ماهنامه علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
mme.modares.ac.ir

مطالعه تاثیر خواص الاستیک بر روی حرکت قطره ویسکوالاستیک در رژیم اینرسی

امین امامیان[1]، محمود نوروزی[2*]، مهدی داودی[3]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
3- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه لیورپول، لیورپول، انگلستان
* شاهرود، صندوق پستی 3619995161، mnorouzi@Shahroodut.ac.ir

اطلاعات مقاله
مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 16 خرداد 1396
پذیرش: 18 مرداد 1396
ارائه در سایت: 17 شهریور 1396
کلید واژگان:
قطره غیرنیوتنی
رینولدز
دبورا
مویینگی
حساب اغتشاشات
مدل فوق همرفتی ماکسول

چکیده
در این مقاله، حرکت پایای قطره غیرنیوتنی درون یک سیال نیوتنی در اعداد رینولدز پایین به صورت تحلیلی بررسی شده است. در تحقیق حاضر از مدل فوق همرفتی ماکسول برای فاز قطره و از مدل نیوتنی برای فاز محیط پیرامون آن استفاده شده است. در طول چند دهه گذشته، مطالعاتی مربوط به ناپایداری سیالات غیرنیوتنی به ویژه مواردی که شامل سطوح آزاد می‌باشد، بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. این نوع از مطالعات را می‌توان برای بهینه‌سازی فرآیندهای طراحی از جمله: صنعت نفت، فرآیندهای پزشکی، استخراج فلز، رنگ‌ها و نیروگاه‌ها مرتبط دانست. حل تحلیلی با استفاده از روش اغتشاشات به‌دست می‌آید. به‌منظور خطی‌سازی معادلات حاکم بر مسئله در روش تحلیلی از اعداد بی‌بعد رینولدز و دبورا استفاده شده است. عدد دبورا نشان دهنده خاصیت الاستیک قطره است. با افزایش خاصیت الاستیک قطره غیرنیوتنی، نیروی درگ قطره افزایش پیدا می‌کند. قطره غیرنیوتنی در حال سقوط، حالت کروی خود را از دست داده و شکل پهن شده به خود می‌گیرد. با افزایش عدد دبورا (خاصیت الاستیک) حفره انتهای قطره افزایش پیدا کرده و در نتیجه نیروی درگ آن افزایش و به تبع آن سرعت حد قطره کاهش پیدا می‌کند. دلیل ایجاد حفره در قسمت انتهایی قطره، وجود نیروی لختی و تمرکز مؤلفه نرمال تنش در قسمت انتهایی قطره می‌باشد. برتری و نوآوری تحقیق حاضر نسبت به تحقیقات پیشین در نظر گرفتن ترم جابجایی (ترم غیرخطی) معادلات اندازه حرکت می‌باشد که در مطالعات پیشین به دلیل خزشی بودن جریان، این ترم صرف‌نظر شده است.

Study of the effect of elastic properties on viscoelastic drop motion in inertia regime

Amin Emamian[1], Mahmood Norouzi[1*], Mahdi Davoodi[2]

1- Mechanical Engineering Department, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
2- Mechanical Engineering Department, Liverpool University, Liverpool, United Kingdom
* P.O.B. 3619995161, Shahrood, Iran, mnorouzi@Shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION
Original Research Paper
Received 06 June 2017
Accepted 09 August 2017
Available Online 08 September 2017

Keywords:
non-Newtonian drop
Reynolds
Deborah
Capillary
perturbation method
Upper Convected Maxwell model

ABSTRACT
In this paper, steady motion of non-Newtonian falling drop through a Newtonian fluid at low Reynolds number is investigated analytically. Here, the Upper Convected Maxwell model (UCM) is used for drop phase and Newtonian model is considered for external fluid. During the past few decades, studies relating to non-Newtonian instabilities especially those involving free surfaces are amongst the most striking. These types of studies can be used to optimize design processes in, for example, the petroleum and medicine related processes, metal extraction, and paint and power-plant related fields. Analytical solution is obtained using the perturbation method. Reynolds and Deborah numbers are used to linearize the equations governing the problem in analytical method. Deborah number indicates the elastic effect of drop. The drag force increases by the growth of the elastic effect of non-Newtonian Drops. The non-Newtonian drop loses its shape and changes to an oblate form. Increment in Deborah number enhances the dimple at the bottom of the drop and results in an increment in its drag force and as a consequence its terminal velocity decreases. A hole is created at the rear of the drop due to the presence of inertia force and focus of normal component of stress at the rear of the drop. The novelty of this study is that it considers the convection (non-linear) term of the momentum equations which was neglected in the previous studies due to the creeping flow.

1- مقدمه

در طول چند دهه گذشته، مطالعاتی مربوط به ناپایداری سیالات غیرنیوتنی[1] به ویژه مواردی که شامل سطوح آزاد می‌باشد، بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. به‌طور خاص، مطالعه خواص رئولوژیکی در حرکت و تغییر شکل قطرات توجه فزاینده‌ای از محققان را به خود جلب کرده است. این نوع از مطالعات را می‌توان برای بهینه‌سازی فرآیندهای طراحی از جمله: صنعت نفت، فرآیندهای پزشکی، استخراج فلز، رنگ‌ها و نیروگاه‌ها مرتبط دانست [1-3]. به‌صورت عمده از مواد پلیمری در صنایع نفتی به‌منظور لخته‌سازی سیالات استفاده می‌شود. با این عمل یکی از سیال‌ها شروع به رسوب کردن می‌کند. محاسبه

[1] Non-Newtonian

Please cite this article using:
برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:
A. Emamian, M. Norouzi, M. Davoodi, Study of the effect of elastic properties on viscoelastic drop motion in inertia regime, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 9, pp. 165-174, 2017 (in Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.21.7]

سرعت ته‌نشینی از مهم‌ترین مسائل موردنیاز در صنایع نفتی می‌باشد. از دیگر کاربردهای این موضوع می‌توان به صنایع تولید چاپگرها و پاشش رنگ اشاره کرد که از رنگ به‌صورت قطره‌ای استفاده می‌کنند. در این صنایع، تحقیقات روزافزونی در راستای اندازه‌گیری سایز و حرکت این قطرات در حال انجام گیری است.

در چند دهه اخیر، بررسی و تحلیل‌های متعددی روی سقوط[1] و یا بالا رفتن[2] قطرات در یک فاز سیال دیگر صورت گرفته است که نشان از اهمیت این موضوع دارد. از همین رو محققان زیادی سعی بر شبیه‌سازی این پدیده و عوامل مؤثر بر آن کرده‌اند. هادامارد [4] و ریبسیزنسکی [5] سقوط خزشی[3] قطره نیوتنی در یک سیال نیوتنی را به‌صورت تحلیلی بررسی نمودند. از فرضیات مسئله غیرقابل انحلال بودن سیالات در یکدیگر می‌باشند. نتایج این تحقیق شامل سرعت حد[4] و نیروی پسا[5] اعمال شونده روی سطح قطره با استفاده از معادلات استوکس[6] است. به سبب خزشی بودن جریان، جمله لختی[7] از معادلات اندازه حرکت حذف گردیده و تبدیل به معادلات استوکس می‌گردد. آن‌ها دریافتند که شکل قطره در حال سقوط در غیاب لختی کاملاً کروی بوده و سرعت حد با افزایش حجم قطره افزایش می‌یابد. هم‌سو با این کار تیلور و آکریووس [6] در حالاتی که اعداد بی‌بعد رینولدز[8] بسیار کم و اعداد مویینگی[9] محدود باشند، شکل قطره را دقیقاً کروی به‌دست آوردند و به‌صورت تحلیلی نشان دادند فقط در اعداد رینولدز پایین شکل قطره کرویت خود را از دست داده و شکلی پهن‌شده[10] به خود می‌گیرد. همچنین آن‌ها دریافتند وقتی عدد رینولدز افزایش می‌یابد این شکل از حالت کروی به حالت پهن‌تری تبدیل می‌شود. محاسبات تحلیلی با استفاده از روش حساب اغتشاشات[11] انجام شد و نشان دادند که شکل قطره با توجه به خصوصیات مواد برای حالتی که قطره جیوه‌ای در آب سقوط کند، شاید حتی از حالت پهن‌شده به حالت بیضی کشیده[12] نیز بتواند تبدیل شود که بسیار نادر خواهد بود. به مرور زمان عوامل مؤثر دیگری که در شکل قطرات تاثیر گذار می‌باشند، به اثبات رسید. از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به خصوصیات رئولوژی سیال داخلی و خارجی، سایز قطره و شکل اولیه قبل از سقوط اشاره کرد[8,7]. امامیان و همکاران [9] سقوط یک قطره نیوتنی در اعداد رینولدز پایین را به‌صورت تحلیلی بررسی کردند و نشان دادند که با افزایش حجم قطره، حفره‌ای[13] در انتهای قطره ایجاد خواهد شد. آن‌ها از تکنیک اغتشاشات برای حل تحلیلی مسئله و از اعداد بی‌بعد رینولدز و مویینگی به‌عنوان پارامتر اغتشاشی استفاده کردند. آن‌ها نشان دادند که با افزایش اعداد بی‌بعد رینولدز و مویینگی حفره ایجاد شده در انتهای قطره رشد پیدا خواهد کرد.

کیشور و همکاران [10] با استفاده از روش تفاضل محدود ضریب درگ را برای قطره‌ای در حال سقوط در اعداد رینولدز پایین که از مدل توانی[14] تبعیت می‌کند، به‌دست آوردند. کوه و لیل [11] مراحل تغییر شکل قطره در حالت‌هایی که در ابتدا قطره به‌صورت غیرکروی رها شوند را در جریان‌های خزشی بررسی کردند. آن‌ها در ابتدا یک تغییر شکل در قطره ایجاد کردند و شکل قطره را با گذشت زمان حین بالا آمدن مورد ارزیابی قرار دادند. در این مطالعه مشخص گردید، برای اعداد مویینگی محدود به ازای تغییر شکل‌های کوچک، شکل قطره ضمن برخاستن کروی باقی می‌ماند. علاوه بر این، آن‌ها دریافتند که اگر تغییر شکل اولیه از حالت کروی زیاد فاصله داشته باشد شکل نهایی دیگر ثابت باقی نمی‌ماند و به‌صورت پیوسته تغییر خواهد کرد. در صورتی که شکل ابتدایی دوکی مانند باشد تغییرات به سمت یک قطره کشیده با یک دنباله در انتها پیش روی می‌کند. این در حالی است که، اگر قطره در ابتدا شکل پهن‌شده داشته باشد قطره‌ای با یک حفره در قسمت انتهایی نتیجه کار خواهد بود. همچنین در این راستا نظریه‌ای از سوی کوجیما و همکاران [12] مبنی بر اینکه شکل کروی قطره به ازای عدد مویینگی بی‌نهایت ناپایدار شده و کرویت خود را از دست می‌دهد، وجود دارد. اسمولیانسکی و همکاران [13] تغییرات دینامیکی بالا آمدن حباب‌های گاز را در یک سیال ویسکوز مورد بررسی قرار دادند. در این آزمایش مقادیر مختلف کشش سطحی مورد بررسی قرار گرفت و نشان دادند که این پارامتر یک عامل تأثیرگذار در این رژیم است. آن‌ها توانستند به خوبی شکل حباب بیضوی نامتقارن را به ازای اعداد رینولدز بالا با استفاده از روش عددی شبیه سازی کنند.

یکی از مسائل مهمی که در سال‌های اخیر توجه بسیاری از پژوهشگران را در زمینه قطره به خود جلب نموده سقوط یا برخاست قطره ویسکوالاستیک[15] در سیال نیوتنی است. مطالعات زیادی در زمینه سقوط قطره غیرنیوتنی در فاز ویسکوز انجام گردیده است. سوستارز و بلمونته [14] سقوط قطره ویسکوالاستیک در فاز سیال نیوتنی را برای جریان خزشی به صورت آزمایشگاهی و تحلیلی بررسی کردند. در قسمت آزمایشگاهی، از محلول پلیمری زانتام[16] در فاز حلال آب و گلیسیرین[17] استفاده شده است. آن‌ها از محلول آب و گلیسیرین با درصد حجمی 80:20 و پلیمر زانتام با درصد وزنی 0.16% به عنوان فاز قطره و از روغن پلی‌دیمتیل سیلوکزان[18] به عنوان فاز سیال ویسکوز در حل آزمایشگاهی بهره بردند. در قسمت دوم این تحقیق سوستارز و بلمونته از تکنیک اغتشاشات به عنوان روش حل تحلیلی برای قطره ویسکوالاستیک خزشی در حال سقوط در فاز نیوتنی بهره بردند. از مدل سیال مرتبه سه[19] برای مدل‌سازی قطره ویسکوالاستیک به عنوان معادله ساختاری استفاده شده است. در این تحقیق فرض شده است که سیالات غیرقابل انحلال هستند و سرعت سقوط قطره در فاز سیال خارجی آن‌قدر کم باشد که آن را بتوان جریان خزشی لحاظ کرد. در این تحقیق، اعداد دبورا[20] و مویینگی به‌عنوان پارامترهای اغتشاشی مورد استفاده قرار گرفتند. بعد از بی-بعدسازی معادله سیال مرتبه سه، عدد بی‌بعد دبورا در معادلات ظاهر می‌شود و به‌دلیل وجود عدد بی‌بعد دبورا و خطی‌سازی معادلات حاکم بر مسئله، از این عدد به عنوان پارامتر اغتشاشی استفاده شده است. با توجه به فرضیات لحاظ شده، روغن سیلیکون به عنوان سیال خارجی در بخش آزمایشگاهی انتخاب شده است که در ابتدا از روغن 980 سانتی پویزی برای قطرات کوچک و سپس از روغن 490 سانتی پویزی برای محدوده قطرات بزرگتر استفاده شده است. قطرات کوچک سیالات ویسکوالاستیک به دلیل غلبه کردن نیروی کشش سطحی بر سایر نیروهای وارد بر قطره، همچنان شکل کروی خود را

[1] Falling
[2] Raising
[3] Creeping
[4] Terminal velocity
[5] Drag force
[6] Stoke’s equation
[7] Inertia
[8] Reynolds
[9] Capillary
[10] Oblate
[11] Perturbation
[12] Prolate
[13] Dimple
[14] Power-law

[15] Viscoelastic
[16] Xantham
[17] Glycerol
[18] Polydimethilsiloxan
[19] The Third Order Constitutive Equation
[20] Deborah

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.21.7]

حفظ می‌کردند. با افزایش حجم قطره (قطر معادل قطره)، شکل قطره ناپایدار شده و کرویت خود را از دست می‌دهد و به شکل یک قطره پهن‌شده تبدیل می‌گردد. با افزایش پارامتر دبورا در انتهای قطره یک فرورفتگی ایجاد می‌شود که قسمت بالایی قطره را به سمت داخل خود کشیده و یک حفره در قسمت فوقانی قطره ایجاد می‌نماید. نتایج به‌دست آمده از حل تحلیلی دارای تطابق خوبی با نتایج حاصل از مشاهدات آزمایشگاهی است. افزایش شعاع قطره یا به‌عبارتی افزایش پارامتر دبورا باعث رشد این فرورفتگی تا حدی می‌تواند شود که قطره شکل یک دونات را به خود بگیرد و سیال خارجی از داخل سیال داخلی عبور کند. این نوع تغییر شکل برای قطرات خیلی بزرگتر رخ خواهد داد که این قطرات نسبت به قطرات کوچکتر نیاز به فاصله زیادی از ابتدای سقوط قطره دارند، تا به حالت پایدار خود برسند. یکی از تحقیقات خوب در این زمینه کار نوح و همکاران [15] است که با استفاده از شبیه‌سازی عددی به بررسی این پدیده پرداخته‌اند. به‌صورت عمومی، اثر کشش سطحی به‌عنوان عامل نگه دارنده شکل قطره به‌صورت کروی گزارش شده است. در سیالات غیرنیوتنی با افزایش خاصیت الاستیک و حجم قطره تنش‌های نرمال بر نیروی کشش سطحی غلبه کرده و شکل قطره را از حالت کروی خارج کرده و به شکل‌های دیگر تغییر می‌دهند. آگراوال و سرکار [16] تغییر شکل یک قطره ویسکوالاستیک در سیال نیوتنی برای عدد رینولدز پایین (Re=0.1) را به‌صورت عددی بررسی کردند. در این پژوهش از معادله ساختاری اولدروید-بی[1] برای مدل کردن قطره در حال حرکت استفاده شده است. آن‌ها همچنین نمودار تغییر شکل پایا نسبت به عدد بی‌بعد موبینگی برای مقادیر مختلف دبورا نمایش دادند.

امین‌زاده و همکاران [17] حرکت قطرات نیوتنی و غیرنیوتنی را بصورت آزمایشگاهی بررسی کردند. برای ارزیابی اثر سیال بیرونی که قطره در آن حرکت می‌کند از آب و هوا به عنوان سیالات با خواص متفاوت که دارای کاربری وسیع صنعتی هستند، استفاده شده است. محدوده رژیم جریان آن‌ها $50 < \mathrm{Re} < 500$ بوده و آنالیز تصاویر حاصل شده از دوربین سرعت بالا به عنوان روش آزمایش بکار رفته است. زارع وامرزنی [18] و همکاران سقوط خزشی یک قطره ویسکوالاستیک در میان یک فاز مایع را به صورت تحلیلی بررسی کردند و نشان دادند که با افزایش حجم قطره، حفره‌ای در انتهای قطره ایجاد خواهد شد. داودی و نوروزی [19] حرکت و تغییرشکل قطرات ویسکوالاستیک در سیال غیرنیوتنی را به صورت تحلیلی و آزمایشگاهی بررسی کرده‌اند. آن‌ها از تکنیک اغتشاشات به‌عنوان روش حل تحلیلی برای سقوط قطره ویسکوالاستیک استفاده کردند. با افزایش عدد بی‌بعد دبورا یک حفره در انتهای قطره ایجاد می‌شود. وانچو و همکاران [20] مطالعه‌هایی روی حرکت قطره نیوتنی در یک سیال ساکن و بی‌نهایت غیرنیوتنی به‌صورت آزمایشگاهی انجام دادند. در ادامه این سری از بررسی‌ها آکارایا و همکاران [22,21] یک سری بررسی‌هایی روی خاصیت ویسکوزیته سیالاتی که با افزایش نرخ برش کاهش می‌یابند انجام دادند و حتی یک رابطه ریاضی برای تنش برشی حالاتی که عدد رینولدز پایین است پیشنهاد کردند. در برخی از تحقیقات دیگر، اثر الاستیسیته[2] روی شکل قطره، برای حالتی که سیال داخلی نیوتنی و سیال بیرونی ویسکوالاستیک می‌باشد، مورد بررسی قرار گرفته است. واگنر و اسلاتری [23] با استفاده از حل تحلیلی توانستند شکل پایای قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط در سیال ویسکوالاستیک محیط را به‌دست آورند. آن‌ها برای مدل‌سازی فاز قطره و سیال محیط از مدل سیال مرتبه سه برای هر دو فاز بهره بردند. روش حل آن‌ها استفاده از تکنیک حساب اغتشاشات برای هر دو سیال قطره و محیط بوده است.

در تحقیق حاضر شکل و حرکت قطره غیرنیوتنی در حال سقوط در سیال نیوتنی در رژیم اینرسی آرام به‌صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. برای شبیه‌سازی تنش پلیمری قطره غیرنیوتنی در حل تحلیلی از مدل فوق همرفتی ماکسول و برای سیال محیط از مدل نیوتنی استفاده شده است. روش حل تحلیلی استفاده از حساب اغتشاشات برای هر دو سیال نیوتنی و قطره غیرنیوتنی می‌باشد. از اعداد بی‌بعد رینولدز، دبورا و موبینگی به‌عنوان پارامترهای اغتشاشی مورد استفاده قرار گرفته است. به‌منظور خطی‌سازی معادلات حاکم بر مسئله در روش تحلیلی از اعداد بی‌بعد رینولدز و دبورا استفاده شده است. حل مسئله طی دو مرحله انجام گرفته است. در مرحله اول با فرض کروی بودن قطرات، جریان و تنش‌ها به‌دست آمده است. با استفاده از این حل تنش‌ها و فشار روی سطح کروی قطره به‌دست آمده و با استفاده از معادله تنش نرمال و استفاده از شرایط مرزی معادله تنش نرمال، یک شکل اولیه برای قطره به دست می‌آید. در مرحله دوم جریان درون شکل تخمین زده شده در مرحله قبل محاسبه می‌شود و با استفاده از شرط مرزی بسط داده شده تنش، یک شکل دقیق‌تر از قطره تخمین زده می‌شود. در این تحقیق تغییرات شکل قطره نسبت به عدد بی‌بعد دبورا بررسی شده است.

برتری و نوآوری تحقیق حاضر نسبت به تحقیقات پیشین در نظر گرفتن ترم جابجایی (ترم غیرخطی) معادلات اندازه حرکت می‌باشد که در مطالعات پیشین به‌دلیل خزشی بودن جریان، این ترم صرف‌نظر شده است و چون این ترم غیرخطی می‌باشد، محاسبات و روش حل تحلیلی را سنگین و پیچیده خواهد کرد. به‌دلیل غیرخطی شدن معادلات اندازه حرکت از بسط عدد بی‌بعد رینولدز برای خطی‌سازی معادلات نیوتنی و از بسط عدد بی‌بعد دبورا برای خطی سازی معادلات غیر نیوتنی تحقیق حاضر استفاده شده است. در تحقیق حاضر با استفاده از روش حل حساب اغتشاشات جریان لختی مربوط به سقوط قطره غیرنیوتنی در اعداد رینولدز پایین را بررسی کرده‌ایم و حل خزشی مربوط به تحقیقات پیشین را ارتقا داده‌ایم.

2- معادلات حاکم و شرایط مرزی

به منظور ساده‌سازی معادلات حاکم، مرسوم است از حالت بی‌بعد آن‌ها استفاده شود. لازم به ذکر است که در این‌جا و تمام متن مقاله حاضر، تمامی پارامترهای ستاره‌دار حالات بعددار و پارامترهای بدون ستاره نمایانگر حالات بی‌بعد این پارامترها هستند. از آنجایی که اکثر پارامترها برای هر دو سیال داخلی و بیرونی یکی است. برای نشان دادن سیال داخلی از زیرنویس "i" و برای سیال خارجی از زیرنویس "o" استفاده شده است.

2-1- معادلات حاکم

پارامترهای بی‌بعد مورد استفاده برای جریان داخلی (قطره غیرنیوتنی در حال سقوط) و جریان‌خارجی (سیال نیوتنی) شامل موارد زیر می‌باشد:

$$\tau_i = \frac{{\tau_i}^* R}{(\eta_i)_0 U_0}, u_i = \frac{{u_i}^*}{U_0}, D_i = \frac{{D_i}^* R}{U_0}, \mathrm{De} = \frac{\lambda U_0}{R}, P_i = \frac{{P_i}^* R}{(\eta_i)_0 U_0}$$
(1-الف)

$$\tau_o = \frac{{\tau_o}^* R}{\eta_o U_\infty}, u_o = \frac{{u_o}^*}{U_\infty}, D_o = \frac{{D_o}^* R}{U_\infty}$$
(1-ب)

در پارامترهای ذکر شده، De عدد بی‌بعد دبورا، λ معرف زمان رهایی از تنش، R شعاع معادل قطره، U_0 سرعت مرجع مربوط به داخل قطره غیرنیوتنی، U_∞ سرعت حد قطره و سیال نیوتنی در مرز مشترک آن‌ها، $(\eta_i)_0$ لزجت

[1] Oldroyd-B
[2] Elasticity

قطره در نرخ برش صفر، η_o لزجت سیال نیوتنی، τ_o^* ، u_o^*، P_i^* به ترتیب تانسور بعددار تنش، سرعت و فشار می‌باشد و D_o تانسور نرخ تغییر شکل است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_o = \frac{1}{2}(\nabla u_o + \nabla {u_o}^{\mathrm{T}}) \tag{2}$$

λ زمان رهایی از تنش است که معرف زمان به صفر رسیدن تنش در یک نمونه تحت تغییرشکل ثابت با نرخ برش صفر است. معمولا این ضریب از تست نوسان توسط دستگاه رئومتر و تفسیر داده‌های آن محاسبه می‌شود. در تحقیق حاضر از عدد بی‌بعد Re برای جریان نیوتنی خارجی و از اعداد بی‌بعد Re , De برای جریان داخلی که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند، استفاده شده است:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_o U_\infty R}{\eta_o}\ , \mathrm{Ca} = \frac{\eta_o U_\infty}{\Gamma}\ , \mathrm{De} = \frac{\lambda U_0}{R} = \frac{\lambda U_\infty}{(\mathrm{k}+1)R} \tag{3}$$

در اعداد بی‌بعد ذکر شده، Ca عدد بی‌بعد مویینگی، η_o لزجت سیال نیوتنی و Γ معرف کشش سطحی است. معادلات حاکم بر قطره غیرنیوتنی و سیال ویسکوز، معادلات پیوستگی و اندازه حرکت می‌باشند.

معادلات پیوستگی و اندازه حرکت برای قطره غیرنیوتنی به شرح زیر است:

$$\nabla\cdot {u_i}^* = 0 \tag{4-الف}$$

$$\rho_i \frac{D{u_i}^*}{Dt} = -\nabla {P_i}^* + \rho_i g + \nabla\cdot {\tau_i}^* \tag{4-ب}$$

معادلات پیوستگی و اندازه حرکت برای سیال ویسکوز خارجی از قرار زیر است:

$$\nabla\cdot {u_o}^* = 0 \tag{5-الف}$$

$$\rho_o \frac{D{u_o}^*}{Dt} = -\nabla {P_o}^* + \rho_o g + \nabla\cdot {\tau_o}^* \tag{5-ب}$$

سیال داخلی (قطره غیرنیوتنی) به‌وسیله معادله ساختاری فوق همرفتی ماکسول مدل شده است که به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$${\tau_i}^* + \lambda\hat{d}{\tau_i}^* = 2(\eta_i)_0 {D_i}^* \tag{6}$$

با استفاده از پارامترهای بی‌بعدسازی معرفی شده در معادله (1-الف) شکل بی‌بعد مدل فوق همرفتی ماکسول به‌صورت رابطه زیر به‌دست می‌آید [24]:

$$\tau_i + \mathrm{De}\hat{d}\tau_i = 2(\eta_i)_0 D_i \tag{7}$$

در رابطه بالا، $(\eta_i)_0$ ویسکوزیته قطره غیرنیوتنی در نرخ برش صفر، D_i تانسور نرخ تغییر شکل و $\hat{d}$ اپراتور مشتق همرفتی می‌باشد که به‌صورت زیر قابل تعریف است.

$$\hat{d}_j(A) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u_i)_j\cdot\nabla\right)(A) - \{\left(\nabla(u_i)_j^{\mathrm{T}}\right)(A) + (A)\left(\nabla(u_i)_j\right)\} \tag{8}$$

شکل معادله برای فاز قطره و سیال محیط در معادلات آورده شده است. با دارا بودن دو مجهول تانسور تنش و توزیع فشار حل این معادله امکان‌پذیر نمی‌باشد به همین خاطر با استفاده از روش ورتیسیته، توزیع فشار را از معادله حذف کرده و تابع جریان برای هر مرتبه و هر کدام از سیالات محاسبه می‌گردد. هاپل و برنر [25] در سال 1965 با استفاده از این روش معادله جریان را به شکل زیر به‌دست آوردند.

$$\psi(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n r^{-n} + B_n r^{2-n} + C_n r^{n+1} + D_n r^{n+3})Q_n(\mu) \tag{9-الف}$$

در معادله (9-الف) $\mu = \cos\theta$ و $Q_n(\mu)$ چند جمله‌ای گیگن بایر [1] می‌باشد و با تابع لژاندر $P_n(\mu)$ رابطه‌ای به شکل زیر دارد.

$$Q_n(\mu) = \int_{-1}^{\mu} P_n(\mu)\,\mathrm{ds} \tag{9-ب}$$

در مختصات کروی تابع جریان به صورت زیر تعریف می‌شود [27,26].

$$(u_i)_j(r,\theta) = \left(\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(\psi_i)_j}{\partial\theta}, -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\psi_i)_j}{\partial r}\right) \tag{10-الف}$$

$$(u_o)_j(r,\theta) = \left(\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(\psi_o)_j}{\partial\theta}, -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\psi_o)_j}{\partial r}\right) \tag{10-ب}$$

2-2- شرایط مرزی

شرایط مرزی در فصل مشترک قطره و محیط بیرون عبارتند از:

دو سیال غیرقابل انحلال انتخاب شده‌اند پس می‌توان گفت مؤلفه‌های شعاعی در روی سطح قطره صفر می‌باشد.

$$({u_o}^*)_r = 0\ , ({u_i}^*)_r = 0 \tag{11-الف}$$

مؤلفه‌های عمودی سرعت در فصل مشترک دو سیال دارای رابطه‌ای به شکل زیر هستند.

$$({u_o}^*)_\theta = ({u_i}^*)_\theta \tag{11-ب}$$

مؤلفه مماسی تانسور تنش قطره و سیال نیوتنی دارای رابطه‌ای به شکل زیر می‌باشند.

$$({\tau_o}^*)_{r\theta} = ({\tau_i}^*)_{r\theta} \tag{11-ج}$$

تغییر شکل قطره در حال سقوط در سیال نیوتنی از تعادل نیروی گرانشی، کشش سطحی، فشار و تنش مماسی به‌دست می‌آید [28].

$$n\cdot({\tau_i}^* - {\tau_o}^*)\cdot n - {P_o}^* + {P_i}^* = \Gamma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{12}$$

که در آن n بردار عمود بر واحد سطح است و R_1 و R_2 شعاع انحنای اصلی هستند. ما فرض کردیم که مبدا مختصات در مرکز جرم قطره ثابت شده است. پس از بی‌بعدسازی، شرایط مرزی و معادله تغییر شکل به‌صورت زیر بی‌بعد می‌شوند:

$$(u_o)_r = 0,\quad (u_i)_r = 0 \tag{13-الف}$$

$$(u_o)_\theta = \frac{1}{\mathrm{k}+1}(u_i)_\theta \tag{13-ب}$$

$$(\tau_o)_{r\theta} = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{k}+1}(\tau_i)_{r\theta} \tag{13-ج}$$

$$n\cdot\left(\tau_i - \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{k}+1}\tau_o\right)\cdot n - P_o + P_i = \frac{1}{\mathrm{Ca}}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{14}$$

3- روش حل

از روش حساب اغتشاشات جهت حل میدان جریان استفاده شده است. حل معادله برای هر دو جریان و به‌دست آوردن توابع جریان، توزیع سرعت، فشار و تانسورهای تنش در این بخش مورد بحث قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که معادلات حاکم بر مسئله سقوط قطره غیرنیوتنی در محیط نیوتنی حل می‌شود. به‌منظور خطی‌سازی معادلات حاکم، از پارامترهای اغتشاشی دبورا و رینولدز استفاده می‌کنیم. توزیع سرعت نسبت به اعداد رینولدز، دبورا و موینگی برای جریان داخلی سیال این چنین بسط داده می‌شود. با بهره‌گیری از این روش برای جریان داخلی خواهیم داشت.

$$u_i = (u_i)_0 + \mathrm{Re}(u_i)_1 + \mathrm{ReCa}(u_i)^{(1)} + \mathrm{De}(u_i)_{11} + \mathrm{DeCa}(u_i)^{(11)} \tag{15-الف}$$

$$P_i = (P_i)_0 + \mathrm{Re}(P_i)_1 + \mathrm{ReCa}(P_i)^{(1)} + \mathrm{De}(P_i)_{11} + \mathrm{DeCa}(P_i)^{(11)} \tag{15-ب}$$

$$D_i = (D_i)_0 + \mathrm{Re}(D_i)_1 + \mathrm{ReCa}(D_i)^{(1)} + \mathrm{De}(D_i)_{11} + \mathrm{DeCa}(D_i)^{(11)} \tag{15-ج}$$

$$\psi_i = (\psi_i)_0 + \mathrm{Re}(\psi_i)_1 + \mathrm{ReCa}(\psi_i)^{(1)} + \mathrm{De}(\psi_i)_{11} + \mathrm{DeCa}(\psi_i)^{(11)} \tag{15-د}$$

با جایگذاری بسط‌های اغتشاشی در معادله اندازه حرکت و جمع‌آوری جملات هم مرتبه، معادله مرتبط با همان مرتبه به دست می آید. پس از جمع‌آوری

[1] Gegenbauer

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.21.7]

جملات با مرتبه صفر، معادله به‌دست آمده همانند معادله حاکم بر سیال نیوتنی در مختصات کروی تحت جریان خزشی می‌شود:

$$E^4(\psi_i)_0=0 \quad (16)$$

$$E^4(\psi_o)_0=0 \quad (17)$$

در روابط بالا اپراتور $E^4=E^2E^2$ می‌باشد و E^2 به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \quad (18)$$

بعد از حل این معادله و استفاده کردن از شرایط مرزی جواب جمله صفر حساب اغتشاشات به دست می‌آید که در این حالت دقیقا برابر جملات به دست آمده توسط آقای هادامارد [4] است:

$$(\psi_i)_0=\left(\frac{r^4}{4}-\frac{r^2}{4}\right)\sin(\theta)^2 \quad \text{(19–الف)}$$

$$(\psi_o)_0=\frac{1}{4}\left(-\frac{(3\mathrm{k}+2)r}{\mathrm{k}+1}+2r^2+\frac{\mathrm{k}}{(\mathrm{k}+1)r}\right)\sin(\theta)^2 \quad \text{(19–ب)}$$

برای مرتبه بعدی حساب اغتشاشات همین روند تکرار می‌شود. پس از جمع‌آوری جملات ضریب جمله رینولدز، معادله به شکل زیر به دست می‌آید.

$$E^4(\psi_i)_1=0 \quad \text{(20–الف)}$$

$$E^4(\psi_o)_1=\frac{Q_2(\mu)}{8}\frac{3\mathrm{k}+2}{\mathrm{k}+1}\left(r^2-\frac{r}{2}\frac{3\mathrm{k}+2}{\mathrm{k}+1}-\frac{1}{2r}\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{k}+1}\right) \quad \text{(20–ب)}$$

بعد از حل این معادله و استفاده کردن از شرایط مرزی جواب ضریب جمله رینولدز به دست می‌آید.

$$(\psi_i)_1=-\frac{1}{2}((f_i)_1)\sin(\theta)^2-\frac{1}{2}((f_i)_2)\sin(\theta)^2\cos(\theta) \quad \text{(21–الف)}$$

$$(f_i)_1=-\frac{(3\mathrm{k}+2)r^4}{16(\mathrm{k}+1)}+\frac{(3\mathrm{k}+2)r^2}{16(\mathrm{k}+1)}$$
$$(f_i)_2=-\frac{(12\mathrm{k}^2+23\mathrm{k}+10)r^5}{160(\mathrm{k}+1)^2}+\frac{(12\mathrm{k}^2+23\mathrm{k}+10)r^3}{160(\mathrm{k}+1)^2} \quad \text{(21–ب)}$$

$$(\psi_o)_1=-\frac{1}{2}((f_o)_1)\sin(\theta)^2-\frac{1}{2}((f_o)_2)\sin(\theta)^2\cos(\theta) \quad \text{(22–الف)}$$

$$(f_o)_1=\frac{(3\mathrm{k}+2)^2r}{16(\mathrm{k}+1)}-\frac{3\mathrm{k}+2}{8(\mathrm{k}+1)}r^2+\frac{\mathrm{k}(3\mathrm{k}+2)}{16(\mathrm{k}+1)^2r}$$
$$(f_o)_2=\frac{3\mathrm{k}+2}{8(\mathrm{k}+1)}r^2-\frac{(3\mathrm{k}+2)^2r}{16(\mathrm{k}+1)^2}-\frac{\mathrm{k}(3\mathrm{k}+2)}{16(\mathrm{k}+1)^2r}+\frac{\mathrm{k}(15\mathrm{k}^2+22\mathrm{k}+8)}{80(\mathrm{k}+1)^3}+\frac{\mathrm{k}(15\mathrm{k}^2+22\mathrm{k}+8)}{80(\mathrm{k}+1)^3r^2} \quad \text{(22–ب)}$$

همچنین در ادامه ضریب جمله رینولدز-موییِنگی به صورت زیر به‌دست خواهد آمد.

$$(\psi_i)^{(1)}=-\frac{1}{2}\left((f_i)^{(1)}\right)\sin(\theta)^2-\frac{1}{8}\left((f_i)^{(2)}\right)\sin(\theta)^2\,(5\cos(\theta)^2-1) \quad \text{(23–الف)}$$

$$(f_i)^{(1)}=\frac{\alpha_2(4-2\mathrm{k})r^4}{5(\mathrm{k}+1)}+\frac{(3\mathrm{k}-3)r^2}{5(\mathrm{k}+1)}$$
$$(f_i)^{(2)}=\frac{6\alpha_2(5)r^6}{35}+\frac{6\alpha_2(-12)r^4}{35} \quad \text{(23–ب)}$$

$$(\psi_o)^{(1)}=-\frac{1}{2}\left(f^{(r1)}\right)\sin(\theta)^2-\frac{1}{8}\left(f^{(r2)}\right)\sin(\theta)^2\,(5\cos(\theta)^2-1) \quad \text{(24–الف)}$$

$$f^{(r2)}=\frac{\alpha_2}{35(\mathrm{k}+1)}\left[\frac{21\mathrm{k}+18}{r}-\frac{21\mathrm{k}+4}{r^3}\right] \quad \text{(24–ب)}$$

پس از جایگذاری در معادله متشکله و سازه‌های لازم ضریب جمله دبورا برحسب پارامترهای جریان به شکل ساده و خطی‌سازی شده زیر به دست خواهد آمد:

$$(\tau_i)_{11}=2(D_i)_{11}-2\hat{d}_0(D_i)_0 \quad (25)$$

باید توجه داشت که برای سیال نیوتنی همواره شرط $\tau_i=2D_i$ برقرار می‌باشد.

پس از جمع‌آوری ضریب جمله دبورا، معادله به شکل زیر به دست می‌آید:

$$E^4(\psi_i)_{11}=-r\sin(\theta)[\nabla\times\nabla\cdot(\hat{d}_0(D_i)_0)] \quad \text{(26–الف)}$$

$$E^4(\psi_o)_{11}=0 \quad \text{(26–ب)}$$

بعد از حل این معادله و استفاده کردن از شرایط مرزی جواب ضریب جمله دبورا حساب اغتشاشات به دست می‌آید:

$$(\psi_i)_{11}=-\frac{1}{2}((f_i)_{11})\sin(\theta)^2\cos(\theta) \quad \text{(27–الف)}$$

$$(f_i)_{11}=-\frac{12\mathrm{k}r^5}{10(\mathrm{k}+1)}+\frac{12\mathrm{k}r^3}{10(\mathrm{k}+1)} \quad \text{(27–ب)}$$

$$(\psi_o)_{11}=-\frac{1}{2}((f_o)_{11})\sin(\theta)^2\cos(\theta) \quad \text{(28–الف)}$$

$$(f_o)_{11}=\frac{12\mathrm{k}}{10(\mathrm{k}+1)^2r^2}-\frac{12\mathrm{k}}{10(\mathrm{k}+1)^2} \quad \text{(28–ب)}$$

بعد از محاسبه تنش‌های نرمال و جمله فشار، با استفاده از معادله جریان و استفاده از معادله (14) شکل جدید قطره به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta p-4\alpha_3\mathrm{De}P_2(\mu)=\frac{1}{\mathrm{Ca}}\left(2-2\zeta-\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{d\zeta}{d\mu}\right]\right) \quad (29)$$

برای این‌که شکل قطره همچنان کروی باقی بماند باید مرکز جرم قطره در مرکز قطره باقی بماند. همچنین قانون بقای جرم نیز باید برقرار باشد. این دو شرط را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$\int_{-1}^{1}\zeta d\mu=0,\quad \int_{-1}^{1}\zeta\mu d\mu=0 \quad (30)$$

در معادله (29) مقادیر δp و α_3 به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\delta\mathrm{p}=\frac{2}{\mathrm{Ca}},$$
$$\alpha_3=\frac{1}{60}\frac{(54\mathrm{k}^2+97\mathrm{k}-65)}{(\mathrm{k}+1)^2} \quad (31)$$

که در نهایت تابع تغییر شکل ζ به صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\zeta=-\frac{\mathrm{DeCa}}{60}\frac{(54\mathrm{k}^2+97\mathrm{k}-65)(3\cos(\theta)^2-1)}{(\mathrm{k}+1)^2} \quad (32)$$

ضریب جمله دبورا-موییِنگی همانند ضریب جمله رینولدز-موییِنگی به‌دست خواهد آمد. در این مرحله با شکل تخمین زده شده در مرحله قبل حل جریان تصحیح و با تابع جریان جدید شکل دقیق‌تری از قطره محاسبه شده است. جملات تنش قطره به صورت نیوتنی ظاهر می‌شوند. در مرحله قبلی تابع جریان با فرض کروی بودن قطره و با استفاده از شرایط مرزی در سطح کره به دست آمده‌اند. در این مرحله هدف این است که توابع جریان در شکل تخمین زده شده جدید محاسبه شود. بنابراین در این مرحله شرایط مرزی در شکل تخمین زده شده اعمال شده است. به منظور ساده‌سازی سوستارز و بلمونته [14] پیشنهاد کردند که شرایط مرزی همچنان روی $r=1$ اعمال شود و در عوض خود شرایط مرزی روی شکل جدید بسط داده شود. شرایط مرزی بسط داده شده جدید به صورت زیر ارائه شده است:

$$(u_o)_r^{(11)}-\alpha_2P_2(\cos\theta)\frac{\partial(u_o)_{0,r}}{\partial r}-3\alpha_2\cos\theta\sin\theta\,(u_o)_{0,\theta}=0 \quad \text{(33–الف)}$$

$$(u_i)_r^{(11)}-\alpha_2P_2(\cos\theta)\frac{\partial(u_i)_{0,r}}{\partial r}-3\alpha_2\cos\theta\sin\theta\,(u_i)_{0,\theta}=0 \quad \text{(33–ب)}$$

$$(u_o)_\theta^{(11)}-\alpha_2P_2(\cos\theta)\frac{\partial(u_o)_{0,\theta}}{\partial r}+3\alpha_2\cos\theta\sin\theta\,(u_o)_{0,r}=\frac{1}{(\mathrm{k}+1)}\left((u_i)_\theta^{(11)}-\alpha_2P_2(\cos\theta)\frac{\partial(u_i)_{0,\theta}}{\partial r}+3\alpha_2\cos\theta\sin\theta\,(u_i)_{0,r}\right) \quad \text{(33–ج)}$$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.21.7]

$$(\tau_o)_{r\theta}^{(11)} - \alpha_2 P_2(\cos\theta)\frac{\partial(\tau_o)_{0,r\theta}}{\partial r} + 3\alpha_2\cos\theta\sin\theta\left((\tau_o)_{0,rr}-(\tau_o)_{0,\theta\theta}\right) = \frac{\mathrm{k}}{(\mathrm{k}+1)}\left((\tau_i)_{r\theta}^{(11)} - \alpha_2 P_2(\cos\theta)\frac{\partial(\tau_i)_{0,r\theta}}{\partial r} + 3\alpha_2\cos\theta\sin\theta\left((\tau_i)_{0,rr} - (\tau_i)_{0,\theta\theta}\right)\right)$$

(33-د)

با استفاده از شرایط مرزی جدید تابع جریان ضریب جمله دبورا-موییینگی مطابق زیر محاسبه شده است:

$$(\psi_i)^{(11)} = -\frac{1}{2}\left((f_i)^{(11)}\right)\sin(\theta)^2 - \frac{1}{8}\left((f_i)^{(22)}\right)\sin(\theta)^2\left(5\cos(\theta)^2-1\right)$$

(34-الف)

$$(f_i)^{(11)} = \frac{\alpha_2(4-2\mathrm{k})r^4}{5(\mathrm{k}+1)} + \frac{(3\mathrm{k}-3)r^2}{5(\mathrm{k}+1)}$$
$$(f_i)^{(22)} = \frac{6\alpha_2(5)r^6}{35} + \frac{6\alpha_2(-12)r^4}{35}$$

(34-ب)

$$(\psi_o)^{(11)} = -\frac{1}{2}\left((f_o)^{(11)}\right)\sin(\theta)^2 - \frac{1}{8}\left((f_o)^{(22)}\right)\sin(\theta)^2\left(5\cos(\theta)^2-1\right)$$

(35-الف)

$$(f_o)^{(11)} = \frac{\alpha_2}{10(\mathrm{k}+1)^2}\left[(3\mathrm{k}^2-\mathrm{k}+8)r + \frac{3\mathrm{k}^2-3\mathrm{k}+6}{r}\right]$$
$$(f_o)^{(22)} = \frac{\alpha_2}{35(\mathrm{k}+1)}\left[\frac{21\mathrm{k}+18}{r} - \frac{21\mathrm{k}+4}{r^3}\right]$$

(35-ب)

حال برای به‌دست آوردن تغییر شکل ناشی از این جمله ابتدا باید $(\tau_i)^{(11)}$ و $\tau^{(11)}$ را به‌دست آورده و در معادله (36) قرار دهیم:

$$n\cdot\left((\tau_o)^{(11)} - (\tau_i)^{(11)}\right)\cdot n = (\tau_o)_{rr}^{(11)} - \alpha_2 P_2(\cos\theta)\frac{\partial(\tau_o)_{0,rr}}{\partial r} - 6\alpha_2\cos\theta\sin\theta\,(\tau_o)_{0,r\theta} - \mathrm{k}\left((\tau_i)_{rr}^{(11)} - \alpha_2 P_2(\cos\theta)\frac{\partial(\tau_i)_{0,rr}}{\partial r} - 6\alpha_2\cos\theta\sin\theta\,(\tau_i)_{0,r\theta}\right)$$

(36)

با قرار دادن معادله (36) در معادله تنش نرمال (14) داریم:

$$-10\beta_2\mathrm{DeCa}P_3(\mu) = \frac{1}{\mathrm{Ca}}\left(2-2\xi-\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{d\xi}{d\mu}\right]\right) \quad (37)$$

که در آن

$$\beta_2 = \frac{3\alpha_2(173\mathrm{k}+142)}{700(\mathrm{k}+1)} \quad (38)$$

با استفاده از شرایط مرزی معادله (30) و حل معادله (37) داریم:

$$\zeta = -\frac{3\alpha_2\mathrm{DeCa}^2(173\mathrm{k}+142)}{700(\mathrm{k}+1)}P_3(\mu) \quad (39)$$

با استفاده از شرط مرزی تنش‌های نرمال تغییر شکل اصلاح شده برابر با رابطه زیر به دست آمده است:

$$r(\theta) = 1-\alpha_2\mathrm{ReCa}P_2(\mu) - \beta_2\mathrm{ReCa}^2P_3(\mu) - \alpha_3\mathrm{DeCa}P_2(\mu) - \beta_2\mathrm{DeCa}^2P_3(\mu) \quad (40)$$

برای به‌دست آوردن سرعت نهایی باید از برآیند نیروهای پسا و حجمی استفاده شود. برآیند نیروهای وارده بر قطره به‌صورت زیر می‌باشد.

$$F = F_D + F_B \quad (41)$$

در معادله بالا نیروی حجمی وارده بر قطره به‌صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$F_B = \frac{4\pi\rho_o g R^2(1-\gamma)}{3\eta U_\infty} \quad (42)$$

برای محاسبه نیروی پسا وارده بر سطح قطره از تئوری پاین و پل [29] استفاده می‌شودکه به‌صورت زیر بیان شده است.

$$F_D = 8\pi\lim_{r\to\infty}\frac{\psi_\infty - (\psi_o)(r,\theta)}{r\sin^2\theta} \quad (43)$$

در رابطه بالا $\psi_\infty = (r^2\sin^2\theta)/2$ و به آن خط جریان آزاد می‌گویند. تا به این‌جا تمامی جملات حساب اغتشاشات برای به‌دست آوردن توابع جریان، برای سیال قطره و محیط نیوتنی محاسبه شده است. برای محاسبه سرعت نهایی قطره در حال سقوط، تابع جریان سیال نیوتنی محیط را بصورت $(\psi_o) = (\psi_o)_0 + \mathrm{Re}(\psi_o)_1 + \mathrm{ReCa}(\psi_o)^{(1)} + \mathrm{De}(\psi_o)_{11} + \mathrm{DeCa}(\psi_o)^{(11)}$ در معادله (43) قرار می‌دهیم. نیروی‌کلی پسا وارده بر سطح قطره به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$F_D = 2\pi\frac{3\mathrm{k}+2}{\mathrm{k}+1} + \mathrm{Re}\frac{\pi}{4}\left(\frac{3\mathrm{k}+2}{\mathrm{k}+1}\right)^2 + \frac{2\pi\alpha_2\mathrm{ReCa}}{5(\mathrm{k}+1)^2}(3\mathrm{k}^2+11\mathrm{k}-4) + \frac{2\pi\alpha_3\mathrm{DeCa}}{5(\mathrm{k}+1)^2}(3\mathrm{k}^2+11\mathrm{k}-4) \quad (44)$$

سرعت نهایی قطره در حال سقوط با استفاده از تعادل نیروی حجمی وارده بر قطره و نیروی پسا کلی وارد شده بر سطح آن به‌صورت زیر محاسبه شده است:

$$U_\infty = \frac{4\pi}{3}(\rho_o g R^2(\gamma-1)) / \left[\eta\left(2\pi\frac{3\mathrm{k}+2}{\mathrm{k}+1} + \mathrm{Re}\frac{\pi}{4}\left(\frac{3\mathrm{k}+2}{\mathrm{k}+1}\right)^2 + \frac{2\pi\alpha_2\mathrm{ReCa}}{5(\mathrm{k}+1)^2}(3\mathrm{k}^2+11\mathrm{k}-4) + \frac{2\pi\alpha_3\mathrm{DeCa}}{5(\mathrm{k}+1)^2}(3\mathrm{k}^2+11\mathrm{k}-4)\right)\right]$$

(45)

4- نتایج و بحث

4-1- مقایسه نتایج تحلیلی

در ابتدای امر با در نظر گرفتن De = 0 می‌توان حل حاضر را با حل امامیان و همکاران [9] از لحاظ کمی بررسی و صحت تحقیق حاضر را مورد بررسی قرار داد. در "شکل 1" نتایج به‌دست آمده برای تخمین سرعت حد در حل تحلیلی امامیان و همکاران [9] را با حل تحلیلی حاضر مقایسه کرده‌ایم. همان‌طور که دیده می‌شود با افزایش حجم قطره سرعت سقوط افزایش می‌یابد.

همچنین می‌توان تحقیق حاضر را با حل تیلور و آکریووس [6] از لحاظ کیفی بررسی و صحت تحقیق حاضر را مورد بررسی قرار داد. همان‌طور که در "شکل 2" مشاهده می‌شود نتایج حاصل از تحقیق حاضر با حل تیلور و

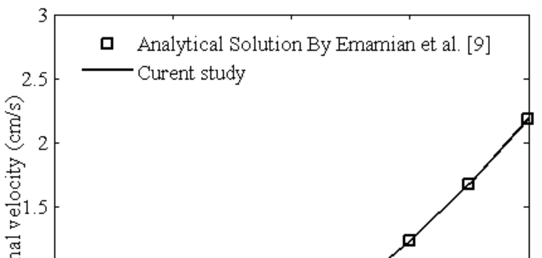

Fig. 1 Variation of terminal velocity with equivalent radius

شکل 1 تغییرات سرعت حد برحسب شعاع

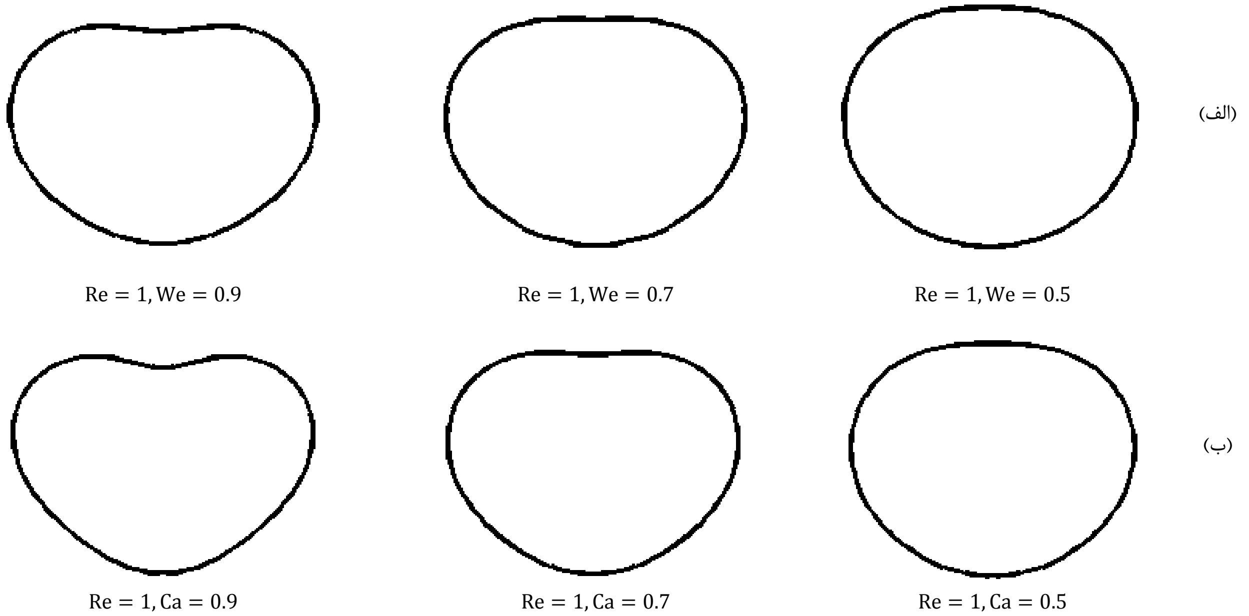

Fig. 2 A comparison between the steady shape of (a) the analytical solution of Taylor and Acrivos [6] (b) the current study solution.

شکل2 مقایسه بین تغییر شکل به‌دست آمده از (الف) حل تحلیلی تیلور آکریوس [6] (ب) حل تحلیلی حاضر

آکریووس [6] تطابق خوبی دارد. با افزایش سایز قطره و به تبع آن افزایش اعداد رینولدز و مویینگی شکل قطره از حالت کروی به یک حالت پهن‌شده تبدیل می‌شود. با ادامه این روند افزایشی یک فرورفتگی در انتهای قطره به وجود می‌آید.

در "شکل 3" تأثیر جملات مختلف محاسبه شده را بر روی شکل پایای قطره مشاهده می‌کنیم. فرورفتگی ایجاد شده در انتهای قطره سبب افزایش نیروی درگ و به تبع آن کاهش سرعت حد قطره می‌شود.

4-2- تأثیر متغیرها بر روی نیروی درگ

"شکل 4" تغییرات نیروی درگ وارده بر سطح قطره در حال سقوط را در مقابل عدد رینولدز به ازای اعداد مویینگی مختلف نشان می‌دهد. در این شکل می‌توان اثر نیروی لختی قطره را روی نیروی درگ مشاهده نمود. با توجه به این شکل، افزایش نیروی لختی در فاز قطره افزایش نیروی درگ وارده را درپی دارد. افزایش عدد مویینگی سبب افزایش نیروی درگ در قطرات غیرنیوتنی می‌شود. افزایش نیروی لختی قطره، افزایش تغییر شکل قطره را درپی دارد و ادامه روند افزایش آن سبب توسعه این تغییر شکل می‌شود. بنابراین، از "شکل 4" نتیجه می‌شود که رشد تغییر شکل پایای قطره غیرنیوتنی به‌واسطه افزایش نیروی لختی یا مویینگی، نیروی درگ وارده بر سطح آن را افزایش می‌دهد.

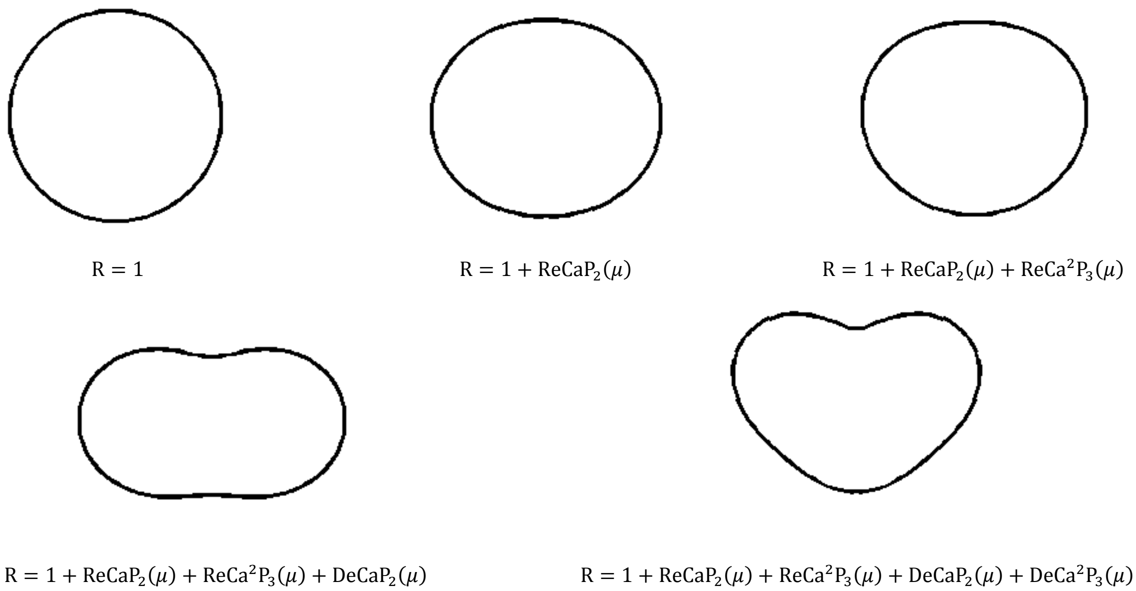

Fig. 3 Effects of different perturbation solution order on drop shape

شکل 3 تأثیر جملات با درجه‌های مختلف روی شکل قطره

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.21.7]

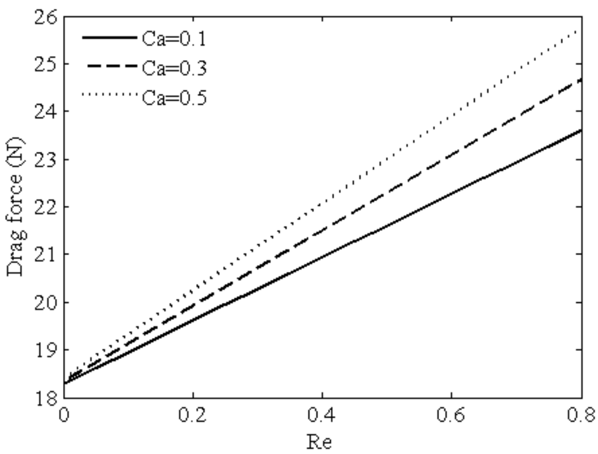

Fig. 4 Drag force at free surface against the capillary number

شکل 4 تغییرات نیروی درگ سطح قطره با تغییر عدد بی‌بعد مویینگی

"شکل 5" تغییرات نیروی درگ وارده بر سطح قطره در حال سقوط را در مقابل عدد دبورا به ازای اعداد مویینگی مختلف نشان می‌دهد. عدد دبورا نشان دهنده خاصیت الاستیک فاز قطره می‌باشد. با افزایش خاصیت الاستیک، نیروی درگ وارد بر قطره افزایش پیدا می‌کند. همچنین افزایش عدد بی‌بعد مویینگی نیز سبب روند افزایشی نیروی درگ می‌شود.

3-4- تأثیر متغیرها در تنش شعاعی قطره

عامل اصلی تاثیرگذار بر روی حرکت قطره غیرنیوتنی در حال سقوط در فاز نیوتنی علاوه بر لختی جریان، غلبه نیروی حاصل از مؤلفه نرمال شعاعی تنش $\tilde{\tau}_{rr}$ بر نیروی کشش سطحی می‌باشد. "شکل 6" نشان دهنده توزیع تنش روی سطح قطره غیرنیوتنی می‌باشد. همان‌طور که قبلا اشاره شد، تغییرشکل قطره و ایجاد حفره در قسمت انتهایی آن از همین مولفه تانسور تنش قطره ناشی می‌شود. حفره ایجاد شده در انتهای قطره سبب افزایش نیروی درگ و در نتیجه باعث کاهش سرعت حد قطره می‌شود. مشاهده می‌گردد، مقدار بیشینه این مولفه در $\theta = 0$ یعنی در قسمت انتهایی قطره رخ می‌دهد. در $\theta = 180$ نمودار توزیع تنش روی سطح قطره غیرنیوتنی متقارن می‌باشد. به همین خاطر مقادیر نرمال شعاعی تنش $\tilde{\tau}_{rr}$ را به ازای پارامترهای مختلف تاثیر گذار بر روی مولفه شعاعی تنش، در محدوده $0 < \theta < 180$ رسم خواهیم کرد.

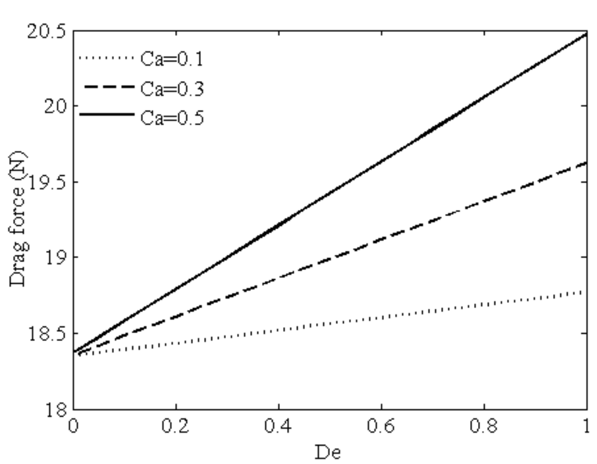

Fig. 5 Drag force at free surface against the capillary number

شکل 5 تغییرات نیروی درگ سطح قطره با تغییر عدد بی‌بعد مویینگی

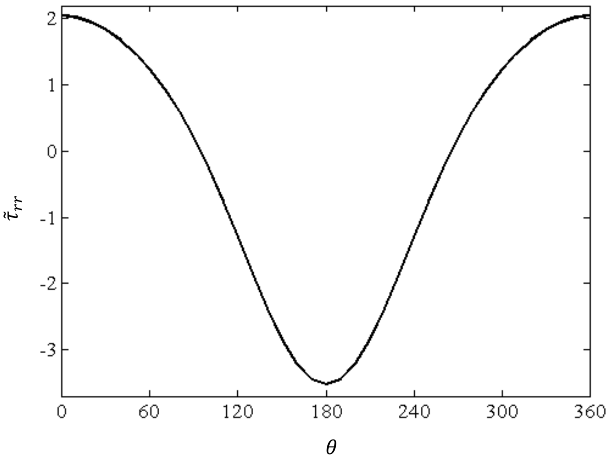

Fig. 6 Normal component of stress $\tilde{\tau}_{rr}$ at free surface for $\mathrm{Re} = 0.9, \mathrm{Ca} = 0.5, \mathrm{De} = 0.7, \mathrm{k} = 10$

شکل 6 تغییرات تنش $\tilde{\tau}_{rr}$ سطح قطره برای $\mathrm{Re} = 0.9, \mathrm{Ca} = 0.5, \mathrm{De} = 0.7, \mathrm{k} = 10$

با افزایش عدد دبورا، خاصیت الاستیک قطره غیرنیوتنی افزایش می‌یابد. همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم، با افزایش عدد دبورا به ازای حجم مشخص، میزان فرورفتگی انتهای قطره افزایش یافته و قطره بیشتر از حالت کروی فاصله می‌گیرد. با افزایش حجم قطره تنش شعاعی افزایش می‌یابد و به عنوان نیروی غالب باعث کاهش سرعت حد قطره می‌گردد. در "شکل 7" می‌توان اثر تغییرات عدد بی‌بعد دبورا بر $\tilde{\tau}_{rr}$ را مشاهده نمود.

4-4- تأثیر متغیرها بر سرعت حد قطره

یکی از پارامترهای مهم و تاثیرگذار بر روی حرکت قطره، سرعت حد قطره می‌باشد. در "شکل 8" سرعت حد قطره غیرنیوتنی در حال سقوط به ازای اعداد دبورا مختلف را نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود، افزایش عدد دبورا (خاصیت الاستیک) سیال قطره در حال سقوط، سرعت حد قطره را کاهش می‌دهد. با افزایش عدد دبورا فرورفتگی انتهای قطره افزایش پیدا کرده و در نتیجه نیروی درگ آن افزایش و به تبع آن سرعت حد قطره کاهش پیدا می‌کند.

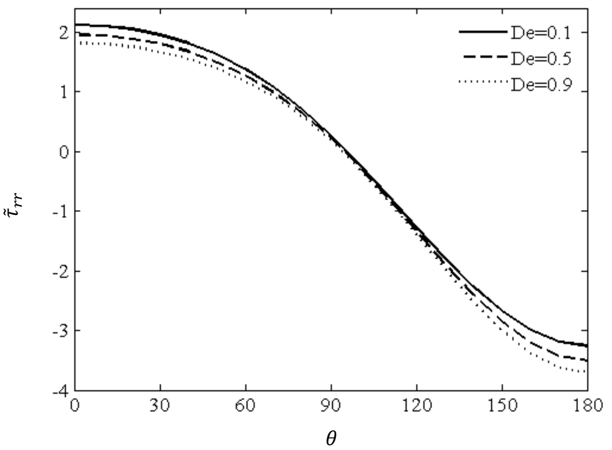

Fig. 7 Normal component of stress $\tilde{\tau}_{rr}$ at free surface against the Deborah number for $\mathrm{Re} = 0.9, \mathrm{Ca} = 0.5, \mathrm{k} = 20$

شکل 7 تغییرات $\tilde{\tau}_{rr}$ سطح قطره با تغییر دبورا برای $\mathrm{Re} = 0.7, \mathrm{Ca} = 0.5, \mathrm{k} = 20$

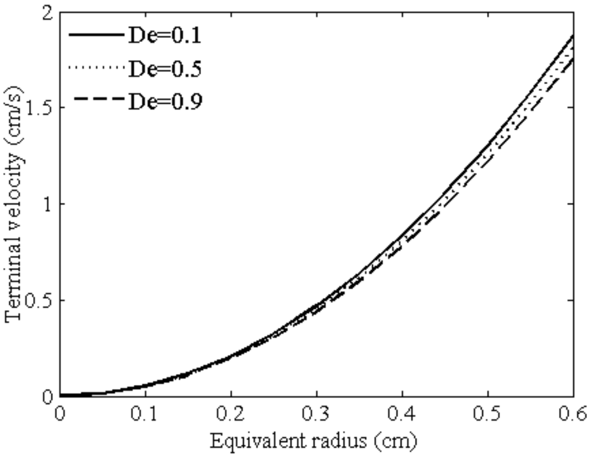

Fig. 8 Terminal velocity against the Deborah number for $\mathrm{Re}=0.9, \mathrm{Ca}=0.5, \mathrm{k}=20$

شکل 8 تغییرات سرعت حد قطره با تغییر عدد دبورا برای $\mathrm{Re}=0.7, \mathrm{Ca}=0.5, \mathrm{k}=20$

در "شکل 9" و "شکل 10" به ترتیب تأثیر تغییرات اعداد بی‌بعد رینولدز و مویینگی را بر روی سرعت حد قطره غیرنیوتنی مشاهده می‌کنیم. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تاثیر تغییرات عدد بی‌بعد رینولدز بر روی سرعت حد قطره بیشتر می‌باشد به‌عبارتی دیگر با افزایش عدد بی‌بعد رینولدز سرعت حد قطره بیشتر، کاهش پیدا می‌کند و تاثیر عدد بی‌بعد مویینگی بر روی سرعت حد قطره ناچیز می‌باشد.

در "شکل 11" تأثیر پارامتر بی‌بعد نسبت ویسکوزیته k بر روی بردارهای سرعت داخل قطره مشاهده می‌شود. همان‌طور که قبلاً نیز گفته شد به ازای $k>10$، افزایش مقدار متغیر k تأثیری بر روی شکل قطره و تنش شعاعی قطره ندارد. در "شکل 11" نیز مشاهده می‌شود که به ازای $k>10$، تغییر متغیر k تأثیری بر روی میدان سرعت داخل قطره ندارد.

5- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، حرکت و شکل پایای سقوط قطره غیرنیوتنی در سیال نیوتنی در اعداد رینولدز پایین به‌صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. از حساب اغتشاشات به‌عنوان روش حل تحلیلی استفاده شده است. اعداد بی‌بعد رینولدز، دبورا و مویینگی به عنوان پارامتر اغتشاشی استفاده شده است. از مدل فوق همرفتی ماکسول برای شبیه سازی فاز قطره و از مدل نیوتنی برای فاز محیط پیرامون آن استفاده شده است. در مطالعه حاضر حرکت و شکل پایای قطره در حال سقوط نسبت به پارامترهای تأثیرگذار بررسی و مورد بحث قرار گرفته است.

با بررسی پارامترهای تأثیرگذار روی حرکت و شکل قطرات مشخص گردید که:

- با افزایش عدد دبورا (خاصیت الاستیک قطره) حفره ایجاد شده در قسمت انتهایی قطره رشد و توسعه می‌یابد و سرعت حد قطره کاهش پیدا می‌کند.
- با افزایش خاصیت الاستیک (عدد بی‌بعد دبورا) قطره غیرنیوتنی، نیروی درگ قطره افزایش پیدا می‌کند.
- تغییرات نسبت ویسکوزیته k، به ازای $k<10$ روی شکل پایای و میدان سرعت داخل قطرات مشهود می‌باشد و به ازای $k>10$ تغییر چندانی روی شکل قطره نخواهد داشت.

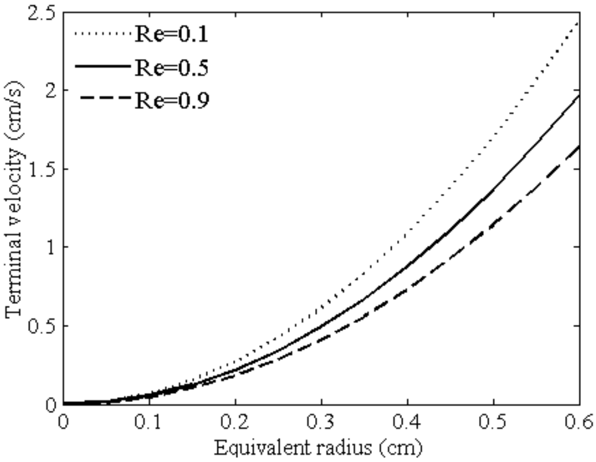

Fig. 9 Terminal velocity against the Reynolds number for $\mathrm{Re}=0.9, \mathrm{Ca}=0.5, \mathrm{k}=20, \eta=0.35\ \mathrm{kgm^{-1}s^{-1}}$

شکل 9 تغییرات سرعت حد قطره با تغییر عدد رینولدز برای $\mathrm{Re}=0.7, \mathrm{Ca}=0.5, \mathrm{k}=20, \eta=0.35\ \mathrm{kgm^{-1}s^{-1}}$

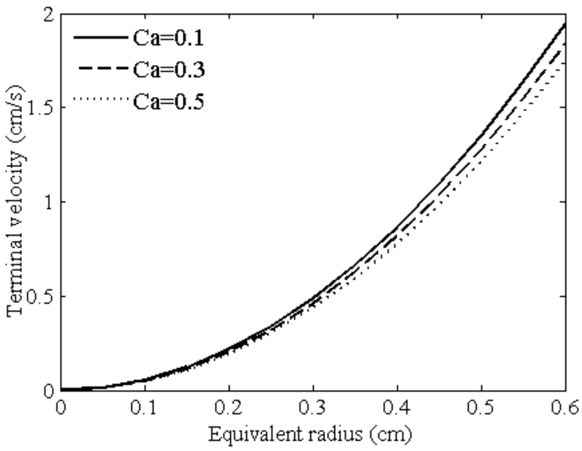

Fig. 10 Terminal velocity against the capillary number for $\mathrm{Re}=0.9, \mathrm{Ca}=0.5, \mathrm{k}=20$

شکل 10 تغییرات سرعت حد قطره با تغییر عدد مویینگی برای $\mathrm{Re}=0.7, \mathrm{Ca}=0.5, \mathrm{k}=20$

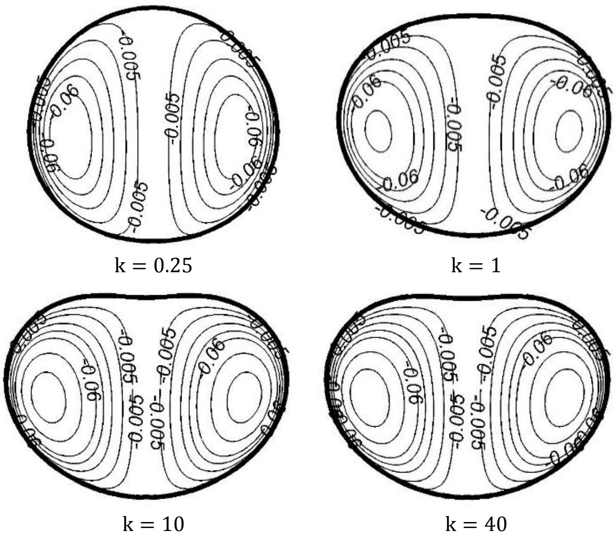

Fig. 11 Streamlines of interior flow in different k variation at $\mathrm{Re}=0.9, \mathrm{De}=0.7, \mathrm{Ca}=0.5$

شکل 11 میدان سرعت داخل قطره با تغییر عدد k برای قطره $\mathrm{Re}=0.9, \mathrm{De}=0.7, \mathrm{Ca}=0.5$

- افزایش عدد مویینگی Ca، به دلیل کاهش نیروی کشش سطحی، باعث افزایش نیروی درگ، کاهش سرعت حد و در نتیجه رشد حفره ایجاد شده در قسمت انتهایی قطره می‌گردد.

6- فهرست علایم

$\mathrm{Ca} = \frac{\eta U_\infty}{\Gamma}$ عدد مویینگی

D تانسور تغییر شکل (s^{-1})

$\mathrm{De} = \frac{\lambda U_0}{R}$ عدد دبورا

F برآیند نیروها ($kgms^{-2}$)

F_D نیروی پسا ($kgms^{-2}$)

F_B نیروی حجمی ($kgms^{-2}$)

$\mathrm{k} = \frac{(\eta_i)_0}{\eta_o}$ نسبت لزجت

n بردار عمود بر سطح

$P = \frac{P^* R}{\eta U_\infty}$ فشار استاتیکی بی‌بعد

$\mathrm{Re} = \frac{\rho U_\infty R}{\eta}$ عدد رینولدز

r جهت شعاعی دستگاه مختصات کروی

U_∞ سرعت مرجع سیال نیوتنی (ms^{-1})

U_0 سرعت مرجع قطره (ms^{-1})

علائم یونانی

ζ تابع تغییر شکل

ψ_o تابع جریان سیال نیوتنی (s^{-1})

ψ_i تابع جریان قطره (s^{-1})

τ_o تانسور تنش سیال نیوتنی ($kgm^{-1}s^{-2}$)

τ_i تانسور تنش قطره ($kgm^{-1}s^{-2}$)

θ جهت زاویه‌ای دستگاه مختصات کروی

ρ چگالی (kgm^{-3})

Γ کشش سطحی (kgs^{-2})

η_o لزجت سیال نیوتنی ($kgm^{-1}s^{-1}$)

$(\eta_i)_0$ لزجت قطره در نرخ برش صفر ($kgm^{-1}s^{-1}$)

7- مراجع

[1] A. S. Campbell, J. M. Eldridge, F. C. Lee, G. Olive, *Thermal Drop-On-Demand Ink Jet Print Head*, US Patents No. 4870433, 1989.

[2] C. Hanson, *Recent Advances in Liquid-Liquid Extraction*, Vol. 1, pp. 241-326, New York: Elsevier, 2013.

[3] J. Roy, J. S. Moore, *Drop-On-Demand Ink Jet Print Head*, US Patent No.5087930, 1992.

[4] J. Hadamard, Mouvement permanent lent d’une sphere liquide et visqueuse dans un liquide visqueux, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, Vol. 152, No. 25, pp. 1735-1738, 1911. (In French)

[5] W. Rybczyński, Uber die fortschreitende Bewegung einer flüssigen Kugel in einem zähen Medium, *Bulletin international de l'Académie des sciences de Cracovie*, Vol. 1, No. 13, pp. 40–46, 1911. (In German)

[6] T. Taylor, A. Acrivos, On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 18, No. 3, pp. 466-476, 1964.

[7] G. Taylor, The formation of emulsions in definable fields of flow, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, Vol. 146, No. 858, pp. 501-523, 1934.

[8] H. A. Stone, Dynamics of drop deformation and breakup in viscous fluids, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 26, No. 1, pp. 65-102, 1994.

[9] A. Emamian, M. Norouzi, M. Davoodi, An analytical investigation on shape of a falling viscose drop at low Reynolds number, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 2, pp. 251-262, 2017. (in Persian فارسی)

[10] N. Kishore, R. Chhabra, V. Eswaran, Effect of dispersed phase rheology on the drag of single and of ensembles of fluid spheres at moderate Reynolds numbers, *Chemical Engineering Journal*, Vol. 141, No. 1, pp. 387-392, 2008.

[11] C. Koh, L. Leal, The stability of drop shapes for translation at zero Reynolds number through a quiescent fluid, *Physics of Fluids A*, Vol. 1, No. 8, pp. 1309-1313, 1989.

[12] R. Clift, J. R. Grace, M. E. Weber, *Bubbles, Drops, and Particles*, Vol. 1, No.1, pp. 83-246, New York: Courier Corporation, 2005.

[13] A. Smolianski, H. Haario, P. Luukka, Numerical bubble dynamics, *Computer Aided Chemical Engineering*, Vol. 14, No. 1, pp. 941-946, 2003.

[14] M. C. Sostarecz, A. Belmonte, Motion and shape of a viscoelastic drop falling through a viscous fluid, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 497, No. 3, pp. 235-252, 2003.

[15] D. Noh, I. Kang, L. G. Leal, Numerical solutions for the deformation of a bubble rising in dilute polymeric fluids, *Physics of Fluids A*, Vol. 5, No. 6, pp. 1315-1332, 1993.

[16] N. Aggarwal, K. Sarkar, Deformation and breakup of a viscoelastic drop in a Newtonian matrix under steady shear, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 584, No. 5, pp. 1-21, 2007.

[17] M. Aminzadeh, A. Maleki, B. Firoozabadi, H. Afshin, On the motion of Newtonian and non-Newtonian liquid drops, *Scientia Iranica*, Vol. 19, No. 5, pp. 1265-1278, 2012.

[18]B. Vamerzani, M. Norouzi, B. Firoozabadi, Analytical solution for creeping motion of a viscoelastic drop falling through a Newtonian fluid, *Korea-Australia Rheology Journal*, Vol. 26, No. 1, pp. 91-104, 2014.

[19] M. Davoodi, M. Norouzi, An investigation on the motion and deformation of viscoelastic drops descending in another viscoelastic media, *Physics of Fluids*, Vol. 28, No. 10, pp. 103103, 2016.

[20] R. Wanchoo, S. K. Sharma, R. Gupta, Shape of a Newtonian liquid drop moving through an immiscible quiescent non-Newtonian liquid, *Chemical Engineering and Processing*, Vol. 42, No. 42, pp. 387-393, 2003.

[21] A. Acharya, R. Mashelkar, J. Ulbrecht, Mechanics of bubble motion and deformation in non-Newtonian media, *Chemical Engineering Science*, Vol. 32, No. 8, pp. 863-872, 1977.

[22] A. Acharya, R. Mashelkar, J. Ulbrecht, Motion of liquid drops in rheologically complex fluids, The Canadian *Journal of Chemical Engineering*, Vol. 56, No. 1, pp. 19-25, 1978.

[23] M. G. Wagner, J. C. Slattery, Slow flow of a non-newtonian fluid past a droplet, *AIChE Journal*, Vol. 17, No. 5, pp. 1198-1207, 1971.

[24] R. Bird, R. Armstrong, O. Hassager, *Fluid Mechanics, Dynamics of Polymeric Liquids*, Vol. 1, pp. 258-325, New York: Wiley, 1987.

[25] J. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics with Special Application to Particulate Media*, pp. 243-315, New Jersey: Prentice-Hall, 1965.

[26] F. M. White, I. Corfield, *Viscous Fluid Flow*, Vol. 3, No.1, pp. 173-180, New York: McGraw-Hill, 2006.

[27] E. Lifshitz, L. Landau, *Course of Theoretical Physics*, Vol. 6, No.1, pp. 243-351, Oxford UK: Pergamon Press, 1959.

[28] G. K. Batchelor, *An Introduction to fluid Dynamics*, pp. 320-410, Cambridge University: Cambridge University Press, 1967.

[29] L. E. Payne, W. Pell, The Stokes flow problem for a class of axially symmetric bodies, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 7, No. 4, pp. 529-342, 1960, 1959.