مجله مهندسی مکانیک مدرس، فوق‌العاده اسفند 1393، دوره 14، شماره 14، ص‌ص 299-308

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بررسی و مقایسه شاخص حرکت‌پذیری ربات‌های صفحه‌ای RRR

وحید رضانیا[1]، سعید ابراهیمی[2*]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد

*یزد، صندوق پستی 741-89195، ebrahimi@yazd.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 27 اردیبهشت 1393

پذیرش: 30 تیر 1393

ارائه در سایت: 26 مهر 1393

کلید واژگان:

ربات‌های صفحه‌ای RRR

شاخص حرکت‌پذیری

ماتریس ژاکوبین

فضای کاری

چکیده

این مقاله به بررسی مهارت و حرکت‌پذیری سه ربات صفحه‌ای 1-RRR، 2-RRR و 3-RRR می‌پردازد. در ابتدا ماتریس ژاکوبین هر سه ربات با اعمال روش همگن‌سازی، به منظور تعیین درایه‌هایی با ابعاد فیزیکی همگن استخراج می‌شود. با استفاده از معکوس عدد وضعیت ماتریس ژاکوبین هر ربات، شاخص وضعیت محلی ربات‌ها در یک زاویه دلخواه پلتفرم تعیین می‌شود. با توجه به تغییرات عدد وضعیت از 1 تا بی‌نهایت، از معکوس آن به عنوان شاخص وضعیت محلی استفاده می‌شود. عدد صفر نشان دهنده تکین بودن ماتریس ژاکوبین و عدم حرکت‌پذیری ربات، و عدد 1 بیان‌کننده بیشترین مهارت ربات به ازای وضعیت مشخص پلتفرم است. در ادامه با تغییر زاویه پلتفرم، تأثیر آن بر روی تغییرات شاخص وضعیت محلی بررسی می‌شود. به ازای زاویه‌ای از پلتفرم که بزرگترین مقدار شاخص وضعیت محلی را نتیجه می‌دهد، مهارت هر سه ربات با یکدیگر مقایسه می‌شود. نتایج نشان‌دهنده مهارت بیشتر ربات-3-RRR نسبت به دو ربات دیگر در زاویه پلتفرم کمتر از 90 درجه است. در زاویه‌های بزرگ‌تر پلتفرم، ربات 1-RRR شاخص وضعیت محلی بزرگتری و در نتیجه مهارت بیشتری دارد. در زاویه‌هایی از پلتفرم که بیشترین شاخص وضعیت محلی اتفاق می‌افتد، توزیع شاخص بار نیز رسم شده است. همچنین شاخص وضعیت محلی برای هر ربات به طور جداگانه در فضای کاری آن ربات و فضای کاری مشترک تعیین می‌شود. نتایج حاصل نشان دهنده این مطلب است که شاخص حرکت‌پذیری هر کدام از سه ربات فوق، تفاوت چندانی در فضاهای کاری ذکر شده ندارد. برای مقایسه بهتر و بهره‌گیری از توزیع حرکت‌پذیری، شاخص وضعیت کلی سه ربات نیز محاسبه می‌شود که نشان دهنده مهارت بیشتر ربات 3-RRR است.

A comparative study on the manipulability index of RRR planar manipulators

Vahid Rezania, Saeed Ebrahimi*

Department of Mechanical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran
* P.O.B. 89195-741 Yazd, Iran, ebrahimi@yazd.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 17 May 2014
Accepted 21 July 2014
Available Online 18 October 2014

Keywords:
RRR Planar Manipulators
Manipulability Index
Jacobian Matrix
Workspace

ABSTRACT

This paper presents a comparative study on the dexterity and manipulability of three planar 1-RRR, 2-RRR and 3-RRR manipulators. After derivation of the Jacobian matrix of three manipulators, they are transformed to a homogeneous form to include components with homogenous physical units. The condition number of each Jacobian matrix is calculated. The local condition index is then defined as the inverse of the condition number. Since the condition number changes in general between 1 and ∞, its inverse is used for definition of the local condition index. A zero value for this index indicates that the Jacobian matrix is singular and consequently, the robot has the worse manipulability. On the other hand, the robot indicates the best manipulability and dexterity when this index is close to one. Furthermore, the effect of changing the platform angle on the local condition index is investigated. The manipulability of the three manipulators is then compared with each manipulator for the platform angle for which the maximum local condition index is resulted. The results show that the 3-RRR manipulator has a better dexterity than other manipulators at the platform angles less than 90 degrees. For the angles greater than 90 degrees, the 1-RRR manipulator has a greater local condition index which indicates more dexterity. Finally, the maximum local condition index is compared for each robot at its own workspace and common workspace of three robots. The results verify that this index has almost identical values for the already mentioned workspaces for each robot. For a better comparison based on the manipulability distribution, the global condition index of these robots is checked. The results confirm the superiority of the 3-RRR robot.

1- مقدمه

حرکت‌پذیری به معنای کنترل‌پذیری سرعت‌های خروجی توسط سرعت‌های ورودی است. شاخص‌های زیادی برای بررسی مهارت و حرکت‌پذیری ربات‌ها بکار می‌روند ولی برای ربات‌های موازی اغلب از شاخص عدد

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

V. Rezania, S. Ebrahimi, A comparative study on the manipulability index of RRR planar manipulators, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 14, No. 14, pp. 299-308, 2015 (In Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.14.9.4]

وضعیت[1] استفاده می‌شود. در توصیف ربات‌های موازی، توزیع حرکت‌پذیری در فضای کاری از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. ربات‌های موازی اغلب دارای نوعی تکینگیه ناپایدار هستند که مشابه آن در ربات‌های سری نیست. وقتی که مکانیزم در این وضعیت تکین یا نزدیک آن قرار می‌گیرد، در جهت‌های خاصی توانایی مقابله با نیروهای خارجی را ندارد [1]. برای اطمینان از قرار نگرفتن ربات در این وضعیت‌های تکین، حرکت‌پذیری ربات بررسی می‌شود.

با پیشرفت ربات‌های با دقت بالا نیاز به ساختارهای سینماتیکی که به صورت ذاتی دارای دقت بالا باشند، دیده شد. لذا این امر باعث شد که شاخص‌هایی برای بیان مهارت ربات‌ها ایجاد شوند [2]. در محاسبات عددی، از عدد وضعیت برای تخمین خطای پاسخ معادلات استفاده می‌شود [3]. با اعمال آن بر ماتریس ژاکوبین، می‌توان دقت سرعت کارترین مجری نهایی و دقت نیروی استاتیکی(نیرو و گشتاور) که به مجری نهایی وارد می‌شود را نشان داد. لذا عدد وضعیت ماتریس ژاکوبین به عنوان یک شاخص دقت سینماتیکی ربات شناخته می‌شود. در [4] از عدد وضعیت ماتریس ژاکوبین به عنوان معیار بهینه‌سازی برای بدست آوردن بعدهای ایده‌آل برای یک ربات استانفورد استفاده می‌شود. همچنین این معیار در [5] برای طراحی یک ربات فضایی سه درجه آزادی و یک مچ کروی سه درجه آزادی به کار می‌رود. حرکت‌پذیری زنجیره‌های سینماتیکی دارای افزونگی[2] در [6] بررسی شده است. حرکت مکانیزم‌های موازی دارای محرک خطی[3]، با به‌کارگیری شاخص حرکت‌پذیری در [7] تحلیل شده است. در این پژوهش بیضی‌گون حرکت-پذیری به صورت سه بعدی نشان داده می‌شود.

در [8] به تجزیه و تحلیل ماتریس حرکت‌پذیری بر پایه بیضی گون‌حرکت‌پذیری برای ربات‌های صفحه‌ای پرداخته شده است. نتیجه حاصل از این تحقیق نشانگر ثابت ماندن دترمینان ماتریس حرکت‌پذیری ربات‌های افزونه با تغییر زاویه اول است. همچنین در [9] رابطه بین افزونگی و حرکت‌پذیری برای پلتفرم استوارت بحث شده است.

شاخص‌های مهارت مورد استفاده برای ربات‌های صفحه‌ای و فضایی در [2] مورد بررسی قرار گرفته است. این شاخص‌ها بر پایه‌ی عدد وضعیت ماتریس ژاکوبین هستند. همچنین این مقاله دو راه حل ارایه کرده است که مشکل استفاده از عدد وضعیت برای حالتی که واحد مولفه‌های بردار سرعت یکسان نیستند را از بین می‌برد. در [10] ژاکوبین معکوس یک ربات 6-UPS با استفاده از مختصات سه نقطه مجری نهایی بدست می‌آید. در این حالت سینماتیک معکوس دارای 9 معادله و تنها 6 متغیر مفصل است. ماتریس ژاکوبین معکوس بدست آمده دارای واحد یکسان است لذا به مینیمم‌سازی عدد وضعیت پرداخته است. در [11] با استفاده از عدد وضعیت، فضای کاری یک ربات سه درجه آزادی را بهینه‌سازی کرده است. در این مقاله تأثیر عدد وضعیت فضای کاریبر طراحی ربات نشان داده شده است.

معکوس عدد وضعیت به عنوان شاخص وضعیت محلی[4] (LCI) در نظر گرفته می‌شود. این شاخص تنها مشخصه موضعی ربات را مشخص می‌کند. برای مشخص کردن رفتار کلی یک ربات از شاخص وضعیت کلی[5] (GCI) استفاده می‌شود. در [12] یک مطالعه مقایسه‌ای بین شاخص‌های عملکرد محلی و کلی برای ربات‌های مقدماتی[6] انجام شده است. با استفاده از این شاخص‌ها، فضای کاری ربات‌ها بهینه می‌شود. با استفاده از الگوریتم ژنتیک و شاخص وضعیت کلی در [13] به بهینه‌سازی فضای وضعیت ربات موازی صفحه‌ای 3-RRR پرداخته است. این پژوهش سه معیار طراحی مختلف را در نظر گرفته است که عبارتند از بهینه‌سازی فضای کاری مکانیزم برای رسیدن به یک فضای کاری مناسب، ماکزیمم کردن مهارت و از بین بردن تکین‌ها در فضای کاری مکانیزم. در [14] به مقایسه مهارت هفت ربات موازی صفحه‌ای پرداخته است که دارای سه درجه آزادی همراه با دو زنجیره سینماتیکی هستند. روش به کار رفته در این مقاله، الگوریتم ژنتیک است. طراحی این ربات‌ها با دو هدف افزایش فضای کاری و کاهش احتمال تداخل صورت گرفته است.

در [15] یک مطالعه مقایسه‌ای بین دو ربات دو درجه آزادی صفحه‌ای صورت گرفته است. دو ربات دو درجه آزادی 3-RRR و 2-RRR از نظر عملکرد بار[7]، سفتی و وضعیت[8] با هم مقایسه شده‌اند که هر دو بدون پلتفورم می-باشند لذا دو درجه آزادی محسوب می‌شوند. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که مکانیزم‌های دو درجه آزادی 3-RRR و 2-RRR دارای عملکرد وضعیت[9] مشابه هستند و مکانیزم 3-RRR عملکرد سفتی و بار بهتری نسبت به 2-RRR دارد. دینامیک ربات‌های سه درجه آزادی صفحه‌ای 2-RRR، 3-RRR و 4-RRR در [16] بررسی و مقایسه شده است. برای مقایسه عملکرد دینامیکی از یک شاخص عملکرد دینامیکی استفاده می‌شود. در این پژوهش همچنین نشان داده شده است که ربات موازی 2-RRR بدترین عملکرد دینامیکی را دارد و همچنین در برخی از نواحی فضای کاری، عملکرد دینامیکی 4-RRR بهتر از 3-RRR است.

از شاخص‌های دیگر عملکرد می‌توان به تحقیق انجام شده در [17] اشاره کرد که با بسط عدد وضعیت همگن ماتریس ژاکوبین، به بهینه‌سازی طراحی سینماتیکی ربات می‌پردازد. اخیراً در [18] یک شاخص عملکرد بیان شده است که شامل هر دو مولفه‌ی انتقالی و چرخشی، به شرط یکسان بودن واحد فیزیکی، است. این شاخص با مطالعه مفهوم توان و خاصیت یکسان بودن واحد آن در چرخش و انتقال، بدست می‌آید. عملکرد ربات‌های موازی وابسته به ابعاد و کاربردهای آن‌ها است [19] لذا روش‌هایی که برای بهبود مهارت این ربات‌ها به کار می‌روند، اغلب بهینه کردن طول لینک‌ها و پلتفرم یا بهینه کردن فضای کاری برای دست‌یابی به ماکزیمم مهارت است. برای مشاهده مقالات پرداخته شده به این موضوع می‌توان به [19] رجوع کرد.

ربات‌های موازی صفحه‌ای از جمله ربات موازی 3-RRR به دلیل راحتی ساخت و کاربردهای زیاد آن مورد توجه بسیاری از تحقیقات قرار گرفته‌اند. لذا بررسی مهارت و حرکت‌پذیری آن‌ها امری مهم است. به همین دلیل مقاله پیش رو مهارت و حرکت‌پذیری ربات‌های موازی سه درجه آزادی 2-RRR و 3-RRR را بررسی می‌کند.

تفاوت مقاله پیش رو با مقاله‌های قبلی بررسی مهارت سه ربات سه درجه آزادی 1-RRR، 2-RRR و 3-RRR برای نخستین بار با هم است. به عبارت دیگر، تأثیر افزوده شدن لینک بر روی مهارت بررسی می‌شود. همچنین اولین بار است که به طور همزمان از شاخص‌های وضعیت کلی و محلی و شاخص بار استفاده می‌شود و برای استفاده از عدد وضعیت ماتریس ژاکوبین همگن می‌شود. در مقالات قبلی برای نمونه مقاله [15] مهارت ربات دو درجه آزادی 2-RRR و 3-RRR بدون در نظر گرفتن پلتفرم بررسی شده است. مزیت کار انجام شده در مقاله پیش رو نسبت به مقاله [15]، بررسی حرکت‌پذیری در

1- Condition Number
2- Redundant Serial Kinematic Chains – Artificialmanipulators
3- Linear-Actuated Parallel Mechanisms
4- Local Conditioning Index
5- Global Conditioning Index
6- Fundamental Manipulators
7- Payload
8- Conditioning
9- Condition Performance

فضای کاری هر ربات و فضای کاری مشترک سه ربات با در نظر گرفتن پلتفرم ربات است. همچنین نمودارهای رسم شده در [15] به صورت کانتوری است که در مقاله پیش رو برای نمایش بهتر از نمودارهای سه بعدی استفاده شده است. در [13] برای بهینه کردن پلتفرم ربات 3-RRR تنها از شاخص وضعیت کلی استفاده می‌کند و شاخص وضعیت محلی بکار نمی‌رود.

به دلیل سه بعدی بودن ربات‌ها برای رسم نمودارهای شاخص وضعیت محلی یکی از درجات آزادی (ϕ) ثابت در نظر گرفته شده و سپس تأثیر آن یر روی ماکزیمم شاخص وضعیت محلی بررسی می‌شود. با بررسی دقیق‌تر مقادیر، زاویه ϕ که ماکزیمم شاخص وضعیت محلی در آن اتفاق می‌افتد محاسبه می‌شود. برای مقایسه بهتر توزیع شاخص بار در این زاویه‌ها به صورت سه بعدی رسم می‌شود. در ابتدا هندسه، معادلات لازم و ماتریس ژاکوبین ربات‌ها استخراج می‌شوند. بعد از آن شاخص‌های عملکرد و کاربردهای آن‌ها بیان خواهد شد. سپس با استفاده از این شاخص‌ها مهارت سه ربات با هم مقایسه می‌شود.

2- شاخص‌های عملکرد

در این قسمت شاخص‌های عملکرد که به بررسی مهارت ربات می‌پردازند، ذکر شده است. از چنین شاخص‌هایی مدت زمان زیادی برای ربات‌های سری استفاده می‌شود. برای ربات‌های موازی اغلب از شاخص عدد وضعیت استفاده می‌شود. سیستم خطی رابطه (1) با ماتریس ضرایب معلوم A، بردار مجهولات X و بردار سمت راست B را در نظر بگیرید [20]:

$$AX = B \tag{1}$$

با گرفتن نرم از طرفین، رابطه (2) بدست می‌آید:

$$||AX|| = ||B|| \leq ||A||||X|| \tag{2}$$

با استفاده از رابطه (2)، رابطه (3) بیان می‌شود:

$$||A^{-1}\Delta B|| = ||\Delta X|| \leq ||A^{-1}||||\Delta B|| \tag{3}$$

با تقسیم معادله بالا بر $||X||$ و استفاده از معادله (2) رابطه (4) نوشته شده است:

$$\frac{||\Delta X||}{||X||} \leq \frac{||A^{-1}||||\Delta B||}{||X||} \leq \frac{||A||||A^{-1}||||\Delta B||}{||B||} \tag{4}$$

این رابطه نشان می‌دهد که چگونه یک خطای نسبی در B ضرب شده و باعث ایجاد یک خطای نسبی در X شده است. فاکتور تقویت خطا[1] که به عنوان عدد وضعیت k شناخته می‌شود به صورت معادله (5) بیان شده است:

$$k(A) = ||A||||A^{-1}|| \tag{5}$$

با درنظر گرفتن ماتریس ژاکوبین ربات به جای ماتریس A (با توجه به رابطه (11))، می‌توان مقدار عدد وضعیت ربات را تعیین کرد. کوچکترین مقدار عدد وضعیت برابر 1 است و معکوس آن در بازه [1و0] تغییر می‌کند که عدد صفر بیان‌کننده وضعیت تکین ماتریس ژاکوبین معکوس است. در این مقاله برای نمایش بهتر، از معکوس عدد وضعیت به عنوان شاخص وضعیت محلی استفاده می‌شود.

یکی از نقاط ضعف مهم عدد وضعیت برای یک ربات که حداقل یک درجه آزادی انتقالی و یک درجه آزادی دورانی دارد، ناهمگن بودن ماتریس ژاکوبین معکوس است. برای نمونه درایه‌های ماتریس ژاکوبین انتقال یک ربات 6-UPS بی بعد هستند در صورتی که ماتریس ژاکوبین دوران درایه‌هایی با واحد طول دارد که نشان می‌دهد عدد وضعیت معنای فیزیکی شفافی ندارد. بنابراین برای بهینه‌سازی ربات موازی توسط این شاخص، باید دقت کرد. راه‌حل‌های مختلفی برای رفع این مشکل پیشنهاد شده است که برای نمونه می‌توان [21] را نام برد. در تحقیق ذکر شده پیشنهاد داده شده است که بخش‌های دورانی بر یک طول که طول مشخصه گویند، تقسیم شوند. این طول به گونه‌ای مشخص می‌شود که در یک وضعیت مشخص، طول عضوها عدد وضعیت را مینیمم سازند. همچنین همان طور که در قبل ذکر شد در [2] دو راه‌حل برای رفع این مشکل آمده است.

معکوس عدد وضعیت یعنی $1/\lambda$همان همان طور که ذکر شد به عنوان شاخص وضعیت محلی شناخته می‌شود و برای محاسبه‌ی دقت کنترل، مهارت و همسانی ربات به‌کار می‌رود [12]. برای بیان وضعیت کلی یک ربات از شاخص وضعیت کلی (GCI) استفاده می‌شود. این شاخص توزیع عدد وضعیت ماتریس ژاکوبین در فضای کاری ربات را نشان می‌دهد که از رابطه (6) بدست می‌آید:

$$\eta = \frac{A}{B} \tag{6}$$

در رابطه (6) می‌توان روابط (7) را نوشت:

$$A = \int_W (\frac{1}{\lambda}) dW \quad , \quad B = \int_W dW \tag{7}$$

λ عدد وضعیت در یک نقطه مشخص فضای کاری W است [22]. برای ربات‌های صفحه‌ای سه درجه آزادی که فضای کاری آن‌ها در صفحه $(x, y, \emptyset)$ بیان می‌شوند می‌توان رابطه (8) را نوشت:

$$A = \int_\phi \int_y \int_x \left(\frac{1}{\lambda}\right) dx dy d\phi \quad , B = \int_\phi \int_y \int_x dx dy d\phi \tag{8}$$

بازه تغییرات GCI به صورت رابطه (9) است:

$$0 < \eta < 1 \tag{9}$$

یکی دیگر از شاخص‌های مهم عملکرد ربات‌های موازی ظرفیت بار است. این شاخص نشان می‌دهد که ربات قدرت تحمل نیروی خارجی وارد بر پلتفرم محرک را دارد یا نه. اگر $\theta\delta$ جابجایی مجازی مفاصل و δq جابجایی مجازی پلتفرم باشد، قانون کار مجازی به صورت رابطه (10) بیان می‌شود [14]:

$$\tau^{\mathrm{T}} \theta\delta = F^{\mathrm{T}} \delta q \tag{10}$$

طبق تعریف ماتریس ژاکوبین رابطه بین این جابجایی‌های مجازی به صورت رابطه (11) است:

$$\delta q = J\theta\delta \tag{11}$$

با واحد در نظر گرفتن بردار F و استفاده از معادله لاگرانژ، اکسترمم نرم بردار τ یعنی رابطه (12) بدست می‌آید:

$$||\tau_{\min}|| = \sqrt{\min(|\lambda_{\mathrm{Fi}}|)} \tag{12}$$

λ_{Fi} مقادیر مقادیر ویژه ماتریس $J^{-1}J^{-\mathrm{T}}$ هستند. $||\tau_{\min}||$که که به شاخص بار معروف است در واقع مینیمم نیروی خارجی است که ربات می‌تواند در مقابل بردار نیروی ورودی واحد تحمل کند. بیشتر بودن این شاخص بیان کننده ظرفیت بار بالای ربات است.

3- هندسه و ماتریس ژاکوبین ربات 1-RRR

ربات صفحه‌ای سه درجه آزادی 1-RRR به صورت شکل 1 نشان داده می‌شود. برای استفاده از شاخص وضعیت محلی ابتدا ماتریس ژاکوبین استخراج می‌شود. مکان نقطه O' مجری نهایی در محور مختصات ثابت توسط x و y

1- Error Amplification Factor

مشخص می‌شود و ϕ نشان دهنده زاویه بین ضلع l_3 با محور x است. متغیرهای مفصل نیز به صورت $\Theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^{\mathrm{T}}$ تعریف می‌شوند. بردارهای سرعت عملگر نهایی و سرعت مفاصل به ترتیب توسط بردارهای $\dot{q} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{\emptyset}]^{\mathrm{T}}$ و $\dot{\Theta} = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3]^{\mathrm{T}}$ نمایش داده می‌شوند. رابطه بین سرعت‌های فوق به صورت رابطه (13) بیان می‌شود:

$$\dot{q} = J\dot{\Theta} \tag{13}$$

که ماتریس ژاکوبین J به صورت رابطه (14) است:

$$J = \begin{bmatrix} -(l_1\sin\theta_1 + l_2\sin(\theta_1+\theta_2) + l\sin\emptyset) & -(l_2\sin(\theta_1+\theta_2) + l\sin\emptyset) & -l\sin\emptyset \\ l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2) + l\cos\emptyset & l_2\cos(\theta_1+\theta_2) + l\cos\emptyset & l\cos\emptyset \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

l_1، l_2 و l_3 به ترتیب طول لینک‌های اول، دوم و طول یک ضلع پلتفرم ربات است. به دلیل اینکه بردار سرعت عملگر نهایی شامل مؤلفه‌هایی با ماهیت متفاوت یعنی شامل دو مؤلفه سرعت خطی و یک مؤلفه سرعت زاویه‌ای است، لذا برای استفاده از شاخص وضعیت محلی مورد استفاده در این مقاله (معکوس عدد وضعیت)، این متفاوت بودن واحدها مشکل ساز می‌شود. بنابراین مشابه روش ارایه شده در [2] می‌توان ماتریس ژاکوبین را همگن ساخت.

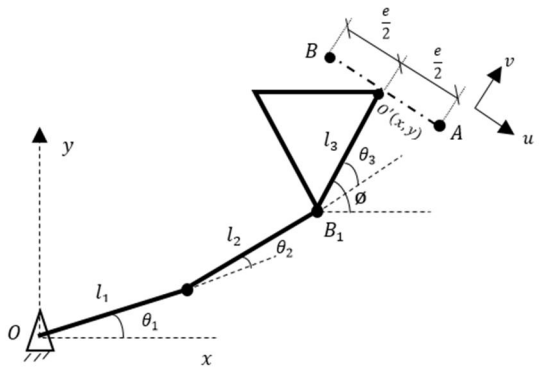
یک راه حل برای رفع مشکل همگن نبودن ماتریس ژاکوبین، بیان سرعت مجری نهایی به صورت متفاوت با قبل است. بدین صورت که به جای استفاده از مؤلفه‌های سرعت $\dot{q} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{\emptyset}]^{\mathrm{T}}$ می‌توان از سرعت دو نقطه روی مجری نهایی استفاده کرد [2]. دو نقطه A و B مطابق شکل 1 در امتداد عمود بر عضو l_3 در نظر گرفته می‌شوند. دستگاه مختصات $u-v$ در نقطه‌ی O' به صورتی که جهت محور u در جهت بردار BA باشد قرار داده می‌شود. بردار سرعت جدید مجری نهایی به صورت رابطه (15) تعریف می‌شود:

$$\dot{q}' = [v_{\mathrm{au}}, v_{\mathrm{av}}, v_{\mathrm{bv}}]^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

که v_{au} و v_{av} به ترتیب سرعت‌های نقطه A در جهت u و v و v_{bv} سرعت نقطه B در جهت v هستند. برای بدست آوردن ماتریس ژاکوبین جدید که رابطه بین سرعت مفاصل $\dot{\Theta}$ و سرعت مجری نهایی $\dot{q}'$ را بیان می‌کند، باید ابتدا رابطه بین $\dot{q}$ و $\dot{q}'$ را بدست آورد. این رابطه به صورت (16) بیان می‌شود:

$$\dot{q}' = R_1\dot{q} \tag{16}$$

که ماتریس R_1 به صورت رابطه (17) بدست می‌آید:



شکل 1 ربات سری 1-RRR

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & -y'_{\mathrm{a}} \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & x'_{\mathrm{a}} \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & x'_{\mathrm{b}} \end{bmatrix} \tag{17}$$

زاویه ψ زاویه بین محورهای مختصات $x-y$ و $u-v$ است. x'_a و y'_a بیان کننده مکان نقطه A و x'_b مکان نقطه B در جهت u در محور مختصات $u-v$ می‌باشند.

مطابق شکل 1 دو نقطه A و B به فاصله ثابت $e/2$ از نقطه O' قرار دارند و همچنین رابطه بین زاویه‌ها به صورت رابطه (18) بدست می‌آید:

$$\emptyset = \psi + \frac{\pi}{2} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \tag{18}$$

با استفاده از معادله (17) و (18) ماتریس R_1 بر حسب ϕ و e به صورت رابطه (19) نوشته می‌شود [2]:

$$R_1 = \begin{bmatrix} \sin(\emptyset) & -\cos(\emptyset) & 0 \\ \cos(\emptyset) & \sin(\emptyset) & e/2 \\ \cos(\emptyset) & \sin(\emptyset) & -e/2 \end{bmatrix} \tag{19}$$

و در نهایت ماتریس ژاکوبین جدید به صورت رابطه (20) استخراج می‌شود:

$$J' = R_1 J \tag{20}$$

ماتریس ژاکوبین بدست آمده در رابطه (20) بر حسب پارامترهای θ_1، θ_2، θ_3، ϕ و e است که در اینجا $e/2 = 2$ سانتی‌متر فرض شده است. برای استفاده از شاخص وضعیت محلی و مقایسه سه ربات، ماتریس ژاکوبین J' را می‌توان بر حسب پارامترهای x ، y و ϕ بدست آورد. با بکارگیری سینماتیک معکوس ربات مورد نظر می‌توان این کار را انجام داد. از سینماتیک معکوس ربات می‌توان نوشت:

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-d^2}}{d}\right) \tag{21}$$

که d به صورت رابطه (22) تعریف می‌شود:

$$d = \frac{(x - l_3\cos(\emptyset))^2 + (y - l_3\sin(\emptyset))^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \tag{22}$$

همچنین رابطه (23) برقرار است:

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{y - l_3\sin(\emptyset)}{x - l_3\cos(\emptyset)}\right) - \arctan\left(\frac{l_2\sin(\theta_2)}{l_1 + l_2\cos(\theta_2)}\right) \tag{23}$$

به دلیل مربعی بودن ماتریس ژاکوبین حاصله (3×3)، برای محاسبه عدد وضعیت می‌توان از معادله (5) استفاده کرد. بدین صورت که مشابه آنچه در قبل ذکر شد ابتدا ماتریس ژاکوبین J' بر حسب پارامترهای x ، y و ϕ بدست می‌آید سپس با در نظر گرفتن آن به عنوان ماتریس A به کار رفته در معادله (5) عدد وضعیت محاسبه می‌شود.

پلتفورم ربات یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول 15 سانتی‌متر فرض شده است. طول لینک‌های اول و دوم نیز 15 سانتی‌متر در نظر گرفته شده است. شاخص وضعیت محلی ربات 1-RRR به ازای یک زاویه دلخواه ϕ برای نمونه 10 درجه و بازه [20و20-] سانتی‌متر تغییرات x و y در شکل 2 رسم شده است که ماکزیمم مقدار آن برابر 0/2595 است.

4- هندسه و ماتریس ژاکوبین ربات 2-RRR

ربات 2-RRR به صورت شکل 3 در نظر گرفته می‌شود. دستگاه مختصات ثابت $x-y$ در نقطه O قرار دارد و دستگاه مختصات محرک $x'-y'$ در نقطه‌ی B_1 پلتفرم به گونه‌ای در نظر گرفته شده است که محور x' در امتداد ضلع B_1B_2 قرار گیرد. مکان و جهت دستگاه مختصات محرک در دستگاه ثابت به صورت $q = [x, y, \emptyset]^{\mathrm{T}}$ است. متغیرهای مفصل نیز به صورت $\Theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^{\mathrm{T}}$ تعریف می‌شوند. فاصله بین دو مفصل پایه a و طول هر

ضلع پلتفرم b در نظر گرفته شده است.

مشابه قبل رابطه بین سرعت مفصل‌ها و سرعت مجری نهایی توسط معادله (13) بیان می‌شود که تعاریف این سرعت‌ها همانند قسمت قبل است. با توجه به [23] ماتریس ژاکوبین J برای ربات 2-RRR به صورت رابطه (24) بدست می‌آید:

$$J = \begin{bmatrix} -(l\sin\theta_1 + l_2\sin(\theta_1+\theta_2)) & -l_2\sin(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \quad \dots & l_2\cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ -f_2/f_1 & -f_3/f_1 & -f_4/f_1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

پارامترهای f_1 ، f_2 ، f_3 و f_4 توسط روابط (25) تا(28) تعریف شده‌اند:

$$f_1 = 2b(l_1\sin\theta_1 + l_2\sin(\theta_1+\theta_2) - l_3\sin\theta_3)\cos\emptyset - 2b(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2) - l_3\cos\theta_3 - a)\sin\emptyset \tag{25}$$

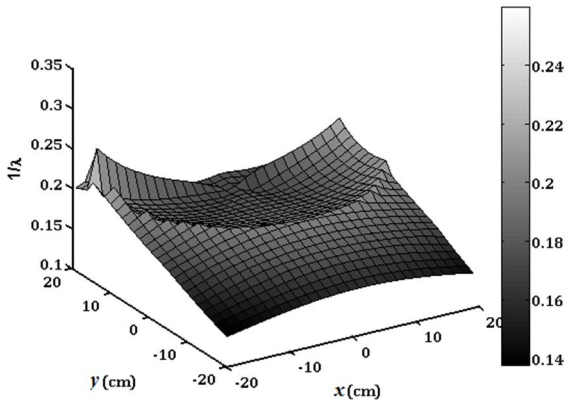
$$\begin{aligned} f_2 = {} & 2b((l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2))\sin\emptyset - (l_1\sin\theta_1 \\ & + l_2\sin(\theta_1+\theta_2))\cos\emptyset) \\ & + 2l_3((l_1\sin\theta_1 \\ & + l_2\sin(\theta_1+\theta_2))\cos\theta_3 - ((l_1\cos\theta_1 \\ & + l_2\cos(\theta_1+\theta_2))\sin\theta_3) \\ & + 2a(l_1\sin\theta_1 + l_2\sin(\theta_1+\theta_2)) \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} f_3 = {} & 2l_2(b(l_1\cos(\theta_1+\theta_2)\sin\emptyset - \sin(\theta_1+\theta_2)\cos\emptyset) \\ & - l_1\sin\theta_2 + l_3(\sin(\theta_1+\theta_2)\cos\theta_3 \\ & - \cos(\theta_1+\theta_2)\sin\theta_3) + a\sin(\theta_1+\theta_2)) \end{aligned} \tag{27}$$

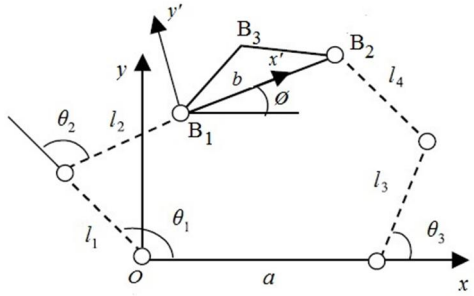
$$\begin{aligned} f_4 = {} & 2l_3(b(\sin\theta_3\cos\emptyset - \cos\theta_3\sin\emptyset) \\ & + l_1(\cos\theta_1\sin\theta_3 - \cos\theta_3\sin\theta_1) \\ & + l_2(\cos(\theta_1+\theta_2)\sin\theta_3 \\ & - \sin(\theta_1+\theta_2)\cos\theta_3) - a\sin\theta_3) \end{aligned} \tag{28}$$

l_1، l_2، l_3 و l_4 طول ثابت لینک‌ها هستند که در شکل 3 مشخص شده است.

به دلیل یکسان بودن بردارهای سرعت ربات‌های 2-RRR و 1-RRR، ماتریس ژاکوبین بدست آمده در معادله (24) ناهمگن می‌شود. لذا با استفاده



شکل 2 شاخص وضعیت محلی ربات 1-RRR به ازای $\phi = 10^\circ$



شکل 3 ربات موازی صفحه‌ای 2-RRR ([22])

از روش ارایه شده در [2] دو نقطه B_1 و B_3 به عنوان دو نقطه مورد نظر روی پلتفرم انتخاب می‌شوند که بردار سرعت جدید مجری نهایی نسبت به این دو نقطه به صورت رابطه (29) نوشته می‌شود:

$$\dot{q}'' = [v_{1x}, v_{1y}, v_{3x}, v_{3y}]^{\mathrm{T}} \tag{29}$$

که $v_1 = [v_{1x}, v_{1y}]^{\mathrm{T}}$ و $v_3 = [v_{3x}, v_{3y}]^{\mathrm{T}}$ به ترتیب بردارهای سرعت دو نقطه B_1 و B_3 هستند. مشابه قبل رابطه بین سرعت جدید $\dot{q}''$ و بردار سرعت $\dot{q}$ به صورت رابطه (30) بیان می‌شود:

$$\dot{q}'' = R_2\dot{q} \tag{30}$$

که ماتریس R_2 به توسط رابطه (31) بدست می‌آید [2]:

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(x'_{B_1}\sin\emptyset + y'_{B_1}\cos\emptyset) \\ 0 & 1 & x'_{B_1}\cos\emptyset - y'_{B_1}\sin\emptyset \\ 1 & 0 & -(x'_{B_3}\sin\emptyset + y'_{B_3}\cos\emptyset) \\ 0 & 1 & x'_{B_3}\cos\emptyset - y'_{B_3}\sin\emptyset \end{bmatrix} \tag{31}$$

$B'_1 = [x'_{B_1}, y'_{B_1}]^{\mathrm{T}}$ و $B'_3 = [x'_{B_3}, y'_{B_3}]^{\mathrm{T}}$ به ترتیب بردارهای مکان دو نقطه B_1 و B_3 در محور مختصات محرک $x' - y'$ هستند.

به دلیل اینکه یکی از نقاط در نظر گرفته شده بر روی مبدا مختصات محرک قرار گرفته است یعنی:

$$x'_{B_1} = y'_{B_1} = 0 \tag{32}$$

لذا ماتریس R_2 به صورت رابطه (33) تغییر می‌کند:

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -(x'_{B_3}\sin\emptyset + y'_{B_3}\cos\emptyset) \\ 0 & 1 & x'_{B_3}\cos\emptyset - y'_{B_3}\sin\emptyset \end{bmatrix} \tag{33}$$

و در نهایت ماتریس ژاکوبین همگن شده به صورت رابطه (34) استخراج می‌شود:

$$J'' = R_2 J \tag{34}$$

با دقت در روابط بالا مشخص است که ماتریس ژاکوبین J'' تابعی از پارامترهای θ_1، θ_2، θ_3، ϕ، x'_{B_3} و y'_{B_3} است. برای استفاده از شاخص وضعیت محلی مشابه قبل ماتریس ژاکوبین J'' را می‌توان بر حسب پارامترهای x ، y و ϕ بدست آورد.

با استفاده از سینماتیک معکوس ارایه شده در معادلات (23)-(21) و همچنین حل معادله (35) برای θ_3 و جایگذاری آن‌ها در معادله (34)، ماتریس ژاکوبین J'' بر حسب پارامترهای x ، y و ϕ بدست می‌آید [22]:

$$\tan\emptyset = \frac{l_3\sin\theta_3 - y}{l_3\cos\theta_3 + a - x} \tag{35}$$

همچنین x'_{B_3} و y'_{B_3} از رابطه (36) محاسبه می‌شوند:

$$x'_{B_3} = b\cos(60), y'_{B_3} = b\sin(60) \tag{36}$$

دقت شود که پلتفرم مثلث متساوی الاضلاع به طول ثابت b است.

ماتریس ژاکوبین J'' یک ماتریس 3×4 است. برای حالتی که ماتریس ژاکوبین مربعی نیست، به جای استفاده از معادله (5) می‌توان از رابطه (37) استفاده کرد [23]:

$$\lambda(J'') = \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}} \tag{37}$$

$\mu_{\max}$ و $\mu_{\min}$ به ترتیب ماکزیمم و مینیمم مقادیر تکین و λ عدد وضعیت ماتریس J'' هستند.

همه لینک‌ها دارای طول مساوی و برابر 15 سانتی‌متر و طول اضلاع پلتفرم 15 سانتی‌متر فرض شده است. مطابق شکل 3 دو پایه ثابت ربات در

یک امتداد و با فاصله a برابر 30 سانتی‌متر از هم فرض شده‌اند.

شاخص وضعیت محلی برای x و y در بازه [20و20-] سانتی‌متر و به ازای یک زاویه دلخواه ϕ برای نمونه 10 درجه در شکل 4 رسم شده است که ماکزیمم مقدار آن برابر0/2892 است.

5- هندسه و ماتریس ژاکوبین ربات 3-RRR

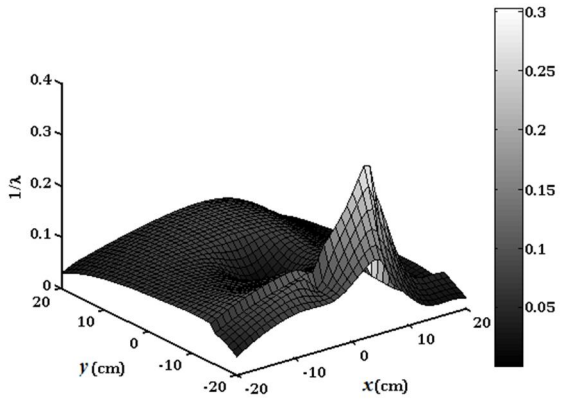
طبق شکل 5 و مشابه قبل دستگاه مختصات ثابت $x-y$ در نقطه O قرار گرفته است که محور پایه گویند و همچنین دستگاه مختصات محرک $x'-y'$ همانند ربات 2-RRR در نقطه B_1 پلتفرم در نظر گرفته شده است. O_i مرکز مفصل‌های اصلی، A_i مفصل‌های میانی، B_i مفصل‌های پلتفورم و همچنین p_i، u_i، r_i و s_i (در این مقاله $i = 1,2,3$) به ترتیب بردارهایی در امتداد طول‌های OO_i، O_iA_i، O_iB_i و CB_i هستند. مکان مبدأ دستگاه مختصات محرک توسط بردار $v = [x,y]^{\mathrm{T}}$ و جهت آن توسط زاویه ϕ که زاویه بین محور اصلی x و محور x' است، بیان می‌شود. بالانویس $'$ بیان‌کننده بردارها در دستگاه مختصات محرک است.

با توجه به مراجع [13،25] روابط زیر نوشته شده است که با استفاده از آن‌ها ماتریس ژاکوبین محاسبه می‌شود. بردار وصل کننده دو نقطه O_i و B_i از رابطه (38) بدست می‌آید:

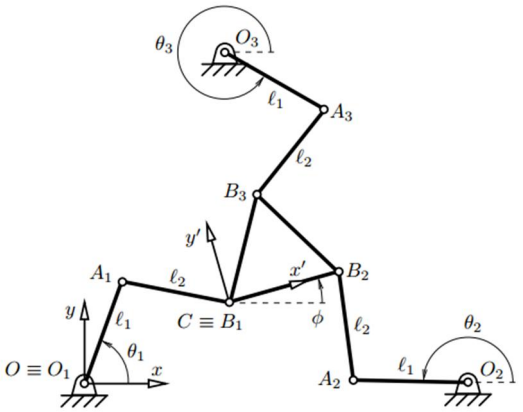
$$r_i = v + Rs_i' - p_i \tag{38}$$

که R یک ماتریس دوران به اندازه زاویه ϕ است که جهت دستگاه مختصات محرک را نسبت به دستگاه مختصات پایه بیان می‌کند و s_i' بیان بردار s_i در دستگاه محرک است. رابطه (39) با دقت به شکل 5 برقرار است:

$$r_i = l_2 n_i + u_i \tag{39}$$



شکل 4 شاخص وضعیت محلی ربات 2-RRR به ازای $\phi = 10^{\circ}$



شکل 5 ربات موازی صفحه‌ای 3-RRR ([25])

که بردار یکه در امتداد لینک i توسط n_i نشان داده می‌شود. با جایگذاری معادله (39) در معادله (38) رابطه (40) برای هر زنجیر سینماتیکی بدست می‌آید:

$$l_2 n_i = v + Rs_i' - u_i - p_i \tag{40}$$

با به توان 2 رساندن طرفین رابطه بالا رابطه (41) بدست می‌آید:

$$l_2^2 = (v + Rs_i' - u_i - p_i)^{\mathrm{T}}(v + Rs_i' - u_i - p_i) \tag{41}$$

با اعمال قانون کسینوس‌ها رابطه (42) بدست می‌آید:

$$l_2^2 = \|r_i\|^2 + l_1^2 - 2r_i^{\mathrm{T}}u_i \tag{42}$$

برای نوشتن معادله بالا بر حسب پارامترهای x,θ_i ، y و ϕ بردارهای به کار رفته در این رابطه، با توجه به شکل 5 به صورت رابطه (43) نوشته می‌شود:

$$u_i = l_1[\cos\theta_i, \sin\theta_i]^{\mathrm{T}} \tag{43}$$

همچنین با استفاده از رابطه‌های (38) و (40) رابطه (44) قابل بیان است:

$$r_i = \begin{bmatrix} x + \cos\emptyset\, x'_{\mathrm{B}_i} - \sin\emptyset\, y'_{\mathrm{B}_i} - x_{O_i} \\ y + \sin\emptyset\, x'_{\mathrm{B}_i} + \cos\emptyset\, y'_{\mathrm{B}_i} - y_{O_i} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x + a_i \\ y + b_i \end{bmatrix} \tag{44}$$

x'_{B_i} و y'_{B_i} مختصات نقطه B_i در صفحه محرک و a_i و b_i ثابت‌هایی برای بیان جهت پلتفورم محرک هستند. بنابراین معادله (42) به صورت رابطه (45) نوشته می‌شود:

$$\cos\theta_i(x + a_i) + \sin\theta_i(y + b_i) = \frac{((x + a_i)^2 + (y + b_i)^2 + l_1^2 - l_2^2)}{2l_1} \equiv p_i^2 \tag{45}$$

معادله بالا یک رابطه بین متغیرهای ورودی (Θ) و متغیرهای خروجی (q) مکانیزم ایجاد می‌کند. برای اینکه رابطه بالا جواب حقیقی داشته باشد، نامساوی (46) باید برقرار باشد:

$$(x + a_i)^2 + (y + b_i)^2 - p_i^2 \equiv \Gamma_i \geq 0 \tag{46}$$

به جز $\Gamma_i = 0$ ، دو جواب حقیقی برای معادله (45) وجود دارد که به صورت رابطه (47) است:

$$\sin\theta_i = \frac{p_i(y + b_i) + (x + a_i)\delta_i\sqrt{\Gamma_i}}{\rho_i}\ ,\quad \cos\theta_i = \frac{p_i(x + a_i) - (y + b_i)\delta_i\sqrt{\Gamma_i}}{\rho_i} \tag{47}$$

که $\delta_i = \pm 1$ معروف به شاخص شاخه[1] است و پارامتر ρ_i به صورت رابطه (48) تعریف می‌شود:

$$\rho_i = \|r_i\|^2 = (x + a_i)^2 + (y + b_i)^2 \tag{48}$$

دقت شود که برای هر زنجیره سری، دو شاخه وجود دارد بنابراین کل ربات 8 مجموعه شاخه دارد. همچنین دقت شود که معادله (47) برای حالتی که $\rho_i = 0$ باشد (یعنی زمانی که $l_1 = l_2$ و $B_i \equiv O_i$ است) معتبر نیست.

برای محاسبه ماتریس ژاکوبین با مشتق‌گیری نسبت به زمان از معادله (41) رابطه (49) بدست می‌آید:

$$l_2 n_i^{\mathrm{T}}\left(\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} + \dot{\emptyset}Es_i - l_i\dot{\theta}\begin{bmatrix}-\sin\dot{\theta}_i\\ \cos\dot{\theta}_i\end{bmatrix}\right) = 0 \tag{49}$$

که E ماتریس دوران تعامد برای زاویه $\phi = 90^{\circ}$ است و بردار s_i برابر است با:

$$s_i = \begin{bmatrix} a_i + x_{O_i} \\ b_i + y_{O_i} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} c_i \\ d_i \end{bmatrix} \tag{50}$$

رابطه (49) ممکن است به صورت رابطه (51) نوشته شود:

$$[l_2 n_i^{\mathrm{T}},\quad l_2 n_i^{\mathrm{T}} E s_i]\dot{q} + l_1\delta_i\sqrt{\Gamma_i}\dot{\theta} = 0 \tag{51}$$

1.Branch index

در آخر معادلات سرعت می‌توانند به شکل ماتریسی (52) نوشته شوند:

$$\begin{bmatrix} l_2 n_1^{\mathrm{T}} & l_2 n_1^{\mathrm{T}} E s_1 \\ l_2 n_2^{\mathrm{T}} & l_2 n_2^{\mathrm{T}} E s_2 \\ l_2 n_3^{\mathrm{T}} & l_2 n_3^{\mathrm{T}} E s_3 \end{bmatrix} \dot{q} + l_1 \begin{bmatrix} \delta_1\sqrt{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2\sqrt{\Gamma_2} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3\sqrt{\Gamma_3} \end{bmatrix} \dot{\Theta} = J_{\mathrm{q}}\dot{q} + l_1 J_{\Theta}\dot{\Theta} = 0 \quad (52)$$

که J_{q} و J_{Θ} ماتریس‌های ژاکوبین 3x3 هستند. ماتریس ژاکوبین کلی از رابطه (53) محاسبه می‌شود:

$$J = -J_{\Theta}^{-1} J_{\mathrm{q}} \quad (53)$$

ماتریس ژاکوبین همگن نیست لذا مشابه قسمت قبل با در نظر گرفتن دو نقطه B_1 و B_3 به عنوان دو نقطه مورد نظر روی پلتفرم و با استفاده از روابط(33) و (34) ماتریس ژاکوبین همگن شده است و به دلیل غیر مربعی بودن ماتریس ژاکوبین بدست آمده، عدد وضعیت از رابطه (37) محاسبه شده است.

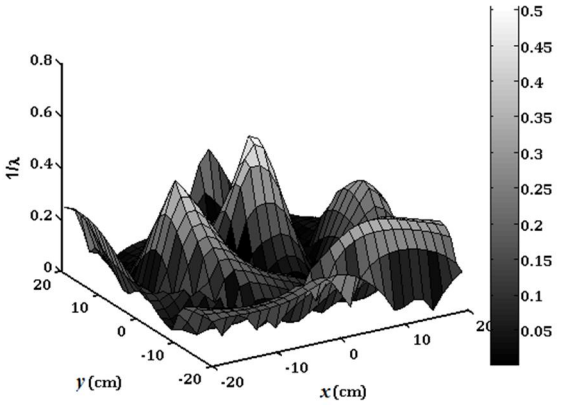
همه لینک‌ها دارای طول مساوی و برابر 15 سانتی‌متر هستند و پلتفورم یک مثلث متساوی‌اضلاع به طول 15 سانتی‌متر در نظر گرفته شده است. نقاط O_1 و O_2 در یک امتداد و با فاصله 30سانتی‌متر از هم فرض شده‌اند و $O_1O_2O_3$ یک مثلث متساوی الاضلاع را تشکیل می‌دهند. مشابه قبل برای بیان شاخص وضعیت محلی، ماتریس ژاکوبین را با استفاده از معادلات بیان شده در بالا بر حسب پارامترهای x ، y و ϕ استخراج کرده و سپس به ازای یک زاویه دلخواه ϕ برای نمونه 10 درجهشاخص وضعیت محلی برایx و y در بازه [20و20-] سانتی‌متر مطابق شکل 6 رسم شده است که ماکزیمم مقدار آن برابر 0/5038 بدست می‌آید.

6- فضای کاری سه ربات

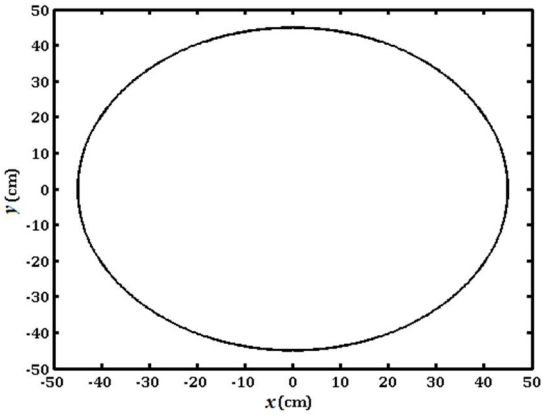
فضای کاری یک ربات صفحه‌ای شامل سطح کامل جاروب شده توسط مجری نهایی ربات در شرایطی که کلیه حرکت‌های ممکن را انجام می‌دهد، می‌باشد [25]. شکل 7 فضای کاری قابل دسترس ربات 1-RRR را نشان می‌دهد.فضای کاری قابل دسترس ربات‌های 2-RRR و 3-RRR نیز به ترتیب در شکل های 8 و شکل 9 رسم شده است.

7- بررسی تأثیر تغییرات ϕ بر معکوس عدد وضعیت

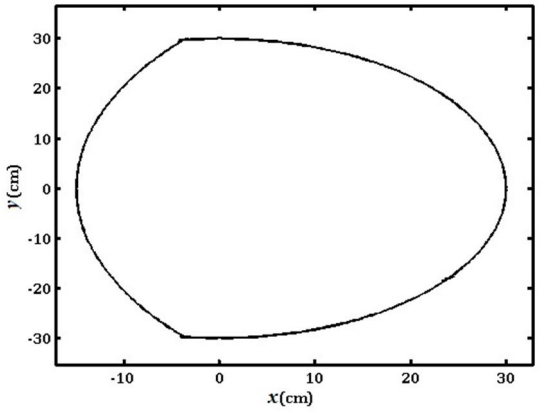
با ثابت در نظرگرفتن زاویه ϕ یک درجه آزادی حذف می‌شود، لذا در این قسمت برای مقایسه مهارت ربات‌ها به ازای مقادیر مشخص ϕ بین 10 تا 180 درجه ماکزیمم شاخص وضعیت محلی بر حسب زاویه ϕ برای هر سه رباتدر شکل 10 رسم شده است. برای بررسی و مقایسه دقیق‌تر مهارت سه ربات،



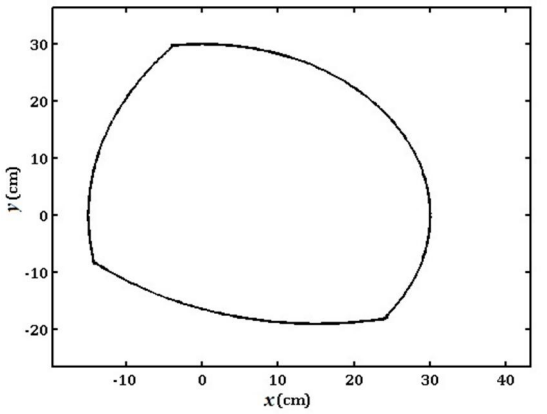
شکل 6 شاخص وضعیت محلی ربات 3-RRR به ازای ϕ=10°



شکل 7 فضای کاری قابل دسترس ربات 1-RRR



شکل 8 فضای کاری قابل دسترس ربات 2-RRR



شکل 9 فضای کاری قابل دسترس ربات 3-RRR

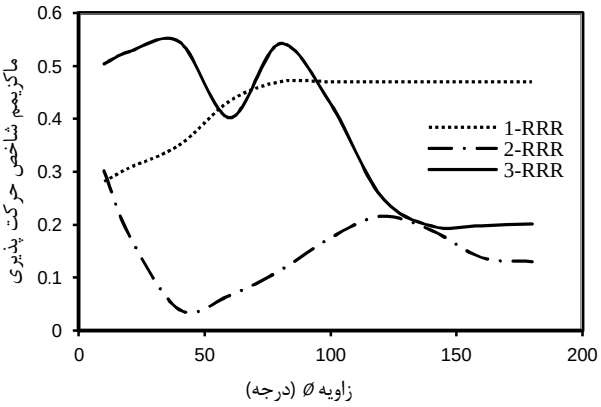
بازه بررسی شده x و y در شکل 10 در فضای کاری قابل دسترس هر ربات‌در نظر گرفته شده است.

با توجه به شکل 10 مشاهده می‌شود که ربات 1-RRR از زاویه ϕ حدود 80 درجه به بعد، دارای ماکزیمم شاخص وضعیت محلی یکسانی بوده که این مقدار برابر 0/4703 است. با بررسی دقیق‌تر مقادیر برای ربات 2-RRR مشاهده می‌شود که بیشترین مقدار ماکزیمم شاخص وضعیت محلی در زاویه ϕ =5° رخ داده که برابر 0/3194 است. بعضی از مقادیر اطراف این زاویه در جدول 1 آمده است. در ربات 3-RRR ماکزیمم شاخص وضعیت محلی ،در زاویه ϕ حدود 30 درجه بیشترین مقدار را دارد. برای پیدا کردن دقیق

ماکزیمم معکوس عدد وضعیت، مقادیر آن دقیق‌تر بررسی شده است که در ϕ =35° اتفاق افتاده و دارای مقدار 0/6163 است. مقادیر چند نمونه در جدول 2 آمده است.

مقادیر شاخص وضعیت محلی برای ربات1-RRR در زاویه ϕ =80° برای ربات 2-RRR در زاویه‌ای که بیشترین مقدار را در فضای کاری قابل دسترس خود دارد، به ترتیب در شکل 11 و شکل 12 نمایش داده شده است. شکل 13 نیز بیان‌کننده شاخص وضعیت محلی ربات 3-RRR در فضای کاری قابل دسترس خوداست.

ربات سری 1-RRR دارای فضای کاری بزرگتری نسبت به دو ربات دیگر و همچنین ربات 2-RRR دارای فضای کاری بزرگتری نسبت به 3-RRR است، لذا برای مقایسه مهارت و حرکت‌پذیری سه ربات بهتر است حرکت‌پذیری در اشتراک فضای کاری قابل دسترس سه ربات بررسی شود. با رسم فضاهای کاری قابل دسترس سه ربات در یک صفحه، اشتراک آن‌ها همان فضای کاری قابل دسترس ربات 3-RRR به دست می‌آید. با بررسی مجدد شاخص وضعیت محلی برای ربات‌ها در این فضای کاری مشترک، شکل 14 رسم شده است. با دقت به شکل دیده می‌شود که تنها در زوایای کوچک‌تر از 60 درجه تغییرات کوچکی تنها در نمودار ربات 1-RRR ایجاد شده است.



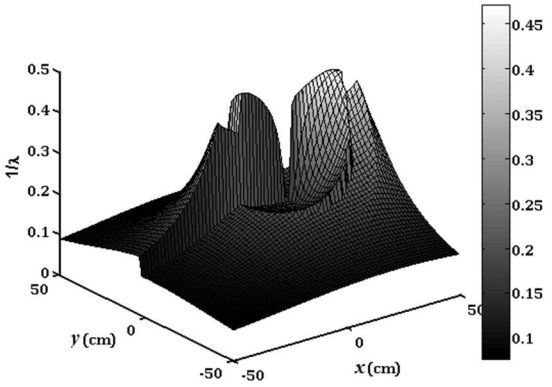
شکل 10 نمودار تغییرات ماکزیمم شاخص وضعیت محلی برحسب تغییرات زاویه ϕ در فضای کاری هر ربات

جدول 1 برخی از مقادیر ماکزیمم شاخص وضعیت محلی 2-RRR

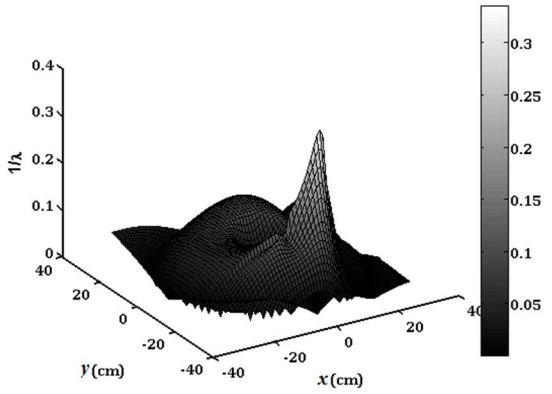
زاویه ϕ (درجه)	ماکزیمم $\frac{1}{\lambda}$
3	0/2855
5	0/3194
8	0/3071
10	0/2892

جدول 2 برخی از مقادیر ماکزیمم شاخص‌حرکت پذیری 3-RRR

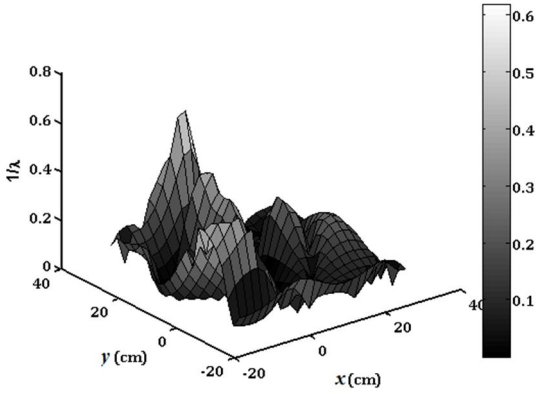
زاویه ϕ (درجه)	ماکزیمم $\frac{1}{\lambda}$
30	0/5646
33	0/5990
35	0/6163
37	0/6060
40	0/5452



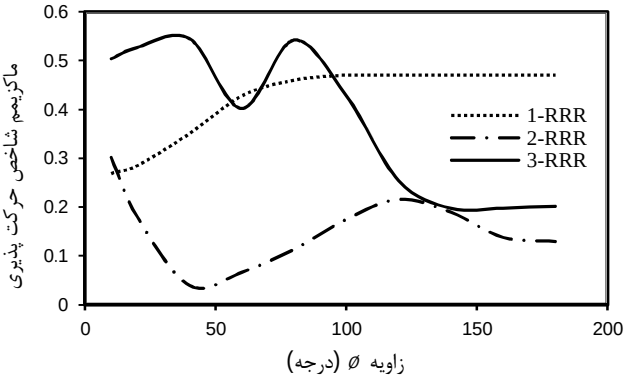
شکل 11 شاخص وضعیت محلی ربات 1-RRR به ازای $\phi = 80^\circ$



شکل 12 شاخص وضعیت محلیربات 2-RRR به ازای $\phi = 5^\circ$



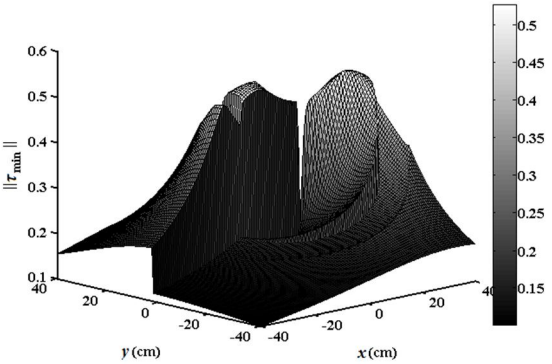
شکل 13 شاخص وضعیت محلی ربات 3-RRR به ازای $\phi = 35^\circ$



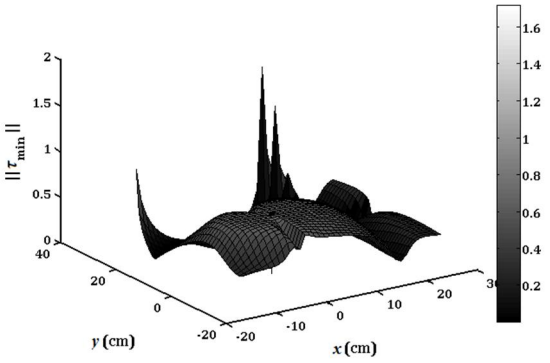
شکل 14 نمودار تغییرات ماکزیمم شاخص وضعیت محلیبرحسب تغییرات زاویه ϕ در فضای کاری مشترک سه ربات

برای مقایسه بهتر مهارت ربات‌ها، شاخص بار آن‌ها در زاویه ϕ که ماکزیمم شاخص وضعیت محلی اتفاق می‌افتد رسم شده است. شکل 15 شاخص بار ربات 1-RRR به ازای ϕ=80°، شکل 16 شاخص بار ربات 2-RRR به ازای ϕ=5° و شکل 17 همین شاخص برای ربات 3-RRR به ازای ϕ=35° است. همان گونه که مشخص است ربات 2-RRR در زاویه ϕ رسم شده دارای شاخص بار بزرگتری نسبت به دو ربات دیگر است. اگرچه استفاده از شاخص وضعیت محلی به خوبی بیانگر محل ماکزیمم شدن مهارت ربات است و همچنین اثر تغییرات زاویه ϕ بر ماکزیمم شاخص وضعیت محلی نمایش داده شد ولی این کار تنها وضعیت یک نقطه از ربات یعنی نقطه‌ای که ماکزیمم شاخص اتفاق می‌افتد را نشان می‌دهد. برای قضاوت بهتر در مورد مهارت و حرکت‌پذیری سه ربات از شاخص وضعیت کلی که توزیع معکوس عدد وضعیت در فضای کاری را نشان می‌دهد استفاده می‌شود.

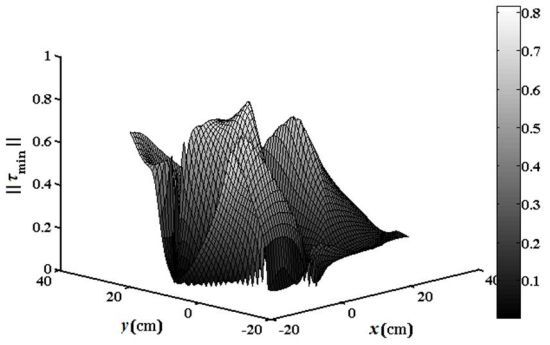
شاخص وضعیت کلی سه ربات در جدول 3 آورده شده است. همان طور که دیده می‌شود ربات 3-RRR دارای بیشترین و ربات 1-RRR دارای کمترین مقدار است.



شکل 15 شاخص بار ربات 1-RRR به ازای $\phi = 80^\circ$



شکل 16 شاخص بار ربات 2-RRR به ازای $\phi = 5^\circ$



شکل 17 شاخص بار ربات 3-RRR به ازای $\phi = 35^\circ$

جدول 3 شاخص وضعیت کلی سه ربات

ربات	GCI
1-RRR	0/050
2-RRR	0/0695
3-RRR	0/1702

8- نتیجه‌گیری

در این پژوهش ماتریس‌های ژاکوبین سه ربات صفحه‌ای سه درجه آزادی 1-RRR، 2-RRR و 3-RRR استخراج شده و مهارت آن‌ها با استفاده از شاخص‌های وضعیت محلی و کلی مورد بررسی قرار گرفته است. برای بیان و نمایش بهتر مهارت ربات‌ها، معکوس عدد وضعیت ماتریس ژاکوبین به عنوان شاخص وضعیت محلی در نمودارهای سه بعدی رسم شده است.

نتایج نشان می‌دهد که تقریباً در زاویه‌های کوچک‌تر از ϕ=90° ربات 3-RRR شاخص وضعیت محلی بیشتر (عدد وضعیت کمتر) و در نتیجه مهارت بیشتری نسبت به دو ربات دیگر دارد. در زاویه‌های ϕ بزرگتر از 90 درجه، ربات 1-RRR مهارت بیشتری نشان می‌دهد. ربات 1-RRR از زاویه ϕ بزرگتر از 80° دارای عدد وضعیت ثابتی است و به زاویه ϕ وابسته نیست. ربات 2-RRR در تمامی زاویه‌های ϕ، کمترین شاخص وضعیت محلی را دارد که در [16] نیز این ربات بدترین عملکرد دینامیکی را نسبت به ربات‌های 3-RRR و 4-RRR دارا بود. در زوایای ϕ حدود 40 درجه شاخص وضعیت محلی ربات 2-RRR بسیار کاهش می‌یابد که چنین کاهشی در ربات 3-RRR در زوایای ϕ حدود 140° اتفاق می‌افتد.

نتایج نشان دادند که بیشترین مقدار شاخص وضعیت محلی برای ربات 1-RRR در زاویه ϕ=80°، برای ربات 2-RRR در ϕ=5° و برای ربات 3-RRR در ϕ=35° اتفاق می‌افتد. برای مقایسه بهتر در این زوایا شاخص بار نیز رسم شده است که نمودارها بیانگر بیشتر بودن ماکزیمم شاخص بار در ربات 2-RRR هستند. با دقت به این نمودارها می‌توان مشاهده کرد که اگرچه ربات 3-RRR دارای ماکزیمم شاخص بار کمتری نسبت به ربات 2-RRR است، ولی دارای میانگین توزیع بارتقریباً یکسانی است. ربات 1-RRR کمترین توزیع بار را دارد.

برای قضاوت منصفانه‌تر از توزیع معکوس عدد وضعیت نیز استفاده شد که نتایج نشان دهنده بیشتر بودن شاخص وضعیت کلی ربات 3-RRR و بعد از آن ربات 2-RRR بوده است. لذا ربات 3-RRR در زوایای پلتفرم کوچکتر از 90 درجه بهترین مهارت را دارد.

ربات‌ها دارای فضاهای کاری یکسانی نیستند لذا با رسم عدد وضعیت در فضای کاری هر ربات، نمی‌توان مهارت آن‌ها را به خوبی مقایسه کرد. برای رفع این محدودیت در این مقاله علاوه بر بررسی مهارت ربات‌ها در فضای کاری خود، مهارت آن‌ها در فضای کاری قابل دسترس مشترک سه ربات نیز بررسی شده است. نتایجی که از این بررسی به دست آمده است بیانگر این موضوع است که هر ربات دارای شاخص وضعیت محلی یکسانی در فضای کاری خود و اشتراک فضای کاری سه ربات است. به دلیل مشابه در نظر گرفتن طول لینک‌ها و طول اضلاع پلتفرم، نمودارهای ماکزیمم شاخص وضعیت محلی در فضای کاری هر ربات و فضای کاری مشترک سه ربات یکسان بدست می‌آیند.

9- مراجع

[1] J.F. O'Brien,J.T .Wen, Redundant actuation for improving kinematic

manipulability, *Robotics and Automation, 1999. Proceedings. 1999 IEEE International Conference on,* Vol. 2, 1999.
[2] C. Gosselin ,The optimum design of robotic manipulators using dexterity indices, *Robotics and Autonomous Systems,* Vol. 9, pp. 213-226 , 1992.
[3] G. Strang, *Linear Algebra and its Application,* New York: Academic Press, 1976.
[4] J. K. Salisbury, J. J. Craig, Articulated hands force control and kinematic Issues, Second Edittion, *The International Journal of Robotics Research,* pp. 4-17, 1982.
[5] J. Angeles, A. Rojas, Manipulator inverse kinematics via condition-number minimization and continuation, *The International Journal of Robotics and Automation* Vol. 2, pp. 61-69, 1987.
[6] B. Tondu, A Theorem on the Manipulability of Redundant Serial Kinematic Chains, *Engineering Letters,* Vol. 15, 2007.
[7] T. Masuda, M. Fujiwara, N. Kato and T. Arai, Mechanism configuration evaluation of a linear-actuated parallel mechanism using manipulability, *Robotics and Automation, 2002. Proceedings. ICRA'02. IEEE International Conference on,* Vol. 1, pp. 489-495, 2002.
[8] A. de M. Martins, A. M. Dias and P. J. Alsina, Comments on manipulability measure in redundant planar manipulators, *in: Proceedings 3rd IEEE Latin American Robotics Symp., Santiago,* pp. 169–173, 2006.
[9] S. Ukidve, J. E. McInroy and F. Jafari, Using redundancy to optimize manipulability of Stewart platforms, *IEEE/ASME Transactions Mechatron.* Vol. 13, pp. 475–479, 2008.
[10] S.-G. Kim and J. Ryu , New dimensionally homogeneous jacobian matrix formulation by three end-effector points for optimal design of, *Robotics and Automation, IEEE Transactions on,* pp. 731-736, 2003.
[11] R. E. Stamper, L. W. Tsai and . G. C. Walsh, Optimization of a Three DOF Translational Platform, *Robotics and Automation, 1997. Proceedings, 1997 IEEE International Conference on,* Vol. 4, pp. 3250-3255, 1997.
[12] s. Kucuk and z. Bingul, Comparative study of performance indices for fundamental robot manipulators, *Robotics and Autonomous Systems,* Vol. 54, pp. 567-573, 2006.
[13] M. Arsenault and R. Boudreau, The Synthesis of Three-Degree-of-Freedom Planar Parallel Mechanisms with Revolute Joints (3-RRR) for an Optimal Singularity-Free Workspace, *Journal of Robotic Systems,* Vol. 5, pp. 259-274, 2004.
[14] S. Kucuk, A dexterity comparison for 3-DOF planar parallel manipulators with two kinematic chains using genetic algorithms, *Mechatronics,* Vol. 19, pp. 868-877, 2009.
[15] J. Wu, J. Wang and L. Wang, A comparison study of two planar 2-DOF parallel mechanisms: one with 2-RRR and the other with 3-RRR structures, *Robotica,* Vol. 28, pp. 937-942, 2010.
[16] J. Wu, J. Wang and Z. You, A comparison study on the dynamics of planar 3-DOF 4-RRR, 3-RRR and 2-RRR parallel manipulators, *Robotics and computer-integrated manufacturing,* Vol. 27, pp. 150-156, 2011.
[17] R. V.Mayorga, J. Carrera and M. Oritz, A kinematics performance index based on the rate of change of a standard isotropy condition for robot design optimization, *Robotics and Autonomous Systems,* Vol. 54, pp.153-163, 2005.
[18] I. Mansouri, M. Ouali, The power manipulability–A new homogeneous performance index of robot manipulators, *Robotics and computer-Integrated Manufacturing,* Vol. 27, pp. 434-449, 2011.
[19] D. Chablat, et al. , Comparison of Planar Parallel Manipulator Architectures based on a Multi-objective Design Optimization Approach, *ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. American Society of Mechanical Engineers,* 2010.
[20] J.-P. Merlet, *Parallel robots,* France: Springer, 2006.
[21] O.Ma and J. Angeles, Optimum architecture design of platform manipulator, *Advanced Robotics, 1991. 'Robots in Unstructured Environments', 91 ICAR., Fifth International Conference on. IEEE,* pp. 1130-1135, 1991.
[22] C. Gosselin, J. Angeles, A global performance index for the kinematics optimization of robotic manipulators, *Journal of Mechanical Design,* Vol. 113, pp. 220–223, 1991.
[23] Z. Ji, Study of planar three-degree-of-freedom 2-RRR parallel manipulators, *Mechanism and Machine Theory,* pp. 409-416, 2003.
[24] C. Klein and B. Blaho, Dexterity measures for the design and control of kinematically redundant manipulators, *The International Journal of Robotics Research,* Vol. 2, pp. 72-83, 1987.
[25] I. A. Bonev and C. M. Gosselin, Singularity loci of planar parallel manipulators with revolute joints, *Proceedings 2nd Workshop on Computational Kinematics. International Federation on the Theory of Machines and Mechanisms,* pp. 291-299, 2001.
[26] M. W. Spong, S. Hutchinson and M. Vidyasagar, *Robot Modeling and Control,* New York: John Wiley & Sons, 2006.