مجله مهندسی مکانیک مدرس، اسفند 1394، دوره 15، شماره 12، ص‌ص 153-158

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

# بررسی رفتار مکانیکی سرخ‌رگ‌های انسانی در تغییر شکل‌های بزرگ براساس تئوری الاستیسیته غیرخطی

امین صفی جهانشاهی[1]، علیرضا سعیدی[2*]

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان
2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان
* کرمان، کدپستی 7618868366، saidi@uk.ac.ir

**اطلاعات مقاله**

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 26 مرداد 1394
پذیرش: 04 آبان 1394
ارائه در سایت: 30 آبان 1394

*کلید واژگان:*
الاستیسیته غیرخطی
تغییرشکل‌های بزرگ
سرخ‌رگ
تست تنش دومحوره

**چکیده**

رفتار مکانیکی سلول‌ها و بافت‌های زنده غیرخطی بوده و تغییر شکل‌های آن‌ها بزرگ است. به کارگیری یک مدل مکانیکی مناسب که بتواند این رفتار را پیش‌بینی کند، قدم مهمی در پیش‌گیری و درمان بیماری‌های مختلف و ساخت بافت‌های مصنوعی محسوب می‌شود. در این مقاله با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرخطی و مدل غیرخطی مونی-ریولین به تحلیل مکانیکی سرخ رگ‌های انسانی تحت فشار داخلی و کشش محوری پرداخته شده است. در ابتدا با استفاده از نتایج تحقیق تجربی انجام شده در تست تنش دومحوره، ثوابت الاستیک ماده برای سرخ‌رگ ها محاسبه شده‌اند. برای مدل‌سازی، سرخ‌رگ به صورت یک استوانه جدار ضخیم بلند، همگن و همسانگرد در نظر گرفته شده است. توزیع تنش های شعاعی و محیطی براساس فشار کمینه و بیشینه خون محاسبه گردیده است. تغییرات قطر سرخ‌رگ تحت اثر فشار داخلی محاسبه شده است که در مقایسه با نتایج تجربی مطابقت خوبی را نشان می‌دهد. نمودارهای توزیع تنش برحسب شعاع رسم شده است و بیانگر این موضوع است که لایه‌های داخلی سرخ‌رگ‌ها نسبت به لایه‌های خارجی، سهم بسیار بیشتری در تحمل تنش‌ها دارند. همچنین محاسبه ثوابت الاستیک برای سرخ رگ‌های افراد در سنین مختلف نشان می‌دهد که با افزایش سن، سرخ‌رگ‌ها سخت‌تر شده و قابلیت انعطاف‌پذیری آن‌ها کاهش می‌یابد.

# Mechanical behavior of human arteries in large deformation using non-linear elasticity theory

**Amin Safi Jahanshahi, Ali Reza Saidi***

Department of Mechanical Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran
* P.O.B. 7618868366, Kerman, Iran, saidi@uk.ac.ir

**ARTICLE INFORMATION**

Original Research Paper
Received 17 August 2015
Accepted 26 October 2015
Available Online 21 November 2015

*Keywords:*
Non-Linear Elasticity
Large Deformation
Artery
Biaxial Test

**ABSTRACT**

Mechanical behavior of live cells and tissues is non-linear and their deformations are large. Using a suitable mechanical model that could predicts this behavior, is an important step in the prevention and treatment of various diseases and the production of artificial tissues. In this paper, using the non-linear elasticity theory and non-linear Mooney-Rivlin model, mechanical analysis of human arteries has been studied under internal pressure and axial tension. By using the experimental study of biaxial test, the elastic constants of the arteries are calculated. For modeling, the arteries are considered as long homogeneous and isotropic cylinders. Radial and circumferential stress distribution on the minimum and maximum blood pressure is calculated. Variation of artery radius due to internal pressure is calculated and compared with the reported experimental data, and a good agreement is seen. The stress distribution curves versus radius are plotted which show that the inner layers of the arteries have much greater role in stress distribution than the outer layers. The elastic constants which are calculated for different ages show that the arteries of older people become stiffer and their flexibility decrease.

## 1- مقدمه

رگ‌های خونی را می‌توان به صورت یک استوانه بلند در نظر گرفت که فشار داخلی آن‌ها بین یک مقدار کمینه و بیشینه تغییر می‌کند. این فشار داخلی همان فشار خون سیستولیک[1] و دیاستولیک[2] است که در اثر انقباض ماهیچه‌های قلب و جریان یافتن خون درون رگ‌ها به وجود می‌آید.

سرخ‌رگ‌ها و سیاه‌رگ‌ها از سه لایه تشکیل شده‌اند (شکل 1) [1]. لایه داخلی[3] آن‌ها از یک لایه سلول‌های اندوتلیال[4] پوشیده شده است. این سلول‌ها توسط اتصال‌های مکانیکی و الکتروشیمیایی با یکدیگر یک غشای داخلی برای رگ‌ها ایجاد می‌کنند. در واقع این غشا مرز بین خون و دیواره اصلی رگ‌ها را تشکیل می‌دهد. سلول‌های اندوتلیال از کلاژن[5]،

1- Systolic
2- Diastolic

3- Tunica intima
4- Endothelial cell
5- Collagen

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
A. Safi Jahanshahi, A. R. Saidi, Mechanical behavior of human arteries in large deformation using non-linear elasticity theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 12, pp. 153-158, 2015 (In Persian)

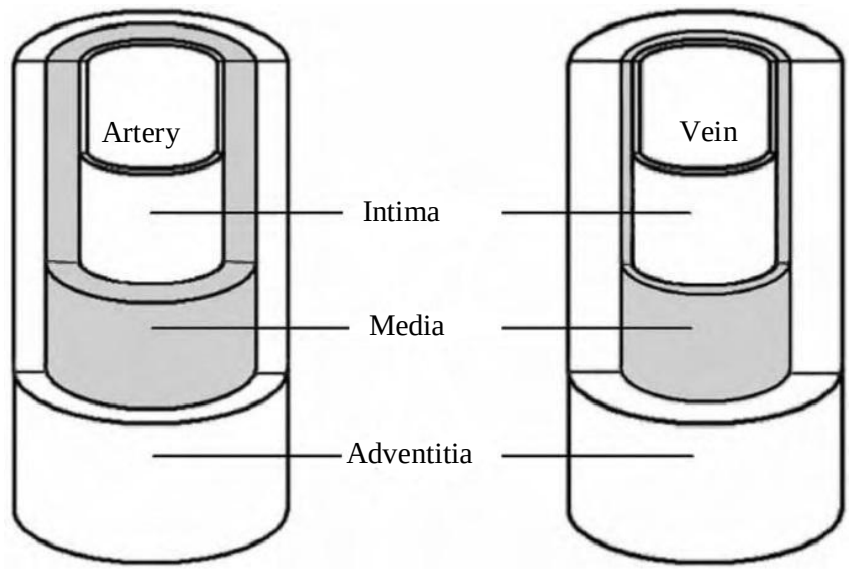


**Fig-1** Cross section of an artery and vein, the inner, middle and outer layers [1].

**شکل 1** مقطع سرخ‌رگ و سیاه رگ شامل لایه داخلی، میانی و خارجی [1]

فیبرونکتین[1] و لامینین[2] تشکیل شده‌اند [1-4].

لایه میانی[3] یا همان دیواره اصلی رگ‌ها، بیشترین حجم بدنه رگ را شامل شده و از سلول‌های ماهیچه‌ای و الاستین[4] به همراه دسته رشته‌های کلاژن تشکیل شده است. در سرخ‌رگ‌های نزدیک‌تر به قلب که قطر بزرگی دارند، درصد الاستین نسبت به ماهیچه بیشتر و در سرخ‌رگ‌های دور تر از قلب که قطر کمتری دارند، برعکس است. لایه خارجی[5] از کلاژن نوع 1، سلول‌های عصبی، فیبروبلاست[6] (نوعی سلول که قابلیت تبدیل شدن به رشته‌های کلاژن را دارد) و رشته‌های الاستین تشکیل شده است [1،3،4]. در تحلیل ماکروسکوپی می‌توان کل دیواره سرخ‌رگ را به عنوان یک ماده همسانگرد یا ناهمسانگرد، همگن و غیرقابل تراکم در نظر گرفت. آزمایش‌هایی که بر روی بافت های زنده انجام می‌شود به دو دسته کلی در محیط آزمایشگاه[7] و در شرایط زنده[8] تقسیم بندی می‌شوند. کاریو و همکارانش دیواره سرخ‌رگ را به‌عنوان یک ماده ایزوتروپیک در نظر گرفته و با انجام آزمایش در محیط آزمایشگاه نشان داده‌اند که سرخ رگ یک ماده غیرقابل تراکم است [5]. ویشناو و همکارانش [6] با در نظر گرفتن یک تابع انرژی چند جمله‌ای دیواره سرخ‌رگ را مدل‌سازی کرده‌اند و از مقایسه تئوری خود با نتایج تجربی حاصل از آزمایش در محیط آزمایشگاه ثوابت چند جمله‌ای را محاسبه کرده‌اند. هودتز با استفاده از نتایج آزمایش در شرایط زنده و در نظر گرفتن دیواره سرخ‌رگ به‌عنوان یک ماده ناهمسانگرد به تحلیل تنش‌های محیطی سرخ رگ پرداخته است [7]. در بیشتر تحقیقات صورت گرفته سرخ‌رگ به‌عنوان یک ماده غیرقابل تراکم در نظر گرفته است [5-9]. تغییر شکل بافت‌های زنده بزرگ بوده و رفتار مکانیکی آن‌ها غیرخطی است. برای مدل‌سازی ریاضی سرخ‌رگ‌ها می‌توان آن‌ها را به‌صورت استوانه بلند و دو لایه یا تک لایه در نظر گرفت. مولتزان و همکارانش یک مدل دو لایه و همسانگرد در نظر گرفته‌اند و از یک تابع انرژی چند جمله‌ای استفاده کرده‌اند [10-12]. آگدن [13] و هولزاپفل و ویزساکر [14] نیز یک مدل دو لایه و ناهمسانگرد برای تحلیل مکانیکی سرخ رگ در نظر گرفته‌اند و از تابع انرژی نئو- هوکین برای بیان جنس ماتریس سرخ رگ استفاده کرده‌اند.

برخی مدل‌سازی‌های صورت گرفته، دیواره سرخ‌رگ را همگن و جدار نازک در نظر گرفته اند [15-20]، در صورتی که برای تخمین رفتار واقعی سرخ‌رگ‌ها نیاز است که از یک مدل استوانه جدار ضخیم استفاده شود. در این مقاله یک مدل استوانه تک لایه جدار ضخیم (با ضخامت واقعی) از جنس ماده مونی- ریولین[9] در نظر گرفته و ثوابت ماده براساس نتایج تست تنش کشش دو محوره محاسبه شده است و نتایج حاصل نشان دهنده کارآمد بودن مدل غیرخطی مونی- ریولین برای بیان رفتار مکانیکی سرخ‌رگ‌های انسانی است.

## 2- مدل غیرخطی مونی- ریولین

می‌توان نشان داد که در حالت سه بعدی، عمومی‌ترین شکل معادله مشخصه یک ماده همسانگرد به صورت رابطه (1) است [21]:

$$T = a_0 I + a_1 B + a_2 B^2 \tag{1}$$

که در آن $T$ تانسور تنش، $a_0, a_1, a_2$ ثوابت ماده، $I$ تانسور واحد و $B = FF^T$ تانسور تغییر شکل چپ کوشی- گرین است. نامتغیرهای تانسور $B$ به صورت رابطه (2) تعریف می‌شوند:

$$I_1 = tr(B), \quad I_2 = \frac{1}{2}[I_1^2 - tr(B^2)], \quad I_3 = \det B \equiv (\det F)^2 \tag{2}$$

که $tr()$ نشان دهنده تریس[10] تانسور است. ژاکوبین تغییر شکل را می‌توان به شکل رابطه (3) نوشت:

$$J = \det F = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \tag{3}$$

جایی که $\lambda_i > 0, i \in \{1,2,3\}$ کشش‌های اصلی هستند.

برای یک ماده غیرقابل تراکم، معادله (3) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$J = \det F = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \tag{4}$$

با استفاده از قضیه کیلی- همیلتون معادله (1) به‌شکل زیر درخواهد آمد:

$$B^3 - \alpha_1 B^2 + \alpha_2 B - \alpha_3 I = 0 \tag{5}$$

که در آن $\alpha_i > 0, i \in \{1,2,3\}$ توابع اسکالری از نامتغیرهای تانسور $B$ هستند. با اندکی ساده‌سازی برای یک ماده غیر قابل تراکم معادله (5) به صورت زیر درمی‌آید:

$$T = -pI + c_1 B + c_2 B^{-1} \tag{6}$$

که $p$ یک ثابت مجهول و فشار هیدرواستاتیک است که به واسطه قید غیرقابل تراکم بودن وارد معادله شده و $c_1$ و $c_2$ ثوابت الاستیک ماده هستند.

می دانیم که تابع چگالی انرژی کرنشی $W$ برای یک ماده همگن فقط تابعی از گرادیان تغییر شکل $F$ است. چنان‌چه ماده غیرهمگن باشد تابع انرژی کرنشی علاوه‌بر گرادیان تغییر شکل به موقعیت نقاط مختلف ماده یعنی $X$ نیز وابسته خواهد بود. اگر هیچ قید داخلی مانند غیرقابل تراکم بودن وجود نداشته باشد، تنش اسمی $S$ و گرادیان تغییر شکل مزدوج[11] خواهند بود. بنابراین به سادگی خواهیم داشت [13]:

$$S = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}} \tag{7}$$

رابطه اخیر به صورت مولفه ای به‌صورت $S_{\alpha i} = \partial W / \partial F_{i\alpha}$ نوشته می‌شود.

برای یک ماده غیرقابل تراکم رابطه (7) به شکل زیر درمی‌آید:

$$S = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}} - pF^{-1}, \qquad \det F = 1 \tag{8}$$

معادله (7) را برحسب تنش کوشی می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\sigma = JF^{-1}\left(\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}}\right) \tag{9}$$

رابطه بالا برای یک ماده تراکم ناپذیر به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\sigma = F\left(\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}}\right) - pI, \qquad \det F = 1 \tag{10}$$

1- Fibro nectin
2- Laminin
3- Tunica media
4- Elastin
5- Tunica adventitia
6- Fibroblast
7- In vitro
8- In vivo

9- Mooney-Rivlin
10- Trace
11- Conjugate

یک نتیجه منطقی که از همسانگردی ماده به دست می‌آید این است که بردارهای ویژه تانسور تنش کوشی و تانسور $V$ همراستا هستند، جایی که $V$ تانسور متقارن و مثبت معینی است که به تانسور کشیدگی چپ معروف است. بنابراین تانسور تنش کوشی را برحسب بردارهای تنش کوشی به شکل طیفی می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i v^{(i)} \otimes v^{(i)} \tag{11}$$

جایی که $\sigma_i$ تنش‌های اصلی کوشی هستند. بنابراین:

$$J\sigma_i = \lambda_i \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_i}\right), \qquad i = 1,2,3 \tag{12}$$

و برای یک ماده تراکم‌ناپذیر خواهیم داشت:

$$\sigma_i = \lambda_i \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_i}\right) - p, \tag{13}$$

یک تغییر شکل همگن را بررسی می‌کنیم که به‌طورکلی می‌توان آن را به شکل زیر در نظر گرفت:

$$x_1 = \lambda_1 X_1, \quad x_2 = \lambda_2 X_2, \quad x_3 = \lambda_3 X_3 \tag{14}$$

تابع انرژی پتانسیل $W$ را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\widehat{W}(\lambda_1, \lambda_1) = W(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}) \tag{15}$$

با حذف $p$ از رابطه (13) می‌توان نوشت:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \lambda_1 \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_1}, \quad \sigma_2 - \sigma_3 = \lambda_2 \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_2} \tag{16}$$

اگر تست تنش دو محوره را در نظر بگیریم خواهیم داشت: $\sigma_3 = 0$ و بنابراین رابطه بالا تبدیل خواهد شد به:

$$\sigma_1 = \lambda_1 \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_1}, \quad \sigma_2 = \lambda_2 \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_2} \tag{17}$$

اگر در نظر بگیریم:

$$W_1 = \frac{\partial \widehat{W}}{\partial I_1}, \quad W_2 = \frac{\partial \widehat{W}}{\partial I_2}, \qquad W(I_1, I_2) \equiv \widehat{W}(\lambda_1, \lambda_2) \tag{18}$$

با استفاده از معادلات (14) و تشکیل تانسور گردیان تغییر شکل و سپس محاسبه تانسور چپ کوشی-گرین و اعمال شرط تراکم ناپذیری و استفاده از روابط (17) پس از اندکی عملیات ریاضی داریم:

$$\sigma_1 = 2(\lambda_1^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2})(W_1 + \lambda_2^2 W_2) \tag{19-الف}$$

$$\sigma_2 = 2(\lambda_2^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2})(W_1 + \lambda_1^2 W_2) \tag{19-ب}$$

با حل روابط (19) برای $W_1$ و $W_2$ خواهیم داشت:

$$W_1 = \frac{\lambda_1^2 \sigma_1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)} - \frac{\lambda_2^2 \sigma_2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \tag{20-الف}$$

$$W_2 = \frac{\sigma_2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} - \frac{\sigma_1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)} \tag{20-ب}$$

در روابط بالا برای سادگی در نوشتار از رابطه $\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1} = \lambda_3$ استفاده شده است. تابع انرژی آزاد هلمهولتز برای ماده مونی-ریولین به صورت زیر است [22]:

$$W = c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3) \tag{21}$$

از مقایسه روابط (21) با روابط (18) داریم:

$$W_1 = c_1, \quad W_2 = c_2 \tag{22}$$

یعنی با انجام دادن یک تست تنش دو محوره می‌توان ثوابت ماده مونی-ریولین را به سادگی به‌دست آورد. با به کارگیری نتایج حاصل از تست تنش دو محوره که توسط موهان و ملوین [23] انجام شده، به راحتی می‌توان ثوابت $c_1$ و $c_2$ را محاسبه نمود.

## 3- تحلیل مکانیکی سرخ‌رگ‌ها

در این تحلیل کل دیواره سرخ‌رگ، یک ماده همگن و همسانگرد در نظر گرفته می شود. میدان تغییر شکل برای استوانه تحت کشش و فشار داخلی به شکل زیر است [24]:

$$r = r(R), \qquad \theta = \Theta, \qquad z = \frac{Z}{D} \tag{23}$$

که در آن $\lambda_z = 1/D$ کشش در امتداد طول استوانه است. با توجه به میدان تغییر شکل داده شده می‌توان تانسور گرادیان تغییر شکل را به صورت زیر نوشت:

$$F = \begin{bmatrix} r' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D} \end{bmatrix} \tag{24}$$

که در آن $r' = dr/dR$ است. با اعمال شرط تراکم ناپذیری $\det F = 1$ خواهیم داشت:

$$r'\left(\frac{r}{R}\right)\left(\frac{1}{D}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad rr' = RD \qquad r\left(\frac{dr}{dR}\right) = RD \tag{25}$$

با انتگرال‌گیری از رابطه اخیر داریم:

$$r^2 = DR^2 + A \tag{26}$$

در رابطه(26)، $A$ ثابت انتگرال‌گیری است که باید تعیین شود.

با محاسبه تانسور چپ کوشی و قرار دادن آن در معادله (6) – معادله ساختاری ماده غیرخطی مونی- ریولین - داریم:

$$\begin{bmatrix} T_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & T_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & T_{zz} \end{bmatrix} = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} \frac{D^2R^2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D^2} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \frac{r^2}{D^2R^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & D^2 \end{bmatrix} \tag{27}$$

بنابراین می‌توان سه مولفه قائم تنش کوشی را به صورت زیر نوشت:

$$T_{rr} = -p + c_1 \frac{D^2R^2}{r^2} + c_2 \frac{r^2}{D^2R^2} \tag{28}$$

$$T_{\theta\theta} = -p + c_1 \frac{r^2}{R^2} + c_2 \frac{R^2}{r^2} \tag{29}$$

$$T_{zz} = -p + c_1 \frac{1}{D^2} + c_2 D^2 \tag{30}$$

در روابط اخیر چنانچه ثوابت $p, D, A$ مشخص باشند توزیع تنش کاملا معلوم شده و حل مساله به انجام می‌رسد.

معادله تعادل در مختصات قطبی به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\frac{dT_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(T_{rr} - T_{\theta\theta}) = 0 \tag{31}$$

و شرایط مرزی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$T_{rr}(r_{\text{in}}) = -P_{\text{in}}, \quad T_{rr}(r_{\text{ou}}) = -P_{\text{ou}} \tag{32-الف}$$

$$F_a = 2\pi \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{ou}}} T_{zz} r dr \tag{32-ب}$$

که $P_{\text{in}}$ و $P_{\text{ou}}$ به ترتیب فشار داخلی و خارجی سرخ‌رگ و $F_a$ نیروی محوری هستند. اکنون با حل رابطه (31) و با اعمال شرط مرزی (32- الف) از شعاع داخلی $r_{\text{in}}$ تا شعاع دلخواه $r$ خواهیم داشت:

$$T_{rr}(r) = -P_{\text{in}} - c_1 \int_{r_{\text{in}}}^{r} \left(\frac{D^2R^2}{r^3} - \frac{r}{R^2}\right) dr - c_2 \int_{r_{\text{in}}}^{r} \left(\frac{r}{D^2R^2} - \frac{R^2}{r^3}\right) dr \tag{33}$$

حال با استفاده از معادله (26) رابطه بالا را برحسب فقط متغیر $r$ بازنویسی می‌کنیم:

$$T_{rr}(r) = -P_{\text{in}} - c_1 \int_{r_{\text{in}}}^{r} \left(\frac{Dr^2 - DA}{r^3} - \frac{rD}{r^2 - A}\right) dr - c_2 \int_{r_{\text{in}}}^{r} \left(\frac{r}{Dr^2 - DA} - \frac{r^2 - A}{Dr^3}\right) dr \tag{34}$$

با انتگرال‌گیری و انجام عملیات ریاضی، در نهایت خواهیم داشت:

$$T_{rr}(r) = -P_{\text{in}} - (c_1 D - \frac{c_2}{D})\left[\ln(r) + \frac{1}{2}\frac{A}{r^2} - \frac{1}{2}\ln(r^2 - A)\right]_{r_{\text{in}}}^{r} \quad (35)$$

در رابطه اخیر چنانچه قرار دهیم: $r = r_{\text{ou}}$ و با فرض صفر بودن فشار خارجی، رابطه‌ای بین دو ثابت مجهول $A, D$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$0 = -P_{\text{ou}} = -P_{\text{in}} - (c_1 D - \frac{c_2}{D})\left[\ln(r) + \frac{1}{2}\frac{A}{r^2} - \frac{1}{2}\ln(r^2 - A)\right]_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{ou}}} \quad (36)$$

از طرفی با مقایسه رابطه اخیر و رابطه (28) به‌ازای $T_{rr}(r_{\text{ou}})$ می‌توان ثابت مجهول $p$ را برحسب ثوابت مجهول $A, D$ به‌صورت زیر نوشت:

$$p = +P_{\text{in}} + c_1 D\left(\frac{r_{\text{ou}}^2 - A}{r_{\text{ou}}^2}\right) + \frac{c_2}{D}\left(\frac{r_{\text{ou}}^2}{r_{\text{ou}}^2 - A}\right) + \left(c_1 D - \frac{c_2}{D}\right)\left[\ln(r) + \frac{1}{2}\frac{A}{r^2} - \frac{1}{2}\ln(r^2 - A)\right]_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{ou}}} \quad (37)$$

حال از شرط مرزی (32- ب) استفاده می‌کنیم:

$$F_a = 2\pi \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{ou}}} \left(-p + c_1 \frac{1}{D^2} + c_2 D^2\right) r dr \quad (38)$$

که با جای‌گذاری $p$ از رابطه (37) و انتگرال‌گیری از رابطه بالا خواهیم داشت:

$$F_a = \pi\{-P_{\text{in}} - c_1 D\left(\frac{r_{\text{ou}}^2 - A}{r_{\text{ou}}^2}\right) - \frac{c_2}{D}\left(\frac{r_{\text{ou}}^2}{r_{\text{ou}}^2 - A}\right) - \left(c_1 D - \frac{c_2}{D}\right)\left[\ln(r) + \frac{1}{2}\frac{A}{r^2} - \frac{1}{2}\ln(r^2 - A)\right]_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{ou}}} + c_1 \frac{1}{D^2} + c_2 D^2\}(r_{\text{ou}}^2 - r_{\text{in}}^2) \quad (39)$$

همچنین می‌توان روابط (36) و (39) را با استفاده از رابطه (26) برحسب $R$ بازنویسی کرد:

$$P_{in} = -\left(c_1 D - \frac{c_2}{D}\right)[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{R_{\text{ou}}^2 + A}{R_{\text{in}}^2 + A}\right) + \frac{A}{2}\left(\frac{1}{DR_{\text{ou}}^2 + A} - \frac{1}{DR_{\text{in}}^2 + A}\right) + \ln\left(\frac{R_{\text{ou}}}{R_{\text{in}}}\right)] \quad (40)$$

$$F_a = \pi\{-P_{\text{in}} - c_1 D\left(\frac{DR_{\text{ou}}^2}{DR_{\text{ou}}^2 + A}\right) - \frac{c_2}{D}\left(\frac{DR_{\text{ou}}^2 + A}{R_{\text{ou}}^2}\right) - \left(c_1 D - \frac{c_2}{D}\right) \times [\frac{1}{2}\ln\left(\frac{R_{\text{ou}}^2 + A}{R_{\text{in}}^2 + A}\right) + \frac{A}{2}\left(\frac{1}{DR_{\text{ou}}^2 + A} - \frac{1}{DR_{\text{in}}^2 + A}\right) + \ln\left(\frac{R_{\text{ou}}}{R_{\text{in}}}\right)] + c_1 \frac{1}{D^2} + c_2 D^2\}(DR_{\text{ou}}^2 - DR_{\text{in}}^2) \quad (41)$$

به این ترتیب روابط (40) و (41) دو رابطه برحسب ثوابت $A, D$ هستند که با حل هم‌زمان آن‌ها می‌توان این دو ثابت مجهول را محاسبه کرد و در نهایت توزیع تنش به طور کامل مشخص می‌شود.

## 4- نتایج

با استفاده از نتایج تجربی حاصل از تست تنش دومحوره که توسط موهان و ملوین [23] انجام شده است، ثوابت ماده مونی- ریولین برای سرخ‌رگ در سنین مختلف، با توجه به روابط (20) محاسبه شده و در جدول 1 نمایش داده شده است.

جهت بررسی صحت نتایج، در جدول 2 تنش‌های محیطی و شعاعی به ازای فشار خون دیاستولیک در شعاع‌های مختلف براساس حل تحلیلی انجام شده با استفاده از مدل مونی- ریولین و نتایج حاصل از حل عددی اجزا محدود (با استفاده از نرم‌افزار انسیس) مقایسه شده است.

**جدول 1** ثوابت ماده مونی- ریولین برای سرخ‌رگ در سن‌های مختلف

**Table 1** Mooney-Rivlin constants of the arteries in different ages

| $c_2$(Pa) | $c_1$(Pa) | سن (سال) |
|---|---|---|
| -3147 | 10396 | 25 |
| -3421 | 11128 | 49 |
| -5082 | 19400 | 60 |
| -6175 | 22725 | 87 |

**جدول 2** مقایسه تنش‌های محیطی و شعاعی محاسبه شده با مدل غیرخطی مونی- ریولین و نتایج حل عددی

**Table 2** comparison of stresses of the present study and numerical solution

| $r$(mm) | $T_{\theta\theta}$(MPa) | | -$T_{rr}$(kPa) | |
|---|---|---|---|---|
| | مونی-ریولین | عددی | مونی-ریولین | عددی |
| 5.42 | 2.115036112 | 2.08143 | 20.2175858 | 19.81942 |
| 5.52 | 0.5725921252 | 0.56349 | 6.57913660 | 6.34972 |
| 5.62 | 0.3386584004 | 0.33327 | 4.35550248 | 4.24758 |
| 5.72 | 0.2440996077 | 0.24022 | 3.10979599 | 3.03825 |
| 5.82 | 0.1929631461 | 0.18989 | 2.23109890 | 2.17713 |
| 5.92 | 0.1609344072 | 0.15837 | 1.54762346 | 1.50406 |
| 6.02 | 0.1389966716 | 0.13678 | 0.98618407 | 0.94952 |
| 6.12 | 0.1230351849 | 0.12108 | 0.50866848 | 0.47694 |

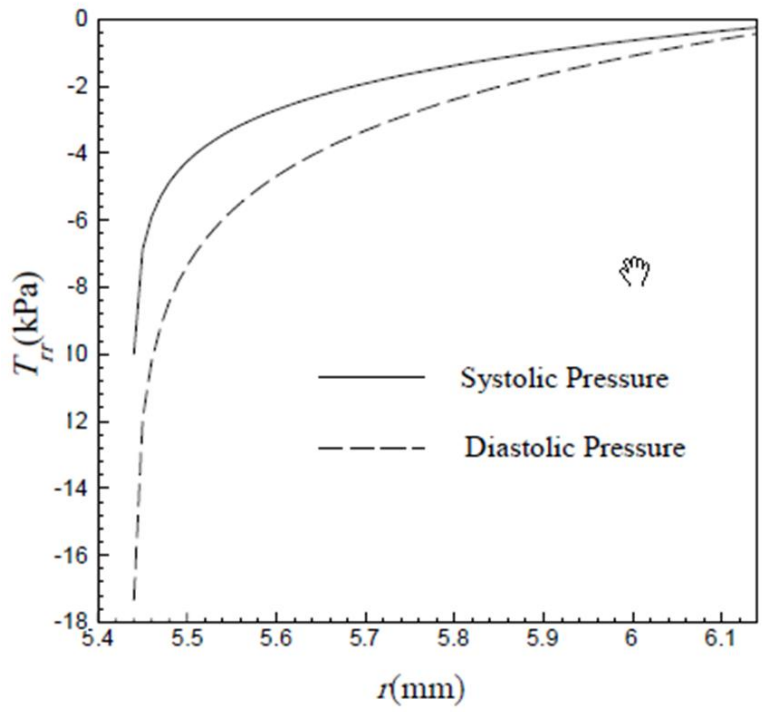


**Fig 2** The radial stress distribution for systolic and diastolic blood pressure

**شکل 2** توزیع تنش شعاعی به ازای فشارخون سیستولیک و دیاستولیک

در شکل 2 تغییرات تنش شعاعی برحسب شعاع به ازای فشار داخلی رسم شده است. دیده می‌شود که توزیع تنش شعاعی غیرخطی بوده و از مقدار فشار خون در دیواره داخلی تا صفر در دیواره خارجی تغییر می‌کند. با توجه به نمودار به دست آمده مشخص است که لایه‌های نزدیک‌تربه لایه داخلی سرخ‌رگ سهم بیشتری در تحمل توزیع تنش شعاعی دارند و هر چه به لایه‌های خارجی نزدیک‌تر می‌شویم دیواره رگ سهم کمتری در تحمل تنش دارد. لایه داخلی

سرخ‌رگ‌ها چنانچه پیش از این گفتیم از سلول‌های ماهیچه‌ای و الاستین به همراه دسته رشته‌های کلاژن تشکیل شده و لایه خارجی از کلاژن نوع 1، سلول‌های عصبی و رشته‌های الاستین تشکیل شده است. سلول‌های ماهیچه‌ای در برابر کلاژن دارای خواص الاستیک به مراتب بزرگتری هستند [1] و لذا توزیع تنش به‌دست آمده نشان دهنده مناسب بودن مدل مونی- ریولین برای شبیه‌سازی رفتار مکانیکی سرخ رگ است.

با استفاده از رابطه (29) توزیع تنش محیطی در شعاع‌های مختلف محاسبه شده و در شکل 3 ترسیم شده است.

دیده می‌شود که همانند شکل قبل، لایه‌های داخلی سهم بیشتری در تحمل تنش‌های محیطی نسبت به لایه‌های خارجی سرخ‌رگ دارند. با مقایسه مرتبه بزرگی تنش‌های شعاعی و محیطی درمی‌یابیم که تنش‌های مهم در تحلیل مکانیکی سرخ‌رگ‌ها تنش‌های محیطی هستند که مقدار آن‌ها حدود 1000 برابر بزرگتر از تنش‌های شعاعی است.

در شکل 4 تغییرات شعاع داخلی بی‌بعد شده براساس فشار خون ترسیم شده است. با توجه به شکل دیده می شود که شعاع داخلی سرخ‌رگ در اثر فشار خون بیشتر از دو برابر می‌شود که نشان دهنده تغییر شکل‌های خیلی بزرگ است. این تغییرات در مورد شعاع خارجی چنان‌که در شکل 5 نشان داده است نیز بزرگ است اگرچه تغییرات شعاع خارجی بسیار کمتر است.

این خود بیانگر این موضوع است که ضخامت سرخ‌رگ با افزایش فشار داخلی کم می‌شود. در شکل 6 این تغییرات ضخامت نشان داده شده است.

در شکل 7 توزیع تنش محیطی در راستای شعاع در سنین مختلف به ازای فشار داخلی 16 میلی‌متر جیوه رسم شده است. این شکل نشان می دهد که با افزایش سن، تنش محیطی در سرخ‌رگ افزایش می یابد. دلیل این موضوع آن است که با افزایش سن، میزان انعطاف‌پذیری سرخ‌رگ کاهش می‌یابد. تغییرات شعاع داخلی با فشار داخلی براساس مدل به‌کار گرفته شده در این مقاله با نتایج حاصل از آزمایش‌های مولتزان و همکارانش [12] در تطابق خوبی است. این مقایسه در شکل 8 نشان داده شده است. دیده می‌شود که در فشار های کم این نتایج کاملا بر هم منطبق بوده و با افزایش فشار داخلی نتایج حاضر و نتایج تجربی اندکی اختلاف پیدا می‌کنند.

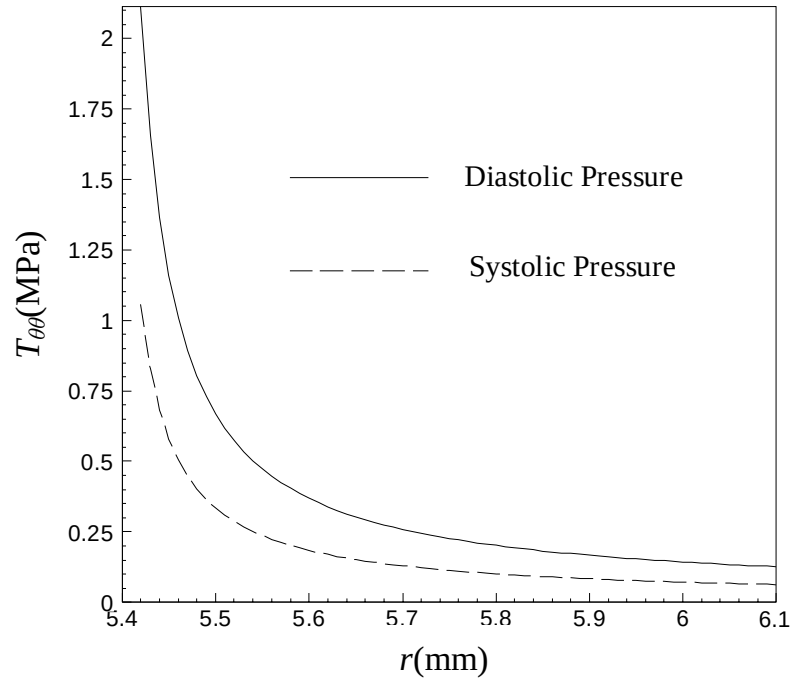


**Fig 3** The circumferential stress distribution for systolic and diastolic blood pressure

**شکل 3** توزیع تنش محیطی به ازای فشارخون سیستولیک و دیاستولیک

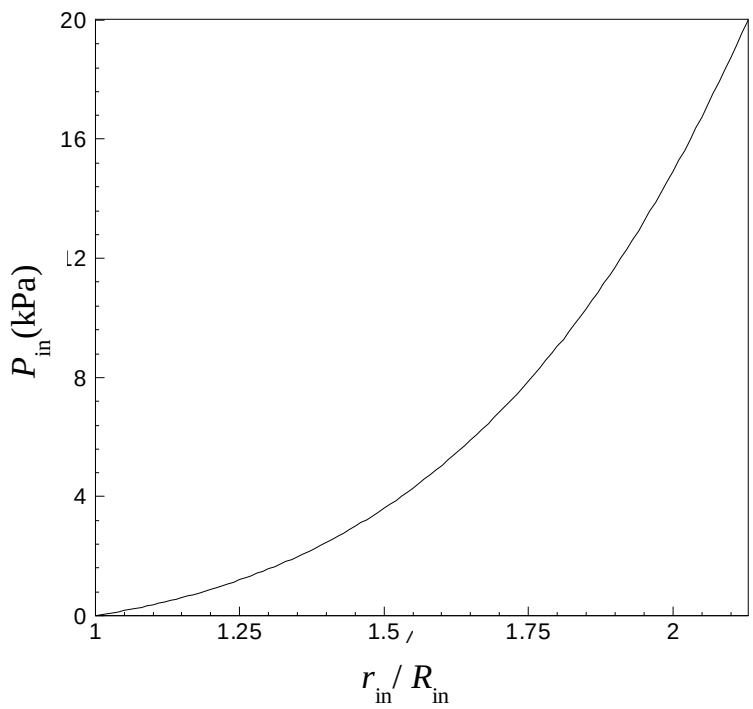


**Fig 4** Dimensionless inner radius changes according to internal pressure

**شکل 4** تغییرات شعاع داخلی بی‌بعد براساس فشار داخلی

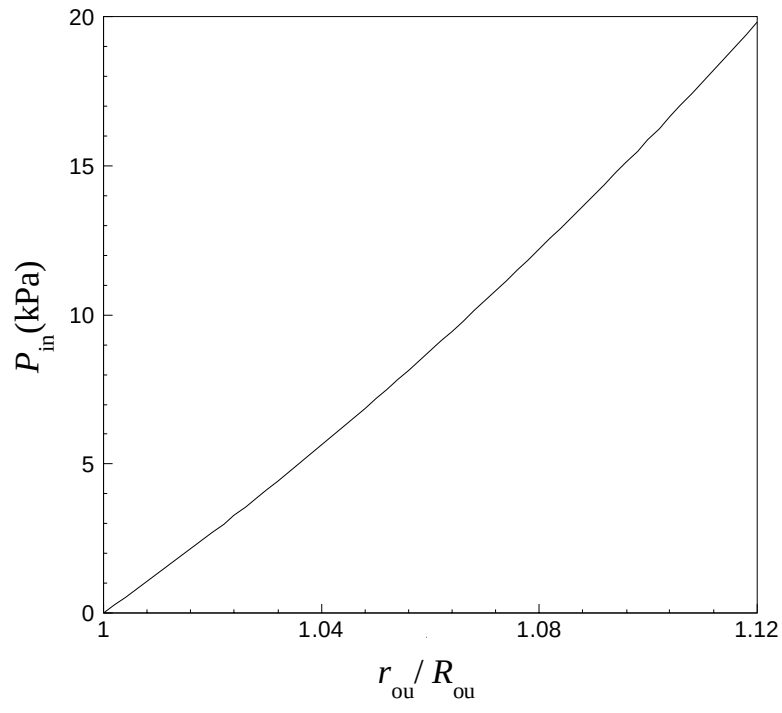


**Fig 5** Dimensionless outer radius changes versus internal pressure

**شکل 5** تغییرات شعاع خارجی بی‌بعد بر حسب فشار داخلی

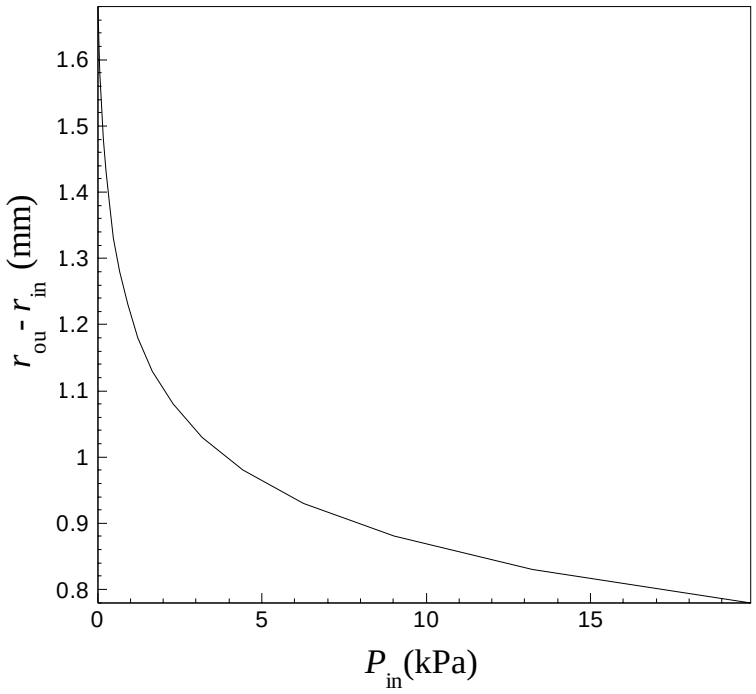


**Fig 6** The thickness changes versus internal pressure

**شکل 6** تغییرات ضخامت برحسب فشار داخلی

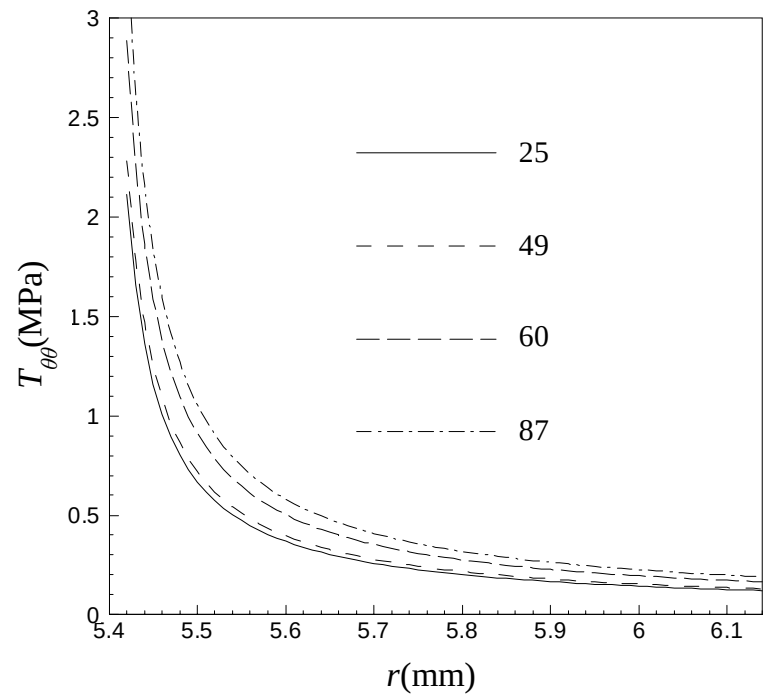


**Fig 7** Circumferential stress distribution versus radius for different ages

**شکل 7** توزیع تنش محیطی برحسب شعاع در سنین مختلف

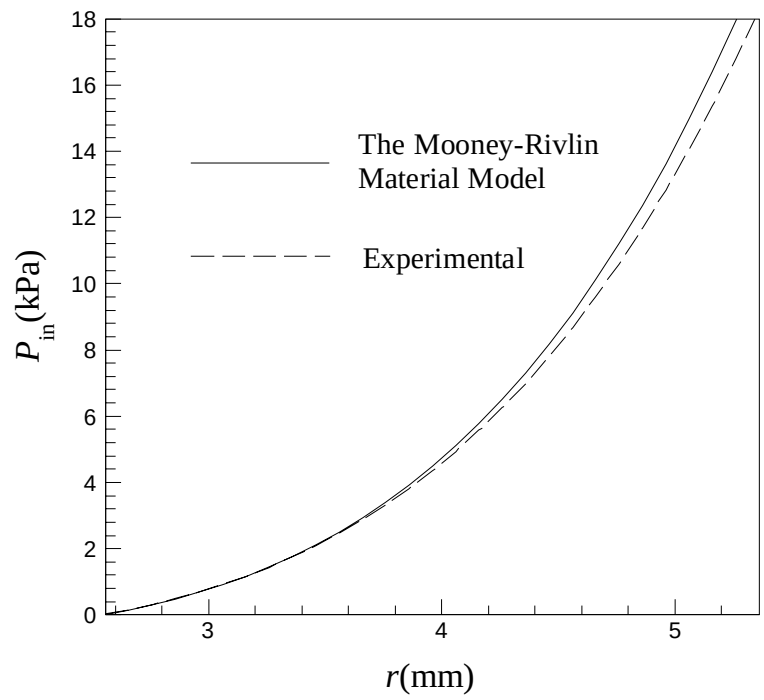


**Fig 8** Comparison of changes in the inner radius, according to internal pressure for current study and the experimental results of Moltzan et al [12]

**شکل 8** مقایسه تغییرات شعاع داخلی براساس فشار داخلی بین مطالعه حاضر و نتایج تجربی مولتزان و همکارانش [12]

نتایج حاصل از تئوری ارائه شده افزایش شعاع را اندکی بیشتر از نتایج آزمایش نشان می‌دهد ولی این اختلاف بسیار اندک بوده و به طورکلی می‌توان گفت مدل به‌کار گرفته شده تغییر شکل‌های بزرگ سرخ‌رگ را بخوبی پیش‌بینی کرده و بنابراین می‌توان با دقت بسیار خوبی از این مدل استفاده کرد.

## 5- مراجع

[1] M. A. Meyers, P.Y. Chen, A.Y. M. Lin, Y. Seki, Biological materials: Structure and mechanical properties, *Progress in Materials Science*, Vol. 53, No. 1, pp. 1-206, 2008.
[2] E. A. Jafee, Cell Biology of Endothelial Cells, *Human Pathology*, Vol. 18, No. 3, pp. 234-239, 1987.
[3] R. H. Cox, Regional variation of series elasticity in canine arterial smooth muscles, *American Journal of Physiology*, Vol. 234, No. 5, pp. 542-551, 1978.
[4] I. Karsaj, J. D. Humphrey, A multilayered wall model of arterial growth and remodeling, *Mechanics of Materials*, Vol. 44, No. 1, pp. 110-119, 2012.
[5] T. E. Carew, R. N. Vaishnav, D. J. Patel, Compressibility of the arterial wall, *Circulation Research*,Vol. 23, No. 1, pp. 61-68, 1968.
[6] R. N. Vaishnav, J. T. Young, J. S. Janicki, D. J. Patel, Nonlinear anisotropic elastic properties of the canine aorta, *Biophysical Journal*, Vol. 12, No. 8, pp. 1008-1027, 1972.
[7] A. G. Hudetz, Continuum mechanical methods and models in arterial biomechanics, *Advances in Physiology*, Vol. 8, No. 6, pp. 223-232, 1980.
[8] C. J. Chuong, Y. C. Fung, Compressibility and constitutive equation of arterial wall in radial compression experiments, *Journal of Biomechanics*, Vol. 17, No. 1, pp. 35-40, 1984.
[9] G.L. Papageorgiou, N.B. Jones, Physical modeling of the arterial wall. Part2: Simulation of the non-linear elasticity of the arterial wall, *Journal of Biomedical Engineering*, Vol. 9, No. 3, pp. 216-221, 1987.
[10] W. W. Von Maltzahn, D. Besdo, W. Wiemer, Elastic properties of arteries: A non-linear two layer cylindrical model, *Journal of Biomechanics*, Vol. 14, No. 6, pp. 389-397, 1981.
[11] W. W. Von Maltzahn, Stresses and strains in the cone-shaped carotid sinus and their effects on baroreceptor functions, *Journal of Biomechanics*, Vol. 15, No. 10, pp. 757-765, 1982.
[12] W. W. Von Maltzahn, R. G. Warriyar, W. F. Keitzer Experimental measurments of elastic properties of media and adventitia of bovine caroted arteries, *Journal of Biomechanics*, Vol. 17, No. 11, pp. 839-847, 1984.
[13] R. W. Ogden, *Anisotropy and non-linear elasticity in arterial wall mechanics*, In: G.A. Holzapfel, R. W. Ogden, (eds.), *Biomechanical Modelling at the Molecular, Cellular and Tissue Levels*, pp. 180-258, New York: Springer, 2009.
[14] G. A. Holzapfel, H. W. Weizsacker, Biomechanical behavior of the arterial wall and its numerical characterization, *Computers in Biology and Medicine*, Vol. 28, No. 4, pp. 377-392, 1998.
[15] L. A. Taber, A model for aortic growth based on fluid shear and fiber stresses, *Journal of Biomechanical Engineering*, Vol. 120, No. 3, pp. 348-354, 1998.
[16] A. Rachev, A model of arterial adaptation to alterations in blood flow, *Journal of Elasticity*, Vol. 61, No. 1, pp. 83–111, 2000.
[17] R. L. Gleason,L. A. Taber,J. D. Humphrey, A 2-d model of flow induced alterations in the geometry, structure, and properties of carotid arteries, *Journal of Biomechanical. Engineering*, Vol. 126, No. 3, pp. 371–381, 2004.
[18] A. Tsamis,N. Stergiopulos,A. Rachev, A structure-based model of arterial remodeling in response to sustained hypertension, *Journal of Biomechanical Engineering*, Vol. 131, No. 10, pp. 101-104, 2009.
[19] A. Valentin,L. Cardamone,S. Baek,J. D. Humphrey, Complementary vasoactivity and matrix remodelling in arterial adaptations to altered flow and pressure, *Journal of The Royal Society Interface*, Vol. 6, No. 32, pp. 293–306, 2009.
[20] W. Wan, L. Hansen, R. L. Gleason, A 3-D constrained mixture model for mechanically mediated vascular growth and remodeling, *Biomechanic Model. Mechanobiology*, Vol. 9, No. 4, pp. 403–419, 2010.
[21] W. M. Lai, D. Rubin, E. Krempl, *Introduction to Continuum Mechanics*, pp. 314-324, Butterworth-Heinemann, 1999.
[22] Y. B. Fu, R. W. Ogden, *Nonlinear Elasticity: Theory and Applications*, pp. 3–143, Cambridge Univercity Press, 2001.
[23] D. Mohan, J. W. Melvin, Failure properties of passive human aortic tissue. II-Biaxial tension tests, *Journal of Biomechanics*, Vol. 16, No. 1, pp. 31-44, 1983.
[24] R. C. Batra, A. Bahrami, Inflation and eversion of functionally graded non-linear elastic incompressible circular cylinders, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 44, No. 3, pp. 311-323, 2009.