 0 \tag{36}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_H^2 = \frac{\gamma_3}{\gamma_1} \to \omega_H = \pm\Big[&\frac{\varepsilon}{96\Omega^6\phi_{20}^2\alpha(\phi_{1d}^2\varepsilon + 1)} \\
&\times\big(24\alpha\varepsilon\sigma^2\phi_{20}^2 + 24\phi_{1d}^2\alpha\Omega^8\big)\Big]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{37}
$$

علاوه بر رابطه (36) که شرط لازم برای رخداد انشعاب هاپ است. دامنه نوسانات نیز باید در رابطه (29) نیز صدق کند [22]. با حذف عبارت $S = |\phi_{20}|^2$ از این دو رابطه کوپل شده، مرز رخداد انشعاب هاپ در فضای پارامترها به دست می‌آید.

4- حل عددی

معادلات کوپل شده تیر و جاذب (معادلات (22) و (23)) به فضای حالت انتقال داده می‌شوند و تبدیل به معادلات مرتبه اول می‌شوند. با استفاده از نرم‌افزار متلب[7]، این معادلات به‌صورت عددی (رانگ کوتای مرتبه چهارم) حل خواهند شد.

5- نتایج حل تحلیلی و عددی

در این قسمت برای تحلیل دینامیکی رفتار سیستم، مثال‌های عددی با در نظر گرفتن L=5m و D=0.5m و $\rho_b A_b$=200kg/m و E_b = 207GPa و همچنین $\omega_1 = \sqrt{k_{11}/m_{11}} = 1$ از رابطه (18) تشریح می‌شوند. ابتدا رخداد انشعابات زین اسبی و هاپ عام بررسی می‌شوند. با توجه به تقارن در شکل سیستم و شرایط مرزی سیستم، احتمال رخداد انشعابات زین اسبی و هاپ در نیمی از طول تیر بررسی و رسم می‌شوند. شکل 2 به ازای (σ=1) محل رخداد انشعاب زین اسبی در فضای پارامترهای بی‌بعدd، F و αکه به ترتیب فاصله محل نصب جاذب از تکیه‌گاه تیر، دامنه نیروی تحریک خارجی و دمپینگ چاه غیرخطی انرژی هستند را نشان می‌دهد مطابق شکل انشعابات زین اسبی در نواحی 0<d<0.28 و 1<d<0.72 رخ می‌دهند. این بدان معنا می‌باشد که اگر جاذب در سمت تکیه‌گاه‌ها قرار گیرد، انشعابات زین اسبی رخ می‌دهد. همچنین با افزایش فاصله محل نصب جاذب از تکیه‌گاه‌ها، محدوده تحریک دامنه خارجی برای این پدیده کاهش می‌یابد، چراکه در تکیه‌گاه‌ها دامنه ارتعاشات کوچک‌تر می‌باشد و لذا در نزدیک تکیه‌گاه‌ها، نیاز به دامنه نیروی تحریک بزرگ‌تری می‌باشد. در ضمن انشعاب زین اسبی به اندازه پارامتر

[1] Fixed points
[2] Steady state
[3] Perturbation

[4] Characteristic polynomial
[5] Pure
[6] Characteristic frequency
[7] MATLAB software

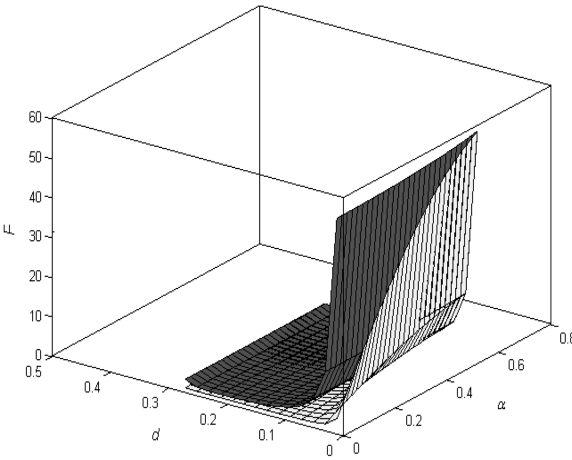


Fig. 2 The existence of the saddle-node bifurcations in the non-dimensional parameter space of *F*, *α* and *d* for *σ*=1

شکل 2 رخداد انشعاب زین اسبی در فضای بی‌بعد پارامتری *d* (فاصله جاذب از تکیه‌گاه)، *F* (دامنه تحریک خارجی) و α (دمپینگ جاذب) به ازای *σ*=1

میزان[1] (σ) شدیداً وابسته است، به‌طور مثال به ازای (σ=3) در تمام طول تیر انشعاب زین اسبی رخ می‌دهد.

محل رخداد انشعاب هاپ در فضای پارامتری بی‌بعد *d*، *F* و α به ازای (*σ*=1) در شکل 3 نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است به ازای (*σ*=1) با نصب جاذب در کل طول تیر انشعاب هاپ رخ می‌دهد. همانند انشعاب زین اسبی، با افزایش فاصله از تکیه‌گاه‌ها محدوده دامنه تحریک خارجی کاهش می‌یابد. با بررسی‌های صورت گرفته نشان داده شد که برخلاف انشعاب زین اسبی، رخداد انشعاب هاپ وابستگی بالایی به پارامتر میزان (σ) ندارد.

مباحث و نمودارهای ذکرشده نشان می‌دهند که به ازای دامنه‌های تحریک خارجی متفاوت، می‌توان جاذب را در مقاطع مختلف تیر قرارداد. این کار با بررسی نمودارهای انشعاب زین اسبی، هاپ در صفحه *F* و *α* انجام می‌شود [22]. با توجه به نمودارهای انشعاب زین اسبی و هاپ و همچنین به دلیل تقارن در شرایط تکیه‌گاهی، این بررسی‌ها را در سه مقطع مختلف

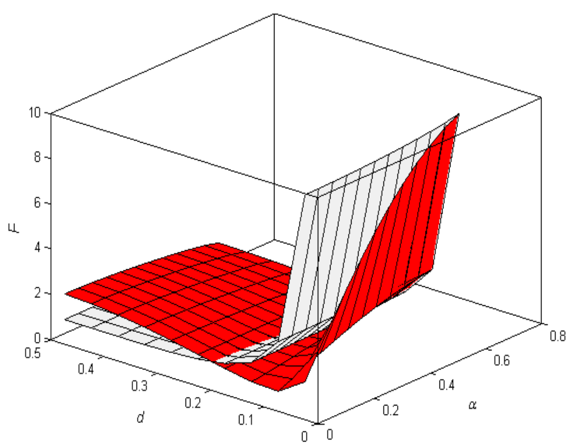


Fig. 3 The existence of the Hopf bifurcations in the non-dimensional parameter space of *F*, *α* and *d* for *σ*=1

شکل 3 رخداد انشعاب هاپ در فضای بی‌بعد پارامتری *d* (فاصله جاذب از تکیه‌گاه)، *F* (دامنه تحریک خارجی) و α (دمپینگ جاذب) به ازای *σ*=1

[1] Detuning parameter

(*d*=0.5 و *d*=0.24 و *d*=0.12) انجام خواهند شد و سپس در پارامترهای مناسب انتخاب شده نمودار پاسخ فرکانسی (نمودار دامنه برحسب پارامتر میزان) رسم می‌شوند. همان‌طور در ادبیات فنی هم نشان داده شده است، ناپایداری‌های انشعابات (زین اسبی و هاپ) فقط به ازای مقادیر کم دمپینگ چاه غیرخطی انرژی رخ می‌دهند [22].

مقطع اول در وسط تیر (*d*=0.5) انتخاب شده است. اگر جاذب در وسط تیر قرار گیرد، پارامتر مکانی سیستم ϕ_{1d} = 1.5881 است. در این مقطع از تیر مطابق شکل 4 (که برشی از شکل 2 و 3 در *d*=0.5 می‌باشد)، انشعابات زین اسبی در سیستم رخ نمی‌دهد. بر اساس اینکه پارامترهای سیستم در کدام ناحیه قرار گیرد، رفتار ارتعاشی سیستم متفاوت می‌باشد. به همین دلیل نقاط 1، 2 و 3 در سه ناحیه مختلف از صفحه *F* و α انتخاب می‌شوند و دیاگرام فرکانسی آن‌ها موردبررسی قرار می‌گیرند.

مقطع بعدی در پارامترهای مکانی که جاذب در آن قرار داده شده است، به‌صورت*d*=0.24 و ϕ_{1d} = 0.5712 می‌باشد. مطابق شکل 5(که برشی از شکل‌های 2 و 3 در *d*=0.24 می‌باشد)، در این حالت انشعاب زین اسبی رخ می‌دهد و برای بررسی رفتار دینامیکی سیستم، نقاط کاری 4، 5، 6 و 7 انتخاب می‌شوند.

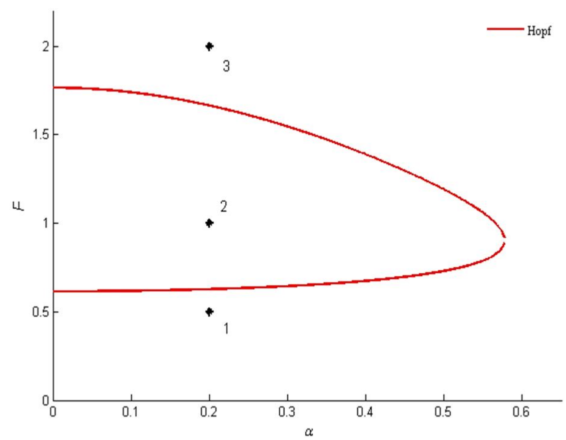


Fig. 4 The occurrence of Hopf and saddle-node bifurcations for *d*=0.5 and *σ*=1

شکل 4 رخداد انشعاب هاپ و زین اسبی زمانی که جاذب در وسط تیر قرار می‌گیرد (*σ*=1, *d*=0.5)

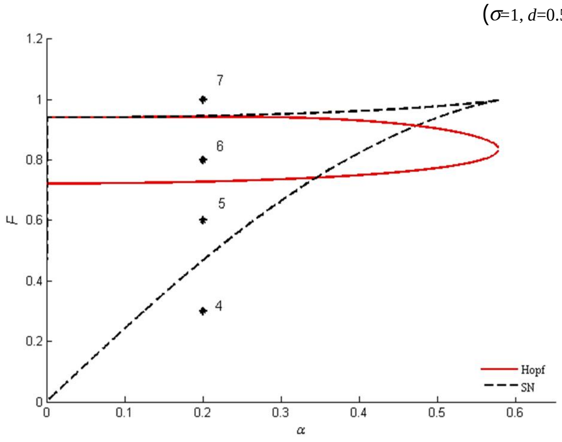


Fig. 5 The occurrence of Hopf and saddle-node bifurcations for *d*=0.24 and *σ*=1

شکل 5 رخداد انشعاب هاپ و زین اسبی زمانی که جاذب بین تکیه‌گاه و وسط تیر قرار می‌گیرد (*σ*=1, *d*=0.24)

مقطع آخری که برای نصب جاذب ارتعاشات انتخاب می‌شود نزدیک تکیه‌گاه تیر می‌باشد و در این حالت d=0.12 و ϕ_{1d} = 0.2624 خواهد بود. مطابق شکل 6، مرزهای رخداد انشعاب هاپ و زین اسبی تقریباً بر روی‌هم قرار می‌گیرند. در این حالت هم نقاط کاری 8، 9 و 10 انتخاب و بررسی خواهند شد. حال برای بررسی دقیق‌تر سیستم، در نقاط مذکور نمودار پاسخ فرکانسی سیستم را رسم و در مورد آن‌ها بحث می‌شود. به ازای پارامترهای نقطه 1 در شکل 4 (که زیر ناحیه انشعاب هاپ قرار دارد)، همان‌طور که در شکل 7 قابل ملاحظه می‌باشد، سه دسته جواب در سیستم وجود دارد (پاسخ پایدار نوسانی دامنه پایین[1]، پاسخ‌های ناپایدار با انشعاب زین اسبی و انشعاب هاپ).

شکل 8، دیاگرام فرکانسی سیستم را به ازای پارامترهای نقطه 2 در شکل 7 (که داخل ناحیه انشعاب هاپ قرار دارد) نشان می‌دهد. در این حالت علاوه بر انواع پاسخ‌های موجود در شکل 7، پاسخ پایدار نوسانی دامنه بالا[2] در ناحیه مثبت پارامتر میزان ($3.1<\sigma<5.1$) به وجود می‌آید که به‌صورت یک ناحیه فرکانسی منفصل[3] در شکل قابل ملاحظه می‌باشد.

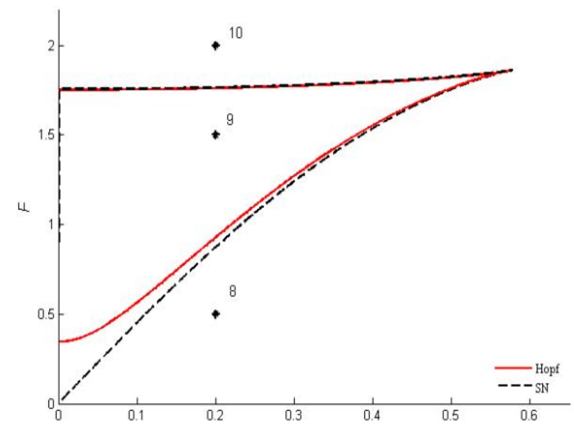


Fig. 6 The occurrence of Hopf and saddle-node bifurcations for d=0.12 and σ=1

شکل 6 رخداد انشعاب هاپ و زین اسبی زمانی که جاذب نزدیک تکیه‌گاه تیر قرار می‌گیرد (σ=1, d=0.12)

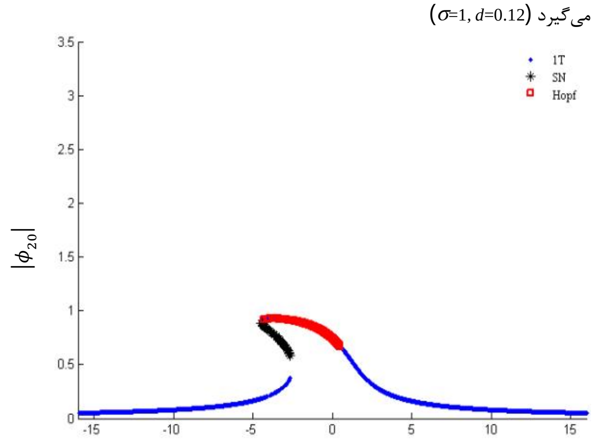


Fig. 7 The Frequency-response diagram of the system for d=0.5, F=0.5 and α=0.2 (point 1 in Fig. 4)

شکل 7 پاسخ فرکانسی سیستم به ازای پارامترهای نقطه 1 در شکل 4(d=0.5, F=0.5, α=0.2)

[1] periodic motion (1T)
[2] High amplitude periodic motion
[3] Detached Resonance Curve (DRC)

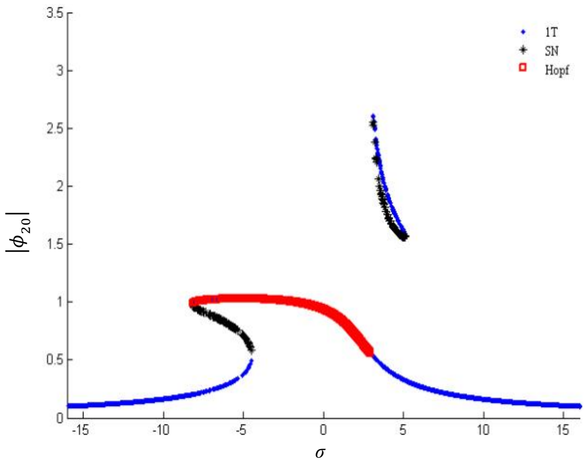


Fig. 8 The Frequency-response diagram of the system for d=0.5, F=1 and α=0.2 (point 1 in Fig. 4)

شکل 8 پاسخ فرکانسی سیستم به ازای پارامترهای نقطه 2 در شکل 4(d=0.5, F=1, α=0.2)

به ازای پارامترهای شکل 8 و به ازای (σ=-6) سیستم دارای دو نوع حرکت پاسخ مدوله ضعیف، پاسخ پایدار دامنه پایین[4] می‌باشد که با رسم پاسخ زمانی این سیستم در شکل 9، مشاهده می‌شود که سیستم بعد از رژیم گذرا، جذب پاسخ پایدار دامنه پایین خواهد شد. همچنین به ازای (σ=4) سیستم دارای دو نوع حرکت پاسخ پایدار، پاسخ پایدار دامنه پایین می‌باشد که با رسم پاسخ زمانی این سیستم نیز مشخص شد که سیستم جذب پاسخ پایدار دامنه پایین (با مقدار دامنه 0.28) می‌شود.

به ازای پارامترهای نقطه 3 در شکل 4(که بالای ناحیه انشعاب هاپ قرار دارد)، دیاگرام فرکانسی در شکل 10 رسم شده است. همان‌طور که مشخص است نواحی مربوط به انشعابات هاپ و زین اسبی به ترتیب به دو و سه قسمت تقسیم شده‌اند و نسبت به شکل 7 و شکل 8 بزرگ‌تر شده‌اند. از سوی دیگر ناحیه منفصل فرکانسی نیز به ناحیه پایدار دامنه پایین متصل شده است که در اثر این اتصال، نواحی ناپایدار زین اسبی به دو قسمت مجزا تقسیم شده‌اند.

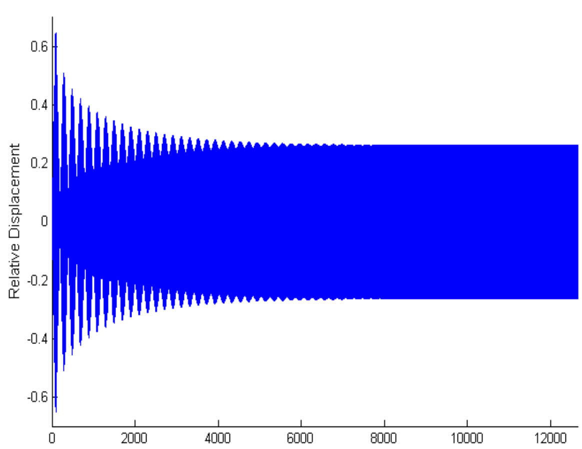


Fig. 9 The time history diagram of the system for d=0.5, F=1, σ=-6 and α=0.2

شکل 9 نمودار پاسخ زمانی سیستم (σ=-6, d=0.5, F=1, α=0.2)

[4] Low amplitude periodic motion (1T)

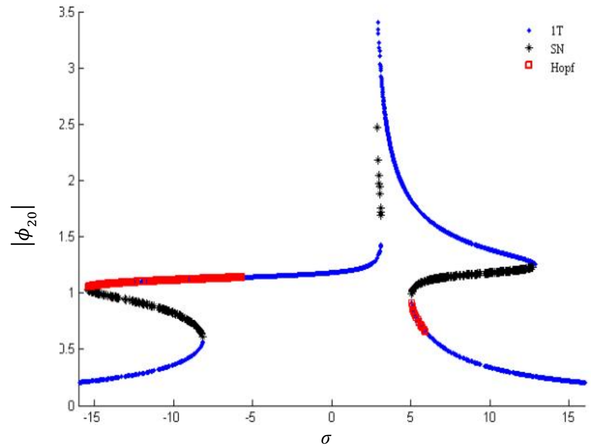


Fig. 10 The Frequency-response diagram of the system for d=0.5, F=2 and α=0.2 (point 3 in Fig. 4Fig.)

شکل 10 پاسخ فرکانسی سیستم به ازای پارامترهای نقطه 3 در شکل 4 (σ=1, d=0.5, F=2, α=0.2)

دیاگرام فرکانسی سیستم در نقطه 4 واقع در شکل 5 که زیر نواحی انشعابات هاپ و زین اسبی قرارگرفته است، همانند شکل 7 می‌باشد با این تفاوت که چون دامنه تحریک نیروی خارجی کوچک می‌باشد و این نقطه دور از نواحی انشعابات زین اسبی قرار دارد، لذا محدوده‌های ناپایداری در دیاگرام فرکانسی این نقطه نسبت به دیاگرام فرکانسی نقطه 1، کوچک‌تر می‌باشد. دیاگرام‌های فرکانسی نقاط 5 و 6 در شکل 5، همانند شکل 8 می‌باشند و به ترتیب با افزایش دامنه نیروی تحریک خارجی، ناحیه منفصل فرکانسی بزرگ‌تر و به ناحیه پایدار نوسانی دامنه پایین نزدیک‌تر می‌شود.

دیاگرام فرکانسی نقطه 7 در شکل 5 که بالای هر دو ناحیه انشعاب قرار دارد، همانند دیاگرام فرکانسی نقطه 3 (یعنی شکل 10) می‌باشد. مطالعات نشان می‌دهد که در کل این مقطع از تیر (d=0.24) نسبت به مقطع قبلی (d=0.5)، ناحیه منفصل فرکانسی کوچک‌تری دارد و حتی نواحی انشعاب در این مقطع محدوده‌های کوچک‌تری دارند.

دیاگرام‌های فرکانسی در آخرین مقطع از تیر شکل‌های مشابه نسبت به هم دارند. به عنوان مثال برای نقطه 10 در شکل 6، دیاگرام فرکانسی در شکل 11 نشان داده شده است. به‌طور مثال به ازای پارامترهای شکل 11 به ازای (σ=2) سیستم دارای دو نوع حرکت پاسخ مدوله ضعیف، پاسخ پایدار دامنه بالا می‌باشد که همان‌طور که در شکل 12 نشان داده شده است، با استفاده از حل عددی و رسم پاسخ زمانی این سیستم، مشاهده می‌شود که سیستم جذب پاسخ مدوله ضعیف خواهد شد. لازم به ذکر است که دیاگرام فرکانسی‌های دو نقطه کاری 8 و 9 (در شکل 6) نواحی انشعاب و نوسانی دامنه بالای کوچک‌تری نسبت به نقطه 10 دارند و ناحیه فرکانسی منفصل اصلاً در این مقطع از تیر تشکیل نمی‌شود.

در کل می‌توان گفت در کل تیر با افزایش دامنه نیروی تحریک خارجی (درنتیجه افزایش انرژی ورودی به سیستم)، مقدار دامنه ماندگار سیستم افزایش می‌یابد و ناحیه منفصل فرکانسی پدید می‌آید و به ناحیه نوسانی دامنه پایین متصل می‌شود. همچنین با نزدیک شدن به تکیه‌گاه‌ها، در دیاگرام‌های فرکانسی سیستم، محدوده نواحی انشعاب (هاپ و زین اسبی) و نواحی نوسانی دامنه بالا کاهش می‌یابد. علاوه بر این، با نزدیک شدن محل نصب جاذب به تکیه‌گاه‌های تیر، در پاسخ زمانی سیستم مدت زمان پاسخ گذرا طولانی‌تر خواهد بود.

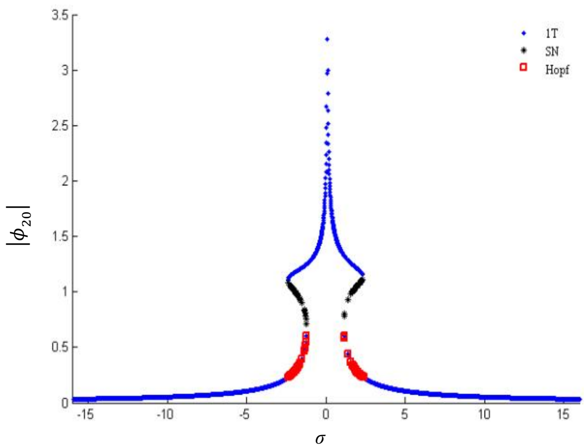


Fig. 11 The Frequency-response diagram of the system for d=0.12, F=2 and α=0.2 (point 10 in Fig. 6)

شکل 11 پاسخ فرکانسی سیستم به ازای پارامترهای نقطه 10 در شکل 6 (σ=1, d=0.12, F=2, α=0.2)

طبق معادله موریسون [27] در اثر افزایش سرعت جریان خارجی وارد بر سازه‌های دریایی، دامنه نیروی وارد بر سیستم نیز افزایش می‌یابد. در شکل‌های 11 و 12 تأثیر تغییرات این نیرو در وسط تیر و همچنین در نزدیکی تکیه‌گاه تیر بررسی خواهد شد.

در شکل 13 نمودار تغییرات دامنه پایدار سیستم به ازای تغییرات دامنه نیروی تحریک خارجی (ناشی از افزایش سرعت سیال خارجی) در وسط تیر (d=0.5) رسم شده است. همان‌گونه که مشخص است با افزایش دامنه نیروی خارجی، دامنه پایدار سیستم نیز به‌آرامی افزایش می‌یابد و همچنین در محدوده خاصی از نیروی خارجی ناپایداری‌هایی از نوع انشعاب هاپ پدیدار خواهند شد. لازم به ذکر است که همان‌طور که در شکل 4 مشخص است، با افزایش نیرو در مقدار مشخصی از دمپینگ چاه غیرخطی انرژی (α=0.2)، از ناحیه انشعابات هاپ عبور کرده که این محدوده دقیقاً منطبق بر ناحیه ناپایداری شکل 13 می‌باشد و همچنین با کاهش مقدار دامنه تحریک خارجی دامنه به‌آرامی کاهش می‌یابد و با عبور از ناحیه انشعاب هاپ، ناپایداری در دامنه حرکتی سیستم مشاهده می‌شود.

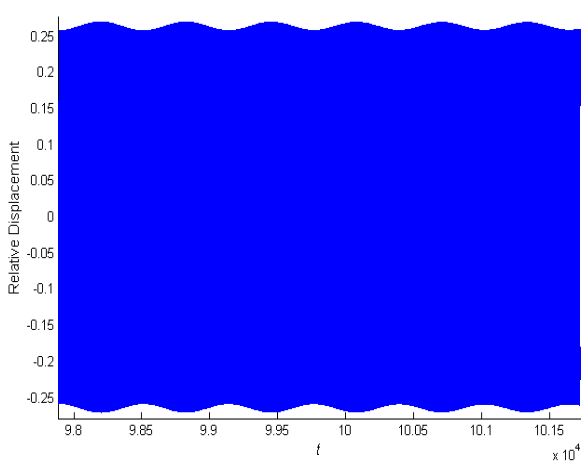


Fig. 12 Time history response diagram of the system for d=0.12, F=2 and α=0.2 (occurrence of WMR)

شکل 12 پاسخ زمانی سیستم به ازای σ=2, d=0.12, F=2, α=0.2 (رخداد پاسخ مدوله ضعیف)

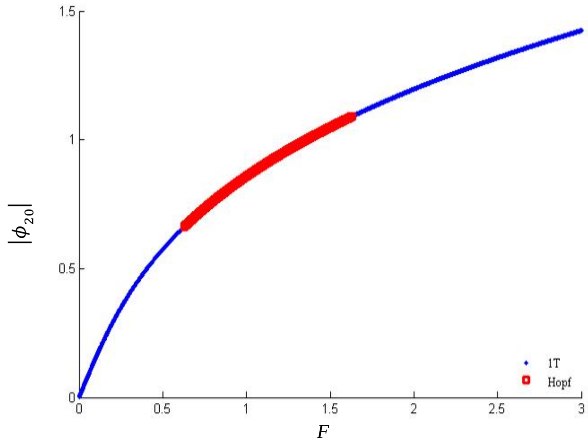


Fig. 13 The Force-response diagram of the system for d=0.5, σ=1 and α=0.2

شکل 13 نمودار پاسخ ماندگار سیستم به ازای تغییرات دامنه تحریک خارجی (σ=1, d=0.5, α=0.2)

اما با نصب جاذب در نزدیکی تکیه‌گاه تیر (d=0.24) پدیده پرش در اثر کاهش یا افزایش دامنه تحریک خارجی مشاهده خواهد شد.

در این حالت همان‌طور که در شکل 5 مشاهده می‌شود، با افزایش دامنه تحریک خارجی به ازای مقدار مشخص دمپینگ جاذب (α=0.2)، از دو ناحیه ناپایداری انشعابات هاپ و زین اسبی عبور خواهد شد. در این صورت مطابق شکل 14، در اثر افزایش دامنه تحریک خارجی از مقادیر کم، بعد از عبور از ناحیه ناپایداری انشعابات هاپ، با یک پرش مقدار دامنه پایدار سیستم ناگهان افزایش می‌یابد. همچنین اگر این روند برعکس شود، دامنه ماندگار سیستم با یک پرش، مقدار آن ناگهان کاهش می‌یابد و به دلیل این پرش، سیستم ناپایداری‌های انشعاب هاپ را تجربه نخواهد کرد.

6-نتیجه گیری

در تحقیق حاضر به تحلیل و بررسی ارتعاشات عرضی یک تیر دوسرگیردار همراه با یک چاه غیرخطی انرژی (شامل فنر و دمپر غیرخطی) پرداخته شد. برای مدل کردن تیر از مدل تیر اویلر برنولی استفاده شد. با استفاده از روش

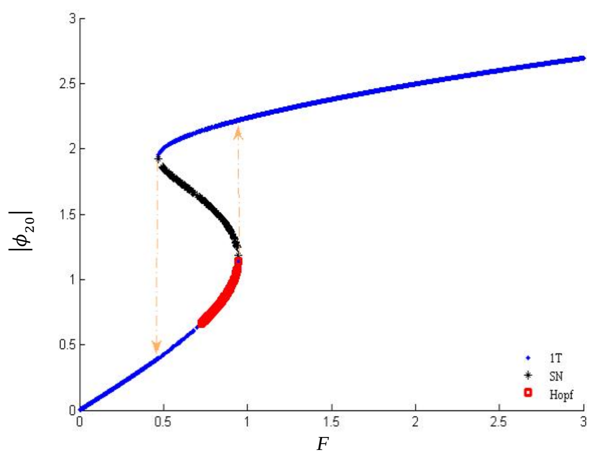


Fig. 14 The Force-response diagram of the system for d=0.24, σ=1 and α=0.2

شکل 14 نمودار پاسخ ماندگار سیستم به ازای تغییرات دامنه تحریک خارجی (σ=1, d=0.24, α=0.2)

همیلتون معادلات دینامیکی سیستم استخراج شد و با دو روش تحلیلی (روش متوسط‌گیری مختلط شونده) و عددی (رانگ کوتای مرتبه چهارم) به تحلیل معادلات پرداخته شد. با رسم نمودارهای انشعاب زین اسبی و هاپ، تأثیر جاذب غیرخطی در مقاطع مختلف تیر سنجیده شد و در ادامه با ترسیم نمودارهای پاسخ فرکانسی، انواع پاسخ‌های مختلف سیستم بررسی و با حل عددی مقایسه شدند که نتایج زیر از آن‌ها استخراج شدند:

- ✓ با نزدیک شدن محل اتصال جاذب به انتهای تیر در دیاگرام‌های فرکانسی نواحی انشعاب، ناحیه نوسانی دامنه بالا و ناحیه منفصل فرکانسی کوچک‌تر می‌شوند.
- ✓ با نزدیک شدن محل نصب جاذب به تکیه‌گاه‌های تیر، احتمال رخداد انشعاب زین اسبی افزایش می‌یابد.
- ✓ با افزایش دامنه نیروی تحریک خارجی، دامنه ماندگار سیستم افزایش خواهد یافت.
- ✓ با نزدیک شدن محل نصب جاذب به انتهای تیر، احتمال پدیده پرش افزایش می‌یابد.
- ✓ با نزدیک شدن محل نصب جاذب به انتهای تیر، پاسخ گذرای سیستم طولانی‌تر می‌شود.

7-پیوست‌ها

7-1-پیوست (الف)

$$m_{11} = \int_0^1 \phi_1^2(x)dx$$
$$k_{11} = \int_0^1 \phi_1(x)\big(\phi(x)\big)_{xxxx}dx$$
$$F = \int_0^1 F_0\phi_1(x)dx \tag{آ}$$

7-2-پیوست (ب)

$$\eta_1 = \frac{3}{2}\phi_{20}^2\alpha(\varepsilon\phi_{1d}^2 + 1) \tag{ب}$$

$$\eta_2 = \frac{1}{64\Omega^6}(27\phi_{1d}^4\alpha^2\varepsilon^2\Omega^6\phi_{2f}^2 + 54\phi_{1d}^2\alpha^2\varepsilon\Omega^6\phi_{20}^4 +27\phi_{1d}^4\beta^2\varepsilon^2\phi_{20}^4 + 27\beta^2\phi_{20}^4 + 27\alpha^2\Omega^6\phi_{20}^4 +48\phi_{1d}^2\beta\varepsilon^2\sigma\Omega^2\phi_{20}^2 + 54\phi_{1d}^2\beta^2\varepsilon\phi_{20}^4 + 16\varepsilon^2\sigma^2\Omega^4 +16\Omega^8 - 48\beta^2\Omega^4\phi_{20}^4) \tag{ت}$$

$$\eta_3 = \frac{\varepsilon}{64\Omega^6}\big(24\phi_{1d}^2\alpha\Omega^8\phi_{20}^2 + 24\phi_{1d}^3\alpha\varepsilon\sigma^2\Omega^4\phi_{20}^2\big) \tag{ث}$$

$$\eta_4 = \frac{\varepsilon^2}{256\Omega^8}(27\phi_{1d}^4\alpha^2\Omega^{10}\phi_{20}^2 - 54\phi_{1d}^2\alpha^2\sigma^2\Omega^8\phi_{20}^4 +16\sigma^2\Omega^8 + 27\beta^2\sigma^2\phi_{20}^4 - 54\phi_{1d}^2\beta^2\sigma\Omega^2\phi_{20}^4 -48\beta\sigma^2\Omega^4\phi_{20}^2 + 48\phi_{1d}^2\beta\sigma\Omega^6\phi_{20}^2 + 27\alpha^2\sigma^2\Omega^6\phi_{20}^4 +27\phi_{1d}^4\beta^2\Omega^4\phi_{20}^4) \tag{ج}$$

8-مراجع

[1] S. Chakrabarti, *Hydrodynamics of offshore structures*, pp. 25-31, Southampton: Computational Mechanics, 1987.

[2] J. F. Wilson, *Dynamics of offshore structures*: John Wiley & Sons, 2003 .

[3] M. J. Terro, M. Abdel-Rohman, Wave induced forces in offshore structures using linear and nonlinear forms of Morison's equation, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 13, No. 2, pp. 139-157, 2007 .

[4] D. Bambill, S. Escanes, C. Rossit, Forced vibrations of a clamped-free beam with a mass at the free end with an external periodic disturbance acting on the mass with applications in ships' structures, *Ocean Engineering*, Vol. 30, No. 8, pp. 1065-1077, 2003 .

[5] H. Dai, L. Wang, Q. Qian, Q. Ni, Vortex-induced vibrations of pipes conveying fluid in the subcritical and supercritical regimes, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 39, No. 3, pp. 322-334, 2013.
[6] M. Paidoussis, *Fluid-Structure Interactions*, pp. 48-61, San Diego: Academic Press, 1998.
[7] C. Hirsch, *Numerical computation of internal and external flows*, pp. 133-145, Chichester: Wiley, 1988.
[8] H. Doki, K. Hiramoto, R. Skelton, Active control of cantilevered pipes conveying fluid with constraints on input energy, *Journal of Fluids and Structures,* Vol. 12, No. 5, pp. 615-628, 1998 .
[9] C.H. Yau, A. Bajaj, O. Nwokah, Active control of chaotic vibration in a constrained flexible pipe conveying fluid, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 9, No. 1, pp. 99-122, 1995 .
[10] S. Bab, S.E. Khadem, M. Mahdiabadi, M. Shahgholi, Vibration mitigation of a rotating beam under external periodic force using a nonlinear energy sink (NES),*Journal of Vibration and Control*, 2015. http://dx.doi.org/10.1177/1077546315587611.
[11] S. Bab, S. E. Khadem, M. Shahgholi, Lateral vibration attenuation of a rotor under mass eccentricity force using non-linear energy sink, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 67, No. 3, pp. 251-266, 2014.
[12] S. Bab, S. E. Khadem, M. Shahgholi, Vibration attenuation of a rotor supported by journal bearings with nonlinear suspensions under mass eccentricity force using nonlinear energy sink, *Meccanica,* Vol. 50, No. 9, pp. 2441-2460, 2015 .
[13] D. Younesian, A. Nankali, E. Motieyan, Optimal nonlinear energy sinks in vibration mitigation of thebeams traversed by successive moving loads, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 3, No. 4, pp. 323-331, 2011 .
[14] D. Younesian, A. Nankali, M. E. Motieyan, Application of the Nonlinear Energy Sink Systems in Vibration Suppression of Railway Bridges, *Proceeding of American Society of Mechanical Engineers,* Istanbul, Turkey, July 12-14, pp. 227-231, 2010.
[15] M. Parseh, M. Dardel, M. H. Ghasemi, Investigating the robustness of nonlinear energy sink in steady state dynamics of linear beams with different boundary conditions, *Communicationsin Nonlinear Science and Numerical Simulation,* Vol. 29, No. 1, pp. 50-71, 2015 .
[16] M. Parseh, M. Dardel, M. H. Ghasemi, M. H. Pashaei, Steady state dynamics of a non-linear beam coupled to a non-linear energy sink, *International Journal of Non-LinearMechanics,* Vol. 79, No. 2, pp. 48-65, 2016.
[17] M. Parseh, M. Dardel, M. H. Ghasemi, Performance comparison of nonlinear energy sink and linear tuned mass damper in steady-state dynamics of a linear beam, *Nonlinear Dynamics,* Vol. 81, No. 4, pp. 1981-2002, 2015 .
[18] Z. N. Ahmadabadi and S. E. Khadem, Annihilation of high-amplitude periodic responses of a forced two degrees-of-freedom oscillatory system using nonlinear energy sink, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 19, No. 16, pp. 2401-2412, 2012.
[19] Z. N. Ahmadabadi and S. E. Khadem, Self-excited oscillations attenuation of drill-string system using nonlinear energy sink, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 227, No. 2, pp. 230-245, 2012.
[20] M. Kani, S. Khadem, M. Pashaei and M. Dardel, Design and performance analysis of a nonlinear energy sink attached to a beam with different support conditions, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 230, No. 4, pp. 527-542, 2015.
[21] M. Kani, S. Khadem, M. Pashaei, M. Dardel, Vibration control of a nonlinear beam with a nonlinear energy sink, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 83, No. 1-2, pp. 1-22, 2016 .
[22] O. Gendelman, L. Bergman, D. McFarland, G. Kerschen and Y. Lee, *Nonlinear Targeted Energy Transfer In Mechanical And Structural Systems. Solid Mechanics and its Applications*, pp. 25-31,New York: Springer Science & Business Media, 2008.
[23] L. Meirovitch, *Analytical methods in vibrations*, pp. 250-287, New York: Macmillan, 1967.
[24] Y. Starosvetsky, O. Gendelman, Dynamics of a strongly nonlinear vibration absorber coupled to a harmonically excited two-degree-of-freedom system, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 312, No. 1, pp. 234-256, 2008 .
[25] L. Manevitch, The description of localized normal modes in a chain of nonlinear coupled oscillators using complex variables, *Nonlinear Dynamics,* Vol. 25, No. 1-3, pp. 95-109, 2001 .
[26] A. Nayfeh and B. Balachandran, *Applied nonlinear dynamics*, pp. 250-287, New York: Wiley, 1995.
[27] J. Morison, J. Johnson, S. Schaaf, The force exerted by surface waves on piles, *Journal of Petroleum Technology,* Vol. 2, No. 05, pp. 149-154, 1950 .