



## کنترل مقاوم پرواز گروهی ماهواره‌ها در قالب ساختار مجازی

بهاره شهبازی<sup>1</sup>، مریم ملکزاده<sup>2\*</sup>، حمید رضا کوفیگر<sup>3</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

3- استادیار، مهندسی برق، دانشگاه اصفهان، اصفهان

\* اصفهان، صندوق پستی، 8174673441، m.malekzadeh@eng.ui.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 15 اردیبهشت 1394

پذیرش: 20 خرداد 1394

ارائه در سایت: 20 تیر 1394

کلیدواژگان:

پرواز گروهی ماهواره‌ها

روش ساختار مجازی

کنترل مقاوم سنتز  $\mu$

نامساوی ماتریسی خطی (LMI)

### چکیده

در این مقاله به طراحی کنترل‌کننده برای گروهی از ماهواره‌ها در قالب الگوریتم مجازی پرداخته می‌شود. در پرواز گروهی ماهواره‌ها به جای استفاده از یک ماهواره از چندین ماهواره کوچکتر برای رسیدن به هدفی یکسان استفاده می‌شود. در آرایش گروهی مجازی موقعیت هر ماهواره، در هر لحظه نسبت به یک نقطه مجازی سنجیده می‌شود. جهت کنترل موقعیت پرواز ماهواره‌ها از دو روش کنترل مقاوم استفاده شده است. روش اول طراحی، کنترل‌کننده سنتز  $\mu$  است که در برابر نویز، اغتشاش و عدم قطعیت‌های پارامتریک مقاوم بوده اما هزینه محاسباتی زیادی دارد. روش دوم طراحی، که به شکل استاندارد مسئله بهینه‌سازی در آمده، از تلفیق کنترل‌کننده پسخوراند حالت و تئوری لیپانوف حاصل می‌شود. این روش به عنوان یک نامساوی ماتریسی خطی، از لحاظ محاسبات عددی بسیار کارآمد و نسبت به برخی از اغتشاش‌ها مقاوم است. با پیاده‌سازی این کنترل‌کننده‌ها بر روی مرکز مجازی، علاوه بر بهبود نتایج و تضمین پایداری، عملکرد مورد نظر نیز حاصل گشت. همچنین در طراحی، محدودیت عملگرهای ماهواره نیز در نظر گرفته شد و نتایج شبیه‌سازی بر روی ماهواره‌ها، توانایی کنترل‌کننده‌های ذکر شده را در ردیابی وضعیت مطلوب با وجود نامعینی در سیستم نشان می‌دهد.

## Robust Control of spacecraft formation flying via virtual structure

Bahareh Shahbazi<sup>1</sup>, Maryam Malekzadeh<sup>2\*</sup>, Hamidreza Koofigar<sup>3</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Isfahan University, Isfahan, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Isfahan University, Isfahan, Iran

3- Department of Electrical Engineering, Isfahan University, Isfahan, Iran

\* P.O.B. 8174673441 Isfahan, Iran, m.malekzadeh@eng.ui.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 05 May 2015

Accepted 10 June 2015

Available Online 11 July 2015

Keywords:

Spacecraft formation flying

Virtual structure method

$\mu$  synthesis

Linear Matrix Inequality (LMI)

### ABSTRACT

In this paper, the spacecraft formation flying using virtual structure algorithm is studied. In spacecraft formation flying, several small spacecraft have been used instead of employing a single one to achieve the same goal. In virtual structure method, the position and orientation of each spacecraft is measured with respect to position and attitude of a virtual node in every moment. Two robust control methods are proposed to control formation. At first, the robust  $\mu$  synthesis control method is used to attenuate the influence of the sensor noises, environment disturbances and parametric uncertainties but it is done with heavy computations. The second method is in the standard form of optimization problem. It is composed of state feedback controller and Lyapunov stability theory. The Linear Matrix Inequality (LMI) controller computations are very efficient and the controller is robust against parametric uncertainties and most of the disturbances. The implementation of control methods on virtual node guarantees robust stability and performance. Concerning actuator constraints, simulation example is provided to show the effectiveness of the proposed control schemes to track the desired attitude and position trajectories despite system uncertainties.

### 1- مقدمه

در پرواز گروهی ماهواره‌ها به جای استفاده از یک ماهواره از چندین ماهواره کوچکتر برای رسیدن به هدفی یکسان استفاده می‌شود. به طور کلی سه راهکار برای آرایش گروهی ماهواره‌ها به نام‌های رهبر/پیرو، رفتاری و ساختار مجازی وجود دارد.

در این مقاله، کنترل آرایش تعدادی ماهواره با روش ساختار مجازی ارائه شده است. در روش ساختار مجازی، ماهواره‌ها خود را با یک مرکز مجازی

تطبیق می‌دهند. مقادیر مطلوب، بر این مرکز مجازی اعمال شده و سپس ماهواره‌ها حرکت خود را به طور نسبی با این نقطه مجازی هماهنگ می‌کنند. این روش مزایایی چون کاهش مصرف سوخت، افزایش عمر ماهواره، ادامه مأموریت در صورت از کار افتادن یکی از اعضا و بالا بردن قدرت مانور را دارد. در ابتدا هدف برای نقطه مجازی تبیین شده سپس موقعیت تک تک

ماهواره‌ها هرلحظه نسبت به نقطه مجازی سنجیده می‌شود. در این روش، آرایش با تغییر موقعیت مرکز مجازی و تغییر آرایش ماهواره‌ها نسبت به مرکز

Please cite this article using:

B. Shahbazi, M. Malekzadeh, H.R. Koofigar, Robust Control of spacecraft formation flying via virtual structure, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 8, pp. 379-385, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

B. Shahbazi, M. Malekzadeh, H.R. Koofigar, Robust Control of spacecraft formation flying via virtual structure, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 8, pp. 379-385, 2015 (In Persian)

در مقاله حاضر، ابتدا دینامیک غیر خطی دسته ماهواره‌ها در ساختار مجازی بیان شده‌است. سپس معادلات به شکل خطی در آمدند. در بخش سوم، روش سنتز  $\mu$  به طور مختصر توضیح داده شده‌است. سپس نحوه پیاده‌سازی سنتز  $\mu$  بر روی مدل خطی آرایش، ارائه شده‌است. در بخش چهارم، قوانین مربوط به نامساوی ماتریسی خطی بررسی شده‌است و با ترکیب طراحی پسخوراند حالت و تابع لیاپانوف به آنالیز این سیستم خطی با پارامترهای ناشناخته پرداخته شده‌است. قیود این مسئله، به شکل نامساوی‌های ماتریسی هستند، دستیابی به جواب، منوط به حل آنها می‌باشد. در نهایت کنترل کننده‌های طراحی شده بر روی مدل مرجع پیاده‌سازی و نتایج شبیه‌سازی ارائه شده‌است.

## 2- دینامیک مجموعه

### 2-1- دستگاه‌های مختصات

در ساختار مجازی شکل 1، با کل آرایش به صورت یک شی تکی برخورد می‌شود. هریک از ماهواره‌ها موقعیت مطلوبی دارند که نماینده‌ی مکان و زاویه مطلوب هر ماهواره می‌باشند.

همانگونه که در شکل 1 مشاهده می‌شود  $C_i$  ها دستگاه مختصات بدنه است و وضعیت  $i$  امین ماهواره را مشخص می‌کند.  $C_f$  دستگاه مرکز ساختار مجازی و  $C_0$  دستگاه مرجع یا اینرسی است.  $C_i^f$  وضعیت مطلوب برای  $i$  امین ماهواره را نمایش می‌دهد.

وضعیت کل آرایش پروازی، با تعریف هندسه نسبی بین نقاط مطلوب بیان می‌گردد. آرایش مطلوب به صورت یک تک شیء تصور می‌شود که موقعیت مکانی  $r_f$ ، سرعت  $v_f$ ، چرخش کواترنیون  $q_f$  و سرعت زاویه‌ای  $\omega_f$  دارد. پس مرجع دستگاه آرایش  $C_f$  در  $r_f$  قرار گرفته که به آن مرکز ساختار مجازی نیز گفته می‌شود. یک چرخش  $q_f$  نیز نسبت به دستگاه  $C_0$  دارد. ماهواره  $i$  نیز می‌تواند با  $r_i$ ،  $v_i$ ،  $q_i$  و  $\omega_i$  (مکان، سرعت، کواترنیون و سرعت زاویه‌ای) نسبت به  $C_0$  یا  $r_{if}$ ،  $v_{if}$ ،  $q_{if}$  و  $\omega_{if}$  نسبت به  $C_f$  بیان شود. همچنین بالانویس  $d$  حالت مطلوب یا هدف را نشان می‌دهد.

با توجه به شکل 2، روند طراحی به این صورت است که سیستم کنترلی ساختار مجازی با توجه به وضعیت مطلوب مرکز مجازی، موقعیت زاویه ای و انتقالی مرکز مجازی را کنترل می‌نماید. سپس بردارهای حالت مرکز مجازی و مقادیر مطلوب ماهواره نسبت به مرکز مجازی به بلوک دینامیک مطلوب وارد می‌شود. این بلوک موقعیت مطلق مطلوب ماهواره را محاسبه می‌نماید. سپس سیستم کنترلی ماهواره با استفاده از بردارهای حالت مطلق مطلوب ماهواره، موقعیت زاویه ای و انتقالی ماهواره را کنترل می‌نماید. در صورت لزوم می‌توان از خروجی دینامیک ماهواره، پسخوراندی به مرکز مجازی وارد نمود که در صورت خروج یک عضو از شکل آرایش، فوراً آن را به حالت مطلوب باز می‌گرداند. این ابتکار در کنترل هرچه بیشتر مجموعه موثر است.

### 2-2- هدف یا دینامیک مطلوب

گفته شد که موقعیت‌های مطلوب هر ماهواره نسبت به ساختار مجازی  $C_f$  بیان می‌شود و چون معادلات در دستگاه مرجع  $C_0$  حل می‌شوند نیازمند یک تبدیل از دستگاه مختصات  $C_f$  به  $C_0$  است. حالت‌های مطلوب  $i$  امین ماهواره از رابطه (1) بدست می‌آیند [3]:

$$\begin{aligned} r_i^d &= r_f + C_{of} r_{if}^d \\ v_i^d &= v_f + C_{of} v_{if}^d + \omega_f \\ &\quad \times (C_{of} r_{if}^d) \\ q_i^d &= q_f q_{if}^d \\ \omega_i^d &= \omega_f + C_{of} \omega_{if}^d \end{aligned} \quad (1)$$

مجازی، به هدف مطلوب می‌رسد. در روش رهبر/پیرو این ماهواره رهبر است که وظیفه نقطه مجازی را به عهده می‌گیرد. با این تفاوت که احتمال از کار افتادن ماهواره رهبر وجود دارد، اما در ساختار مجازی، مرکز مجازی وجود خارجی نداشته بنابراین اغتشاش و اشباع عملگرها برای آن معنایی ندارد. در مراجع [2،1] که با استفاده از کنترل کننده تطبیقی، به هدایت آرایش رهبر/پیرو پرداخته‌اند، این ضعف، یعنی امکان فروپاشی رهبر، به خوبی نمایان است.

تا کنون تحقیقات زیادی در زمینه کنترل دسته‌ای از ماهواره‌ها که با آرایش مجازی گرد هم آمده‌اند، انجام شده‌است. در اغلب موارد تمرکز بر روی کنترل غیر خطی مکان و چرخش نسبی ماهواره‌ها نسبت به یکدیگر است. نویسندگان در مرجع [3] با استفاده از تئوری لیاپانوف و اعمال یک سری ضرایب کنترلی به سیستم غیر خطی پرواز مجازی، برای نخستین بار به همگرایی موقعیت زاویه‌ای و انتقالی ماهواره‌ها به مقدار مطلوب دست یافتند. در مرجع [4] نیز با استفاده از راهبرد کنترلی مذکور، به پیاده‌سازی الگوریتم ساختار مجازی در پرواز گروهی ماهواره‌ها با در نظر گیری نیروی عدم برخورد پرداخته شده‌است. روش استفاده‌شده، نسبت به نامعینی‌ها و اغتشاشات مقاوم نمی‌باشد.

در مراجع [5-7] به موضوع کنترل آرایش مجازی در حضور نامعینی‌ها پرداخته شده‌است. مرجع [5] با استفاده از کنترل کننده مود لغزشی توانسته‌است بر عدم قطعیت‌ها در مدل پرواز گروهی مجازی غلبه نماید. مرجع [6] بوسیله یک کنترل کننده تطبیقی آرایش گروهی مجازی ماهواره‌ها را کنترل نموده‌است. در مرجع [7] برای هدایت آرایش مجازی ماهواره‌ها، ابتدا دینامیک سیستم با روش خطی‌سازی پسخوراند، به صورت خطی در آمده است. با ترکیب کنترل کننده دینامیک وارون با روش پایداری لیاپانوف، مقادیر بردارهای خطا، به صفر همگرا شده‌اند. در طراحی این کنترل کننده اثر نامعینی‌های ساختار یافته در نظر گرفته شده و توانسته سیستم آرایش را نسبت به برخی از عدم قطعیت‌ها مقاوم نماید.

مرجع [8] نیز به کنترل زاویه در ساختار مجازی پرداخته‌است. با اعمال کنترل کننده پیش بین، مدل تا حدی نسبت به نامعینی‌ها و نویزها مقاوم گشته‌است.

از آنجاییکه در عمل، ماهواره نسبت به نامعینی‌ها، اغتشاشات خارجی و نویز حسگرها بسیار حساس می‌باشد، نیاز استفاده از یک روش کنترل مقاوم احساس می‌شود. روش‌های کنترل مقاوم متنوعی برای سیستم‌ها در برابر اختلالات وجود دارد. از آن جمله سنتز  $\mu$  و نامساوی ماتریسی خطی است. مراجع [9-11] به بررسی و تحقیق پیرامون موضوع کنترل مقاوم بر پایه روش سنتز  $\mu$  و روش نامساوی ماتریسی خطی و نیز مقایسه بین این دو پرداخته‌اند.

در مقاله حاضر، هدف طراحی کنترل کننده مقاوم برای حفظ آرایش ماهواره‌ها به صورت یک مجموعه‌ی صلب می‌باشد. روش‌های کنترلی مقاوم، مثلاً روش نامساوی ماتریسی خطی یا روش سنتز  $\mu$  نسبت به اغتشاشات، عدم قطعیت عملگرهای کنترلی یا عدم قطعیت‌های مدل و حتی نویز حسگرها بسیار مقاوم می‌باشد.

در این مقاله، معادلات غیر خطی دینامیک آرایش، با روش‌های معمول تغییر متغیر کوچک و بسط تیلور، خطی‌سازی شده‌اند. سپس دو روش کنترل مقاوم برای پرواز دسته ماهواره‌ها ارائه شده‌است. یکی روش سنتز  $\mu$  می‌باشد، که نسبت به انواع نامعینی‌ها و اغتشاشات خارجی مقاوم است. دیگری روش نامساوی ماتریسی خطی (LMI) بوده که مقاوم و بهینه است. مزیت LMI در پایین بودن هزینه محاسبات عددی مسئله بهینه‌سازی است.

زمانیکه معادلات در قالب فضای حالت نوشته می‌شوند باید نرخ تغییرات سمت چپ قرار داشته باشد. پس از مشتق‌گیری از روابط بالا در دستگاه مرجع، معادلات نسبی به شکل معادله فضای حالت (5) می‌باشد:

$$\begin{aligned} \dot{r}_i^d &= \dot{r}_F + \omega_F \times (C_{of} Z r_{iF}^d) + C_{of} \dot{Z} r_{iF}^d \\ \dot{v}_i^d &= \dot{v}_F + 2\omega_F \times C_{of} \dot{Z} r_{iF}^d + C_{of} \dot{Z} \dot{r}_{iF}^d + \dot{\omega}_F \times (C_{of} Z r_{iF}^d) \\ \dot{q}_i^d &= \dot{q}_F q_{iF}^d \\ \dot{\omega}_i^d &= \dot{\omega}_F \end{aligned} \quad (5)$$

از روابط (5) می‌توان دریافت که اگر سرعت آرایش صفر باشد یعنی  $v_F, \omega_F$  و  $\dot{Z}$  صفر باشند آنگاه سرعت مطلوب خطی و زاویه‌ای هر ماهواره صفر است. بعلاوه مشاهده می‌شود که اگر سرعت و شتاب آرایش صفر شد آنگاه سرعت و شتاب هر ماهواره صفر می‌گردد.

### 2-3- دینامیک ماهواره

دینامیک انتقالی  $i$  امین ماهواره با استفاده از قانون نیوتن در دستگاه مرجع  $C_0$  به صورت  $M_i \dot{v}_i = f_i$  است، که  $f_i$  نیروی کنترلی و  $M_i$  جرم ماهواره است. بدیهی است که با انتگرال‌گیری از شتاب، سرعت و موقعیت بدست خواهند آمد.

دینامیک چرخش  $i$  امین ماهواره با استفاده از قانون اوپلر در دستگاه مرجع به صورت رابطه (6) است [12]:

$$\dot{q}_i = \frac{1}{2} B(\omega) \omega \quad (6)$$

$$J_i \dot{\omega}_i = -\omega_i \times J_i \omega_i + T_i$$

گشتاور کنترلی  $T_i$  و  $J_i$  ممان اینرسی ماهواره است. ماتریس  $B$  با توجه به سرعت زاویه‌ای  $\omega = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$  به صورت رابطه (7) تعریف می‌شود:

$$B(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

### 2-4- دینامیک ساختار مجازی

فرض می‌شود ساختار مجازی به صورت یک جسم صلب است که بر روی مدار دایروی حرکت و در معادلات دینامیک جسم صلب صدق می‌کند. بعلاوه جرم و اینرسی مجازی بر اساس طراحی قابل انتخاب اند پس می‌توان نوشت [13]:

$$\begin{bmatrix} M_F \dot{v}_F \\ \dot{q}_F \\ J_F \dot{\omega}_F \\ \dot{Z}_F \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_F \\ \frac{1}{2} B(\omega_f) q_F \\ -\omega_F \times J_F \omega_F + T_F \\ \dot{Z}_F \\ v \end{bmatrix} \quad (8)$$

ورودی کنترلی  $f_F$  نیروی مجازی،  $M_F$  جرم مجازی،  $T_F$  گشتاور مجازی،  $J_F$  ممان اینرسی مجازی و  $v$  تلاش کنترلی برای انبساط/انقباض می‌باشد.

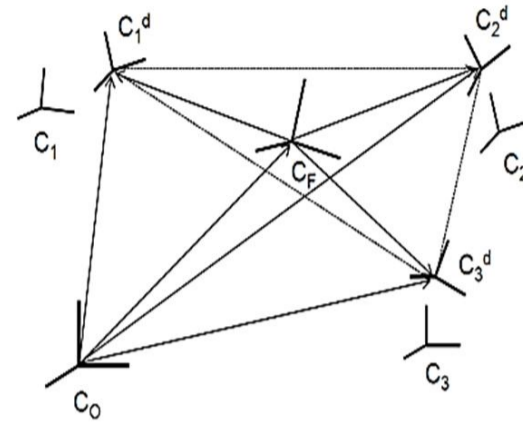
### 2-5- خطی سازی معادلات پرواز گروهی

مدل خطی حرکت ماهواره، با سه سرعت زاویه‌ای و سه مولفه‌ی کواترنیون زوایا بیان می‌شود. خطی سازی سرعت زاویه‌ای بر اساس بسط سری تیلور تا مرتبه‌ی اول است. خطی سازی کواترنیون زاویه به علت وجود چندین حالت انتقال در چرخش کمی متفاوت است. با در نظر گرفتن دو چرخش، اولی از سیستم مختصات مداری (یا مختصات مرکز مجازی) به سیستم مختصات مرجع و دومی از مختصات مرجع به سیستم مختصات ثابت ماهواره است.

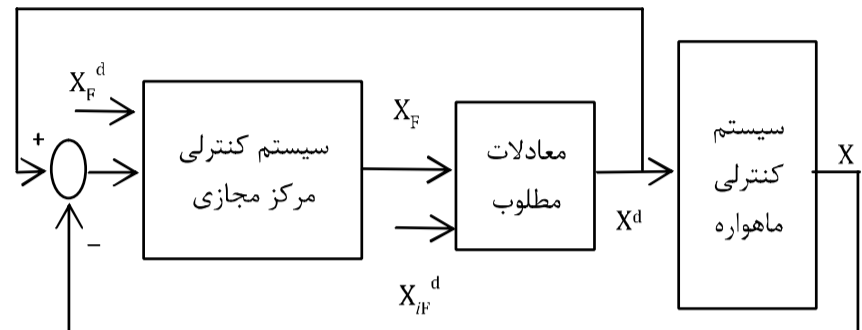
می‌توان  $q$  را به صورت یک تغییر فاصله‌ی کوچک از  $[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$  در نظر گرفت. با توجه به آنکه:

$$q = [e_1 \sin \frac{\delta\theta}{2} \ e_2 \sin \frac{\delta\theta}{2} \ e_3 \sin \frac{\delta\theta}{2} \ \cos \frac{\delta\theta}{2}]^T \quad (9)$$

برای تغییرات کوچک  $\delta\theta$  بردار کواترنیون ماهواره نسبت به چارچوب مرجع به شکل بردار (10) نوشته می‌شود [14]:



شکل 1 دستگاه‌های مختصات مرجع، مجازی و مطلوب ماهواره [3]



شکل 2 شمای کلی سیستم آرایش مجازی

در این رابطه متغیرهای  $r_F, v_F, \omega_F$  و  $q_F$  به ترتیب موقعیت، سرعت خطی، سرعت زاویه‌ای و کواترنیون مرکز مجازی،  $r_{iF}^d, v_{iF}^d, \omega_{iF}^d$  و  $q_{iF}^d$  موقعیت، سرعت خطی، سرعت زاویه‌ای و کواترنیون مطلوب ماهواره  $i$  ام نسبت به مرکز مجازی،  $r_i^d, v_i^d, \omega_i^d$  و  $q_i^d$  موقعیت، سرعت خطی، سرعت زاویه‌ای و کواترنیون مطلوب ماهواره هستند.  $v, \omega$  بردارهای  $3 \times 1$  هستند. ابعاد ماتریس  $C_{of}$   $3 \times 3$ ، همچنین کواترنیون از 4 مولفه تشکیل شده که سه عدد از آنها مستقل اند.

ماتریس چرخش دستگاه مرجع  $C_0$  نسبت به  $C_f$  است. رابطه ریاضی بین  $C_{of}$  و کواترنیون با رابطه (2) بیان می‌شود:

$$C_{of} = C_{of}^T = (2q_F^* - 1)I + 2q_F^* q_F^{*T} + 2q_F^* q_F^* \times \quad (2)$$

پارامتر  $q_F^* \times$  ماتریس ضرب خارجی<sup>1</sup> بردار کواترنیون است.

در معادلات بالا فرض شده تمامی پارامترها متغیر با زمان هستند. با فرض حفظ آرایش در طول مانور، مقادیر مطلوب باید فاصله و زاویه نسبی خود را حفظ کنند، یعنی فواصل نسبی مطلوب ثابت باشند و زاویه‌های نسبی مطلوب، صفر شوند. البته می‌توان شرط ثابت بودن موقعیت را تضعیف کرد تا شکل آرایش منعطف باشد، یعنی چرخش نسبی بین ماهواره‌ها حفظ شود اما ساختار منبسط و منقبض گردد.

تعریف ماتریس انبساط/انقباض با ماتریس قطری:

$$Z = \text{diag}(z_f) = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

مثلا اگر هدف آن باشد که ماهواره در موقعیت مطلوب 300 قرار گیرد، انتخاب ضریب  $z_f$  برابر  $1/5$  به این معنی است که در نهایت روی 450 و اگر کوچکتر از یک و برابر  $0/5$  باشد، بر روی موقعیت 150 می‌ایستد.

برای مانورهای ابتدایی می‌توان تنها  $r_F$  و  $v_F$  را تغییر داد. در مانورهای پیچیده‌تر تمامی پارامترهای بالا تغییر می‌کند. در نتیجه حالات مطلوب برای  $i$  امین ماهواره با در نظر گرفتن ضرایب انبساط/انقباض به معادله (4) تغییر می‌یابد:

$$\begin{aligned} r_i^d &= r_F + C_{of} Z r_{iF}^d \\ v_i^d &= v_F + C_{of} \dot{Z} r_{iF}^d + \omega_F \times (C_{of} Z r_{iF}^d) \\ q_i^d &= q_F q_{iF}^d \\ \omega_i^d &= \omega_F + C_{of} \omega_{iF}^d \end{aligned} \quad (4)$$

1- skew symmetric

توابع ذکر شده در کنترل کننده (19) به شکل رابطه (20) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} V_v &= k_v + k_{fv}E \\ V_z &= k_z + k_{fz}E \end{aligned} \quad (20)$$

تابع  $E$  به صورت رابطه (21) انتخاب می‌شود:

$$E = \|X - X^d\|^2 \quad (21)$$

مشابه مرکز مجازی، برای ماهواره، در رابطه  $M_i \dot{v}_i = f_i$ ، از کنترل کننده زیر استفاده می‌شود:

$$f_i = M_i[\dot{v}_i^d - k_{ri}(r_i - r_i^d) - k_{vi}(v_i - v_i^d)] \quad (22)$$

مقدار مطلوب  $\dot{v}_i^d$  از روابط (5) بدست می‌آید. در مرجع [13] نشان داده شده که در صورتی سیستم پایدار است که  $k_r$ ،  $k_z$ ،  $k_{ri}$ ،  $k_{vi}$  ماتریس‌های مثبت معین متقارن باشند و  $k_p$  و  $k_a$  اسکالرهای غیر منفی باشند.

به دلیل پیچیدگی زیاد فرض می‌شود، ضریب انبساط و انقباض برابر 1 و نرخ تغییرات آن برابر صفر باشد.

### 3-2- طراحی کنترلر مقاوم موقعیت زاویه‌ای

#### 3-2-1- استفاده از روش سنتز $\mu$

در بلوک دیاگرام سیستم حلقه بسته شکل 3، علاوه بر کنترل کننده  $(k)$ ، اجزای مربوط به عدم قطعیت‌ها ( $W_\Delta$  و  $\Delta_G$ )، وزن کارایی ( $W_p$ ) و مدل نامی ماهواره ( $G_{nom}$ ) نیز قرار دارند. این نوع عدم قطعیت مدل شده، عدم قطعیت ضریبی در ورودی خوانده می‌شود. تابع نامعلوم  $\Delta_G$ ، مبین اندازه عدم قطعیت در مدل است و با شرط  $\|\Delta_G\|_\infty < 1$  فرض می‌شود. هدف طراحی کنترل کننده پایدار ساز  $k$  به گونه‌ای است که برای کلیه اختلالات و عدم قطعیت‌های پایدار  $\Delta_G$  با شرط  $\|\Delta_G\|_\infty < 1$ ، سیستم حلقه بسته پایدار باقی بماند. در حوزه سنتز  $\mu$ ، کارایی مقاوم حاصل خواهد شد، اگر و تنها اگر مقدار تکین ساختار یافته  $\mu$  سیستم همراه با عدم قطعیت مربوط به پایداری و کارایی کوچکتر از 1 باشد [15].

یکی از اهمیت‌های روش سنتز  $\mu$ ، توانایی در طراحی کنترل کننده، بسته به خواسته‌های طراح با انتخاب وزن‌ها می‌باشد. انتخاب وزن کارایی یکی از مهمترین قسمت‌های تعریف کنترل کننده است. هدف طراحی آنست که  $|W_p S| \leq 1$ . تابع حساسیت سیستم  $S$  شامل نسبت خطا به میزان مطلوب می‌باشد. یک راه برای انتخاب وزن کارایی اولیه آنست که برای یک کنترل کننده اختیاری تابع حساسیت رسم شود و  $W_p$  چنان انتخاب شود که  $W_p < \frac{1}{\|S\|}$  باشد. همچنین می‌توان وزن کارایی را بسته به زمان نشست و فرا جهش در خواستی چنان انتخاب نمود که  $W_p < \frac{1}{\|S\|}$  باشد، در اینجا ابتدا  $W_p$  تقریبی بدست آمده سپس با آزمون و خطا  $W_p$  مناسب انتخاب می‌شود. در نهایت وزن عملکرد مربوط به کواترینون‌ها و سرعت‌های زاویه‌ای به صورت رابطه (23) انتخاب شده است:

$$\begin{aligned} W_{pq} &= 0.4 \frac{0.1s^2 + 12s + 1}{s^2 + 13s + 0.002} \\ W_{pw} &= 0.4 \frac{0.05s^4 + 2.9s^3 + 105s^2 + 6s + 190}{s^4 + 9.2s^3 + 30.8s^2 + 18.8s + 4} \end{aligned} \quad (23)$$

با در نظر گرفتن عدم قطعیت بر روی ممان اینرسی و با توجه به آنکه تغییرات ممان اینرسی در فرکانس‌های پایین اهمیت دارد، وزن اولیه انتخاب شده است. سپس با رسم دیاگرام بود تابع تبدیل مربوط به مدل واقعی همراه با عدم قطعیت و دیاگرام بود تابع تبدیل مربوط به مدل نامی همراه با وزن عدم قطعیت، با آزمون و خطا میزان تقریبی وزن عدم قطعیت بدست می‌آید. در اینجا ماتریس وزن عدم قطعیت به صورت  $W_\Delta = W_\Delta(s)I_3$  انتخاب می‌شود. ضریب  $W_\Delta$  به شکل رابطه (24) انتخاب می‌شود:

$$W_\Delta = \frac{0.3}{0.1s + 1} \quad (24)$$

$$\delta q \approx \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \delta q \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

در نتیجه معادله‌ی خطی حرکت به شکل رابطه فضای حالت (11) در می‌آید [12]:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta \omega \\ \delta q \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \delta \omega \\ \delta q \end{bmatrix} + BU \quad (11)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -6\omega_0\sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0\sigma_y & 0 & 6\omega_0\sigma_y & 0 \\ 0 & \omega_0\sigma_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & \omega_0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & -\omega_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\sigma_x = \frac{I_y - I_z}{I_x}, \sigma_y = \frac{I_z - I_x}{I_y}, \sigma_z = \frac{I_x - I_y}{I_z} \quad (13)$$

$$U = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = T_i \quad (14)$$

$$B = \begin{bmatrix} I_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I_y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I_z^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

که  $\omega_0$  سرعت زاویه‌ای مداری است و از رابطه  $\omega_0 = \sqrt{\frac{M_e G}{r_0^3}}$  محاسبه می‌شود.  $r_0$  شعاع مدار و  $M_e G = 3.986004e14 \frac{m^3}{s^2}$  می‌باشد. همچنین  $I_x$ ،  $I_y$  و  $I_z$  مولفه‌های ماتریس تانسور اینرسی هستند.

### 3- طراحی کنترل کننده

#### 3-1- طراحی کنترل کننده موقعیت طولی (روش لیاپانوف)

هدف از مانور آرایش آن است که بردار حالت مرکز مجازی  $X_F$  به مقدار مطلوب  $X_F^d$  برسد، بعلاوه تضمین کند که  $X_i$  بردار حالت ماهواره، مقدار مطلوب  $X_i^d$  را دنبال می‌کند.

$$\begin{aligned} t \rightarrow \infty : \|X_F - X_F^d\| &\rightarrow 0 \\ \|X_i - X_i^d\| &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (16)$$

در رابطه بالا بردار  $X_F$  و  $X_i$  به ترتیب بیانگر بردارهای فضای حالت ساختار مجازی و ماهواره  $i$  ام نسبت به دستگاه مرجع  $C_0$  می‌باشند:

$$\begin{aligned} X_F &= [r_F^T, v_F^T, q_F^T, \omega_F^T, z_F^T, \dot{z}_F^T]^T \\ X_i &= [r_i^T, v_i^T, q_i^T, \omega_i^T, z_i^T, \dot{z}_i^T]^T \end{aligned} \quad (17)$$

اگر توابع لیاپانوف با رابطه (18) تعریف شوند [3]:

$$\begin{aligned} V_F &= \frac{1}{2} \tilde{r}_F^T K_F \tilde{r}_F + \frac{1}{2} \|v_F\|^2 + k_q \|\tilde{q}_F\|^2 \\ &+ \frac{1}{2} \tilde{\omega}_F^T J_F \tilde{\omega}_F + \frac{1}{2} \tilde{z}_F^T K_z \tilde{z}_F + \frac{1}{2} \|\dot{z}_F\|^2 \\ V_i &= \frac{1}{2} \tilde{r}_i^T K_{ri} \tilde{r}_i + \frac{1}{2} \|v_i\|^2 + k_{qi} \|\tilde{q}_i\|^2 + \frac{1}{2} \tilde{\omega}_i^T J_i \tilde{\omega}_i \end{aligned} \quad (18)$$

که در آن متغیرهای  $\tilde{r}$ ،  $\tilde{q}$ ،  $\tilde{\omega}$ ،  $\tilde{z}$  نشانگر خطای پارامترها از مقدار مطلوبشان هستند. نشان داده شده است که کنترل کننده تعریف شده در روابط (19) و (22)، منجر به منفی معین شدن نرخ مشتق تابع لیاپانوف شده و سیستم را پایدار می‌کند.

از روابط زیر با تعیین ضرایب و ماتریس‌های آن، تلاش کنترلی نقطه مجازی بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} M_F \dot{v}_F \\ \dot{z}_F \\ \ddot{z}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_r(r_F - r_F^d) - V_v v_F - k_p \|r_F - r_F^d\|^2 \frac{v_F}{\|v_F\|^2} \\ \dot{z}_F \\ -k_z(z_F - z_F^d) - V_z \dot{z}_F - k_p \|z_F - z_F^d\|^2 \frac{\dot{z}_F}{\|\dot{z}_F\|^2} \end{bmatrix} \quad (19)$$





4-1- نتایج شبیه‌سازی به روش سنتز  $\mu$ 

تکرار 5 مرحله فرآیند d-k، به یک کنترل کننده درجه‌ی 21 منجر شد. با کاهش درجه‌ی کنترل کننده، درجه نهایی به 9 کاهش یافت. خروجی سیستم به شکل زوایای اوپلر نمایش داده شده است. در شکل 4 نمودار سه بعدی ردیابی موقعیت ماهواره شماره 1 نمایش داده شده است. شکل‌های 5، 6 و 7 نیز به ترتیب بیانگر خروجی زوایای اوپلر، گشتاور کنترلی و نیز سرعت زوایای ماهواره شماره 1 است. همانگونه که مشاهده می‌شود مقادیر مطلوب به خوبی دنبال شدند. بعلاوه میزان تلاش کنترلی، منطقی می‌باشد.

## 4-2- نتایج شبیه‌سازی به روش LMI

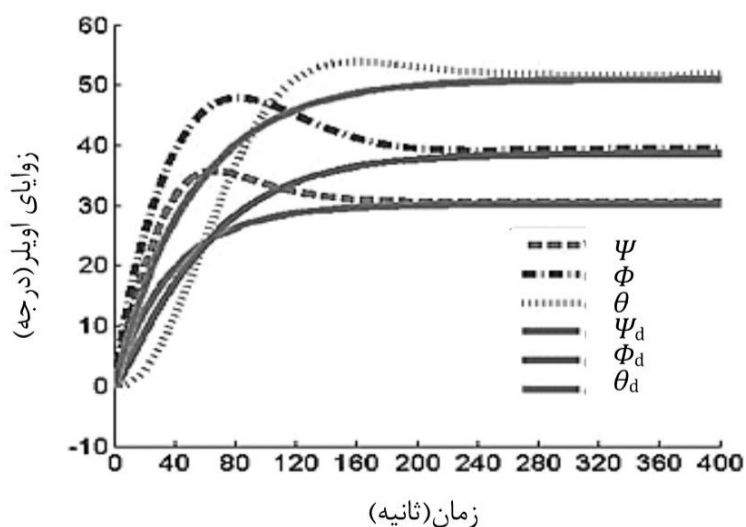
نتایج مقایسه هر دو حالت، با توجه به اشکال، در جدول 1 به طور خلاصه آمده است. شکل‌های 8، 9 و 10 به ترتیب خروجی زوایای اوپلر، گشتاور کنترلی و سرعت زوایای ماهواره 1 در روش LMI را نشان می‌دهد.

جهت مقایسه نتایج روش سنتز  $\mu$ ، یک کنترل کننده به روش LMI، با استفاده از دو جعبه ابزار نرم افزار متلب به نام‌های یالمپ<sup>1</sup> و سدومی<sup>2</sup> ایجاد می‌شود. شبیه‌سازی در شرایطی کاملاً مشابه روش کنترلی سنتز  $\mu$ ، همگرایی به مقادیر مطلوب در زمانی طولانی‌تر را نشان می‌دهد، اما خروجی زوایای اوپلر و سرعت زوایای به خوبی همگرا شدند. شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد، این روش در مقایسه با سنتز  $\mu$  مقاومت کمتری در برابر اغتشاشات از خود نشان می‌دهد. ابتدا انرژی خروجی در روش سنتز  $\mu$  محاسبه شد. این مقدار که برابر  $J=2.9667$  است به عنوان حد بالای انرژی خروجی روش LMI در نظر گرفته شد.

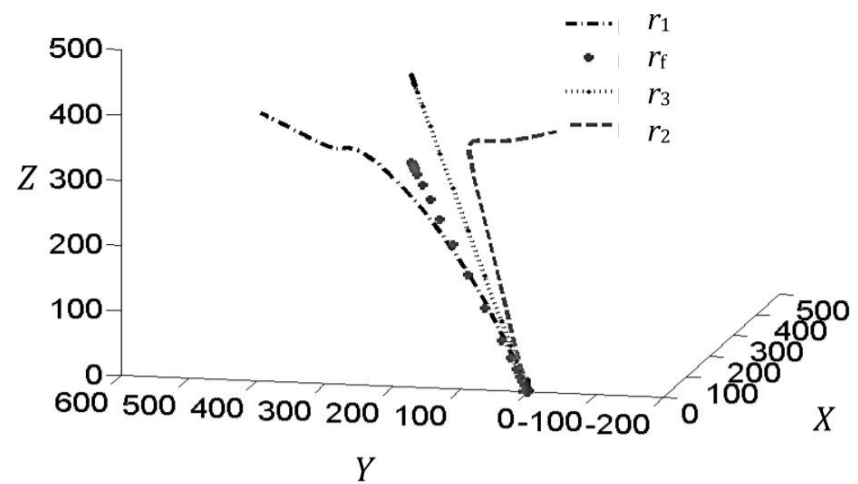
هر کدام از روش‌ها با توجه به ماموریت جایگاه خود را دارد. به عنوان نمونه برای یک ماموریت تداخل سنج<sup>3</sup>، ماهواره‌ها باید تا حد امکان در موقعیت خاصی ثابت باشند.

جدول 1 مقایسه دو روش سنتز  $\mu$  و LMI

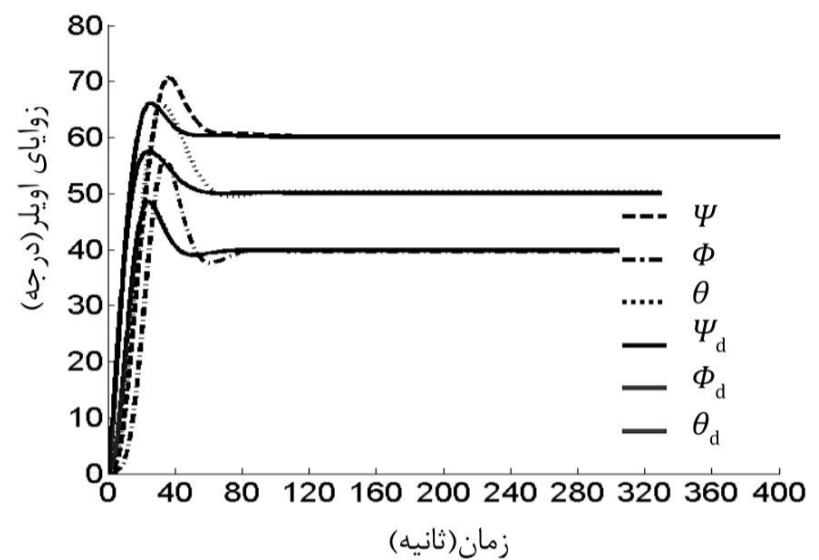
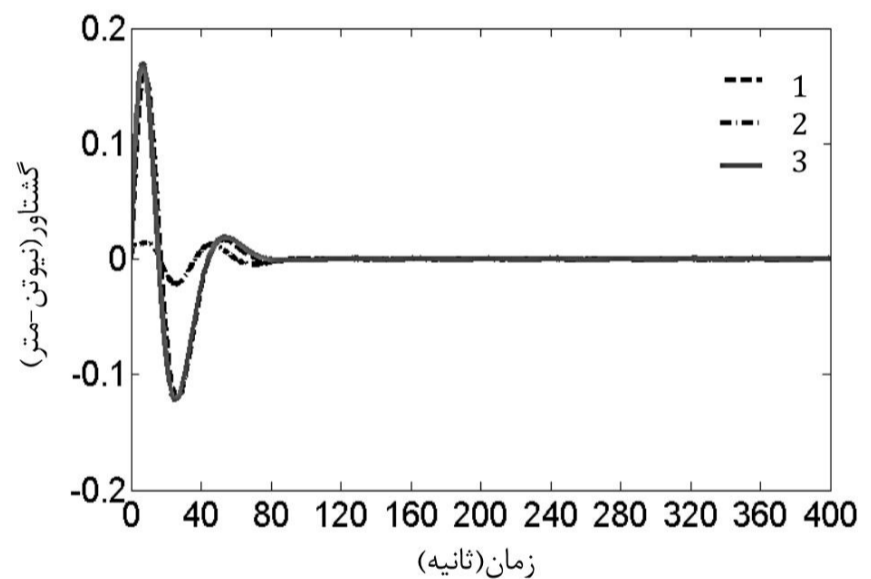
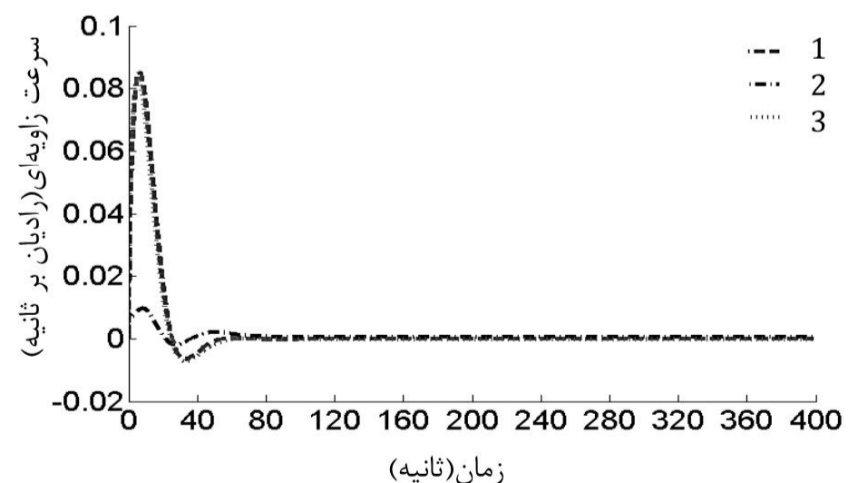
مشخصه‌ها	روش LMI	روش سنتز $\mu$
زمان نشست	تقریباً 280 ثانیه	تقریباً 80 ثانیه
خطای حالت ماندگار	2%	2%
ماکزیمم میزان تلاش کنترلی	(N-m)/2	(N-m)/15
مقاومت در برابر اغتشاش ضربه و پله	دارد	دارد
مقاومت در برابر اغتشاش سینوسی	ندارد	دارد
زمان CPU	حدود 1 دقیقه	حدود 8 دقیقه
حساسیت به عدم قطعیت ممان اینرسی	20%	30%



شکل 8 موقعیت زوایای ماهواره به روش LMI



شکل 4 موقعیت سه بعدی ماهواره یک

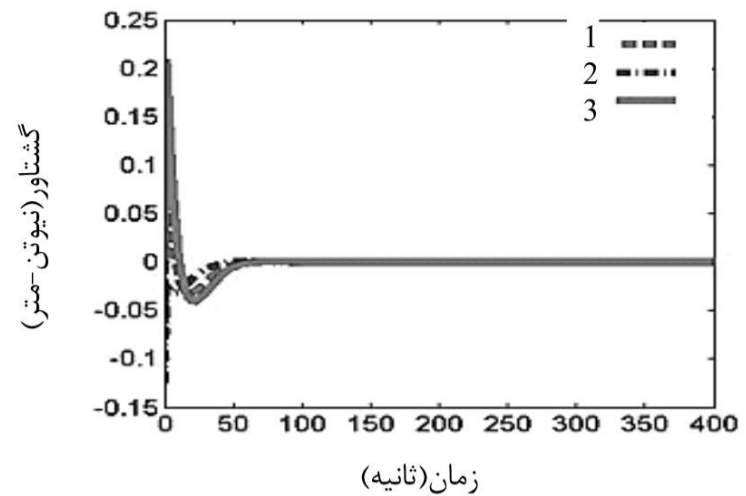
شکل 5 موقعیت زوایای ماهواره، کنترل کننده سنتز  $\mu$ شکل 6 سه مولفه گشتاور کنترلی ماهواره یک به روش سنتز  $\mu$ شکل 7 سه مولفه بردار سرعت زوایای ماهواره یک به روش سنتز  $\mu$ 

عبارت‌های  $v_1$ ،  $v_2$  و  $v_3$  نویزهای گاوسی با مقادیر میانگین  $m_{v1}=m_{v2}=m_{v3}=0$  و واریانس‌های  $\sigma_{v1}=\sigma_{v2}=\sigma_{v3}=0.005$  می‌باشند. شاید مقدار این اغتشاش اندکی بیش از واقعیت به نظر آید اما همه عبارت‌ها (سینوسی، ضربه و ثابت) در آن مفروض گشته است.

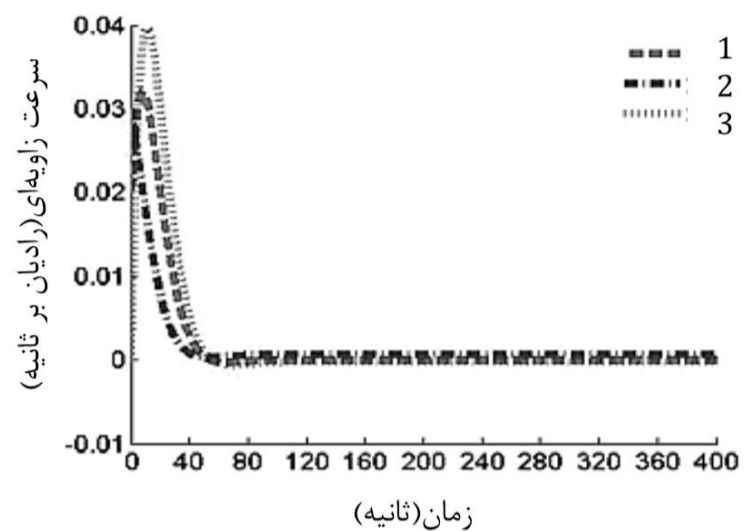
1- YALMIP  
2- SEDUMI  
3- interferometer  
4- PC 1.8GHz CPU, 7.72 GB RAM

## 6- مراجع

- [1] K. W. Lee, I/O Based Variable Structure Model Reference Adaptive Satellite Formation Control in Elliptic Orbits, *50th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, 09 - 12 January 2012.
- [2] K. W. Lee, Variable-Structure Model Reference Adaptive Formation Control of Spacecraft, *JOURNAL OF GUIDANCE, CONTROL, AND DYNAMICS*, Vol. 35, No. 1, January-February 2012.
- [3] W. Ren, R. W. Beard, Virtual structure based spacecraft formation control with formation feedback., *AIAA Guidance, Navigation, and control conference and exhibit*. 2002.
- [4] M. Saberi Tavakkoli, *Implementation of Virtual Structure Approach in MultipleSpacecraft Formation Flight using Visual Sensors*, M. Sc. Thesis, Sharif University of Technology, 2010, (In Persian).
- [5] A. M. Zou, K. D. Kumar, Attitude Coordination Control for a Group of Spacecraft Without Velocity Measurements, *IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY*, VOL. 20, NO. 5, SEPTEMBER 2012.
- [6] H. Yong, L. jiang, L. feng, L. ming, Adaptive cooperative control for satellites formation flying based on virtual structure, *Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference*, July 28-30, 2014.
- [7] C. B. long, L. X. dong, C. Zhen, Attitude Coordination of Deep Space Formation Flying via Virtual Structure, *Proceedings of the 29th Chinese Control Conference*, July 29-31, 2010.
- [8] Z. guo, L. feng, Orbit and attitude control of spacecraft formation flying, *Appl. Math. Mech. -Engl. Ed.*, Vol. 29, No. 1, pp. 43-50, 2008.
- [9] T. Iwamoto, M. Saeki, S. Satoh, Speeding up of Calculation for  $\mu$ -synthesis of Low Order  $H_{\infty}$  Controllers, *SICE Annual Conference*, September 13-18, 2011.
- [10] Atta Oveysi<sup>1</sup>, Mohammad Gudarzi<sup>2</sup>, Robust Active Vibration Control of Smart Structures; a Comparison between Two Approaches:  $\mu$ -Synthesis & LMI-Based Design, *International Journal of Aerospace Sciences*, Vol. 1, No. 5, pp. 116-127, 2012.
- [11] J. Wang, C. Sun, X. Xin, C. Mu, Sufficient Conditions for Exponential Stabilization of Linear Distributed Parameter Systems with Time Delays *Preprints of the 19th World Congress The International Federation of Automatic Control*, August 24-29, 2014.
- [12] M. J. SIDI, *Spacecraft Dynamics and Control*, Israel Aircraft Industries Ltd. And Tel Aviv University, Cambridge University Press 1997.
- [13] W. Ren, R. W. Beard, Distributed Consensus Algorithm in Multi-Vehicle Cooperative Control, *Communications and Control Engineering, Springer*, 2012.
- [14] M. Massari, M. Zamaro, Application of SDRE technique to orbital and attitude control of spacecraft formation flying, *Acta Astronautica*, No. 94, pp. 409-420, 2014.
- [15] J. Doyle, B. Francis, A. T. boyd, *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Co., 1990.
- [16] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics(SIAM), 1994.
- [17] H. Lens, J. Adamy, Observer Based Controller Design for Linear Systems with input Constraints, *Proceeding of the 17th World Congress, The International Federation of Automatic Control, Korea(IFAC)*, July 2008.
- [18] H. Lens a, J. Adamy, D. Domont, A fast nonlinear control method for linear systems with input saturation, *Automatica*, Vol.47, No. 13, pp. 857-860, 2011.
- [19] M. Malekzadeh, Robust Control of Flexible Spacecraft Considering Actuator Dynamic, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 225-230, 2015. (In Persian)



شکل 9 سه مولفه گشتاور کنترلی ماهواره یک در روش LMI



شکل 10 سه مولفه بردار سرعت‌های زاویه‌ای ماهواره یک در روش LMI

همچنین دقت زیاد و عدم حساسیت نسبت به اختلال و اغتشاش از دیگر خصوصیات آن هستند که روش سنتز  $\mu$  برای این منظور مناسب‌تر است. برای ماموریت‌هایی که ماهواره با سرعت نسبتاً زیاد حرکت می‌کند و لازم است به دستورات فوراً پاسخ داده شود، روش LMI به نظر کارآمد می‌آید.

## 5- نتیجه گیری

در این مقاله، مسئله‌ی پرواز دسته‌ای از ماهواره‌ها که یک ساختار صلب مجازی را شکل می‌دهند، بررسی شده‌است. ابتدا معادلات سیستم به شکل خطی درآمد، سپس روش مقاوم سنتز  $\mu$  پیاده‌سازی شده‌است. همچنین یک روش کنترلی مقاوم، به شکل نامساوی ماتریسی خطی (LMI) که از تلفیق تئوری لیاپانوف و پس‌خوراند حالت ایجاد شده، اعمال شده‌است. زمان نشست روش کنترلی سنتز  $\mu$  مقدار کمتری نسبت به روش LMI می‌باشد و تلاش کنترلی کمتری را می‌طلبد. هر دو روش در برابر اغتشاش ضربه و پله مقاوم هستند. اما روش سنتز  $\mu$  نسبت به اغتشاش سینوسی نیز مقاومت خوبی نشان می‌دهد. به طور خلاصه در سنتز  $\mu$  سیستم دارای قوام بیشتری خواهد بود. حسن روش LMI در کاهش هزینه محاسبات و در نتیجه کاهش زمان حل مسئله می‌باشد. بعلاوه در LMI مسئله بهینه‌سازی پارامترهای عملکرد، سهولت بیشتری دارد. چرا که با تبدیل قیود به نامساوی و با استفاده از جعبه ابزارهای متعدد حل نامساوی، قابل دستیابی است.