



## مقایسه تأثیر سطوح تسلیم مختلف در پیش بینی نمودار حد شکل دهی آلیاژ Ti64 تیتانیوم

علی اکبر اله دادیان<sup>1</sup>، کورش حسن پور<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

2- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

\* اصفهان، صندوق پستی 86746-7344، hasanpour@eng.ui.ac.ir

## اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 24 مرداد 1393

پذیرش: 15 آبان 1393

ارائه در سایت: 26 آذر 1393

کلید واژگان:

نمودار حد شکل دهی

آلیاژ تیتانیوم

ناهمسانگردی پلاستیک

## چکیده

مدل سازی ریاضی مرحله ای مهم در طراحی و بهینه سازی ابزار و پارامترهای عملیات شکل دهی فلزات است. در این بین، نمودار حد شکل دهی فلزات به عنوان یک ابزار کارآمد در تولید بهینه قطعات به روش شکل دهی، مورد توجه محققان قرار گرفته است. با توجه به شکل پذیری اندک آلیاژهای تیتانیوم و کاربردهای فراوان این آلیاژها در صنایع پیشرفته نظیر هوا و فضا، مطالعه رفتار این آلیاژها در شکل دهی اهمیت فراوانی پیدا کرده است. با توجه به هزینه های بالای روش های تجربی تعیین حد شکل دهی مخصوصاً در دماهای بالا، روش عددی توجه محققان زیادی را جلب کرده است. روش عددی تحت تأثیر مدل سازی دقیق رفتار الاستیک-پلاستیک ماده است. در آلیاژ Ti-64 تیتانیوم، رفتار نامعمول مکانیکی از قبیل ناهمسانگردی پلاستیک و عدم تقارن کشش و فشار در جهت های مختلف مشاهده می شود. در این مقاله روش عددی مارشینیاک به همراه سطوح تسلیم کازاکا و هیل در محاسبه حد شکل دهی آلیاژ Ti64 به کار رفته است. ملاحظه می گردد که پیش بینی حد شکل دهی با استفاده از سطح تسلیم کازاکا به نتایج تجربی موجود نزدیک تر است. علت این موضوع در پیش بینی بهتر سطح تسلیم کازاکا از رفتار آلیاژ تیتانیوم از قبیل ناهمسانگردی در ضرایب لانگفورد و تنش های تسلیم است. پیش بینی سطوح تسلیم هیل و کازاکا از ضرایب لانگفورد و تنش های تسلیم مقایسه شده است.

## Comparison of the Effect of Different Yield loci to Prediction of Ti64 Titanium Alloy Forming Limit Diagram

Ali Akbar Allahdadian, Kourosh Hasanpour\*

Department of Mechanical Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran.

\* P.O.B. 86746-7344 Isfahan, Iran, hasanpor@eng.ui.ac.ir

## ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 15 August 2014  
Accepted 06 November 2014  
Available Online 17 December 2014

## Keywords:

Forming Limit Diagram  
Titanium Alloy  
Plastic Anisotropy

## ABSTRACT

Mathematical modeling is an important step in the design and optimization of process parameters for metal forming. Researchers consider the metal forming limit diagram an efficient tool to optimize the production of components using forming methods. Due to the low ductility of titanium alloys and wide applications of these alloys in advanced industries such as aerospace, researchers have focused on studying the forming behavior of these alloys. Because of the high cost of experimental methods, especially at high temperatures, numerical methods have attracted the attention of many researchers. Accuracy of the numerical method is affected by modeling elastic-plastic material behavior. Unusual mechanical behavior of Ti-64 titanium alloys such as high in-plane anisotropy/asymmetry of yield stress and hardening response has been observed. In this paper, the Marciniak model with Cazacu and Hill yield criterions has been used for forming limit prediction. It is observed that the prediction of forming limit using the Cazacu criterion is closer to the experimental results. This is due to the better prediction of the behavior of the titanium alloy, especially Lankford and stress anisotropy coefficients by Cazacu criterion. Cazacu and Hill criterions prediction of Lankford coefficients and yield stresses have been compared.

## 1- مقدمه

گلوئی شدن رسم می شود. محاسبه نمودار حد شکل دهی به وسیله روش های تجربی و عددی انجام می شود. از روش های تجربی می توان به آزمون اریکسون و ناکازیم اشاره نمود. محاسبه نمودار حد شکل دهی به روش تجربی، اغلب پرهزینه و در دماهای بالا با مشکلات فراوانی همراه است. بنابراین مدل های تئوری مختلفی برای محاسبه حد شکل دهی ارائه شده است. از نخستین آن ها می توان به مدل سوئیف و هیل در سال 1952 اشاره نمود. در سال 1967، مارشینیاک معیاری را در حالت تنش دومحوره ارائه نمود که از سوی محققان

مدل سازی ریاضی مرحله ای مهم در طراحی و بهینه سازی ابزار و پارامترهای عملیات شکل دهی فلزات است. یکی از موارد مهم این رویه، پیش بینی صحیح موده های ناپایداری فرآیند شکل دهی است. در طول سالیان گذشته، مفهوم نمودار حد شکل دهی که به وسیله کیلر 1966 و گودوین 1968 معرفی شد، مورد توجه محققان و صنعت گران قرار گرفته است. در این نمودار، کرنش درون صفحه بیشینه بر حسب کرنش درون صفحه کمینه در لحظه

Please cite this article using:

A. A. Allahdadian, K. Hasanpour, Comparison of the Effect of Different Yield loci to Prediction of Ti64 Titanium Alloy Forming Limit Diagram, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 1, pp. 390-396, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

انجام داده و سطح تسلیم جدیدی ارائه کرده‌اند [11].

در این پژوهش، روش مارشینیاک که در مقاله عاصم‌پور با اضافه نمودن معادله انرژی‌ی تعمیم یافته [3]، در پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی آلیاژ Ti64 تیتانیوم به‌کار رفته است. به‌منظور مطالعه‌ی اثر مدل سطح تسلیم در پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی، سطوح تسلیم کازاکا [9] و هیل 1948 در مدل مارشینیاک پیاده‌سازی شده است. نمودار حد شکل‌دهی در دمای 400°C محاسبه و با نتایج تجربی [12] مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد حد تسلیم کازاکا نسبت به سطوح تسلیم دیگر، تطابق بهتری با نتایج تجربی دارد. همچنین مشاهده شد استفاده از الگوریتم عددی لونبرگ-مارکوات<sup>4</sup> در حل دستگاه معادله‌های غیرخطی، روند هم‌گرایی بهتری را نتیجه می‌دهد.

## 2- معادله‌های ساختاری

معادله‌های ساختاری در فاز پلاستیک شامل معادله‌ی سطح تسلیم، مدل کارسختی و قانون جریان می‌باشد. در ذیل به بیان مدل‌های سطح تسلیم و کارسختی به‌کار برده شده در این مقاله اشاره می‌شود. در این مقاله از قانون جریان همراه استفاده شده است.

### 2-1-1- سطح تسلیم

مفهوم تابع سطح تسلیم، یک تابع اسکالر در فضای شش بعدی تنش کوشی (یا 9 بعدی تنش پیولا) است که وضعیت یک نقطه مادی را از لحاظ تغییر شکل پلاستیک و الاستیک مشخص می‌کند. در این مقاله از مدل هیل 1948 و کازاکا 2006 در پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی استفاده شده است. با توجه به اینکه مدل مارشینیاک در حالت تنش صفحه‌ای تعریف می‌شود، در ادامه به بیان مختصر این دو مدل در حالت تنش صفحه‌ای پرداخته می‌شود.

### 2-1-1-1-1-1-2 هیل 1948

طبق این معادله سطح تسلیم در حالت تنش صفحه‌ای، تنش مؤثر در جهت نورد ورق طبق معادله‌ی (1) محاسبه می‌شود [13].

$$\bar{\sigma} = (\sigma_{11}^2 - 2P\sigma_{11}\sigma_{22} + Q\sigma_{22}^2 + 2R\sigma_{12}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

در معادله‌ی (1)، ضرایب بر حسب ضرایب لانکفورد و یا با استفاده از تنش‌های تسلیم در آزمون کشش تک‌محوره و تنش تسلیم در آزمون کشش دومحوره برابر طبق رابطه‌های (2) و (3) قابل محاسبه است.

$$P = \left( \frac{R_0}{1 + R_0} \right) \\ Q = \left( \frac{R_0(1 + R_{90})}{R_{90}(1 + R_0)} \right) \\ R = \left( \frac{R_0 + R_{90}}{2R_{90}(1 + R_0)} \right) (2R_{45} + 1) \quad (2)$$

$$P = \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_{90}} \right)^2 \\ Q = \frac{1}{2} \left( 1 + \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_{90}} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_b} \right)^2 \right) \\ R = 2 \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_{45}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_b} \right)^2 \quad (3)$$

$R_0$ ،  $R_{45}$  و  $R_{90}$  به ترتیب ضرایب لانکفورد در آزمون‌های کشش ساده در زوایای صفر، 45 و 90 درجه نسبت به جهت نورد و  $\sigma_0$ ،  $\sigma_{45}$ ،  $\sigma_{90}$  و  $\sigma_b$  به ترتیب تنش تسلیم آزمون کشش تک‌محوره در راستاهایی با زاویه‌های صفر، 45 و 90 درجه و تنش تسلیم در آزمون کشش دومحوره برابر می‌باشد. در این مقاله هرگاه ضرایب سطح تسلیم با ضرایب لانکفورد محاسبه شود، سطح تسلیم هیل 1 و در غیر این صورت هیل 2 نامیده می‌شود.

تا به حال بیشتر مورد استفاده قرار گرفته است. در این مدل ناهمگونی ماده به‌وسیله یک باریکه با ضخامت کم‌تر مدل‌سازی می‌شود. زمانی که نسبت تغییر کرنش در جهت ضخامت در دو ناحیه از حدی بالاتر رود، حد شکل‌دهی رخ می‌دهد. این مدل با سطوح تسلیم مختلفی مورد استفاده قرار گرفته است. در سال 2003 و 2005، بناییک و همکارانش مدل سطح تسلیم خود را در مدل مارشینیاک پیاده‌سازی نموده‌اند [1،2]. در سال 2007 عاصم‌پور و همکارانش اثر سطوح تسلیم مختلف را در مدل مارشینیاک مورد مطالعه قرار داده‌اند [3]. ایشان با اضافه نمودن معادله انرژی و حل معادله‌های چهارگانه به روش نیوتن-رافسون، محاسبه تنش و نمو کرنش انباشته را در ناحیه شیار بهبود بخشیده‌اند. محققان بسیاری با استفاده از تحلیل اجزاء محدود و مدل مارشینیاک حد شکل‌دهی را محاسبه کرده‌اند. در سال 2010، بناییک و همکارانش مدل مارشینیاک و سطح تسلیم خود را در نرم‌افزار آباکوس پیاده‌سازی نموده‌اند [4]. در سال 2008 فایلینگن و همکارانش با ایجاد تغییراتی در مدل مارشینیاک، نمودار حد شکل‌دهی را با استفاده از تحلیل اجزاء محدود تصادفی محاسبه کرده‌اند [5]. ایشان تغییر ضخامت مدل مارشینیاک را به‌صورت یک میدان تصادفی در نظر گرفته‌اند.

آلیاژهای تیتانیوم به‌دلیل نسبت استحکام به وزن بالا، مقاومت در برابر خزش و مقاومت در برابر خوردگی کاربردهای بسیار زیادی در صنعت هوا و فضا دارد. در صنایع پزشکی به‌دلیل سازگاری با بدن انسان و در صنایع پتروشیمی به‌دلیل مقاومت چشم‌گیر در برابر خوردگی، از تیتانیوم استفاده فراوانی می‌شود. به‌دلیل این‌که بسیاری از قطعات با شکل‌دهی ورق تولید می‌شود و تیتانیوم دارای کاربردهای فراوان است، پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی ورق آلیاژ تیتانیوم دارای اهمیت فراوان می‌باشد. با این وجود، افزایش دقت پیش‌بینی، مستلزم توصیف دقیق رفتار مکانیکی است. در آلیاژهای تیتانیوم رفتار نامعمولی بروز می‌کند که علت آن را باید در ریزساختار بررسی نمود.

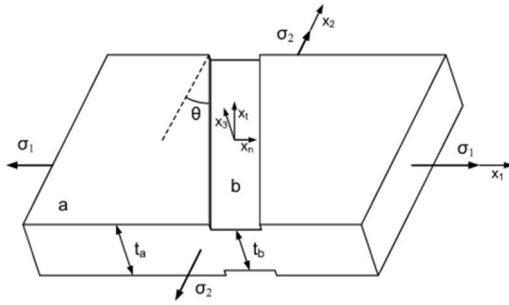
تیتانیوم در شکل بلوری معمولاً به دو صورت آلفا و بتا وجود دارد. شکل آلفا دارای بلورهای شش‌وجهی<sup>1</sup> است. تعداد اندک سیستم‌های لغزش در این بلور سبب اهمیت یافتن مود تغییرشکل دوقلوشدن<sup>2</sup> می‌شود. علی‌رغم لغزش، دوقلوشدن تنها در یک جهت اتفاق می‌افتد. علاوه بر این، دوقلوشدن سبب تغییر جهت بلورها در طول فرآیند تغییر شکل و تکامل و دگرشکلی یافت چندبلوره<sup>3</sup> نیز می‌شود. به دلایل ذکر شده، فلزاتی با بلور شش‌وجهی علاوه بر ناهمسانگردی پلاستیک، رفتاری متفاوت در کشش و فشار در راستاهای مختلف دارند.

برای مدل‌سازی این رفتار، محققان سطوح تسلیم متفاوتی ارائه نموده‌اند. نخستین بار در سال 1979، هاسفرد با اضافه کردن جمله‌های خطی به معادله تسلیم هیل، تلاشی برای مدل‌سازی عدم تقارن کشش و فشار کرده است [6]. در سال 1991، بارلات و همکارانش با استفاده از ایده هاسفرد، یک تبدیل خطی بر تانسور تنش کوشی معرفی نمودند [7]. با معرفی شش پارامتر ماده در این تبدیل، از تانسور تنش تبدیل یافته در معادله سطح تسلیم استفاده می‌شود. بارلات، کازاکا و همکارانش با استفاده از همین ایده در سال‌های 2004، 2006 و 2008 معادله سطح تسلیم خودشان را بهبود بخشیده‌اند [8،9،10]. در سال 2012، خان و همکارانش با استفاده از این ایده که می‌توان ناهمسانگردی پلاستیک و عدم تقارن کشش و فشار را با دو تابع مجزا در سطح تسلیم در نظر گرفت، اصلاحاتی را در سطح تسلیم هیل 1948

1- Hexagonal Closed Packed  
2- Twinning Deformation  
3- Poly-crystal

4- Levenberg-Marquardt

2-1-1-2- کاراکا 2006



شکل 1 ورق مستطیلی تحت بارگذاری دو محوره در مدل مارشینیاک

ناحیه  $a$  دارای ضخامت  $t_a$  و ناحیه  $b$  دارای ضخامت  $t_b$  می‌باشد. دستگاه مختصات  $X_1X_2X_3$  در جهت نورد ورق، عمود بر جهت نورد و در جهت ضخامت تعریف می‌شود. شیار ناهمگن با محور  $X_2$  زاویه  $\theta$  می‌سازد. دستگاه مختصات  $X_1X_2X_3$  به نحوی تعریف می‌شود که  $X_n$  عمود بر دیواره شیار باشد.

این دو ناحیه با اعمال گام‌به‌گام کشش دو محوره به ناحیه همگن، تغییر شکل پلاستیک می‌دهند. به دلیل تفاوت ضخامت در این دو ناحیه، نمو کرنش پلاستیک متفاوت است. حد شکل‌دهی بر اساس این معیار زمانی رخ می‌دهد که در طول گام‌های اعمال بار، نسبت نمو کرنش انباشته در ناحیه  $b$  به نمو کرنش انباشته در ناحیه  $a$  از حدی فراتر رود. با توجه به شرایط تعادل در دیواره‌ی شیار و استفاده از تنش عمودی و برشی در مرز شیار، معادله‌های (13) و (14) برقرار است.

$$\sigma_{nn}^a t^a = \sigma_{nn}^b t^b \quad (13)$$

$$\sigma_{nt}^a t^a = \sigma_{nt}^b t^b \quad (14)$$

شرایط سازگاری هندسی ایجاب می‌کند که در جهت  $t$  طبق معادله (15) نمو کرنش برابر باشد.

$$d\varepsilon_{tt}^a = d\varepsilon_{tt}^b \quad (15)$$

ابتدا نمو کرنش انباشته در ناحیه  $a$ ،  $d\varepsilon^a$  مقدار اندکی فرض می‌شود. این مقدار در بیشتر موارد 0/0001 فرض شده است. انتخاب مقدار مناسب در روند همگرایی حل مؤثر است.

بدین ترتیب مقدار کرنش انباشته به‌صورت معادله‌ی (16) تصحیح می‌شود.

$$\varepsilon_{new}^a = \varepsilon_{old}^a + d\varepsilon^a \quad (16)$$

در معادله‌های سطح تسلیم همگن از درجه اول، نسبت تنش ثابت موجب ایجاد مسیرکرنش خطی می‌شود. معادله‌ی سطح تسلیمی که در رابطه‌ی (17) صدق کند، همگن از درجه اول نامیده می‌شود.

$$\sigma: \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} = \bar{\sigma} \quad (17)$$

بنابراین مقدار  $\alpha = \frac{\sigma_2^a}{\sigma_1^a}$  ثابت فرض می‌شود. با داشتن مقدار  $\varepsilon_{new}^a$ ، مقدار  $\sigma_y$  از معادله‌ی کارسختی قابل محاسبه است. بنابراین در معادله‌ی سطح تسلیم با توجه به نسبت ثابت  $\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$  مقدار  $\sigma_1$  با توجه به سطح تسلیم همگن از درجه اول به‌صورت  $\sigma_1^a = \frac{\sigma_y}{\alpha}$  به‌دست می‌آید. مقدار  $\bar{\sigma}_\alpha$  با جایگزینی  $\alpha = \sigma_1^a$  و  $\sigma_2^a = 1$  در معادله سطح تسلیم محاسبه می‌شود. با محاسبه‌ی تانسور تنش، نمو کرنش با استفاده از قانون جریان پلاستیک همراه در جهت‌های 1 و 2 طبق رابطه‌های (18) و (19) قابل محاسبه است.

$$d\varepsilon_1^a = d\varepsilon^a \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \quad (18)$$

$$d\varepsilon_2^a = d\varepsilon^a \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \quad (19)$$

تانسور تنش و کرنش ناحیه  $a$  در دستگاه مختصات  $X_1X_2X_3$  مشخص شد. با استفاده از رابطه‌های (20)، (21) و (22)، تانسور تنش و کرنش ناحیه  $a$  در دستگاه مختصات  $X_nX_iX_3$  تعیین می‌شود.

در این معیار، برای توصیف عدم تقارن کشش و فشار و ناهمسانگردی پلاستیک، طبق معادله‌ی (4) تبدیل خطی بر تانسور تنش انحرافی انجام می‌شود [9].

$$\Sigma_{ij} = L_{ijkl} S_{kl} \quad (4)$$

در معادله‌ی (4)،  $S$  و  $L$  به ترتیب تانسور تنش تبدیل یافته، تانسور تنش انحرافی و تانسور تبدیل می‌باشد. تانسور تبدیل متقارن است، لذا در شکل نمایش ماتریسی ویت<sup>1</sup> و در حالت تنش صفحه‌ای به شکل رابطه (5) قابل نمایش است.

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & 0 \\ l_{12} & l_{22} & l_{23} & 0 \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} \quad (5)$$

با استفاده از مقادیر اصلی تانسور تنش تبدیل یافته، تنش مؤثر در جهت نورد ورق به شکل معادله (6) توصیف می‌شود.

$$\bar{\sigma} = B [ (|\Sigma_1| - k\Sigma_1)^a + (|\Sigma_2| - k\Sigma_2)^a + (|\Sigma_3| - k\Sigma_3)^a ]^{\frac{1}{a}} \quad (6)$$

در معادله (6)، متغیر  $B$  با توجه به معادله‌های (7) و (8) محاسبه می‌شود.

$$B = [ (|\phi_1| - k\phi_1)^a + (|\phi_2| - k\phi_2)^a + (|\phi_3| - k\phi_3)^a ]^{\frac{1}{a}} \quad (7)$$

$$\phi_i = \frac{2}{3} L_{i1} - \frac{1}{3} L_{i2} - \frac{1}{3} L_{i3}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (8)$$

بمنظور ارضای شرایط تحدد سطح تسلیم و تراکم‌ناپذیری پلاستیک، ضریب  $a$  باید عدد صحیح بزرگتر از یک و ضریب  $k$  باید در محدوده‌ی  $[-1, 1]$  باشد [10]. ثوابت ماتریس تبدیل و ثابت  $k$  با توجه به آزمون‌های کشش و فشار تک‌محوره در زاویه‌های مختلف نسبت به جهت نورد و ضرایب لانگفورد در این آزمون‌ها قابل محاسبه است. ضرایب مدل با حل مسأله‌ی کمینه‌سازی مجموع مربعات خطا، طبق معادله (9) به‌دست می‌آید. شرایط تحدد باید در یافتن این ضرایب لحاظ شود.

$$\min f = \sum_{i=1}^m w^i \left( 1 - \frac{\sigma_{pr}^i}{\sigma_{exp}^i} \right)^2 + \sum_{i=1}^n w^i \left( 1 - \frac{R_{pr}^i}{R_{exp}^i} \right)^2 \quad (9)$$

برای حل معادله کمینه‌سازی از روش الگوریتم ژنتیک با جمعیت اولیه 200 و انتخاب 10 استعداد برتر در هر گام استفاده شده است.

2-2- کارسختی

در این مقاله، برای توصیف سطوح تسلیم ثانویه از کارسختی همسانگرد به شکل رابطه (10) استفاده شده است.

$$F(\sigma, \bar{\varepsilon}_p) = \bar{\sigma}(\sigma) - Y(\bar{\varepsilon}_p) \quad (10)$$

در معادله‌ی (9)،  $Y$  از تقریب منحنی تنش-کرنش آزمون کشش تک‌محوره در جهت نورد به‌دست می‌آید. برای تقریب این منحنی از معادله کارسختی سوئیف و وک به‌صورت معادله‌های (11) و (12) استفاده شده است [3].

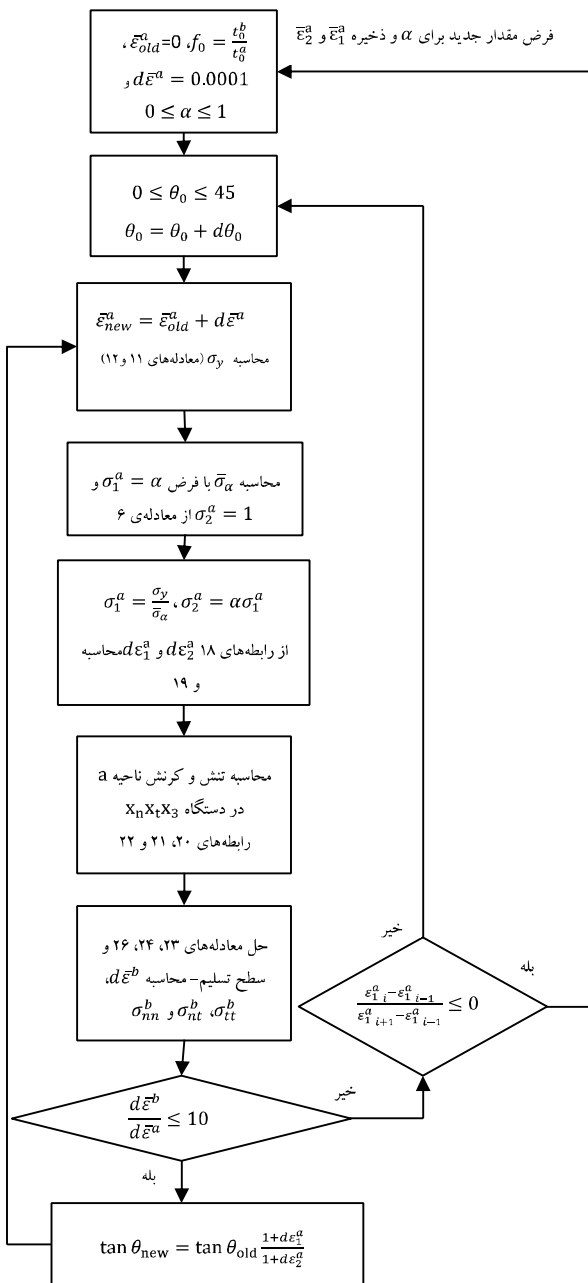
$$Y(\bar{\varepsilon}_p) = p(q + \bar{\varepsilon}_p)^r \quad (11)$$

$$Y(\bar{\varepsilon}_p) = p - (p - q) \exp(-r\bar{\varepsilon}_p) \quad (12)$$

3- مدل مارشینیاک

در مدل مارشینیاک، ناهمگونی‌های ماده از قبیل اندازه و جهت‌گیری مختلف ریزدانه‌ها و ناخالصی‌ها به‌صورت یک ناهمگونی هندسی معادل در نظر گرفته می‌شود. این ناهمگونی هندسی به‌صورت یک شیار با ضخامت کم‌تر فرض می‌شود. همان‌طور که در شکل 1 مشاهده می‌گردد، ورق مستطیلی شکل به دو ناحیه همگن و غیرهمگن که به ترتیب با اندیس  $a$  و  $b$  نمایه شده‌اند، تقسیم‌بندی می‌شود.

1- Voigt notation



شکل 2 روند حل در روش مارشینیاک

برای همان طور که در معادله های (31) تا (33) مشاهده می شود، به ازای  $\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy}$  و  $\Sigma_{xy} = 0$  اینهام و ناپیوستگی در مشتق های سطح تسلیم وجود دارد. بدین ترتیب در مشتق مرتبه های بالاتر نیز اینهام و ناپیوستگی وجود خواهد داشت. این موضوع و شدت غیرخطی بودن مسأله منجر به عدم تعریف مناسب و یا تکین بودن ژاکوبین در روش های عددی حل دستگاه معادله های غیرخطی نظیر نیوتن-رافسون و بروز واگرایی می شود. طبق شکل 2 در روش مارشینیاک با حل گام به گام نیاز به چندین مرتبه حل دستگاه معادله های غیرخطی می باشد. در بین روش های موجود در جعبه ابزار متلب، با استفاده از روش لونیبرگ-مارکوات نتایج بهتری به دست آمده است.

به ازای مقادیر  $0 \leq \theta \leq 90$ ، طبق شکل 2 روند حل انجام می شود. مقادیر کمینه  $\epsilon_1^a$  و  $\epsilon_2^a$  به عنوان نقاط نمودار حد شکل دهی گزارش می شود. نقاط مختلف نمودار حد شکل دهی به ازای مقدارهای مختلف  $0 \leq \alpha \leq 1$  به دست می آید.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{nn}^a & \epsilon_{nt}^a \\ \epsilon_{nt}^a & \epsilon_{tt}^a \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \epsilon_1^a & 0 \\ 0 & \epsilon_2^a \end{bmatrix} R^T \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nn}^a & \sigma_{nt}^a \\ \sigma_{nt}^a & \sigma_{tt}^a \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \sigma_1^a & 0 \\ 0 & \sigma_2^a \end{bmatrix} R^T \quad (21)$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (22)$$

محاسبه کمیت های تنش و کرنش در ناحیه  $b$  به راحتی ناحیه  $a$  نیست. برای این منظور، باید دستگاه معادله های غیرخطی را که از شرایط تعادل و سازگاری نتیجه می شود، حل نمود. دو معادله اول از شرایط تعادل (معادله های (13) و (14)) طبق معادله های (23) و (24) حاصل می شود.

$$f \frac{\sigma_{nn}^b}{\sigma_y} - \frac{\sigma_{nn}^a}{\sigma_y} = 0 \quad (23)$$

$$f \frac{\sigma_{nt}^b}{\sigma_y} - \frac{\sigma_{nt}^a}{\sigma_y} = 0 \quad (24)$$

$$f = f_0 \exp(\epsilon_3^b - \epsilon_3^a) \quad (25)$$

در معادله (25)،  $f_0$  نسبت ضخامت اولیه ناحیه  $b$  به ناحیه  $a$  است. این پارامتر در پیش بینی حد شکل دهی مؤثر است و باید با استفاده از یک نقطه تجربی در نمودار حد شکل دهی کالیبره شود.

معادله سوم، با توجه به شرایط سازگاری هندسی طبق معادله (26) می باشد.

$$\frac{d\epsilon_{tt}^b}{d\epsilon_{tt}^a} - 1 = 0 \quad (26)$$

با توجه به قانون جریان پلاستیک، نمودار کرنش طبق رابطه های (27)، (28) و (29) محاسبه می شود.

$$d\epsilon_{tt}^b = d\epsilon^b \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{tt}} \quad (27)$$

$$d\epsilon_{nn}^b = d\epsilon^b \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{nn}} \quad (28)$$

$$d\epsilon_{tn}^b = d\epsilon^b \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{tn}} \quad (29)$$

بنابراین در معادله های (23)، (24) و (26)،  $d\epsilon^b$ ،  $\sigma_{nn}^b$  و  $\sigma_{nt}^b$  مجهول است.

با محاسبه ی مجهول ها، در صورتی که  $\frac{d\epsilon^b}{d\epsilon^a} \geq 10$  برقرار باشد، حد شکل دهی رخ داده است. در شکل 2 روند حل در روش مارشینیاک آمده است. حل دستگاه معادله های غیرخطی، روش های موجود در جعبه ابزار بهینه سازی نرم افزار متلب نظیر لونیبرگ-مارکوات، گوس-نیوتن، الگوریتم ژنتیک و ناحیه اعتماد<sup>1</sup> بررسی شده است. در دستگاه معادله های غیرخطی، مشتق سطح تسلیم نسبت به مؤلفه های تنش وجود دارد. در سطح تسلیم کازاکا، مشتق سطح تسلیم کازاکا با استفاده از قاعده زنجیره ای مطابق با معادله (30) محاسبه می شود.

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Sigma_m} \frac{\partial \Sigma_m}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial \Sigma_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (30)$$

به ترتیب مشتق تنش مؤثر نسبت به مقدارهای ویژه تانسور تنش تبدیل یافته، مشتق مقدارهای ویژه تانسور تنش تبدیل یافته نسبت به مؤلفه های تانسور تنش تبدیل یافته و مشتق مؤلفه های تانسور تنش تبدیل یافته نسبت به مؤلفه های تانسور تنش است. در حالت تنش صفحه ای،  $\frac{\partial \Sigma_m}{\partial \sigma_{kl}}$  مثلاً برای  $m = 1$  طبق معادله (31)، (32) و (33) محاسبه می شود.

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial \Sigma_{xx}} = \frac{1}{2} + \frac{\Sigma_{xx} - \Sigma_{yy}}{2\sqrt{(\Sigma_{xx} - \Sigma_{yy})^2 + 4\Sigma_{xy}^2}} \quad (31)$$

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial \Sigma_{yy}} = \frac{1}{2} - \frac{\Sigma_{xx} - \Sigma_{yy}}{2\sqrt{(\Sigma_{xx} - \Sigma_{yy})^2 + 4\Sigma_{xy}^2}} \quad (32)$$

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial \Sigma_{xy}} = \frac{\Sigma_{xy}}{\sqrt{(\Sigma_{xx} - \Sigma_{yy})^2 + 4\Sigma_{xy}^2}} \quad (33)$$

1- Trust region

جدول 1 مقادیر تجربی تنش‌های تسلیم بر حسب مگاپاسکال و ضرایب لانکفورد [12]

دما		کمیت*
25°C	400°C	
1000/00	681/00	$\sigma_0^T$
1020/00	691/00	$\sigma_{90}^T$
972/00	591/00	$\sigma_{45}^T$
1093/80	744/90	$\sigma_b^T$
1106/30	753/40	$\sigma_c^T$
0/40	0/60	$R_0$
0/61	0/51	$R_{90}$
1/19	1/26	$R_{45}$
1/00	1/00	$R_b$

\* T, C و b به ترتیب نمایانگر آزمون کشش ساده، فشار ساده و کشش دو محوره است. زوایا نسبت به جهت نورد می‌باشد.

جدول 2 ثابت‌های سطح تسلیم کازاکا a=4

دما		کمیت
25°C	400°C	
0/7535	-0/0655	$L_{11}$
-0/1555	0/3831	$L_{12}$
0/1714	0/2971	$L_{13}$
0/6193	0/0178	$L_{22}$
-0/4482	0/5392	$L_{23}$
-0/9965	0/8012	$L_{33}$
-1/0000	0/5313	$L_{44}$
-0/0574	0/05594	$k$

## 4- آلیاژ Ti-6AL-4V

دمای استحاله آلیاژ Ti-6AL-4V از فاز آلفا به فاز بتا در حدود 980°C است [12]. تنش‌های تسلیم و ضرایب لانکفورد این آلیاژ در دمای اتاق و دمای 400°C برای ورق با ضخامت 2 میلی‌متر در جدول 1 آمده است. ورق، مطابق با استاندارد AMS 4911 به مدت 30 دقیقه در دمای 788°C (1450°F) عملیات حرارتی شده است [12].

اودنبرگر و همکارانش، پارامترهای سطح تسلیم کازاکا 2006 را به ازای  $a=2$  و  $a=8$  محاسبه نموده‌اند [14]. به دلیل بالا رفتن دقت پیش‌بینی ضرایب لانکفورد و در عین حال کاهش شدت غیرخطی بودن مسأله، در این مقاله از ضریب  $a=4$  استفاده شده است. بر اساس داده‌های جدول 1، پارامترهای سطح تسلیم کازاکا 2006 در جدول 2 به ازای  $a=4$  آمده است. جهت 1، 2 و 3 به ترتیب جهت نورد ورق، جهت عمود بر نورد ورق و جهت ضخامت در نظر گرفته شده است. ضرایب مدل با حل مسأله‌ی کمینه‌سازی مجموع مربعات خطا، طبق معادله (9) به دست می‌آید. ضرایب کارسختی سوئیف و وک با استفاده از تقریب منحنی کشش در جهت نورد ورق در جدول 3 و 4 آمده است.

## 5- نتایج

ابتدا پیش‌بینی مدل‌های سطح تسلیم از تنش‌های تسلیم و ضرایب لانکفورد مقایسه می‌شود. در شکل 3 و 4 سطح تسلیم در حالت تنش دو محوره آمده است. عدم تقارن کشش و فشار در سطح تسلیم کازاکا قابل مشاهده است. ضرایب لانکفورد در بردار یک عمود بر سطح تسلیم مؤثر است. تفاوت بردار

یکه عمود بر سطح تسلیم کازاکا و سطح تسلیم هیل 2 که در شکل‌های 3 و 4 به طور مثال در حالت کشش تک محوره در راستای نورد ورق ( $\sigma_2 = 0$ ) و کشش تک محوره در راستای عمود بر جهت نورد ( $\sigma_1 = 0$ ) مشاهده می‌گردد، ناشی از پیش‌بینی بهتر سطح تسلیم کازاکا از ضرایب لانکفورد است.

در شکل‌های 5 و 6 پیش‌بینی سطوح تسلیم کازاکا و هیل از ضریب لانکفورد در آزمون کشش تک محوره در راستایی با زاویه  $\theta$  نسبت به جهت نورد در دماهای 25°C و 400°C با مقادیر تجربی مقایسه شده است. پیش‌بینی سطح تسلیم هیل 2 که با مقادیر تنش‌های تسلیم محاسبه شده است، از ضریب لانکفورد نسبت به مقادیر تجربی فاصله زیادی دارد. در مقابل پیش‌بینی سطح تسلیم هیل 1 و کازاکا به مقادیر تجربی نزدیک‌تر است.

در شکل‌های 7 و 8 پیش‌بینی سطوح تسلیم از تنش تسلیم در آزمون کشش تک محوره در راستایی با زاویه  $\theta$  نسبت به جهت نورد در دماهای 25°C و 400°C با مقادیر تجربی مقایسه شده است. پیش‌بینی سطح تسلیم هیل 1 که با مقادیر ضرایب لانکفورد محاسبه شده، از تنش‌های تسلیم نسبت به مقادیر تجربی فاصله دارد. در دمای اتاق، سطح تسلیم هیل 1 قادر به پیش‌بینی صحیح ناهمسانگردی در مقدار تنش تسلیم در زاویه‌های 22/5 و 67/5 نیست. در مقابل سطح تسلیم کازاکا پیش‌بینی نزدیک‌تری از این رفتار ناهمسانگرد فلز تیتانیوم دارد.

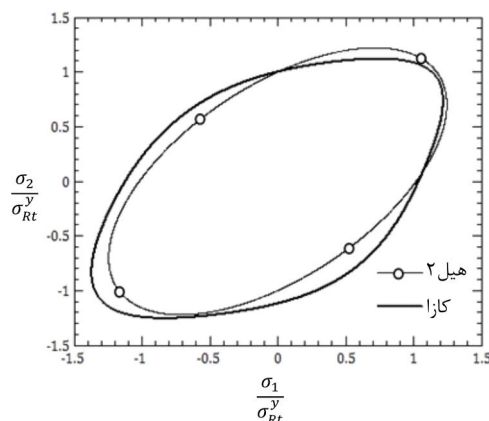
در مجموع، با توجه به شکل‌های 3 تا 8، سطح تسلیم هیل قادر به توصیف هم‌زمان ناهمسانگردی در ضرایب لانکفورد و تنش‌های تسلیم نیست. با توجه به اینکه در این سطح تسلیم فقط 4 ثابت در صفحه تعریف شده است، این نقیصه توجیه می‌شود.

جدول 3 ثابت‌های معادله کارسختی سوئیف

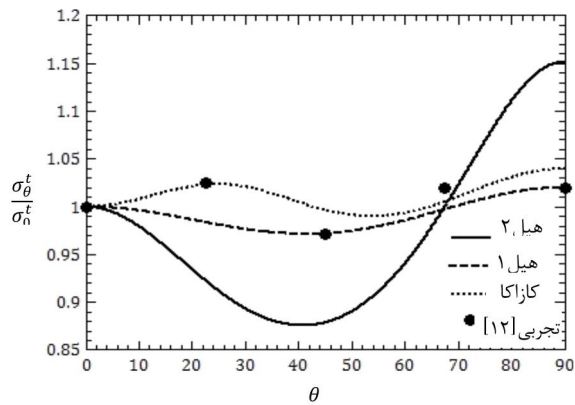
دما		کمیت
25°C	400°C	
1362	883/6	$p$
0/0324	0/0136	$q$
0/0913	0/0608	$r$

جدول 4 ثابت‌های معادله کارسختی وک

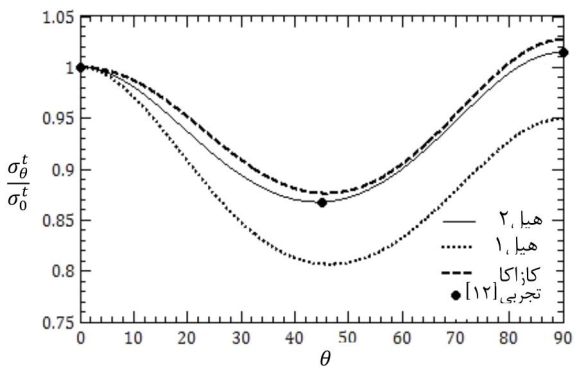
دما		کمیت
25°C	400°C	
1185	798/9	$p$
1374	915/7	$q$
12/77	16/65	$r$



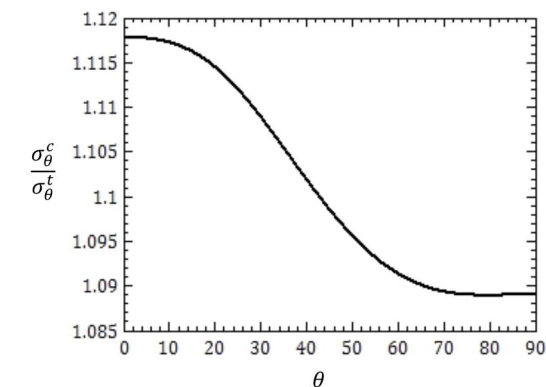
شکل 3 مقایسه سطح تسلیم کازاکا و هیل در حالت تنش دو محوره آلیاژ تیتانیوم در دمای اتاق



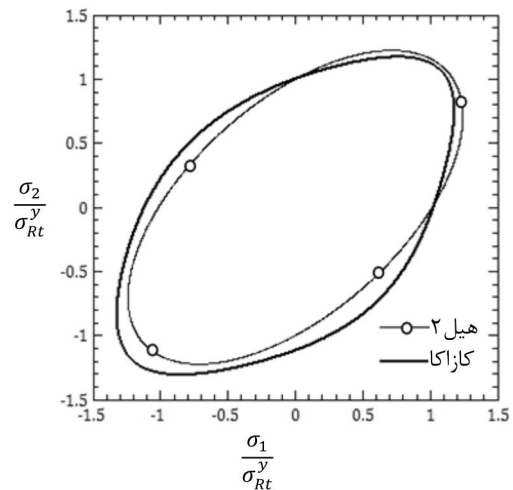
شکل 7 نسبت تنش تسلیم در آزمون کشش تک‌محوره با زاویه  $\theta$  نسبت به جهت نورد ورق به تنش تسلیم در جهت نورد ورق در دمای اتاق



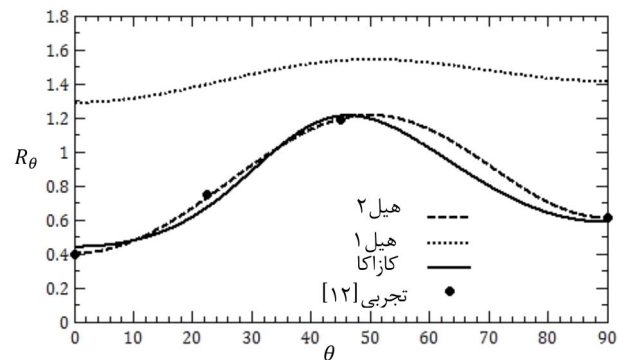
شکل 8 نسبت تنش تسلیم در آزمون کشش تک‌محوره با زاویه  $\theta$  نسبت به جهت نورد ورق به تنش تسلیم در جهت نورد ورق در دمای 400°C



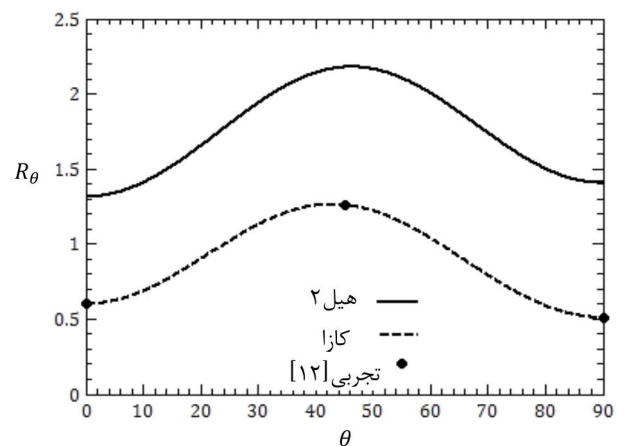
شکل 9 نسبت تنش تسلیم فشاری به کششی در آزمون تک‌محوره با زاویه  $\theta$  نسبت به جهت نورد ورق به تنش تسلیم در جهت نورد ورق در دمای 400°C (سطح تسلیم کازاکا) در سطح تسلیم هیلا قادر به پیش‌بینی این عدم تقارن کشش و فشار نیست. در شکل 10، تأثیر پارامتر  $f_0$  در پیش‌بینی حد شکل‌دهی ورق تیتانیوم در دمای 400°C و با سطح تسلیم کازاکا نشان داده شده است. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، این پارامتر با توجه به روابط تجربی و یا با داشتن یک نقطه تجربی از نمودار حد شکل‌دهی تنظیم می‌شود. به عنوان مثال در شکل 10 مقدار بهینه  $f_0$  برابر با 0/975 می‌باشد. در شکل 11، پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی در دمای 400°C به وسیله سطوح تسلیم کازاکا و هیلا با هم مقایسه شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، سطح تسلیم کازاکا تطابق بهتری با نتایج تجربی دارد. علت این امر را باید در بیان بهتر و دقیق‌تر این سطح تسلیم از ضرایب لانگفورد و تنش‌های تسلیم جویا شد.



شکل 4 مقایسه سطح تسلیم کازاکا و هیلا در حالت تنش دومحوره آلیاژ تیتانیوم در دمای 400°C



شکل 5 ضریب لانگفورد در آزمون کشش تک‌محوره با زاویه  $\theta$  نسبت به جهت نورد ورق در دمای اتاق



شکل 6 ضریب لانگفورد در آزمون کشش تک‌محوره با زاویه  $\theta$  نسبت به جهت نورد ورق در دمای 400°C

علاوه بر این در سطح تسلیم هیلا رابطه  $(\frac{\sigma_{\theta}^T}{\sigma_{90}^T} - 1)(\frac{R_{\theta}}{R_{90}} - 1) \geq 0$  برقرار است. در برخی مواد مانند آلیاژ تیتانیوم Ti-6Al-4V در دمای 400°C طبق جدول 1 این رابطه برقرار نیست. سطح تسلیم هیلا در این شرایط پیش‌بینی دقیقی از ناهمسانگردی فلز ندارد. در شکل 9، پیش‌بینی سطح تسلیم کازاکا از نسبت تنش تسلیم فشاری به کششی در آزمون تک‌محوره در راستایی با زاویه  $\theta$  نسبت به جهت نورد در دمای 400°C آمده است.

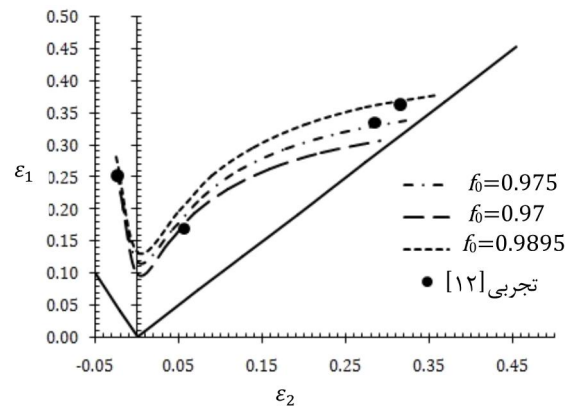
بنابراین دقت بالاتر پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی ورق تیتانیوم با استفاده از سطح تسلیم کازاکا را می‌توان در توصیف بهتر این سطح تسلیم از رفتار ماده و به‌خصوص ناهمسانگردی در ضرایب لانگفورد توجیه نمود.

### 7- فهرست علائم

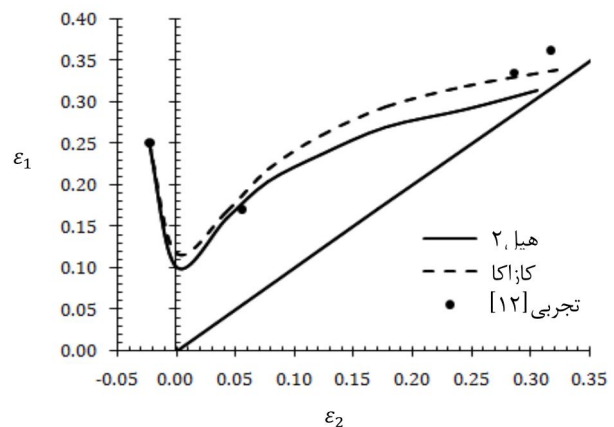
$\bar{\sigma}$	تنش مؤثر
$d\bar{\epsilon}^a$	نمو کرنش پلاستیک انباشته در ناحیه همگن
$d\bar{\epsilon}^b$	نمو کرنش پلاستیک انباشته در ناحیه غیر همگن
$\bar{\epsilon}_p$	کرنش پلاستیک

### 8- مراجع

- [1] D. Banabic, S. Comsa, P. Jurco, G. Paraiianu, L. Julean, FLD theoretical model using a new anisotropic yield criterion, *Journal of Material Processing Technology*, Vol. 157, No. 1, pp. 23-27, 2004.
- [2] D. Banabic, H. Aretz, L. Paraiianu, P. Jurco, Application of various FLD modelling approaches, *Journal of Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, Vol. 13, No. 5, pp. 759-769, 2005.
- [3] M. Ganjiani, A. Assempour, An improved analytical approach for determination of forming limit diagrams considering the effects of yield functions, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 182, No. 1-3, pp. 598-607, 2007.
- [4] Banabic, D., *Advanced Methods in Material Forming*, First Edition, pp. 151-165, New York: Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [5] Fyllingen, O.S. Hopperstad, O. G. Lademo, M. Langseth, Estimation of forming limit diagrams by the use of the finite element method and Monte Carlo simulation, *Computers & Structures*, Vol. 87, No. 1-2, pp. 128-139, 2009.
- [6] W. Hosford, On the yield loci of anisotropic cubic metals, *Proceedings of the Seventh North American Metal working Conference SME*, Dearborn, United States, 1979, pp. 191-197.
- [7] F. Barlat, D.J. Lege, J.C. Brem, A six-component yield function for anisotropic materials, *International Journal of Plasticity*, Vol. 7, No. 7, pp. 693-712, 1991.
- [8] O. Cazacu, F. Barlat, A criterion for description of anisotropy and yield differential effects in pressure-insensitive metals, *International Journal of Plasticity*, Vol. 20, No. 11, pp. 2027-2045, 2004.
- [9] O. Cazacu, B. Plunkett, F. Barlat, Orthotropic yield criterion for hexagonal closed packed metals, *International Journal of Plasticity*, Vol. 22, No. 7, pp. 1171-1194, 2006.
- [10] B. Plunkett, O. Cazacu, F. Barlat, Orthotropic yield criteria for description of the anisotropy in tension and compression of sheet metals, *International Journal of Plasticity*, Vol. 24, No. 5, pp. 847-866, 2008.
- [11] A.S. Khan, S.H. Yu, Deformation induced anisotropic responses of Ti-6Al-4V alloy. Part I: Experiments, *International Journal of Plasticity*, Vol. 38, pp. 1-13, 2012.
- [12] E.L. Odenberger, J. Hertzman, P. Thilderkvist, M. Merklein, A. Kuppert, T. Stöhr, J. Lechler, M. Oldenburg, Thermo-mechanical sheet metal forming of aero engine components in Ti-6Al-4V PART 1: Material characterisation, *International Journal of Material Forming*, Vol. 6, No. 3, pp. 391-402, 2012.
- [13] D. Banabic, *Metal Forming Processes: Constitutive Modelling and Numerical Simulation*, First Edition, pp. 45-52, Berlin: Springer, 2010.
- [14] E.L. Odenberger, M. Schill, M. Oldenburg, Thermo-mechanical sheet metal forming of aero engine components in Ti-6Al-4V PART 2: constitutive modelling and validation, *International Journal of Material Forming*, Vol. 6, No. 3, pp. 403-416, 2012.



شکل 10 تأثیر پارامتر  $f_0$  در پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی ورق تیتانیوم در دمای  $400^\circ\text{C}$  و سطح تسلیم کازاکا



شکل 11 مقایسه پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی به‌روش مارشینیاک با سطح تسلیم کازاکا و هیل 2 در دمای  $400^\circ\text{C}$

در شکل‌های قبل، توصیف صحیح‌تر سطح تسلیم کازاکا از ضرایب لانگفورد و تنش‌های تسلیم نشان داده شده است.

بررسی پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی به‌روش مارشینیاک با معادله‌های کارسختی سوئیفت و وک نشان می‌دهد که به‌کارگیری این دو معادله تأثیر چندانی در پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی ندارد. در این پژوهش، نتایج یکسانی با استفاده از این دو معادله کارسختی به‌دست آمد.

### 6- نتیجه‌گیری

در این مقاله، نمودار حد شکل‌دهی ورق آلیاژ تیتانیوم در دمای  $400^\circ\text{C}$  به‌روش مارشینیاک پیش‌بینی شد. در پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی از سطح تسلیم هیل و کازاکا استفاده شد. پیش‌بینی با استفاده از سطح تسلیم کازاکا در مقایسه با سطح تسلیم هیل تطابق بهتری با نتایج تجربی دارد. با توجه به اینکه سطح تسلیم کازاکا دارای ثابت‌های درون صفحه بیشتری نسبت به سطح تسلیم هیل است، پیش‌بینی سطح تسلیم کازاکا از ناهمسانگردی تنش‌های تسلیم و ضرایب لانگفورد در مقایسه با سطح تسلیم هیل بهتر است.