



تحلیل رفتار یک ورق مرکب دوپایای هیبریدی پیچشی و عوامل موثر بر محدوده پایداری

سعید صابری¹، مصطفی غیور^{2*}، حمیدرضا میردامادی³

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، طراحی کاربردی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

3- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

* اصفهان، صندوق پستی 8415683111، ghayour@cc.iut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 25 آبان 1395

پذیرش: 04 بهمن 1395

ارائه در سایت: 09 اسفند 1395

کلید واژگان:

ورق مرکب دوپایا هیبریدی

سازه‌های شکل‌پذیر

معادلات فون-کارمن

روش رایلی-ریتز

شیب‌سازی اجزای محدود

چکیده

ورق‌های دوپایداره و چندپایداره نوعی از سازه‌های هوشمند مرکب هستند که دارای دو یا چند حالت تعادل استاتیکی می‌باشند. در این مقاله یک ورق مرکب دوپایا هیبریدی با یک لایه فلز خارجی تحلیل می‌شود. تفاوت این ورق‌ها با ورق‌های مرکب دوپایا معمولی و ورق‌های مرکب دوپایا هیبریدی با یک لایه فلز داخلی در حالت‌های تغییر شکل یافته می‌باشد. به عبارت دیگر برخلاف ورق‌های مرکب دوپایای متداول، در هر دو حالت پایدار، انحناهای عرضی برابر و هم جهت می‌باشند و انحناهای پیچشی مقدار قابل توجهی دارد. برای بررسی رفتار این ورق‌ها از روش رایلی-ریتز و کمینه‌سازی انرژی پتانسیل و همچنین اجزای محدود استفاده می‌شود. به منظور افزایش دقت، در روش رایلی-ریتز جابه‌جایی خارج از صفحه با استفاده از چندجمله‌ای لژاندر حدس زده می‌شود. ابتدا حالت‌های تعادل و حالت‌های پایدار تعیین می‌شوند. برای درک بهتر تفاوت بین ورق دوپایا هیبریدی با یک لایه فلز خارجی و یک ورق مرکب دوپایا معمولی مقایسه‌ای بین حالت‌های تغییر شکل یافته در دمای محیط، انحناها و جابه‌جایی خارج از صفحه انجام می‌گردد. در ادامه گشتاور مورد نیاز برای پرش بین حالت‌های پایدار به دست می‌آید. همچنین تأثیر ضخامت لایه فلز روی محدوده پایداری و جابه‌جایی خارج از صفحه بررسی می‌گردد. مقایسه نتایج حاصل از تابع شکل پیشنهادی و تابع شکل هاپر نسبت به نتایج تجربی و نتایج حاصل از روش اجزای محدود نشان می‌دهند که نتایج حاصل از تابع شکل پیشنهادی از دقت بسیار بالاتری برخوردار است.

Behaviour analysis of a bistable twisting hybrid composite plate with an external metal layer and effecting factors on stability region

Saeed Saberi, Mostafa Ghayour*, Hamid Reza Mirdamadi

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

* P.O.B. 8415683111 Isfahan, Iran, ghayour@cc.iut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 15 November 2016
Accepted 23 January 2017
Available Online 27 February 2017

Keywords:

Bistable hybrid composite plate
Morphing structures
Von - Karman equations
Rayleigh - Ritz method
Finite element simulation

ABSTRACT

Bistable and multistable plates are types of smart composite structures that have two or more static equilibriums. In this paper, a bistable hybrid composite plate with an external metal layer is studied. The difference between these plates and conventional bistable composite plates and bistable hybrid composite plate with an inner layer of metal is their deformation. In other words, unlike the conventional bistable composite plates, in both stable states, transverse curvatures that have the same size and sign but twisted curvature are considerable. The analytical method for studying the behavior of the plate is Rayleigh- Ritz method and minimization of potential energy and finite element is used. In order to increase the accuracy of the Rayleigh - Ritz method, out of the plane displacement is guessed by using Legendre polynomial. First, states of equilibrium and stable states are determined. To better understand the difference between a bistable hybrid plate with an external metal layer and a CFRP bistable composite plate, a comparison between deform at room temperature, curvature and out of plane displacement is done. In the next part, the moment required to snap through between stable states is achieved. Also, the effect of metal layer thickness on out of plane displacement and stability boundary is investigated. Comparing the results of the proposed shape function and Hyer shape function compared to experimental results and the results of finite element analysis show that the results of the proposed shape function are more accurate.

1- مقدمه

می‌باشند. استفاده از سازه‌های چندپایداره در سازه‌های شکل‌پذیر^۱ و صنایع هوافضا و غیره منجر به کاهش اجزای مورد نیاز سازه می‌شود. ورق دوپایداره به دلیل دارا بود خواص مکانیکی و ضرایب انبساط حرارتی متفاوت در دو

سازه‌های دو و چندپایا^۱ دارای قابلیت تغییر شکل مکرر بین حالت‌های تعادل و ماندن در هر یک از این حالت‌ها بدون نیاز به هیچ‌گونه منبع انرژی

² Morphing

¹ Multistable

Please cite this article using:

S. Saberi, M. Ghayour, H. R. Mirdamadi, Behaviour analysis of a bistable twisting hybrid composite plate with an external metal layer and effecting factors on stability region, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 2, pp. 420-426, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

مرکب دوپایا هیبریدی با یک لایه فلز بیرونی که توسط دای [12] ساخته شده است، به روش تحلیلی و اجزای محدود پرداخته می‌شود. این ورق‌ها دارای ویژگی‌های منحصر بفرد و متمایزی با ورق‌های مرکب معمولی (CFRP)² و ورق‌های مرکب هیبریدی دو پایا با لایه فلز درونی می‌باشند. دای [12] با در نظر گرفتن تابع شکل هابر و استفاده از انتقال دستگاه مختصات در راستای انحناهای اصلی به تحلیل این سازه پرداخت. در واقع در مقاله [12] علاوه بر عیوب تابع شکل هابر، حالت پیچشی این سازه‌ها نادیده گرفته شده است. در پژوهش حاضر به منظور افزایش دقت نتایج و کم کردن خطا در مقایسه با نتایج تجربی یک تابع شکل جدید جهت تخمین جابه‌جایی خارج از صفحه پیشنهاد شده است. به دلیل توانایی تابع شکل جدید، دیگر از انتقال دستگاه مختصات استفاده نمی‌شود. برای نمایش تفاوت‌های این ورق با یک ورق مرکب دوپایا معمولی مقایسه بین نتایج حاصل از روش تحلیلی و روش اجزای محدود حاصل از نرم افزار آباکوس، برای هر دو نوع ورق صورت گرفته است. در ادامه گشتاور مورد نیاز برای تغییر شکل بین حالت‌های پایدار تعیین و همچنین تأثیر ضخامت لایه فلزی روی جابه‌جایی خارج از صفحه و محدوده پایداری بررسی می‌گردد.

2- معادلات حاکم بر مسئله

با توجه به رفتار غیرخطی این سازه‌ها به منظور پیش بینی حالت‌های پایدار از ترم‌های کرنش فون - کارمن استفاده شده تا برخلاف تئوری لایه‌های کلاسیک اثرات غیرخطی بودن کرنش لحاظ شود. رابطه بین میدان‌های کرنشی و جابه‌جایی با استفاده از معادلات فون - کارمن به صورت رابطه (1) بیان می‌شود [3-1].

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + Z\kappa_0 \quad (1)$$

که در رابطه (1)، ε_0 و κ_0 به ترتیب بردار کرنش و انحنا در صفحه میانی می‌باشند که در روابط (2) و (3) تعریف می‌شوند:

$$\varepsilon_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\kappa_0 = \begin{bmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (3)$$

در روابط (2) و (3) ترم‌های w_0 ، v_0 ، u_0 تغییر مکان نقطه‌ای دلخواه در صفحه میانی به ترتیب در راستاهای x ، y ، z می‌باشند. انرژی پتانسیل کل ذخیره شده در لایه‌های یک صفحه مرکب از رابطه (4) به دست می‌آید.

$$\Pi = \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} \int_{-H/2}^{H/2} \left(\frac{1}{2} \bar{Q}_{11} \varepsilon_{xx}^2 + \bar{Q}_{12} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \bar{Q}_{16} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{xy} + \frac{1}{2} \bar{Q}_{22} \varepsilon_{yy}^2 + \bar{Q}_{26} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{xy} + \frac{1}{2} \bar{Q}_{66} \varepsilon_{xy}^2 - (\bar{Q}_{11} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{12} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{16} \alpha_{xy}) \varepsilon_{xx} \Delta T - (\bar{Q}_{21} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{22} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{26} \alpha_{xy}) \varepsilon_{yy} \Delta T - (\bar{Q}_{61} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{62} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{66} \alpha_{xy}) \varepsilon_{xy} \Delta T \right) dz dx dy \quad (4)$$

جهت متعامد، بعد از طی کردن فرایند پخت در دمای محیط دو حالت پایدار خواهند داشت. ورق‌های مرکب دوپایای معمول با چینش غیرممتقارن دارای معایبی مانند کم بودن جابه‌جایی خارج از صفحه، کم بودن نیروی لازم جهت پرش ناگهانی¹ و متأثر بودن از تغییرات دمایی و رطوبت می‌باشند. این معایب سبب طراحی و ساخت ورق‌های مرکب هیبریدی دوپایا شده است. لایه فلز در ورق‌های مرکب هیبریدی دو پایا هم می‌تواند به صورت لایه درونی و هم به صورت لایه بیرونی قرار گیرد.

نخستین بار هابر به صورت تجربی با بررسی صفحات مرکب با چینش غیرممتقارن لایه‌ای تحت تحریک حرارتی دریافت که حالت تغییر شکل یافته ورق با آنچه که تئوری لایه‌های کلاسیک پیش بینی می‌کرد متفاوت می‌باشد. تئوری لایه‌های کلاسیک به علت خطی در نظر گرفتن کرنش‌ها حالت تغییر شکل یافته ورق را زین‌اسبی پیش‌بینی می‌کرد در حالی که هابر مشاهده کرد، با اعمال بارهای حرارتی، ورق دو شکل استوانه‌ای کاملاً پایدار خواهد داشت. علاوه بر آن ورق با انجام یک پرش ناگهانی از یک حالت پایدار به حالت پایدار دیگر تغییر شکل می‌دهد [1]. هابر و هاماموتو با افزودن قسمت‌های غیرخطی کرنش به تئوری لایه‌های کلاسیک و با استفاده از اصل کمینه کردن انرژی پتانسیل کل و روش رایلی - ریتز، با حدس زدن یک میدان جابه‌جایی مناسب به پیش‌بینی حالت تغییر شکل یافته ورق‌های مرکب مستطیلی غیرممتقارن تحت بارهای حرارتی پرداختند [3,2]. تابع شکل ارائه شده توسط هابر در تخمین جابه‌جایی خارج از صفحه گوشه‌ها و نزدیک لبه‌ها خطای قابل توجهی داشت. به دلیل ثابت در نظر گرفتن انحناهای عرضی، قادر به پیش‌بینی انحنای پیچشی و اثرات لبه‌ای نبود. همچنین نیرو و گشتاور مورد نیاز برای پرش ناگهانی را نیز با خطای بسیار زیادی پیش‌بینی می‌کرد. گالتلی و گست با در نظر گرفتن انحنای گوسی اولیه تأثیر خاص بر پایداری لوله‌های شکافدار مرکب را بررسی کردند [4]. گست و پلگرینو با استفاده از فرض انحنای گوسی اولیه ابتدا قسمت‌های خمشی و غشایی انرژی کرنشی کل را جدا در نظر گرفتند و سپس تعادل و پایداری پوسته‌های مرکب استوانه‌ای را با فرض انحنای ثابت بررسی کردند [5]. سفن و ویدولی با استفاده از مدل ارائه شده توسط گست و پلگرینو [5] به ترتیب پایداری ورق‌های مرکب دوپایا بیضوی و مستطیلی شکل را بررسی کردند [7,6]. پیرا و همکاران با استفاده از چندجمله‌ای‌های مرتبه بالا جابه‌جایی و با ترکیب مدل ریتز و الگوریتم تعقیب کننده مسیر، رفتار پوسته‌های مرکب دوپایا را بررسی کردند [8]. اکاشتاين و همکاران کار هابر [2] را گسترش داده و پوسته‌های استوانه‌ای دوپایا با انحنای اولیه را در اثر اعمال بار حرارتی در شرایطی که خواص مواد تابع دما بودند، بررسی کردند [9]. مور و همکاران با در نظر گرفتن وابستگی خواص مکانیکی و حرارتی ماده مرکب به دما و همچنین لایه‌های رزین به بررسی صفحات مرکب دوپایا پرداختند [10]. در زمینه ورق‌های مرکب دوپایا هیبریدی برای اولین بار داینس به طراحی و تحلیل ورق‌های مرکب دوپایا هیبریدی با لایه فلز میانی پرداخت [11]. دای و همکاران یک ورق مرکب دوپایا هیبریدی با یک لایه بیرونی فلز طراحی کردند [12]. لی و همکاران نوع جدیدی از ورق‌های مرکب دوپایا هیبریدی با چینش متقارن طراحی، و با ارائه مدل تحلیلی جدید رفتار آن را بررسی کردند [13]. پن و همکاران برداشت انرژی از ورق‌های مرکب دوپایا هیبریدی با چینش متقارن طراحی شده توسط دای [13] را به صورت تجربی و تحلیل بررسی نمودند [14]. در این مقاله به بررسی رفتار و ویژگی‌های ورق‌های

² Carbon Fiber Reinforced Prepreg

¹ Snap through

فلز با ضرایب انبساط حرارتی طولی و عرضی الیاف در سطح تماس فلز و الیاف لغزش اتفاق می‌افتد. ضریب لغزش به مواد و فرایند تولید وابسته است و به صورت تجربی تعیین می‌شود. این ضریب با استفاده از روابط (10) تعریف می‌شود [11].

$$\mu = \frac{\varepsilon_f^{\text{cure}}}{\varepsilon_m^{\text{cure}}} \quad \varepsilon_m^{\text{cure}} = \frac{E_m \alpha_m \Delta T t}{\frac{\mu}{4} E_f V_f (H - t)(1 - \nu_m) + E_m t} \quad (10)$$

در رابطه (10) $\varepsilon_f^{\text{cure}}$ و $\varepsilon_m^{\text{cure}}$ نشان دهنده کرنش ناشی از پخت در الیاف و لایه فلزی، t ضخامت لایه فلز، H ضخامت کل ورق می‌باشند. با استفاده از نتایج تجربی برای آلومینیوم $\mu = 0.5$ انتخاب می‌شود. با در نظر گرفتن ضریب لغزش، ضرایب انبساط حرارتی جدید به صورت روابط (11) تعریف می‌شوند.

$$\bar{\alpha}_{11} = \frac{\mu \varepsilon_m^{\text{cure}}}{2 \Delta T}, \quad \bar{\alpha}_{22} = \alpha_{22}, \quad \bar{\alpha}_f = \frac{\varepsilon_m^{\text{cure}}}{\Delta T} \quad (11)$$

در نظر گرفتن ضریب لغزش و جایگذاری روابط (11) در رابطه (4) باعث می‌شود که انحنا به دست آمده نسبت به حالتی که ضریب لغزش در نظر گرفته نشده است، اختلاف کمتری در مقایسه با نتایج تجربی داشته باشد.

3- نتایج

در این قسمت ابتدا حالت‌های تعادل و پایدار را برای هر دو نوع ورق مرکب دوپایا CFRP معمولی و هیبریدی با لایه فلز خارجی تعیین می‌شود. سپس با مقایسه بین نتایج حاصل، تفاوت این دو نوع ورق مرکب دوپایا بهتر نمایان می‌شود. این دو نوع ورق مربعی شکل به طول 150 mm با چینش لایه‌ای [0/90/metal] و [0/90] با خواص مطابق جدول 1 و شرایط مرزی به صورت مرکز ثابت و لبه‌های آزاد می‌باشند.

3-1- روش اجزای محدود

برای مدل کردن ورق مرکب هیبریدی دوپایداره در نرم افزار آباکوس ابتدا یک ورق مربعی با طول ضلع 150 mm ترسیم می‌شود. در مرحله بعد تعداد لایه‌های و خواص ماده مرکب وارد می‌شود. باید از دو گام استاتیک عمومی با در نظر گرفتن غیرخطی هندسی استفاده شود. در گام اول به منظور در نظر گرفتن عیوب هندسی ناشی از فرایندهای ساخت و برای اینکه پس از ایجاد تنش‌های پسماند ورق به یکی از حالت‌های پایدار تغییر شکل دهد باید عیب اولیه به ورق اعمال شود. این عیب می‌تواند به صورت دو نیروی یکسان به دو گوشه رویه‌رو ورق در دماهای ابتدایی سرد کردن اعمال شود. در گام دوم باید نیروی اعمالی حذف و ورق تا دمای محیط سرد شود. در پایان این مرحله ورق به یکی از حالت‌های پایدار منتقل می‌شود. در گام اول اگر جهت نیروهای اعمالی عکس گردد ورق به حالت پایدار دیگر منتقل می‌شود. در مرحله مش‌ریزی با استفاده از المان‌های پوسته مربعی چهار گره‌ای با انتگرال‌گیری کاهشی S4R برای ورق با ابعاد ذکر شده تعداد 10000 المان و 10201 گره حاصل می‌شود. شرایط مرزی ورق به این صورت است که در مرکز ثابت و در لبه‌ها آزاد می‌باشند.

3-2- تعیین حالت‌های تعادل و پایدار

در شکل‌های 1 و 2 به ترتیب حالت‌های تعادل ورق مرکب هیبریدی با چینش [0/90/AL] و ورق مرکب دوپایا CFRP معمولی نشان داده شده است. با توجه به جدول 1 ضخامت کل ورق مرکب هیبریدی پیچشی دوپایا برابر با

در رابطه (4)، L_x و L_y طول اضلاع ورق، H ضخامت کل ورق، \bar{Q} ماتریس سختی کاهشی، $\alpha_{kk}(k=x, y)$ ضریب انبساط حرارتی و ΔT تغییرات دمای پخت تا دمای محیط می‌باشد. انتخاب میدان‌های جابه‌جایی مناسب می‌تواند دقت نتایج حاصل را افزایش دهد. از این رو برای برطرف کردن عیوب روش هایلر، میدان جابه‌جایی خارج از صفحه با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر حدس زده می‌شود. استفاده از تابع شکل حدس زده شده باعث افزایش قابل توجه دقت به خصوص در گوشه و نواحی نزدیک لبه‌ها، در مقایسه با توابع شکل دیگر می‌شود. به عبارت دیگر میدان جابه‌جایی خارج از صفحه حدس زده شده با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر به‌طور سیستماتیک توان‌های مختلفی از x و y و حاصل ضرب آنها را در برمی‌گیرد که باعث افزایش دقت در تعیین نتایج مختلف می‌شود. جابه‌جایی خارج از صفحه در رابطه (5) حدس زده شده است.

$$w(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n q_{ij} P_i(x) P_j(y) \quad (5)$$

در رابطه (5)، q_{ij} ضرایب مجهول میدان جابه‌جایی یا همان ضرایب لاگرانژ، $P_i(x)$ و $P_j(y)$ توابع شکل یا همان چندجمله‌ای‌های لژاندر می‌باشند که مطابق رابطه (6) تعیین می‌شوند.

$$P_s(r) = \sum_{m=0}^s \binom{s}{m} \binom{-s-1}{m} \left(\frac{1-r}{2}\right)^m \quad s = i, j \quad r = x, y \quad (6)$$

میدان‌های جابه‌جایی داخل صفحه به صورت روابط (7) انتخاب می‌شوند.

$$u^0(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{ij} x^i y^j \quad v^0(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_{ij} x^i y^j \quad (7)$$

با جای گذاری میدان‌های جابه‌جایی تعریف شده مطابق با روابط (5) و (7) در روابط (2) و (3) و جایگذاری روابط حاصل در رابطه (4) و سپس انتگرال‌گیری از این رابطه، انرژی پتانسیل کل به صورت تابعی از ضرایب میدان‌های جابه‌جایی به دست می‌آید. طبق اصل کمینه‌سازی انرژی پتانسیل برای تعیین حالت‌های تعادل کافی است تغییرات انرژی پتانسیل کل نسبت به مجهولات مسئله را به دست آورده و عبارات حاصل را برابر صفر قرار داد.

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial q_{ij}} \delta q_{ij} + \frac{\partial \Pi}{\partial u_{ij}} \delta u_{ij} + \frac{\partial \Pi}{\partial v_{ij}} \delta v_{ij} = 0 \quad (8)$$

عبارات حاصل تشکیل یک دستگاه معادلات غیرخطی می‌دهند که از روش نیوتون-رافسون و با استفاده از نرم‌افزار متلب حل می‌شوند. برای تعیین حالت‌های تعادل پایدار کافی است ماتریس هسین انرژی پتانسیل کل را محاسبه کرده و حالت تعادلی که دارای ماتریس هسین مثبت و معینی می‌باشد، پایدار است.

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_{ij}^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_{ij} \partial u_{ij}} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_{ij} \partial v_{ij}} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_{ij} \partial q_{ij}} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_{ij}^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_{ij} \partial v_{ij}} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v_{ij} \partial q_{ij}} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v_{ij} \partial u_{ij}} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v_{ij}^2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

مسئله دیگری که برای بررسی ورق مرکب هیبریدی دوپایا باید در نظر گرفت تأثیر لغزش می‌باشد. در واقع به دلیل تفاوت ضریب انبساط حرارتی لایه

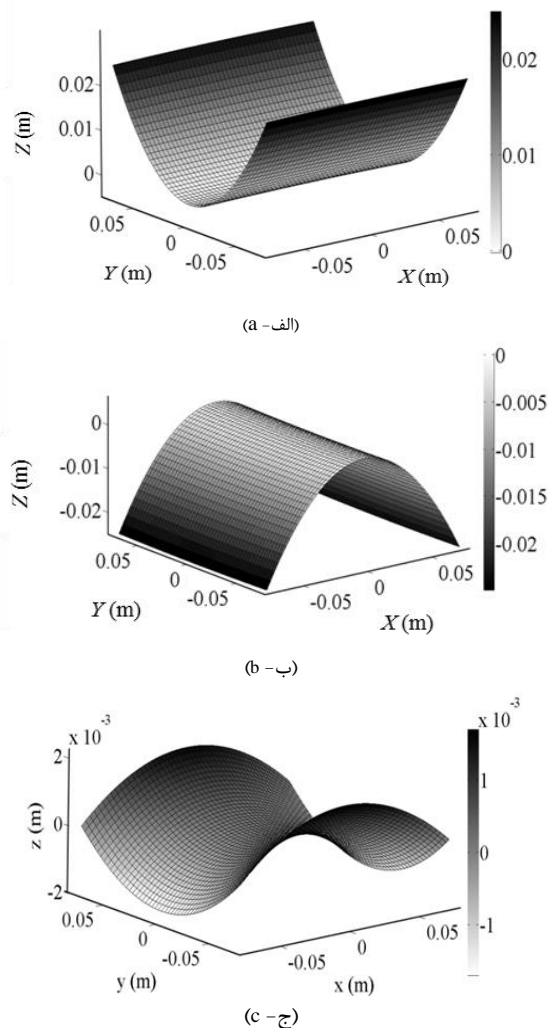


Fig. 2 The resulting equilibrium states for plate [0/90]: (a) the first cylinder stable state, (b) a second cylinder stable state, (c) unstable state saddle

شکل 2 حالت‌های تعادل به دست آمده برای ورق [0/90]: (الف) حالت پایدار استوانه‌ای اول، (ب) حالت پایدار استوانه‌ای دوم، (ج) حالت ناپایدار زین‌اسبی

0.490 mm می‌باشد، لذا برای انجام مقایسه‌ای قابل قبول ضخامت ورق مرکب دوپایای معمولی برابر 0.490 mm در نظر گرفته می‌شود.

مطابق شکل 1 ورق مرکب هیبریدی با یک لایه فلز خارجی دارای دو حالت تعادل پایدار استوانه‌ای پیچ‌خورده با انحناهای عرضی برابر و هم جهت و یک حالت تعادل ناپایدار سهمی‌گون برای طول بیشتر از طول بحرانی می‌باشد. حالت تعادل زین‌اسبی برای طول‌های کمتر از طول بحرانی دارد که پایدار است، از شکل 4 می‌توان به این موضوع پی برد. نمودار تغییرات انحنا نسبت به طول برای حالت‌های تعادل ورق مرکب دوپایا هیبریدی با یک لایه آلومینیوم خارجی در شکل 3 نشان داده شده می‌باشد که برای طول‌های کمتر از طول بحرانی اتفاق می‌افتد. منظور از طول بحرانی، طولی است که ورق برای دوپایا بودن، باید طولی بزرگتر از آن داشته باشد. در شکل‌های 3 و 4 نقطه بحرانی در نقطه B قرار دارد.

خط BE و BD نشان دهنده حالت‌های تعادل پایدار استوانه‌ای پیچ‌خورده هستند. در این دو حالت، برابری و هم علامت بودن انحناهای عرضی حالت تعادل استوانه‌ای پایدار اول با حالت پایدار استوانه‌ای دوم سبب شده است که این دو خط به طور کامل برهم منطبق باشند. خط BC نشان دهنده حالت

جدول 1 خواص مکانیکی و حرارتی CFRP با چینش [0/90] و لایه آلومینیوم [12]

Table 1 Mechanical and thermal properties CFRP [0/90] and the aluminum layer [12]

مقدار	مشخصه
126	مدول کشسان طولی CFRP (GPa)
8.8	مدول کشسان عرضی CFRP (GPa)
4.47	مدول برشی CFRP (GPa)
0.3	ضریب پواسون CFRP
0.25×10^{-6}	ضریب انبساط حرارتی طولی CFRP ($^{\circ}\text{C}$)
34×10^{-6}	ضریب انبساط حرارتی عرضی CFRP ($^{\circ}\text{C}$)
0.125	ضخامت هر لایه CFRP (mm)
0.6	کسر حجمی الیاف
211	مدول کشسان طولی الیاف (GPa)
70	مدول کشسان آلومینیوم (GPa)
23.6×10^{-6}	ضریب انبساط حرارتی آلومینیوم ($^{\circ}\text{C}$)
0.240	ضخامت لایه آلومینیوم (mm)

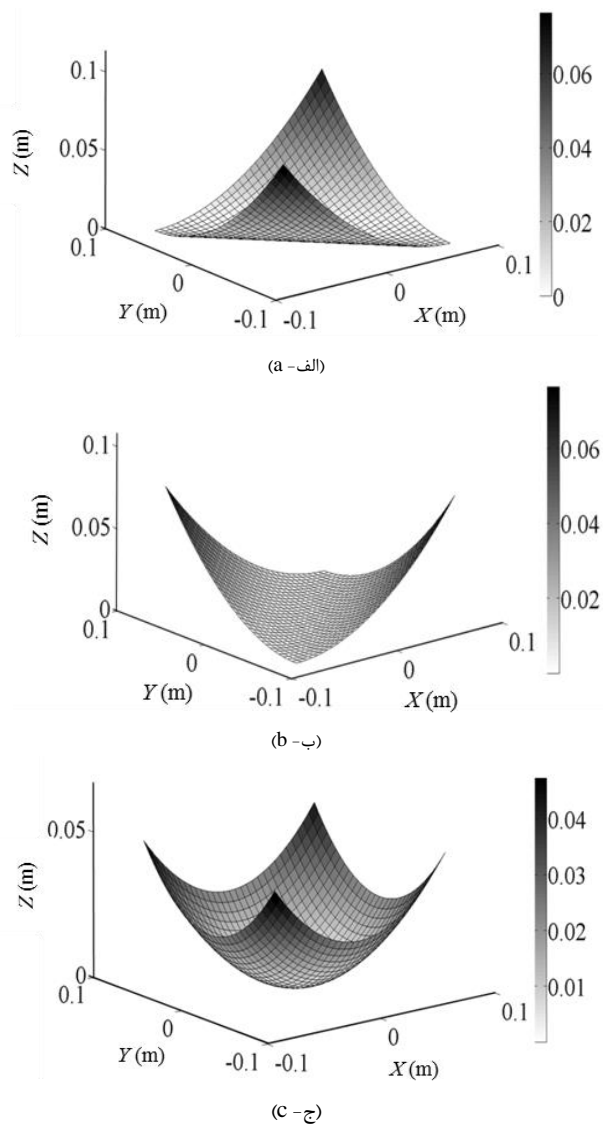


Fig. 1 The resulting equilibrium states for plate [0/90/AL]: (a) the first cylinder stable state, (b) a second cylinder stable state, (c) unstable state saddle

شکل 1 حالت‌های تعادل به دست آمده برای ورق [0/90/AL]: (الف) حالت پایدار استوانه‌ای اول، (ب) حالت پایدار استوانه‌ای دوم، (ج) حالت ناپایدار زین‌اسبی

جدول 3 انحنای به دست آمده برای ورق [0/90] در دمای محیط برای حالت پایدار استوانه‌ای

Table 3 Curvatures obtained for the plate [0/90] for cylindrical stable states at room temperature

نوع حل	κ_{xy} (1/m)	κ_y (1/m)	κ_x (1/m)
اجزای محدود	0	-0.410	8.56
تابع شکل هایلر	0	-0.0028	8.89
تابع شکل پیشنهادی	0	-0.095	8.59

در این مقاله تابع شکل جدید ارائه شده در رابطه (5) علاوه بر برطرف کردن مشکلات روش هایلر، از دقت بالایی نیز برخوردار می‌باشد. برای مقایسه دقت تابع شکل پیشنهادی جابه‌جایی یک نقطه از لبه و یک گوشه، هر یک از این دو ورق در جداول 4 و 5 نشان داده شده است.

نتایج جداول 2 تا 5 حاصل از تابع شکل پیشنهادی با استفاده از چندجمله‌ای لژاندر مرتبه 4 با تعداد ضرایب لاگرانژ برابر 25 به دست آمده است. اگر چه میدان‌های جابه‌جایی داخل صفحه تأثیر کوچکی دارند ولی به منظور افزایش دقت، تا مرتبه 4 در نظر گرفته شده‌اند.

در قسمت‌های قبل مقاله، ضمن بررسی ورق مرکب دوپایا هیبریدی با لایه خارجی فلز، برای درک بهتر تفاوت این نوع ورق دوپایا با یک ورق دوپایا معمولی، مقایسه‌هایی بین آنها صورت گرفته است. در ادامه، فقط به بررسی رفتارهای مختلف ورق مرکب دوپایا هیبریدی با یک لایه فلز خارجی پرداخته می‌شود.

3-4- تعیین گشتاور مورد نیاز برای پرش

ورق‌های چندپایداره برای جابه‌جایی بین حالت‌های پایدار نیاز به نیروی خارجی دارند. این نیرو می‌تواند به یک از روش‌های: اعمال مستقیم نیرو یا گشتاور، استفاده از پیروالکترونیک، استفاده از آلیاژهای حافظه‌دار، استفاده از نانولوله‌های کربنی، تامین شود. در این مقاله به منظور پرش بین حالت‌های پایدار، گشتاور پیچشی به دو لبه ورق با مرکز ثابت و لبه‌های آزاد اعمال می‌شود. اعمال گشتاور پیچشی باعث می‌شود که جفت گوشه‌های روبه‌رو مطابق شکل 5 در خلاف جهت هم حرکت کنند.

جدول 4 مقایسه جابه‌جایی خارج از صفحه یک نقطه از لبه ($x=0, y=-L/2$) برای دو نوع ورق [0/90/AL] و [0/90]

Table 4 Compare out of plane displacement of a point ($x=0, y=-L/2$) for two types of plates [0/90/AL] and [0/90]

نوع چینش لایه‌ای	تابع شکل هایلر (cm)	تابع شکل پیشنهادی (cm)	اجزای محدود (cm)
[0/90/AL]	1.91	1.73	1.69
[0/90]	0.0042	0.003	0.0025

جدول 5 مقایسه جابه‌جایی خارج از صفحه یک گوشه برای دو نوع ورق [0/90/AL] و [0/90]

Table 5 Compare out of plane displacement of a corner for two types of plates [0/90 / AL] and [0/90]

نوع چینش لایه‌ای	تابع شکل هایلر (cm)	تابع شکل پیشنهادی (cm)	اجزای محدود (cm)
[0/90/AL]	7.66	7.29	7.27
[0/90]	2.57	2.24	2.23

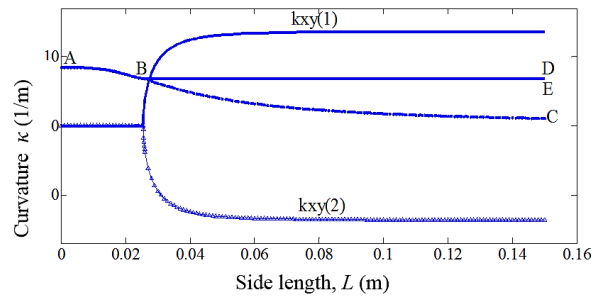


Fig. 3 Curvature vs. side length for square plate [0/90/AL]

شکل 3 تغییرات انحنا بر حسب طول برای ورق مربعی [0/90/AL]

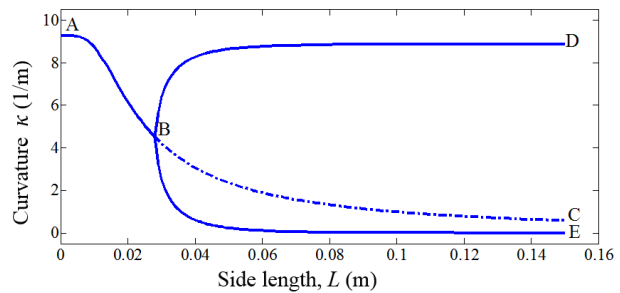


Fig. 4 Curvature vs. side length for square plate [0/90]

شکل 4 تغییرات انحنا بر حسب طول برای ورق مربعی [0/90]

تعداد سهمی‌گون ناپایدار می‌باشد. حالت تعادل سهمی‌گون ناپایدار بدون اعمال نیرو قابل مشاهده نمی‌باشد. در شکل 3 عبارت $kxy(1)$ نشان دهنده تغییرات انحنای پیچشی در حالت پایدار استوانه‌ای پیچشی اول و عبارت $kxy(2)$ نشان دهنده انحنای پیچشی در حالت پایدار استوانه‌ای پیچشی دوم می‌باشد.

نمودار تغییرات انحنا نسبت به طول برای حالت‌های تعادل ورق مرکب دوپایا معمولی در شکل 4 نشان داده شده است. در این شکل خط AB نشان دهنده حالت تعادل پایدار زین‌اسبی شکل می‌باشد که برای طول‌های کمتر از طول بحرانی اتفاق می‌افتد. خط BD و BE نشان دهنده حالت‌های تعادل پایدار استوانه‌ای هستند. در هر حالت پایدار استوانه‌ای یک انحنا عرضی بیشینه وجود دارد که در خلاف جهت انحنای بیشینه حالت پایدار استوانه‌ای دیگر می‌باشد. خط BC نشان دهنده حالت تعادل زین‌اسبی ناپایدار می‌باشد. جدول‌های 2 و 3 نشان دهنده انحنای به دست آمده از روش‌های اجزای محدود، تابع شکل هایلر و تابع شکل پیشنهادی می‌باشد.

3-3- مقایسه جابه‌جایی خارج از صفحه

تابع شکل هایلر به صورت $w(x, y) = \frac{1}{2}(\kappa_{xx}x^2 + \kappa_{yy}y^2)$ بیان می‌شود. این تابع شکل به دلیل ثابت در نظر گرفتن انحناها قادر به پیش‌بینی انحنای پیچشی و اثرات لبه‌ای نیست در نتیجه از دقت لازم برخوردار نیست.

جدول 2 انحنای به دست آمده برای ورق [0/90/AL] در دمای محیط برای حالت پایدار استوانه‌ای پیچ‌خورده

Table 2 Curvatures obtained for the plate [0/90/AL] for twisted cylindrical stable states at room temperature

نوع حل	κ_{xy} (1/m)	κ_y (1/m)	κ_x (1/m)
اجزای محدود	13.79	6.78	6.78
تابع شکل هایلر	14.26	6.96	6.95
تابع شکل پیشنهادی	13.82	6.81	6.81

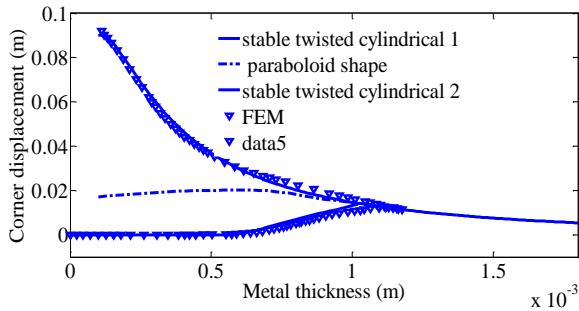


Fig. 7 Effect of metal thickness on out of plane is a plate corner

شکل 7 تاثیر ضخامت لایه فلز بر جابه‌جایی خارج از صفحه یک گوشه ورق

3-5- بررسی تاثیر ضخامت لایه فلزی بر روی جابه‌جایی خارج از صفحه

شکل 7 نشان دهنده تغییرات جابه‌جایی خارج از صفحه یک گوشه ورق بر حسب ضخامت لایه فلز می‌باشد.

با افزایش ضخامت لایه فلز جابه‌جایی خارج از صفحه کمتر می‌شود. برای ضخامت‌های کم، ورق دارای دو حالت پایدار استوانه‌ای پیچ‌خورده و یک حالت ناپایدار سهمی‌گون می‌باشد. با افزایش ضخامت بعد از نقطه بحرانی، ورق فقط یک حالت پایدار سهمی‌گون خواهد داشت. ضخامت بحرانی از روش اجزای محدود برابر با 1.15 mm و از روش تحلیلی برابر با 1.02 mm می‌باشد.

4- نتیجه‌گیری

در این مقاله ورق‌های مرکب دوپایا هیبریدی با یک لایه خارجی فلز با چینش [0/90/metal] بررسی و تفاوت این نوع ورق با ورق‌های مرکب دوپایا معمولی بیان شد. به طور کلی می‌توان گفت در این نوع ورق‌ها در هر دو حالت پایدار استوانه‌ای پیچ‌خورده انحنای عرضی با هم برابر و هم جهت می‌باشند. به منظور افزایش دقت نتایج حاصل و همچنین از بین بردن نواقص تابع شکل هایلر، از تابع شکل جدیدی به صورت چندجمله‌ای‌های لژاندر استفاده گردیده است. در هر مرحله نتایج حاصل از تابع شکل پیشنهادی، نسبت به نتایج حاصل از تابع شکل هایلر دارای دقت بسیار بالاتری می‌باشند. برای افزایش دقت شبیه‌سازی با شرایط ساخت ورق، ضریب لغزش بین لایه فلز و الیاف‌ها در نظر گرفته شده است. در پایان نشان داده شد که اگر ضخامت لایه فلز در ورق مرکب دوپایا هیبریدی از مقداری بیشتر شود ورق، حالت دوپایا نخواهد داشت.

5- فهرست علائم

H	ضخامت کل (m)
L	طول ورق مربعی (m)
L_x	طول ورق (m)
L_y	عرض ورق (m)
M_{xy}^k	گشتاور پیچشی
$P_i(r)$	چند جمله‌ای لژاندر
\bar{Q}	ماتریس سختی کاهش
q_{ij}	ضرایب لاگرانژ
t	ضخامت لایه فلز (m)
u_0	جابه‌جایی صفحه میانی در جهت x

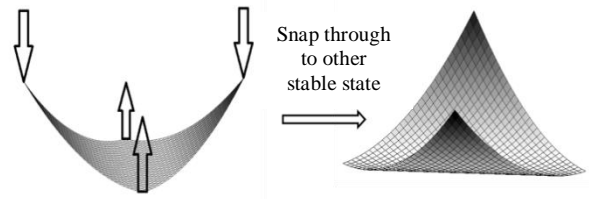


Fig. 5 Schema torque applied to the plate and snap through to the other stable state

شکل 5 طرح‌واره گشتاور پیچشی اعمالی به ورق و پرش به حالت پایدار دیگر

شکل 6 نشان دهنده گشتاور پیچشی مورد نیاز بر حسب جابه‌جایی یک گوشه از ورق می‌باشد.

باید توجه داشت که در رابطه (4) عبارت مربوط به کار انجام شده به وسیله گشتاور پیچشی اضافه شود.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_{ij}} - \sum_{k=1}^n M_{xy}^k \frac{\partial^2 w^k(x, y)}{\partial x \partial y} = 0 \quad (12)$$

شکل 6 از حل رابطه (12) به دست می‌آید. به این صورت که در یکی از حالت‌های پایدار که در آن گشتاور پیچشی برابر صفر می‌باشد، به تدریج در رابطه (12) مقدار گشتاور پیچشی در گام‌های کوچک افزایش می‌یابد تا ورق به حالت دوم پرش کند، در این حالت، برای رسیدن به وضعیت پایدار مقدار گشتاور پیچشی در گام‌های کوچک کاهش می‌یابد تا در نقطه‌ای به صفر برسد که همان حالت پایدار دوم می‌باشد. در شکل 6 خط ضخیم‌تر نشان دهنده تغییرات گشتاور پیچشی مورد نیاز برای پرش بین حالت‌های پایدار با استفاده از تابع شکل پیشنهادی در رابطه (5) می‌باشد. نمودار خط‌چین نشان دهنده گشتاور پیچشی به دست آمده از تابع شکل هایلر می‌باشد. مطابق نتایج تجربی استخراج شده از مقاله [12] مقدار گشتاور پیچشی مورد نیاز برای پرش بین حالت‌های پایدار برابر 0.196 Nm است. گشتاور پیچشی محاسبه شده به وسیله تابع شکل پیشنهادی برابر 0.205 Nm است. این مقدار با استفاده از چندجمله‌ای لژاندر مرتبه 4 با تعداد ضرایب لاگرانژ برابر 25 به دست آمده است که نسبت به مقدار تجربی دارای خطایی در حدود 4.3 درصد می‌باشد. مقدار گشتاور پیچشی به دست آمده به وسیله تابع شکل هایلر برابر 0.340 Nm است که نسبت به مقدار تجربی دارای خطایی در حدود 42.3 درصد می‌باشد. نتایج نشان دهنده دقت بسیار بالای تابع شکل پیشنهادی در مقایسه با تابع شکل هایلر می‌باشد.

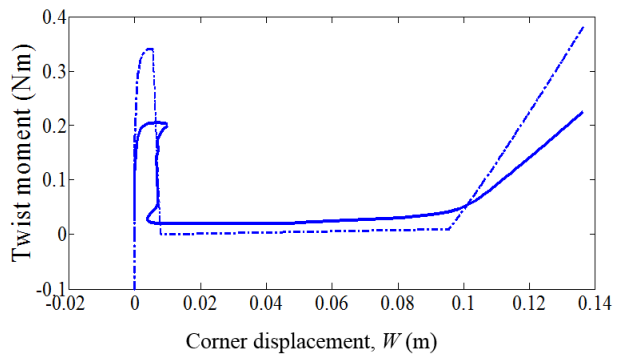


Fig. 6 Torque vs. out of the plane displacement a corner during snap through process

شکل 6 گشتاور پیچشی بر حسب جابه‌جایی خارج از صفحه یک گوشه در طی پرش ناگهانی

- [5] S.D. Guest, S. Pellegrino, Analytical models for bistable cylindrical shells, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, Vol. 462, No. 2067, pp. 839–854, 2006.
- [6] K.A. Seffen, Morphing bistable orthotropic elliptical shallow shells, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, Vol. 463, No. 2077, pp. 67–83, 2007.
- [7] S. Vidoli, Discrete approximation of the Föppl-Von Kármán shell model: from coarse to more refined models, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 50, No. 9, pp. 1241–1252, 2012.
- [8] [A. Pirrera, D. Avitabile, P.M. Weaver, On the thermally induced bistability of composite cylindrical shells for morphing structures, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 49, pp. 685–700, 2013.
- [9] E. Eckstein, A. Pirrera, P.M. Weaver, Multi-mode morphing singinitally curved composite plates, *Composite Structures*, Vol. 109, No. 5, pp. 240–245, 2014.
- [10] M. Moore, S. Ziaei-Rad, A. Firouzian-Nejad, Temperature-curvature relationships in asymmetric angle ply laminates by considering the effects of resin layers and temperature dependency of material properties, *Journal of Composite Materials*. Vol. 48, No. 9, pp. 1071–1089, 2014.
- [11] Stephen Daynes, Paul Weaver, Analysis of unsymmetric CFRP-metal hybrid laminates for use in adaptive structures, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 81, No. 11, pp. 1712–1718, 2010.
- [12] Fuhong Dai, Hao Li, Shanyi Du, Cured shape and snap-through of bistable twisting hybrid [0/90/metal] laminate, *Composite Structures*, Vol. 86, pp. 76–81, 2013.
- [13] H. Li, F. Dai, P.M. Weaver, S. Du, Bistable hybrid symmetric laminates, *Composite Structures*, Vol. 116, pp. 782–792, 2014.
- [14] D. Pan, Fuhong Dai, Hao Li, Piezoelectric energy harvester based on bi-stable hybrid symmetric laminate, *Composite Structures*, Vol. 119, pp. 34–45, 2015.

v_0 جابه‌جایی صفحه میانی در جهت y (m)

w_0 جابه‌جایی صفحه میانی در جهت z (m)

علایم یونانی

α ضریب انبساط حرارتی ($1/^\circ\text{C}$)

ε بردار کرنش کل

ε_0 بردار کرنش صفحه میانی

$\varepsilon_f^{\text{cure}}$ کرنش ناشی از پخت در الیاف

$\varepsilon_m^{\text{cure}}$ کرنش ناشی از پخت در لایه فلز

κ بردار انحنای صفحه میانی ($1/m$)

μ ضریب لغزش

ΔT انرژی پتانسیل کل (J)

Π تغییرات دما ($^\circ\text{C}$)

6- مراجع

- [1] M.W. Hyer, Some observations on the curved shape of thin unsymmetric laminates, *Journal of Composite Materials*. Vol. 15, No. 2, pp. 175 – 194, 1981.
- [2] Hyer MW, The room-temperature shapes of four-layer unsymmetric cross-ply laminates, *Journal of Composite Materials*. Vol. 16, No. 4, pp. 318–40, 1982.
- [3] A. Hamamoto, M. Hyer, Non-linear temperature-curvature relationships for unsymmetric graphite-epoxy laminates, *International Journal of Solids*. Vol. 23, No. 7, pp. 919–935, 1987.
- [4] D.A. Galletly, S.D. Guest, Bistable composite slit tubes. ii. a model, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 462, No. 16, pp. 4503–4516, 2004.