http://mme.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
مرداد ۱۳۹۲، دوره ۱۳ شماره ۵ ص‌ص ۱۱۷-۱۲۹

مقاله پژوهشی کامل
تاریخ دریافت ۹۱/٤/٤
تاریخ پذیرش ۹۱/۱۰/۶
ارائه در سایت ۹۲/۲/۳۰

روش بولتزمن شبکه‌ای برای مدلسازی محفظه‌های با مرز مایل و متحرک

محسن نظری[1*]، محمدحسن کیهانی[2]، حسنی شکری[3]

۱- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
۲- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
۳- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
* شاهرود، صندوق پستی ۳۶۱۹۹۹۵۱۶۱، mnazari@shahroodut.ac.ir

چکیده- در این مقاله، جریان سیال پایا و تراکم‌ناپذیر در داخل یک محفظه دوبعدی به شکل‌های مثلث قائم‌الزاویه، ذوزنقه و محفظه‌ای با دیواره‌های دایروی و نیم‌دایره، با وجود دیواره متحرک با استفاده از روش بولتزمن شبکه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. تاثیر شکل هندسی محفظه بر الگوی جریان نیز مورد بحث قرار گرفته است. برای محفظه مثلثی، نیم‌دایره و محفظه‌ای با دیواره دایروی، تاثیر تغییرات عدد رینولدز بر الگوی جریان بررسی شده است. در محفظه با دیواره دایروی، ملاحظه می‌شود که با تغییر اندازه دیواره‌های بالا و پایین محفظه، که به‌معنی تغییر در اندازه کمان‌های جداشده از دایره است، الگوی جریان کاملاً متفاوتی شکل می‌گیرد. برای محفظه ذوزنقه‌ای در عدد رینولدز ثابت، تاثیر زاویه اضلاع بر روی الگوی جریان نیز بررسی شده است. با افزایش زاویه اضلاع در محفظه ذوزنقه‌ای، گردابه پایین محفظه پهن‌تر و سرانجام به دو گردابه مجزا تقسیم می‌شود. نتایج به‌دست آمده از روش بولتزمن شبکه‌ای، با نتایج موجود، مقایسه و اعتبارسنجی شده است. روش بولتزمن شبکه‌ای، روشی مناسب و کارا برای مدلسازی جریان در این نوع محفظه‌هاست.

کلیدواژگان: روش بولتزمن شبکه‌ای، دقت مرتبه دوم، دیواره مایل، دیواره متحرک

LBM for modeling cavities with curved and moving boundaries

M. Nazari[1*], M. H. Kayhani[2], H. Shokri[3]

1- Assis. Prof., Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran
2- Assoc. Prof., Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran
3- MSc. Student, Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran
* P.O.B. 3619995161 Shahrood, mnazari@shahroodut.ac.ir

Abstract- In this paper, steady incompressible flow patterns inside two-dimensional triangle, trapezoidal, semi-circular and arc-square cavities with moving boundaries are studied via lattice Boltzmann method. The effects of geometry of the cavities on flow pattern are also discussed. The effects of Reynolds number on the flow patterns in triangular, semi-circular and arc-square cavities are studied. Also, for arc-square cavity, it can be observed that by changing the size of top and bottom walls which means a change in the size of cut arcs from the circular, different flow patterns are formed. The influences of the side angles at constant Reynolds number on the flow patterns in the trapezoidal cavities are investigated. It is found out that the vortex near the bottom wall of trapezoidal cavity breaks up into two smaller vortices as side angles increase. The obtained results of the lattice Boltzmann method and the presented boundary condition are compared with those presented in the literature. It can be seen that the lattice Boltzmann method is a suitable method for flow simulation in the mentioned cavities.

Keywords: Lattice Boltzmann Method, Second Order Precision, Curved Boundary, Moving Boundary

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.5.3.3]

۱- مقدمه

بررسی جریان در محفظه‌ای که دیوار بالایی آن با سرعت ثابت حرکت می‌کند از مسائل کلاسیک و شناخته‌شده‌ای است که اغلب برای بررسی دقت و کارایی روش‌های عددی در حل مسائل ناویر استوکس تراکم‌ناپذیر در هندسه‌های ساده به‌کار می‌رود. در دهه‌های اخیر روش‌های مختلفی برای حل این مسئله به‌کار رفته است که می‌توان به‌روش المان محدود، روش اختلاف محدود و روش بولتزمن شبکه‌ای[1] اشاره کرد[۱-۳].

در سال‌های اخیر روش بولتزمن شبکه‌ای در تحلیل جریان سیال به‌عنوان راه کارآمد جایگزین برای روش‌های مرسوم در دینامیک سیالات محاسباتی، رشد چشم‌گیری داشته است. روش بولتزمن شبکه‌ای بر پایه مدل میکروسکوپی استوار است که در آن مجموعه رفتار ذرات در یک سیستم، برای شبیه‌سازی مکانیک پیوسته از یک سیستم به‌کار گرفته می‌شود[۴]. مزیت این روش در مقایسه با روش‌های مرسوم در دینامیک سیالات محاسباتی، محاسبات ساده‌تر، سهولت اعمال شرایط مرزی و قابلیت موازی‌شدن است که برای حل مسائلی با هندسه پیچیده، دارای کاربرد فراوانی است[۵-۶] .

در سال ۱۹۹۵، هو و همکارانش[۷] نتایج حاصل از روش بولتزمن شبکه‌ای را در یک محفظه مربعی دوبعدی با سایر روش‌های موجود مقایسه و کارایی این روش را اثبات کردند. از آن به بعد تحقیقات زیادی برای حل مسئله بیان‌شده در محفظه‌های مربعی با ابعاد مختلف با استفاده از روش بولتزمن شبکه‌ای انجام شده است. از جمله می‌توان به کارهای پاتیل و همکارانش[۸] و لین و همکارانش[۹] اشاره کرد. پاتیل ساختار گردابه‌ها در یک محفظه مربعی با نسبت ارتفاع به پهنای مختلف که از ۱/۵ به ۴ تغییر می‌کرد را در اعداد رینولدز ۵۰ تا ۳۲۰۰ مورد بررسی قرار داد. در کار لین نیز در همین نسبت در اعداد رینولدز ۱۰۰ تا ۷۵۰۰ ساختار گردابه‌ها و سرعت در خط مرکزی محفظه‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. جریان‌های واقعی در طبیعت و صنعت اغلب در هندسه‌های پیچیده‌تری دیده می‌شود. مثلاً در محفظه‌های به‌شکل ذوزنقه یا مثلث و یا در محفظه‌هایی با دیواره منحنی. ساختار گردابه‌ها در این محفظه‌ها تفاوت زیادی با یک محفظه مربعی دارد، اما متاسفانه کارهای کمی تاکنون در این زمینه انجام شده است. لی[۱۰] و گاسکل[۱۱] به حل این مسئله در یک محفظه مثلثی پرداختند. مککویین[۱۲] و پارامن[۱۳] جریان در یک محفظه ذوزنقه‌ای را بررسی کردند که در تمام این مطالعات از روش‌های مرسوم دینامیک سیالات محاسباتی برای شبیه‌سازی جریان استفاده شده است. با توجه به مزایای یادشده برای روش بولتزمن شبکه‌ای، استفاده از این روش برای شبیه‌سازی این محفظه‌ها مناسب به‌نظر می‌رسد. فودهایل[۱۴] از روش بولتزمن شبکه‌ای در یک محفظه مثلثی قائم‌الزاویه در اعداد رینولدز بالا استفاده کرد. همچنین، ژانگ جریان در محفظه ذوزنقه‌ای را با این روش مورد بررسی قرار داد[۱۵]. هر چند شبیه‌سازی الگوی جریان در محفظه مثلثی و ذوزنقه‌ای با روش بولتزمن شبکه‌ای قبلاً مورد بررسی قرار گرفته است، اما بنابر دلایلی که در بخش‌های بعد بیان خواهد شد، در این مطالعه مجدداً بررسی شده‌اند. همچنین، الگوی جریان در محفظه با دیواره دایروی به‌روش بولتزمن شبکه‌ای برای اولین‌بار در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرد.

جریان لزج چرخشی، در محفظه‌ای که دیواره بالایی آن به‌صورت مماس، خطی و پایا رانده می‌شود، موقعیتی مناسب برای بررسی و مطالعه بسیاری پدیده‌های اساسی برای جریان تراکم‌ناپذیر مانند گردابه‌های گوشه‌ای[2]، گردابه‌های طولی[3]، گردابه‌های تیلور گورتلر لایک[4]، حالت گذرا و شرایط آشفته است. از طرفی، جریان در محفظه‌ای با دیواره متحرک ازجمله مسائلی است که اغلب در کاربردهای مهندسی با آن مواجه می‌شویم. ازجمله این کاربردها می‌توان به خنک‌کاری تجهیزات الکترونیکی، سیستم خشک‌کردن و مطالعات ژئوفیزیک اشاره کرد. برای جزییات بیشتر می‌توان به مطالعات شانکار[۱۶]، شریف[۱۷] و ازتاب[۱۸] مراجعه کرد. همچنین، این موضوع از مسائل مهم در علوم کاربردی ریاضی برای به‌دست آوردن نتایج بنچ‌مارک[5] از کدهای نوشته‌شده است که در کارهای مانسوتی[۱۹]، جیا[۲۰] و برونیو[۲۱] آورده شده است.

۲- بولتزمن شبکه‌ای

مدل بولتزمن شبکه‌ای از روش گاز شبکه‌ای منشا گرفته است. نخستین‌بار هاردی، پومیو و پازیس در سال ۱۹۷۶، اولین مدل

1. Lattice Boltzmann

2. Corner vortices
3. Longitudinal vortices
4. Taylor-Gortler-Like (TGL) vortices
5. Benchmark

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.5.3.3]

گاز شبکه‌ای را برای شبیه‌سازی جریان سیال ارائه نمودند[۲۲]. این مدل در سال ۱۹۸۶ توسط فریش و همکارانش بهبود یافت[۲۳]. معادله بولتزمن شبکه‌ای اولیه در سال ۱۹۸۸ توسط مک نامارا و زانتی[۲۴] برای پاسخگویی به یکی از مشکلات اصلی روش گاز شبکه‌ای ایجاد شد و آن مشکل اغتشاشات آماری بود. اندکی بعد آشکار شد که بولتزمن شبکه‌ای می‌تواند اغلب مشکلات دیگر روش گاز شبکه‌ای را نیز به‌طور طبیعی برطرف کند. بنابراین روش بولتزمن شبکه‌ای به‌سرعت به یک موضوع مستقل تحقیقاتی تبدیل شد و معایب باقی‌مانده روش گاز شبکه‌ای یک‌به‌یک برطرف گردید. از آن جمله می‌توان به کارهای هیگورا و جیمنز درسال ۱۹۸۹[۲۵] اشاره کرد. به این ترتیب رایج‌ترین مدل بولتزمن شبکه‌ای، که برای تحلیل جریان‌های سیال به‌کار می‌روند، بیان شد. در این روش همانند روش‌های گاز شبکه‌ای، ذرات مجازی در روی یک شبکه منظم برخورد داده می‌شوند. ولی این بار به‌جای مشخص‌نمودن آرایش ذرات مجازی، احتمال حضور این ذرات در مسیرهای مختلف معرفی و استفاده می‌شود؛ یعنی این سوال مطرح می‌شود که احتمال حضور یک ذره اطراف موقعیت x در زمان t چقدر است؟ $f_\alpha(\vec{x},t)$ چگالی احتمال و یا به‌طور ساده‌تر تابع توزیع نامیده می‌شود. در واقع در این روش، همانند روش گاز شبکه‌ای، تجدید آرایش ذرات طی مراحل برخورد و جاری‌شدن رخ می‌دهد و فقط به‌جای قواعد برخورد قبلی از معادله بولتزمن برای محاسبه توابع توزیع جدید استفاده می‌گردد.

هرچند مدل‌های روش بولتزمن شبکه‌ای مستقیما از روش گاز شبکه‌ای منشأ گرفته شده است، هی و لو[۲۶] نشان دادند که معادله بولتزمن شبکه‌ای می‌تواند مستقیما از معادله پیوسته بولتزمن به‌دست آید و استقلال معادله بولتزمن شبکه‌ای را به‌صورت تئوری نشان دادند.

۱-۲- معادله بولتزمن برای تحلیل جریان

با استفاده از معادله بولتزمن، تغییرات تابع توزیع احتمال f به‌صورت زیر قابل بیان است[۲۷]:

$$f_\alpha(\vec{x}+\vec{e}_\alpha\delta t, t+\delta t)-f_\alpha(\vec{x},t) = -\frac{1}{\tau_\nu}[f_\alpha(\vec{x},t)-f_\alpha^{eq}(\vec{x},t)] \quad (۱)$$

در روش بولتزمن شبکه‌ای، این معادله شامل دو بخش است؛ مرحله برخورد (معادله ۲) و مرحله جاری‌شدن (معادله ۳):

$$\tilde{f}_\alpha(\vec{x},t)-f_\alpha(\vec{x},t) = -\frac{1}{\tau_\nu}[f_\alpha(\vec{x},t)-f_\alpha^{eq}(\vec{x},t)] \quad (۲)$$

$$f_\alpha(\vec{x}+\vec{e}_\alpha\delta t, t+\delta t) = \tilde{f}_\alpha(\vec{x},t) \quad (۳)$$

مرحله جاری‌شدن بلافاصله پس از مرحله برخورد شروع شده و توابع توزیع در جهت سرعت خود به‌سمت گره‌های مجاور حرکت می‌کنند. در این معادلات $\vec{e}_\alpha$ بردار سرعت ذرات در جهت α است که با استفاده از مدل D_2Q_9، به‌صورت زیر قابل بیان است[۲۷]:

$$\vec{e}_\alpha = \begin{cases} (0,0) & \alpha=9 \\ ([\cos[(\alpha-1)\pi/2],(\sin[(\alpha-1)\pi/2])c & \alpha=1,2,3,4 \\ \sqrt{2}([\cos[(\alpha-5)\pi/2+\pi/4], & \\ (\sin[(\alpha-5)\pi/2+\pi/4])c & \alpha=5,6,7,8 \end{cases} \quad (۴)$$

که $c=\delta x/\delta t$ سرعت جاری‌شدن در بولتزمن شبکه‌ای است، δx معرف اندازه شبکه و δt گام زمانی می‌باشد. τ_ν در معادله (۱) معرف زمان آرامش بدون بعد است.

در معادله (۱) تابع توزیع تعادلی $f_\alpha^{eq}(x,t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_\alpha^{eq}(\vec{x},t) = \omega_\alpha\rho[1+\frac{3}{c^2}(\vec{e}_\alpha.\vec{u}) + \frac{9}{2c^2}(\vec{e}_\alpha.\vec{u})^2 - \frac{3}{2c^2}\vec{u}^2] \quad (۵)$$

که در این معادله $\vec{u}$ و ρ به‌ترتیب سرعت و چگالی ماکروسکوپیک است. ω_α تابع وزنی است که در مدل D_2Q_9 برابر است با:

$$\omega_\alpha = \begin{cases} 4/9 & \alpha=9 \\ 1/9 & \alpha=1,2,3,4 \\ 1/36 & \alpha=5,6,7,8 \end{cases} \quad (۶)$$

مقادیر ماکروسکوپیک، چگالی و سرعت نیز به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^{9} f_\alpha \quad (۷)$$

$$\rho\vec{u} = \sum_{\alpha=1}^{9} \vec{e}_\alpha f_\alpha \quad (۸)$$

به‌کمک آنالیز چاپمن-انسکوگ می‌توان نشان داد که معادله مومنتوم و بقای جرم از معادله (۱) قابل استخراج است[۲۰]:

$$\nabla\cdot\vec{u} = 0 \quad (۹)$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{u} \quad (۱۰)$$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.5.3.3]

در معادله (۱۰)، فشار p معادله حالت را ارضا می‌کند و برابر است با:

$$p=\rho\frac{c^2}{3} \tag{۱۱}$$

ویسکوزیته سینماتیکی ν نیز از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\nu=(\tau_\nu-0.5)c^2/3 \tag{۱۲}$$

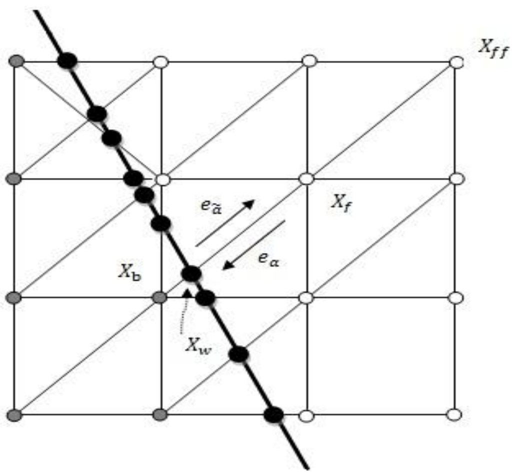
۲-۲- اعمال شرایط مرزی برای دیوار مایل

شکل ۱ نشان‌دهنده دیوار مایلی است که ناحیه جامد و سیال را از هم جدا می‌کند. دایره‌های سیاه نشان‌دهنده محل برخورد مرز با شبکه‌بندی (x_w)، دایره‌های توخالی گره‌های سیال (x_f) و دایره‌های خاکستری نشان‌دهنده گره‌های جامد (x_b) می‌باشند. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود، برای اعمال مرحله جاری‌شدن روی گره x_f، به $\tilde{f}_{\tilde{\alpha}}(x_b,t)$ نیاز است. $\tilde{f}$ مقدار تابع توزیع بلافاصله پس از برخورد است.

اگر Δ کسری از طول بین گره‌های سیال و جامد باشد که در داخل سیال واقع شده است، در این صورت داریم:

$$\Delta=\frac{\left|\vec{x}_f-\vec{x}_w\right|}{\left|\vec{x}_f-\vec{x}_b\right|} \tag{۱۳}$$

هنگامی که گره‌های سیال روی مرز واقع شود $\Delta=0$ است. برای تولید تابع توزیع پس از برخورد ($\tilde{f}$)، می‌توان از اطلاعات گره‌های سیال مجاور مرز استفاده کرد و با استفاده از بسط چاپمن برای این تابع، سمت راست معادله (۲)، به‌شکل رابطه (۱۴) درمی‌آید (برای جزئیات بیشتر به مرجع ۲۷ مراجعه شود):



شکل ۱ نمایش دیوار مایل روی شبکه بندی

$$\tilde{f}_{\tilde{\alpha}}(\vec{x}_b,t)=(1-\chi)\,\tilde{f}_{\alpha}(\vec{x}_f,t)+\chi f^{*}_{\alpha}(\vec{x}_b,t)+2\omega_\alpha\rho\frac{3}{c^2}\vec{e}_{\tilde{\alpha}}.\vec{u}_\omega \tag{۱۴}$$

که در آن χ فاکتور وزنی است که به Δ بستگی دارد. همچنین داریم:

$$f^{*}_{\alpha}(\vec{x}_b,t)=f^{(eq)}_{\alpha}(\vec{x}_f,t)+\omega_\alpha\rho(x_f,t)\cdot\frac{3}{c^2}\vec{e}_\alpha\cdot(\vec{u}_{bf}-\vec{u}_f) \tag{۱۵}$$

$$\vec{u}_{bf}=\vec{u}_{ff}=(\vec{x}_{ff},t),\qquad \chi=\frac{(2\Delta-1)}{(\tau-2)},\ \ if\quad 0\le\Delta\le\frac{1}{2} \tag{۱۶}$$

$$\vec{u}_{bf}=\frac{1}{2\Delta}(2\Delta-3)\vec{u}_f+\frac{3}{2\Delta}\vec{u}_w,\qquad \chi=\frac{(2\Delta-1)}{(\tau-1/2)},\ \ if\quad \frac{1}{2}\le\Delta\le 1 \tag{۱۷}$$

در معادلات بالا، $\vec{e}_{\tilde{\alpha}}=-\vec{e}_\alpha$ و $\vec{x}_{ff}=\vec{x}_f+\vec{e}_{\tilde{\alpha}}\delta t$ است. $\vec{u}_f=\vec{u}(\vec{x}_f,t)$ سرعت سیال مجاور مرز و $\vec{u}_w=\vec{u}(\vec{x}_w,t)$ سرعت دیوار مرزی و $\vec{u}_{bf}$ معرف یک سرعت مجازی است.

با جاگذاری معادله (۱۵) در (۱۴) داریم:

$$\tilde{f}_{\tilde{\alpha}}(\vec{x}_b,t)=\tilde{f}_\alpha(\vec{x}_f,t)-\chi[\tilde{f}_\alpha(\vec{x}_f,t)-f^{(eq)}_\alpha(\vec{x}_f,t)]+\omega_\alpha\rho(\vec{x}_f,t)\frac{3}{c^2}\vec{e}_\alpha\cdot[\chi(\vec{u}_{bf}-\vec{u}_f)-2\vec{u}_w] \tag{۱۸}$$

معادله بالا شرط عدم لغزش را با دقت مرتبه دو روی دیواره‌ها اعمال می‌کند.

۳- حل عددی و معتبرسازی نتایج

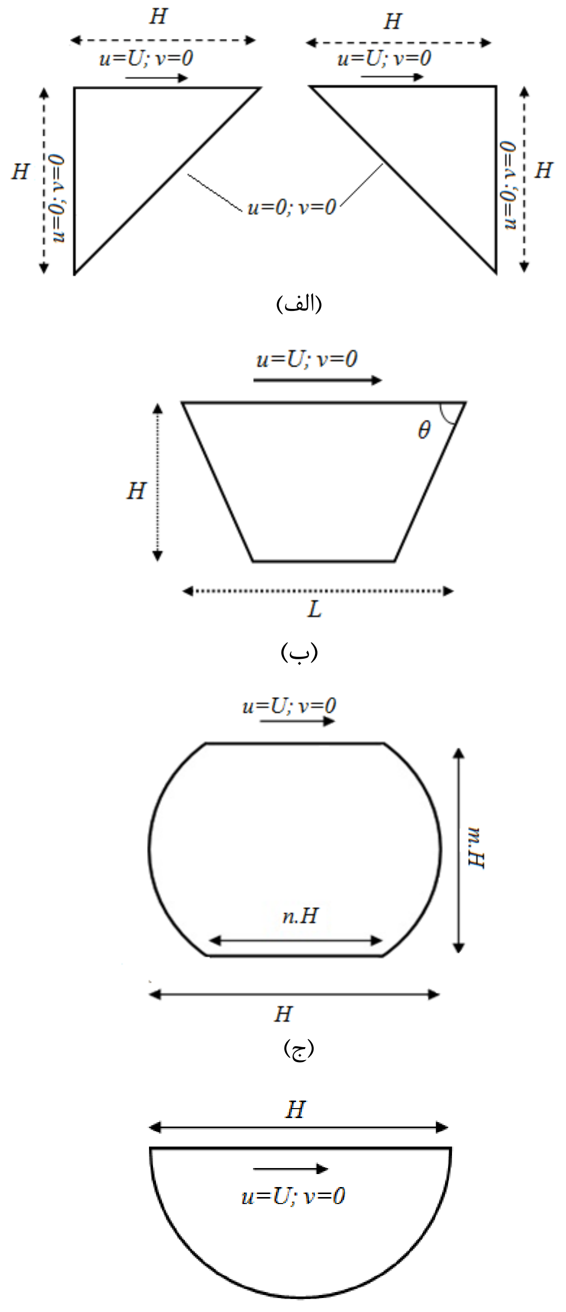
در این مقاله، به‌منظور معتبرسازی حل عددی، جریان سیال در داخل یک محفظه مثلثی قائم‌الزاویه و سپس در یک محفظه ذوزنقه‌ای، محفظه‌ای با دیواره‌های دایروی و محفظه‌ای به‌شکل نیم‌دایره، که دیوار بالایی آن‌ها با سرعت ثابت U از سمت راست به چپ حرکت می‌کند، بررسی خواهد شد. دو محفظه مثلثی در شکل ۲-الف برای اعداد رینولدز ۱۰۰۰، ۱۵۰۰ و ۲۰۰۰ مورد بررسی قرار گرفته است. تعداد نقاط شبکه برای این محفظه ۴۰۰×۴۰۰ درنظر گرفته شده است. محاسبات تا رسیدن به یک سرعت ثابت برای نقاط شبکه ادامه می‌یابد. همچنین، مشاهده شد که با افزایش تعداد نقاط شبکه تا ۸۰۰×۸۰۰ تغییری در نتایج رخ

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.5.3.3]

نمی‌دهد. محفظه ذوزنقه‌ای در شکل ۲-ب با ابعاد L=۱ و همچنین، H = ۰/۵۷۷۳۵ انتخاب شده است. برای عدد رینولدز ۱۰۰۰، الگوی جریان در داخل محفظه برای زوایای مختلف اضلاع ذوزنقه مورد تحلیل قرار می‌گیرد. تعداد نقاط شبکه برابر ۴۴۵×۲۵۷ درنظر گرفته شده است و دیوار بالایی و پایینی در وسط گره‌های دو ردیف اول و آخر قرار داده شده است. محاسبات تا رسیدن به یک سرعت ثابت برای سیال، در مرکز محفظه تکرار می‌شوند. با درنظر گرفتن شبکه به تعداد ۸۸۹×۵۱۳ تغییر قابل ملاحظه‌ای در نتایج (شکل خطوط جریان و سرعت در خطوط مرکزی محفظه) مشاهده نخواهد شد و بنابراین نتایج از تعداد شبکه مستقل است. شکل ۲-ج نشان‌دهنده هندسه محفظه با دیواره دایروی است. شکل کلی محفظه نشان‌دهنده دایره‌ای است که کمان‌هایی از آن جدا شده است. در شبیه‌سازی جریان H برابر واحد درنظر گرفته شده است.

n بیانگر نسبت قاعده کمان‌های جداشده به قطر دایره و m نسبت ارتفاع محفظه به قطر دایره است. الگوی جریان و سرعت در خطوط مرکزی گذرنده از مرکز محفظه برای اعداد رینولدز ۴۰۰، ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۴۰۰۰ برای n مساوی ۰/۶ و ۰/۸ مورد بررسی قرار گرفته است.

پارامتر m متناسب با این اعداد n به‌ترتیب برابر ۰/۸ و ۰/۶ خواهد بود. برای تحلیل این جریان شبکه مستطیلی با شبکه‌بندی ۴۰۰×۴۰۰ درنظر گرفته شده که مرکز محفظه در مرکز این شبکه‌بندی واقع می‌شود. بنابراین، برای این محفظه تعداد نقاط شبکه در راستای افق برابر ۴۰۰ و در راستای عمود، براساس کمان جداشده تغییر می‌کند. برای این محفظه نیز ثابت‌شدن سرعت سیال در مرکز محفظه شرط هم‌گرایی قرار داده شده است. عدم تغییر در نتایج، با دوبرابر کردن تعداد نقاط شبکه، استقلال نتایج از شبکه‌بندی را نشان می‌دهد. شکل ۲-د نشان‌دهنده محفظه‌ای به‌شکل نیم‌دایره است. H برای این محفظه برابر ۱ درنظر گرفته شده است. خطوط جریان برای اعداد رینولدز ۵۰۰، ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۴۰۰۰ رسم شده است. برای تحلیل این جریان از شبکه‌بندی ۲۰۰*۴۰۰ استفاده شده است. محاسبات تا رسیدن به یک سرعت ثابت ادامه می‌یابد. ملاحظه شد که با دوبرابر کردن تعداد گره‌ها نتایج تغییر نمی‌کند، بنابراین نتایج از شبکه‌بندی مستقل است. در تمامی هندسه‌های مورد بررسی U برابر ۰/۱ فرض شده است و عدد رینولدز به‌صورت $\mathrm{Re}=UH/\upsilon$ تعریف می‌شود.

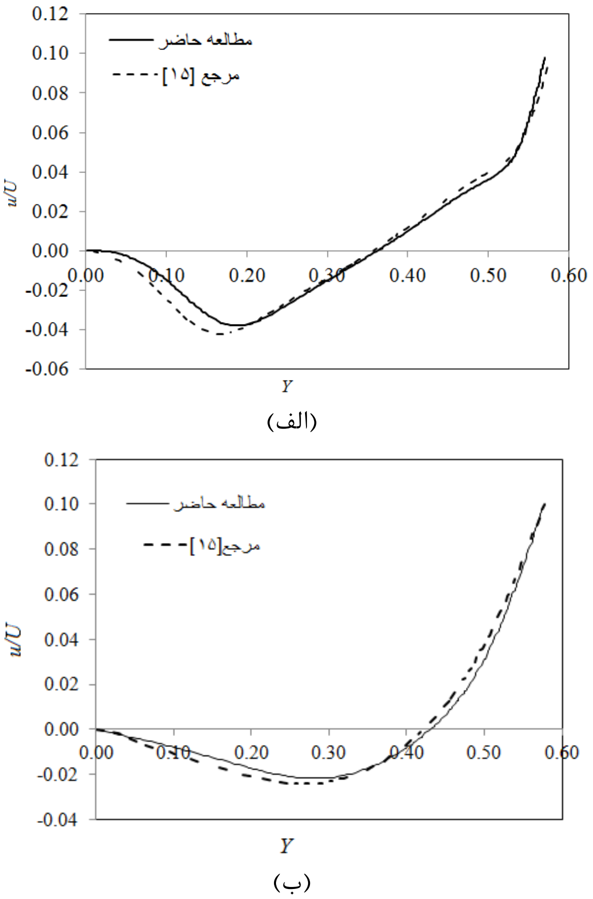


شکل ۲ (الف) هندسه محفظه مثلثی، (ب) هندسه محفظه ذوزنقه‌ای، (ج) هندسه محفظه با دیواره دایروی، (د) هندسه محفظه نیم‌دایره‌ای

در مسئله حاضر بزرگی سرعت (u) در شبکه بولتزمن از مرتبه $\upsilon\mathrm{Re}/H$ است. بنابراین، انتخاب پارامترهای شبکه بولتزمن باید به‌گونه‌ای باشد که عدد ماخ u/c_s تا حد امکان کوچک شود. کوچک‌بودن عدد ماخ به‌معنی کوچک‌بودن خطای تراکم‌پذیری

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.5.3.3]

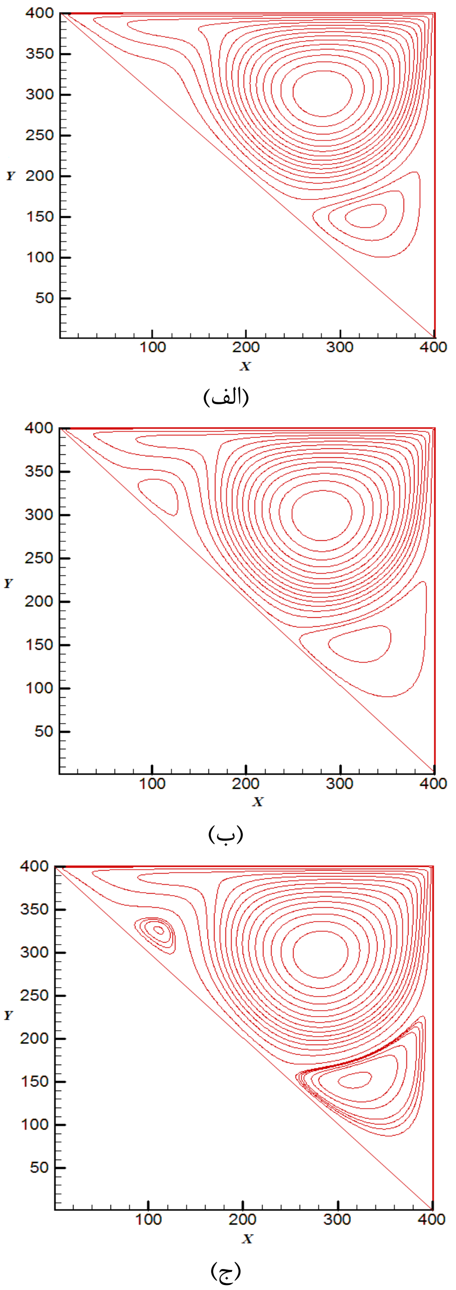
است. در این مسئله، عدد ماخ کوچک‌تر از ۰/۱درنظر گرفته شده است. با این انتخاب مشکلی برای پایداری حل عددی نخواهیم داشت. مقایسه بین نتایج حاصل از این تحقیق و کار انجام‌شده توسط ژانگ و همکارانش[۱۵] در شکل ۳ نمایش داده شده است. در این شکل، زاویه θ برابر ۶۰ درنظر گرفته شده است. سرعت u/U در خط عمودی گذرنده از مرکز محفظه برای عدد رینولدز ۱۰۰ و ۱۰۰۰ رسم شده است. در مطالعه ژانگ و همکارانش برای شبیه‌سازی جریان در محفظه ذوزنقه‌ای از معادله بولتزمن شبکه‌ای به‌گونه‌ای استفاده شده که تابع توزیع تعادلی به‌جای چگالی براساس فشار تعریف می‌شود. در تحقیق حاضر، از روابط شامل چگالی استفاده شده است. همچنین، برخلاف این مرجع، دیواره‌های بالایی و پایینی محفظه در بین گره‌ها قرار داده شده تا صحت روابط در حالت کلی سنجیده شود، شکل ۳ انطباق مناسب بین نتایج این مطالعه و مرجع [۱۵] را نشان می‌دهد.



شکل ۳ سرعت در خط عمودی گذرنده از مرکز محفظه ذوزنقه‌ای شکل، (الف) Re= ۱۰۰۰، (ب)Re= ۱۰۰

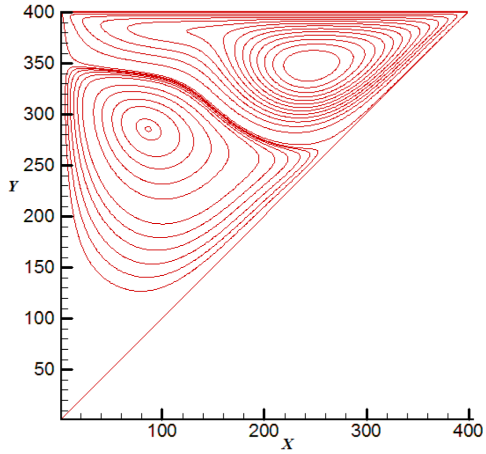
۳-۱- جریان در محفظه مثلثی

شکل ۴ نشان‌دهنده خطوط جریان برای اعداد رینولدز ۱۰۰۰، ۱۵۰۰ و ۲۰۰۰ در داخل یک محفظه مثلثی با زاویه قائمه در سمت راست است. همان‌گونه‌که مشخص است، با افزایش عدد رینولدز از ۱۰۰۰ به ۱۵۰۰، تعداد گردابه‌ها در داخل محفظه از ۲ به ۳ می‌رسد و مرکز گردابه اصلی به‌سمت راست جابه‌جا می‌شود.

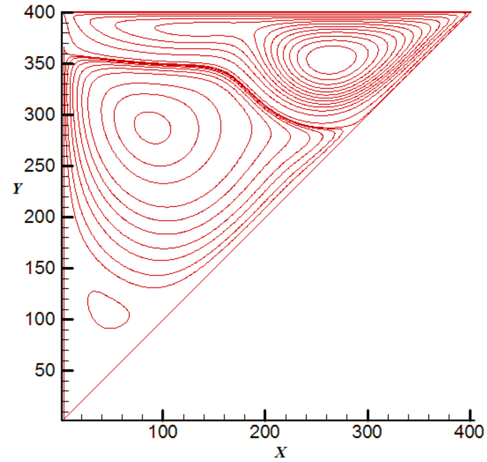


شکل ۴ (الف) خطوط جریان در Re=۱۰۰۰، (ب) خطوط جریان در Re=۱۵۰۰، (ج) خطوط جریان در Re=۲۰۰۰

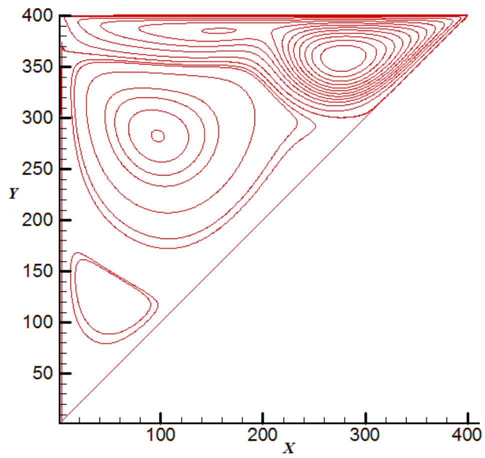
در شکل ۵ خطوط جریان برای محفظه مثلثی با زاویه قائمه در سمت چپ نشان داده شده است.



(الف)



(ب)



(ج)

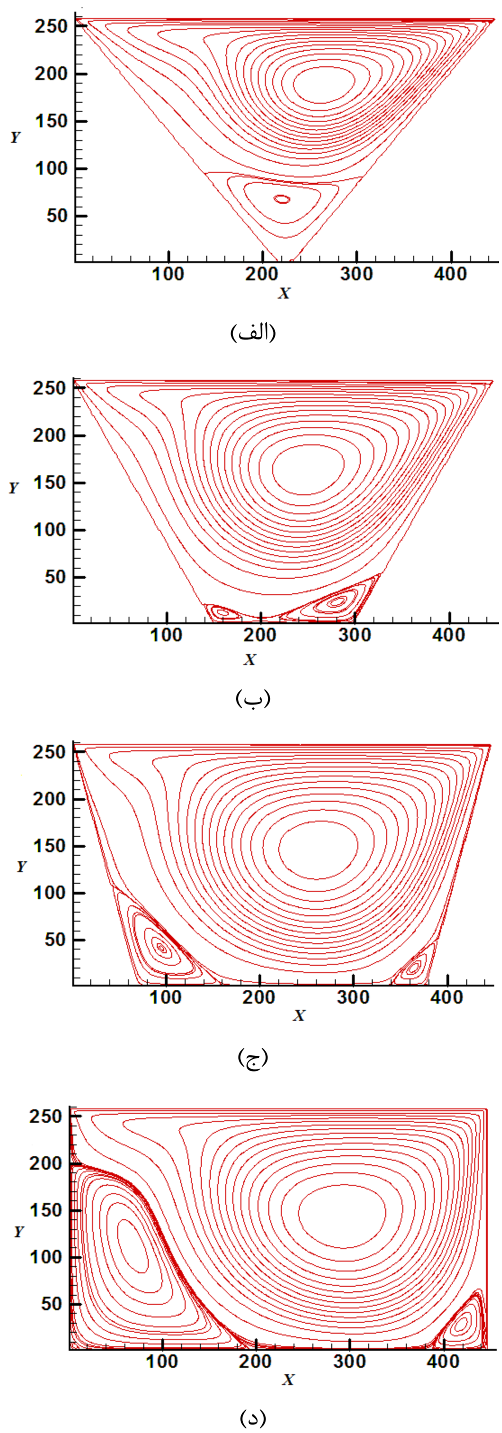
شکل ۵ (الف) خطوط جریان در Re=۱۰۰۰، (ب) خطوط جریان در Re=۱۵۰۰، (ج) خطوط جریان در Re=۲۰۰۰

در این محفظه نیز همانند محفظه شکل ۴، با افزایش عدد رینولدز، تعداد گردابه‌ها افزایش یافته و مرکز گردابه اولیه به‌سمت راست حرکت می‌کند که به‌دلیل وجود نیروهای اینرسی (ناشی از حرکت صفحه) در مقابل لزجی، انتظار همین جهت حرکت منطقی است. می‌توان مشاهده کرد که در این محفظه، با افزایش عدد رینولدز اندازه گردابه بالایی کوچک‌تر شده و گردابه سوم در پایین محفظه تشکیل می‌گردد، در حالی که در شکل ۴ گردابه سوم در کنار دیوار مایل و تقریباً بالای محفظه شکل گرفته است. البته، از نظر فیزیکی، تشکیل گردابه در مجاورت دیواره سمت راست و دور از گوشه نوک تیز محفظه (وقتی زاویه قائمه در سمت راست واقع است)، منتفی است، زیرا در مجاورت این دیواره، عامل موثری برای کاهش مومنتوم سیال در حین حرکت وجود ندارد. در مقابل، در سمت چپ، در حین حرکت سیال روی دیواره مایل (سمت چپ، شکل ۴)، با گرادیان فشار مخالف روبه‌رو هستیم. علت تشکیل گردابه سوم روی دیواره مایل می‌تواند به همین دلیل باشد. در حالتی که زاویه قائمه مثلث در سمت چپ واقع است، یک گردابه نامتقارن در بالای محفظه مشاهده می‌شود. به‌وضوح می‌توان دید که ساختار گردابه‌ها در شکل‌های ۴ و ۵ کاملاً با هم متفاوت است و شکل خطوط جریان در داخل محفظه به هندسه آن وابسته است.

۳-۲-جریان در محفظه ذوزنقه‌ای

به‌منظور مشاهده اثر زاویه θ بر روی ساختار گردابه‌ها در یک محفظه ذوزنقه‌ای، خطوط جریان در عدد رینولدز ثابت ۱۰۰۰ در زوایای مختلف θ در شکل ۶ نشان داده شده است. هنگامی که زاویه θ برابر ۵۰ درجه است، کوچک‌بودن دیوار پایینی، این محفظه را به یک محفظه مثلثی شبیه می‌کند. برای این مورد دو گردابه اولیه در محفظه مشاهده می‌شود که مشابه ساختار گردابه‌ها در یک محفظه مثلثی است. با افزایش θ، طول ضلع پایینی محفظه بزرگ‌تر شده و درنتیجه توزیع فشار در بخش بالایی محفظه (گردابه اولیه)، گردابه پایینی (گردابه ثانویه) پهن‌تر می‌شود. زمانی که این زاویه به حدود ۶۰ می‌رسد، دو گردابه مجزا با اندازه‌های متفاوت قابل تشخیص است.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.5.3.3]



شکل ۶ (الف) خطوط جریان در θ = ۵۰، (ب) خطوط جریان در θ =۶۰، (ج) خطوط جریان در θ =۷۵، (د) خطوط جریان در θ =۹۰

در آغاز، اندازه گردابه سمت راست از گردابه سمت چپ بزرگ‌تر است، ولی با افزایش بیشتر زاویه، می‌توان مشاهده نمود که اندازه گردابه گوشه راست، کوچک‌تر و گردابه گوشه چپ، بزرگ‌تر خواهد شد. در زاویه ۷۵ درجه، گردابه سمت چپ به اندازه بزرگتر از گردابه سمت راست خواهد رسید. علاوه بر این مرکز گردابه سمت چپ به طرف خط افقی گذرنده از مرکز محفظه جابه‌جا می‌شود.

۳-۳- جریان در محفظه با دیواره‌های دایروی

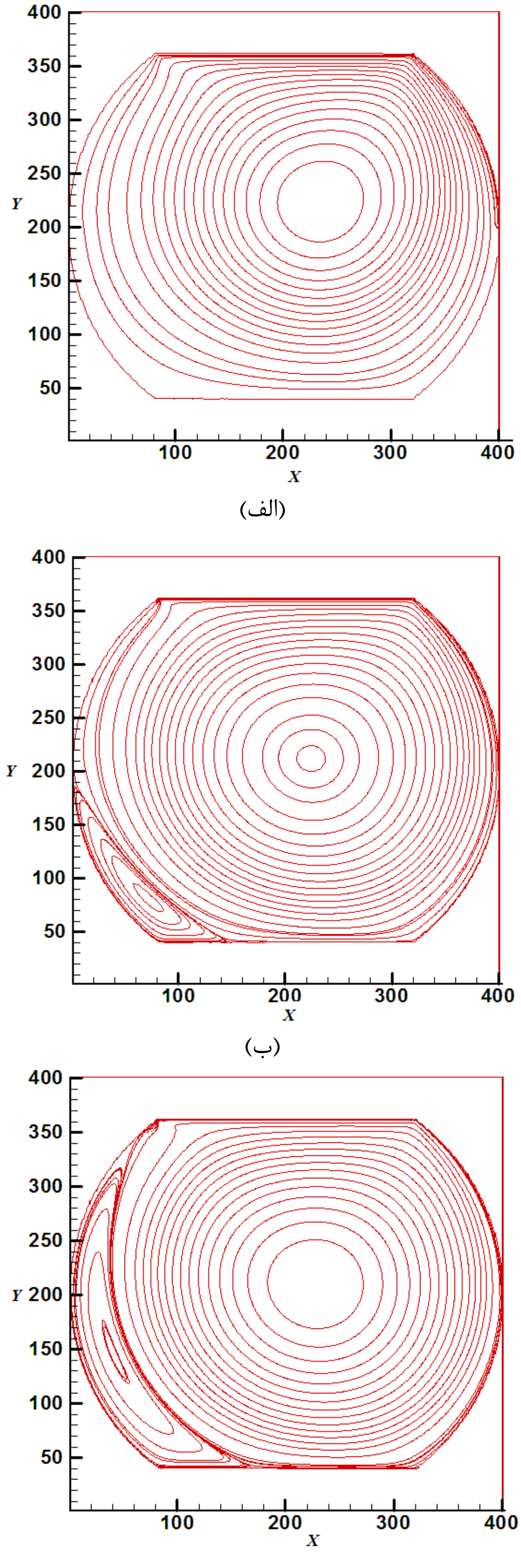
بررسی جریان در محفظه‌ای با دیواره‌های دایروی و دیوار بالایی متحرک، شکل۲-ج، از جمله مسائلی است که تاکنون کمتر به آن پرداخته شده است.

۳-۳-۱- حالت اول: n برابر ۰/۶

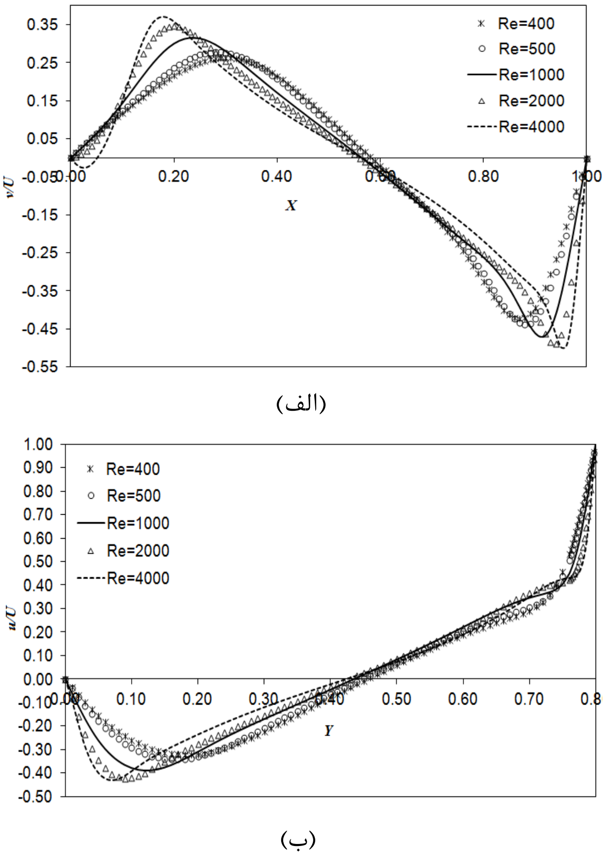
شکل ۷ نشان‌دهنده خطوط جریان در محفظه‌ای با دیواره‌های دایروی برای عدد n برابر ۰/۶ است. شکل ۷-الف خطوط جریان را برای این محفظه، در عدد رینولدز ۴۰۰ نمایش می‌دهد. در این عدد رینولدز تنها یک گردابه در محفظه مشاهده می‌شود. با افزایش عدد رینولدز، گردابه دیگری در پایین محفظه، گوشه چپ شکل می‌گیرد.

شکل‌های ۷-ب و ج نشان می‌دهند که با افزایش عدد رینولدز، این گردابه بزرگ می‌شود و مرکز آن به‌سمت دیوار بالا و سمت چپ محفظه حرکت می‌کند. درواقع با افزایش عدد رینولدز در محفظه بسته، انتقال مومنتوم از مرز بالایی به سیال افزایش می‌یابد. سیال طی مسیر منحنی با کاهش مومنتوم روبه‌رو می‌شود. این عامل، به‌همراه گرادیان فشار معکوس سبب جدایش سیال شده و در ادامه، موجب برگشت جریان و ایجاد گردابه‌ای در خلاف جهت گردابه اول می‌گردد. با افزایش بیشتر عدد رینولدز، گردابه ثانویه نیز رشد خواهد کرد. همچنین، سرعت در خطوط افقی و عمودی گذرنده از مرکز این محفظه در شکل ۸ ارائه شده است.

می‌توان مشاهده نمود که با افزایش عدد رینولدز، اندازه سرعت بیشینه در محفظه افزایش یافته است. در مقایسه با محفظه ذوزنقه‌ای‌شکل، در گوشه سمت راست، شاهد ایجاد گردابه نیستیم که به‌دلیل خط جریانی شدن محفظه (با دیواره دایروی) در این نقاط می‌باشد.



شکل ۷ (الف) خطوط جریان در Re=۴۰۰، (ب) خطوط جریان در Re= ۲۰۰۰، (ج) خطوط جریان در Re= ۴۰۰۰

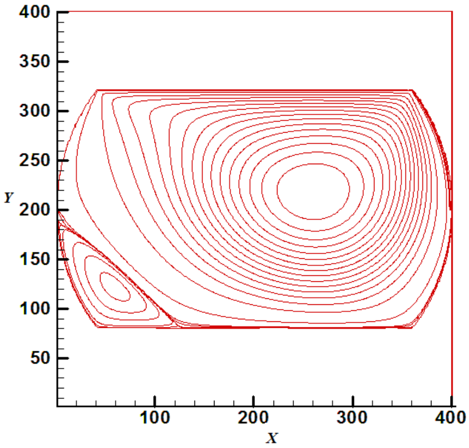


شکل ۸ (الف) تغییرات اندازه سرعت (v/U) در طول خط افقی گذرنده از مرکز محفظه، (ب) تغییرات اندازه سرعت (u/U) در طول خط عمودی گذرنده از مرکز محفظه n=۰/۶

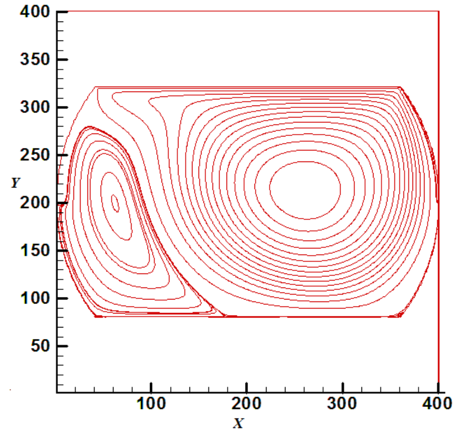
۳-۳-۲- حالت دوم: n برابر ۰/۸

خطوط جریان در محفظه‌ای با دیواره‌های دایروی با عدد n برابر ۰/۸ در اعداد رینولدز ۴۰۰، ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۴۰۰۰ در شکل ۹ نمایش داده شد است. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود، در این محفظه، در عدد رینولدز ۴۰۰، برخلاف حالت قبل، دو گردابه شکل گرفته است. با افزایش عدد رینولدز، گردابه گوشه سمت چپ محفظه بزرگ‌تر و پهن‌تر می‌شود. وقتی عدد رینولدز به ۱۰۰۰ می‌رسد، گردابه دیگری در پایین محفظه و درگوشه سمت راست شروع به شکل‌گیری می‌کند، همچنین، در این حالت گردابه گوشه سمت چپ، بزرگ‌تر از حالت قبل است. با افزایش عدد رینولدز به ۲۰۰۰، روند رشد گردابه‌های موجود در گوشه‌های محفظه ادامه می‌یابد و مراکز این گردابه‌ها به‌سمت بالای محفظه جابه‌جا می‌شود. با درنظر گرفتن عدد رینولدز برابر۴۰۰۰، ضمن رشد گردابه‌های ثانویه، گردابه

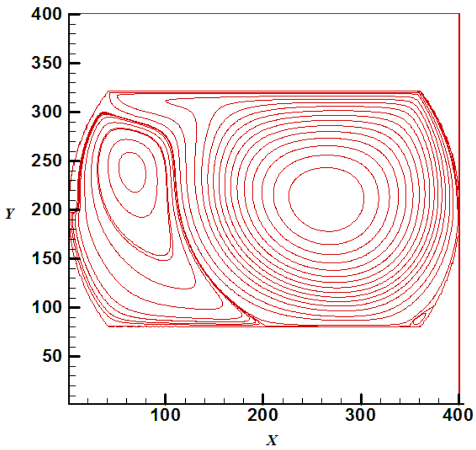
دیگری در گوشه سمت چپ نزدیک دیوار پایینی محفظه شکل می‌گیرد و تعداد گردابه‌ها به ۴ عدد می‌رسد. از مقایسه شکل‌های ۷ و ۹ می‌توان مشاهده نمود که در اعداد رینولدز مشابه، با تغییر عدد n و در نتیجه آن تغییر اندازه محفظه، الگوی جریان کاملاً متفاوتی در محفظه به‌وجود می‌آید.



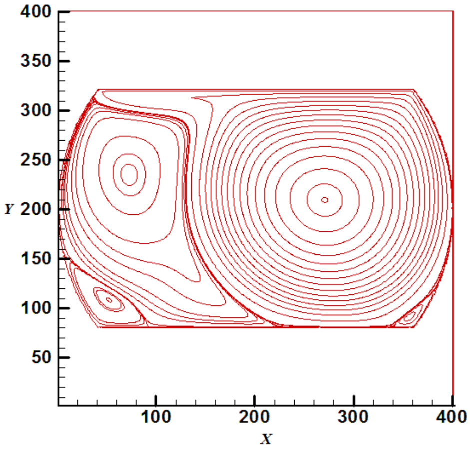
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

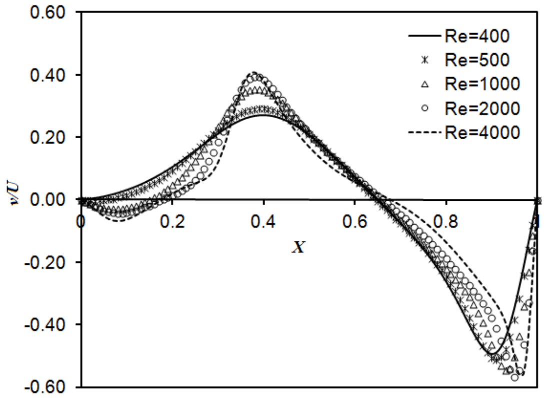
شکل ۹ (الف) خطوط جریان در Re=۴۰۰، (ب) خطوط جریان در Re=۱۰۰۰، (ج) خطوط جریان در Re=۲۰۰۰، (د) خطوط جریان در Re=۴۰۰۰

با توجه به بزرگ‌تربودن دیوار متحرک بالایی در حالت n برابر ۰/۸، پیچیده‌تربودن الگوی جریان نسبت به حالتی که n برابر ۰/۶ است کاملاً طبیعی است. در این حالت، محفظه کوچک‌تر از حالت قبل است و در عدد رینولدز مشابه، با انتقال بالاتر مومنتوم به سیال عامل مواجه هستیم. گردابه ثانویه نیز در عدد رینولدز کمتری شکل می‌گیرد. با ادامه روند افزایش عدد رینولدز، در ابتدا جدایش دیگری در گوشه پایین سمت راست رخ می‌دهد و سپس اتفاقی که برای جریان در گردابه اولیه رخ داد، برای جریان در گردابه ثانویه تکرار شده و گردابه سوم شکل می‌گیرد. شکل ۱۰ سرعت در خطوط افقی و عمودی گذرنده از مرکز این محفظه را نشان می‌دهد. از مقایسه این شکل و شکل ۸ می‌توان افزایش سرعت در اثر کوچک‌ترشدن محفظه و بزرگ‌ترشدن دیواره متحرک بالایی را ملاحظه نمود.

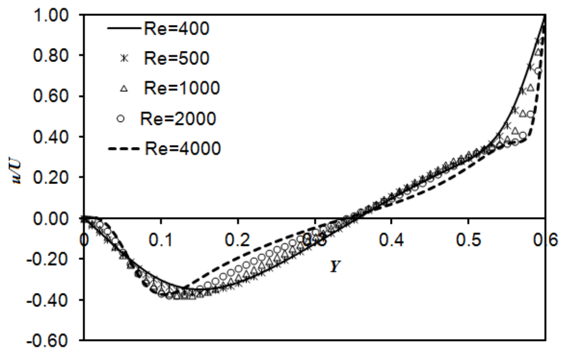
نکته جالب در این تحلیل، مقایسه کیفی شکل (۶-د) و شکل (۹-د) می‌باشد. ساختار گردابه‌ها در این دو شکل به یکدیگر شبیه هستند. سه گردابه اصلی در هر دو شکل (با اندازه‌های مختلف) دیده می‌شود. گردابه سمت راست در محفظه دایروی کوچک‌تر است و این اساسا به‌دلیل خط جریانی شدن محفظه و تغییر شکل دیواره سمت راست است. گردابه سمت چپ (در مجاورت دیواره سمت چپ) نیز در هر دو شکل یک الگو دارد و دلیل فیزیکی

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.5.3.3]

مشترکی نیز در هر دو شکل برای تشکیل این گردابه وجود دارد، که همان گرادیان فشار مخالف در مقابل سیال متحرک روی این دیواره است. پیش‌بینی می‌شود که اگر سطح پایینی و دیواره‌های محفظه به‌طور کامل به شکل نیم‌دایره درآیند (مشابه شکل ۱۱-د)، رفتار مشابهی برای تشکیل گردابه‌ها داشته باشیم و دو گردابه اصلی در محفظه تشکیل شود.

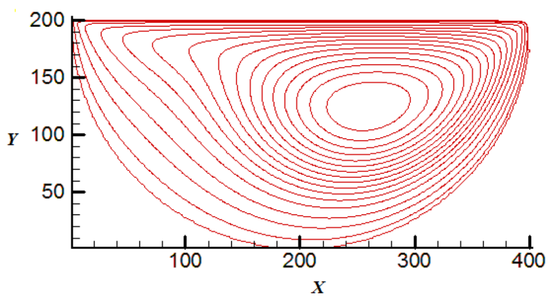


(الف)

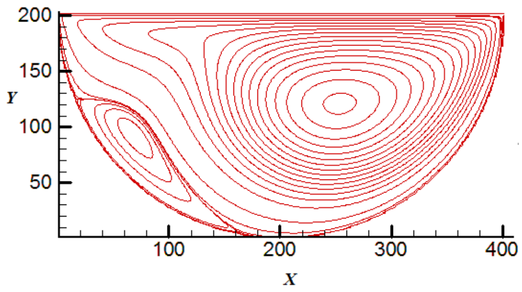


(ب)

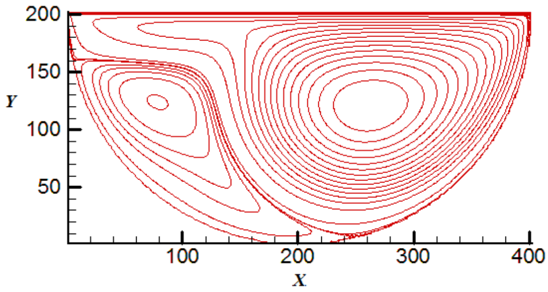
شکل ۱۰ (الف) تغییرات اندازه سرعت (v/U) در طول خط افقی گذرنده از مرکز محفظه، (ب) تغییرات اندازه سرعت (u/U) در طول خط عمودی گذرنده از مرکز محفظه در حالت n=۰/۸



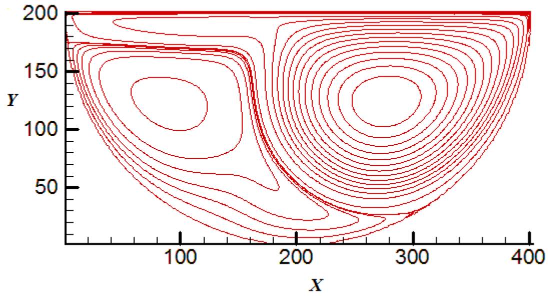
(الف)



(ب)



(ج)

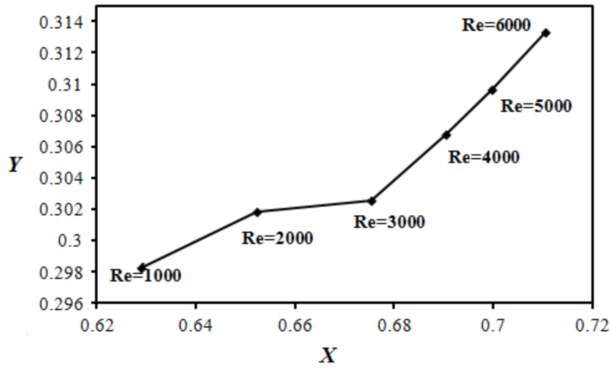


(د)

شکل ۱۱ (الف) خطوط جریان در Re=۵۰۰، (ب) خطوط جریان در Re=۱۰۰۰، (ج) خطوط جریان در Re=۲۰۰۰، (د) خطوط جریان در Re=۴۰۰۰

۳-۴- جریان در محفظه به شکل نیم‌دایره

خطوط جریان در اعداد رینولدز ۵۰۰، ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۴۰۰۰ برای محفظه‌ای به شکل نیم‌دایره در شکل ۱۱ نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود، هنگامی که عدد رینولدز کوچک است، تنها یک گردابه در محفظه شکل می‌گیرد (شکل ۱۱-الف). با افزایش عدد رینولدز، ابتدا گردابه ثانویه در محفظه شکل گرفته و سپس شروع به رشد می‌کند و به‌سمت دیوار متحرک کشیده می‌شود. درنهایت افزایش عدد رینولدز می‌تواند موجب تشکیل گردابه سوم در محفظه گردد. تغییر مکان مرکز گردابه اولیه با عدد رینولدز در شکل ۱۲ نشان داده شده است.



شکل ۱۲ تغییرات مکان گردابه اصلی در نیم‌دایره

برای اعداد رینولدز بزرگ‌تر از ۱۰۰۰، با افزایش عدد رینولدز، مرکز گردابه اصلی بالاتر می‌رود و در واقع به‌طرف دیواره متحرک و همچنین در جهت حرکت دیواره جابه‌جا می‌شود که به‌دلیل وجود نیروهای اینرسی (در مقابل اثرات لزجی)، انتظار نیز حرکت در همین جهت است. ضمنا، به‌دلیل خط جریانی شدن محفظه، شاهد تشکیل گردابه در سمت راست محفظه نیستیم. در این محفظه نیز مشابه شکل‌های (۹-د) و (۶-د) شاهد تشکیل یک گردابه ثانویه بزرگ در مجاورت دیواره سمت چپ هستیم که گرادیان فشار معکوس روی این دیواره (در تمام شکل‌ها) نقش مهمی را برعهده دارد.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، الگوی جریان در یک محفظه دوبعدی به‌شکل مثلث قائم‌الزاویه، ذوزنقه و محفظه با دیواره دایروی و محفظه‌ای به‌شکل نیم‌دایره با دیواره بالایی متحرک، با استفاده از روش بولتزمن شبکه‌ای و با اعمال دقت مرتبه دو در مرزهای مایل، مورد بررسی قرار گرفت. در مورد محفظه مثلثی و محفظه‌ای به‌شکل نیم‌دایره، تاثیر عدد رینولدز روی ساختار گردابه‌ها بررسی شد و مشاهده گردید افزایش عدد رینولدز سبب افزایش گردابه‌ها می‌شود. در محفظه ذوزنقه‌ای، در عدد رینولدز ثابت، تاثیر زاویه داخلی بر روی الگوی جریان بررسی شد و مشاهده گردید که با افزایش این زاویه تا مقدار بحرانی، گردابه نزدیک انتهای محفظه، پهن‌تر شده و سرانجام به دو گردابه مجزا در گوشه‌های محفظه تقسیم می‌شود. افزایش عدد رینولدز از ۴۰۰ به ۴۰۰۰ در محفظه با دیواره دایروی برای $n=۰/۶$ ابتدا سبب تشکیل گردابه ثانویه و سپس موجب رشد این گردابه می‌شود و برای $n=۰/۸$ افزایش عدد رینولدز در ابتدا سبب رشد گردابه ثانویه موجود و سپس سبب پیدایش گردابه‌های جدید و رشد آن‌ها می‌شود. مشاهده شد که در عدد رینولدز ثابت، با تغییر اندازه دیواره‌های بالا و پایین، که به‌معنی تغییر در اندازه کمان‌های جداشده از دایره است، الگوی جریان کاملاً متفاوتی شکل می‌گیرد. روش بولتزمن شبکه‌ای به‌خوبی الگوی جریان را مدلسازی کرده است.

۵- علایم و نشانه‌ها

f^{eq} تابع توزیع تعادلی چگالی

f_i تابع توزیع چگالی

H ارتفاع محفظه ذوزنقه‌ای، قاعده و ارتفاع محفظه مثلثی، قطر دایره در محفظه با دیواره دایروی (m)

L پهنای محفظه ذوزنقه‌ای (m)

n نسبت اندازه دیواره پایینی به قطر در محفظه با دیواره دایروی

m نسبت اندازه ارتفاع به قطر در محفظه با دیواره دایروی

u سرعت سیال (ms^{-1})

θ زاویه دیوارهای چپ و راست ذوزنقه نسبت به دیوار بالا

υ لزجت سینماتیکی شبکه بولتزمن (m^2s^{-1})

ρ چگالی (kgm^{-3})

τ_v زمان آرامش هیدرودینامیکی

w فاکتور وزنی

۶- مراجع

[1] Ghia U., Ghia K. N., “High-Re Souutions for Incompressible Flow using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method”, *Journal of computational physics*, Vol. 48, 1982, pp. 387-411.
[2] Chia Z. H., Shi B. C., “Simulating High Reynolds Number Flow in Two-Dimensional Lid-Driven Cavity by Multi-Relaxation-Time Lattice Boltzmann Method”, *Chinese Physics*, Vol. 15, No. 8, 2006, pp. 1855-1863.
[3] Peng Y. F., Shiau Y. H., “Transition in a 2-D Lid-Driven Cavity Flow”, *Computer & Fluids*, Vol. 32, 2003, pp337-352.
[4] Huang K., *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, 2nd Ed., New York, John Wiley, 1987.
[5] Shan X. W., Chen H. D., “Lattice Boltzmann Model for Simulating Flows with Multiple Phases

and Components", *Physical Review E*, Vol. 47, 1993, pp.1815-1819.

[6] Gue Z. L., Zhao T. S., "Discrete Velocity and Lattice Boltzmann Models for Binary Mixtures of Non Ideal Fluids", *Physical Review E*, Vol. 68, 2003, pp. 035302:1-4.

[7] Hou S., Zou Q., "Simulation of Cavity Flow by the Lattice Boltzmann Method", *Journal of computational physics*, Vol. 118, 1995, pp. 329-347.

[8] Patil D. V., Lakshmisha K. N., "Lattice Boltzmann Simulation of Lid-Driven Flow in Deep Cavities", *Computer & Fluids*, Vol. 35, 2006, pp. 1116-1125.

[9] Lin L. S., Chen Y. C., "Multi Relaxation Time Lattice Boltzmann Simulations of Deep Lid Driven Cavity Flows at Different Aspect Ratios", *Computer & Fluids*, Vol. 45, 2011, pp. 233-240.

[10] Li M., Tang T., "Steady Viscous Flow in a Triangular Cavity by Efficient Numerical Techniques", *Computers math Applic*, Vol. 31, No. 10, 1996, pp. 55-65.

[11] Gaskell P. H., Thompson H. M., "A Finite Element Analysis of Steady Viscous Flow in Triangular Cavities", *Proceedings of the institution of Mechanical Engineers, part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 213, No. 3, 1999, pp. 263-276.

[12] McQuain W. D., Ribbens C., "Steady Viscous Flow in a Trapezoidal Cavity", *Computer & Fluids*, Vol. 213, 1994, pp. 613-626.

[13] Paramane S. B., Sharma A., "Consisent Implementation and Comparison of FOU, CD, SOU and QUICK Convection Schemes in Square, Skew, Trapezoidal and Triangular Lid-Driven Cavity Flow", *Numerical Heat Transfer B-Fundamentals*, Vol. 54, No. 1, 2008, pp. 84-102.

[14] Fudhail A. M., Sidik N. A. C., "Numerical Simulations of Shear Driven Square and Triangular Cavity by using Lattice Boltzmann Scheme", *World Academy of Science, Engineering and Technology*, Vol. 69, 2010, pp. 190-196.

[15] Zhang T., Shi B., "Lattice Boltzmann Simulation of Lid-Driven Flow in Trapezoidal Cavities", *Computer & Fluids*, Vol. 39, No. 19, 2010, pp. 1977-1989.

[16] Shankar P. N., Despande M. D., "Fluid Mechanics in the Driven Cavity", *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 136, 2000, pp. 93-136.

[17] Sharif M. A. R., "Laminar Mixed Convection in Shallow Inclined Driven Cavities with Hot Moving Lid on Top and Cooled From Bottom", *Applied Thermal Engineering*, Vol. 27, 2007, pp. 1036-1042.

[18] Oztop H. F., Dagtekin I., "Mixed Convection in two-Sided Lid-Driven Differentially Heated Square Cavity", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, 2004, pp. 1761-1769.

[19] Mansutti D., Graziani G., Piva R., "A Discrete Vector Potential Model for Unsteady Incompressible Viscous Flows", *Journal of Computational Physics*, Vol. 92, 1991, pp. 161-184.

[20] Ghia U., Ghia K. N., Shin C. T., "High-Re Solutions for Incompressible Flow using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method", *Journal of Computational Physics*, Vol. 48, 1982, pp. 387-411.

[21] Bruneau C. H., Saad M., "The 2D Lid-Driven Cavity Problem Revisited", *Computer & Fluids*, Vol. 35, 2006, pp. 326-348.

[22] Hardy J., de Pazzis O., "Molecular Dynamics of a Classical Lattice Gas: Transport Properties and Time Correlation Functions", *Physical Review A*, Vol. 13, 1976, pp. 1949-1961.

[23] Frisch U., Hasslacher B., "Lattice-Gas Automata for the Navier-Stokes Equations", *Physical Review Letters*, Vol. 56, 1986, pp. 1505-1508.

[24] McNamara G., Zanetti G., "Use of the Boltzmann Equation to Simulate Lattice-Gas Automata", *Physical Review Letters*, Vol. 61, 1988, pp. 2332-2335.

[25] Higuera F. J., Jimenez J., "Boltzmann Approach to Lattice Gas Simulations", *Europhys Letters*, Vol. 9, No. 7, 1989, pp. 663-668.

[26] He X., Luo L. S., "Theory of the Lattice Boltzmann Equation", *Physical Review E*, Vol. 56, 1997, pp. 6811-6817.

[27] Dazhi Y., Renwei M., "Viscous Flow Computations with the Method of Lattice Boltzmann Equation", *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 39, 2003, pp. 329-367.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.5.3.3]