



## بررسی عددی پدیده اثر پیستونی سیال فوق بحرانی در محیط میکروگرانش با استفاده از روش شبکه بولتزمن

مصطفی ورمزیار<sup>1\*</sup>، مجید بازارگان<sup>2</sup>

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران  
2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران  
\* تهران، صندوق پستی 15811-16788، varmazyar.mostafa@srutu.edu

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 13 بهمن 1395  
پذیرش: 28 فروردین 1396  
ارائه در سایت: 11 اردیبهشت 1396  
کلید واژگان:

معادله شبکه بولتزمن  
ضریب پخش متغیر  
مدل تراکم‌پذیر شبکه بولتزمن  
روش شبیه‌ساز نیرو  
پدیده اثر پیستونی

### چکیده

در این پژوهش، به معرفی یک مدل شبکه بولتزمن به منظور شبیه‌سازی پدیده اثر پیستونی، که اصلی‌ترین مکانیزم انتقال حرارت سیال فوق بحرانی در محیط میکروگرانش می‌باشد، پرداخته شده است. تغییر ضریب پخش در روش شبکه بولتزمن حرارتی با اضافه شدن یک ترم به تابع توزیع تعادلی مدل‌سازی گردید. جهت محاسبه نیروی بین مولکولی و ایجاد مدل تراکم‌پذیر شبکه بولتزمن، از رابطه حاکم بر سیال و اندروالس استفاده شد. همچنین جهت حذف پرش سرعت بر روی دیواره، روابط شرط مرزی منطبق با شبکه بولتزمن تراکم‌پذیر در حضور نیروی و اندروالس ایجاد گردید. نشان داده شد که این شرط مرزی دقت بالایی در شبیه‌سازی مسایل نیرو محور دارد و دقت مرتبه دوم نسبت به مکان را دارا می‌باشد. نهایتاً مدل توسعه یافته شبکه بولتزمن حرارتی به همراه مدل شبکه بولتزمن تراکم‌پذیر جهت شبیه‌سازی انتقال حرارت جریان سیال فوق بحرانی به کار گرفته شده است. پدیده اثر پیستونی با در نظر گرفتن مدل نیروی بین مولکولی و اندروالس شبیه‌سازی گردید. نتایج حاکی از آن است که طرح‌های گوناگون شبیه‌ساز نیرو، خطاهای متفاوتی را در شبیه‌سازی جریان سیال تراکم‌پذیر فوق بحرانی دارند. قیاسی بین هدایت خالص و انتقال حرارت به واسطه پدیده اثر پیستونی صورت گرفت و نشان داده شد که انتقال حرارت به واسطه پدیده اثر پیستونی سریعتر از هدایت خالص است.

## Numerical Investigation of the Piston Effect of Supercritical Fluid under Microgravity Conditions Using Lattice Boltzmann Method

Mostafa Varmazyar<sup>1\*</sup>, Majid Bazargan<sup>2</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran  
2- Department of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran  
\* P.O.B. 15811-16788, Tehran, Iran, varmazyar.mostafa@srutu.edu

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 01 February 2017  
Accepted 17 April 2017  
Available Online 01 May 2017

#### Keywords:

Lattice Boltzmann Method  
Variable Thermal Diffusivity  
Lattice Boltzmann Compressible Model  
Force Simulation Scheme  
Piston Effect Phenomena

### ABSTRACT

Piston effect is an important mechanism of heat transfer in a supercritical fluid flow under microgravity condition. In this study, a Lattice Boltzmann Model (LBM) has been introduced to simulate the piston effect. Variation of diffusion coefficient has been accounted for by adding a corresponding term to equilibrium distribution function. To calculate the intermolecular forces and compressibility in the LBM, a van der Waals equation of state has been employed. Boundary conditions corresponding to compressible LBM in the presence of van der Waals forces have been set to eliminate the speed jump at the wall. It has been shown that such boundary conditions provide high accuracy in problems involving forces with an error of second order of magnitude in terms of space. The developed thermal LBM together with compressible LBM have been applied to simulate the heat transfer to supercritical fluid flows. The piston effect has been modeled by considering van der Waals inter molecular forces. The errors associated with each of the schemes used have been evaluated. A comparison between a pure conduction case and heat transfer due to piston effect has been made. It has been shown that the heat transfer occurs faster once the piston effect is in operation.

### 1 - مقدمه

مکانیکی مانند ارتعاش سطح جامد و یا اثرات حرارتی از جمله گرمایش و سرمایش سریع، احتراق، چیدمان خاصی از منابع و چاه‌های حرارتی و مانند آن تولید شوند. زمانی که یک سیال تراکم‌پذیر تحت افزایش دمای شدید در نزدیک دیواره قرار می‌گیرد، سیال نزدیک دیواره در اثر پدیده هدایت به سرعت گرم شده و منبسط می‌شود. امواج فشاری که در این حالت القا می‌گردند امواج آکوستیکی حرارت القایی نامیده می‌شوند [2,3]. این امواج با

یکی از پیچیده‌ترین سیالات خواص متغیر که تغییرات خواص آن به شدت تابع فشار و دما است، سیال فوق بحرانی می‌باشد. این تغییرات به حدی است که شاید بتوان سایر سیالات با خواص متغیر را حالت ساده شده‌ای از وضعیت سیال در نزدیکی نقطه بحرانی دانست [1]. امواج آکوستیکی می‌تواند توسط منابع مختلفی از جمله نوسانات

### Please cite this article using:

M. Varmazyar, M. Bazargan, Numerical Investigation of the Piston Effect of Supercritical Fluid under Microgravity Conditions Using Lattice Boltzmann Method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 5, pp. 138-146, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

کلین و همکاران [22] تحقیقی بر روی هگزا فلوراید سولفور (SF6) در نزدیک نقطه بحرانی در آزمایشگاه انجام داده‌اند. سیال مذکور در یک استوانه مسی پر شده است. سرمایش ناگهانی از چند میلی کلون بالای نقطه بحرانی تا چند میلی کلون زیر نقطه بحرانی اعمال گردید. تحت شرایط فوق بحرانی مقدار ضریب پخش سیال SF6 از مرتبه  $10^{-7} \text{ cm}^2/\text{s}$  می‌باشد. این بدین معناست که برای طولی حدود 2 mm از سلول کلین، حدود 100 ساعت زمان لازم است تا تعادل حرارتی به واسطه پخش رخ دهد. اما نتایج آزمایشگاهی کلین حاکی از آن است که این تعادل حرارتی حدود چند ثانیه بیشتر به طول نمی‌انجامد.

گنون و همکاران [12] انتقال حرارت نزدیک نقطه فوق بحرانی را برای سیال فوق بحرانی CO2 تحت شرایط میکرو گرانش و در محیط آزمایشگاه مورد مطالعه قرار دادند. مدل آزمایشگاهی ایشان دارای یک سلول شفاف حاوی سیال فوق بحرانی CO2 بود. به علاوه که این سلول دارای یک ترموستات بسیار دقیق است که می‌توانست به سرعت دما را بالا یا پایین ببرد. ابعاد داخل این سلول استوانه‌ای دارای قطر 10.1 mm و ضخامت 7.48 mm بود. سلول داخلی دارای دو چشمی بر روی بالا و پایین می‌باشد. یک مفتول بسیار باریک (0.3 mm) که از نظر حرارتی کاملا مجزا از سلول است و تاثیر کمی از آن می‌گیرد در مرکز سلول قرار داده شده است. دما و دانسیته‌ی درون سلول، توسط دو چشمی مذکور و با استفاده از ساطع کننده‌های نور قابل اندازه‌گیری می‌باشند.

جهت ایجاد محیط میکروگرانشی، ایشان از 6 دقیقه پرواز موشک تحقیقاتی بهره برده‌اند. در شروع آزمایش کل مجموعه دارای دمایی ثابت و برابر با  $T_c + 2.3 \text{ mK}$  بوده است. یک نوسان دمایی در حدود 1 mK به سیستم القا می‌شود. گنون و همکاران [12] مشاهده نمودند که تعادل حرارتی در کمتر از 20 s به وقوع می‌پیوندد. این در حالی است که با در نظر گرفتن ابعاد این مجموعه و مقدار ضریب پخش حرارتی سیال فوق بحرانی CO2، تعادل حرارتی در اثر پخش، حداقل یک هفته زمان نیاز دارد. مشاهده گنون و همکاران [12] نیز تایید می‌کند که این سرعت بالا در انتقال حرارت به دلیل وقوع پدیده اثر پیستونی می‌باشد.

بوتی و همکاران [23] نیز تجربه مشابه آن‌چه را گنون داشت برای سیال فوق بحرانی CO2 پیاده کردند. سلول ایشان دارای قطر داخلی 11.6 mm و ضخامت 6.8 mm بود. هم چون قبل دو چشمی در بالا و پایین جهت ارسال نور و رصد پارامترها، تعبیه شده است. ایشان نیز نتایجی مشابه نتایج گنون به‌دست آورده‌اند. "شکل 1" رشد لایه حرارتی دور هیتر را اندکی پس از شروع گرمایش نشان می‌دهد.



**Fig. 1** Growth of thermal layer near the heater in the supercritical fluid shortly after warming [22]

**شکل 1** رشد لایه حرارتی نزدیک هیتر در سیال فوق بحرانی اندکی پس از گرمایش [23]

سرعت صوت محلی حرکت می‌کند و در صورت برخورد با دیواره بازگشت می‌شوند. این رفت و برگشت برای موج ایجاد شده ادامه پیدا می‌کند و در طول مسیر به علت اتلافات ویسکوزیته و حرارتی از دامنه آن کاسته می‌شود. حرکت کوچکی که در اثر این موج در سیال ایجاد می‌شود می‌تواند زمانی که سایر پدیده‌های جابجایی حضور نداشته باشند منجر به افزایش قابل توجهی در انتقال حرارت و انتقال جرم داخل سیال شود و متعاقب آن، تعادل حرارتی سریع‌تری نسبت به هدایت خالص ایجاد کند. این اتفاق در نزدیکی نقطه بحرانی به مراتب قوی‌تر بروز می‌کند [4]. در مورد سیالات فوق بحرانی اولین بار در سال 1987 میلادی، نیچه و استراب [5] در محیط میکروگرانش چنین پدیده‌ای را که اثر پیستونی نام گرفت مشاهده نمودند [7,6]. زمانی که تغییرات دما ناچیز است ضریب پخش سیال فوق بحرانی به سمت صفر میل می‌کند. در این حالت، ضریب بسیار بالای انبساط سیال منجر به منبسط شدن لایه کنار دیواره شده و این انبساط همانند پیستونی مابقی سیال را که به شدت تراکم‌پذیر است متراکم می‌کند. به‌علت تراکم‌پذیری و دانسیته بالای سیال فوق بحرانی، امواج آکوستیکی حرارت القایی در سیال فوق بحرانی به مراتب قوی‌تر از سیال ایده‌آل تحت افزایش دمای یکسان می‌باشد [8-11]. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که به‌دلیل ضریب پخش پایین، پدیده اثر پیستونی نقش اصلی را در تعادل حرارتی این نوع سیالات بازی می‌کند [12-16]. در واقع این مشاهده، افزایش انتقال حرارت سیال فوق بحرانی را به خوبی توجیه می‌کند [17]. از این مکانیزم در میکرو اختلاط‌ها، خنک کننده همرفتی، کمپرسور صوتی، تجهیزات مافوق صوت تمیز کننده سطوح آلوده استفاده می‌شود [18].

انکی و همکاران [19] به مطالعه مکانیزم فیزیکی به صورت تئوری پرداختند. آن‌ها فرض کردند که مقدار انرژی مشخصی به حجم کوچکی از سیال ( $v_1$ ) که نزدیک نقطه فوق بحرانی قرار دارد، داده می‌شود. این در حالی است که حجم کل برابر  $(v_1 + v_2)$  می‌باشد. آن‌ها دو حالت هم فشار و آدیاباتیک را برای این مساله در نظر گرفتند و متوجه شدند که برای حالت آدیاباتیک، دمای بخش اعظم سیال ( $v_2$ ) که در معرض انتقال هدایت قرار ندارد، تحت تاثیر حجم کوچک  $v_1$  به تعادل حرارتی می‌رسد.

بوکاری و همکاران [20] انتقال حرارت در سیال فوق بحرانی را به صورت یک بعدی و عددی و برای سیال زنون مورد مطالعه قرار دادند. دمای دیواره از 10 mK تا 20 mK بالای نقطه بحرانی تغییر داده شده است. آن‌ها فرض کردند به‌دلیل گرانش بسیار پایین، میدان سرعت تقریباً ناچیز است. در این تحقیق متناسب با فرضیات، معادله انرژی جدیدی برای تحلیل دما توسعه داده شده است.

زاپولی و همکاران [21] اثر گرمایش دیواره را بر روی سیال فوق بحرانی CO2 در شرایط میکرو گرانش مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها به حل عددی معادله کامل ناویر استوکس یک بعدی پرداخته‌اند. در این حل، معادله واندروالس به عنوان معادله حالت سیال فوق بحرانی CO2 استفاده شده است. در این تحقیق فرض شده است که انرژی داخلی سیال فوق بحرانی CO2 تنها به صورت تابعی از دما می‌باشد. آن‌ها جهت حل معادله ناویراستوکس یک بعدی از الگوریتم PISO<sup>1</sup> بهره گرفته‌اند. دمای یکی از دیواره‌ها به صورت خطی تا 13 mK در مدت زمان 1.3 ms افزایش می‌یابد. دمای سایر مرزها ثابت می‌ماند. این در حالی است که بوکاری و همکاران [20] همین مساله را با در نظر گرفتن دیواره‌های آدیاباتیک حل کرده‌اند.

<sup>1</sup> Pressure Implicit with Splitting of Operators

که در آن  $g_i(\vec{r}, t)$  تابع توزیع احتمال در مختصات  $\vec{r}$  و زمان  $t$ ،  $\omega_i$  ضریب وزنی،  $\vec{c}_i$  بردار سرعت شبکه و  $\Omega_i$  تابع برخورد در جهت  $i$  است. در تحقیق حاضر، تقریب BGK به صورت زیر اصلاح می‌شود:

$$\Omega_i = -\frac{1}{\lambda}(g_i - g_i^{eq}) + \omega_i \vec{c}_i \delta j_{CT} \quad (2)$$

که در آن  $\delta j_{CT}$  تابع اصلاح کننده خطای شبکه بولتزمن حرارتی،  $g_i^{eq}$  تابع توزیع تعادلی در جهت  $i$  و  $\lambda$  ثابت زمان آرامش در شبکه بولتزمن حرارتی است. ترم منبع به صورت  $\delta j_{CT} = \varepsilon \delta j_{ST}^1$  در نظر گرفته شده است که  $\varepsilon$  به عنوان عدد نادسن روش شبکه بولتزمن حرارتی تعریف می‌شود. تابع توزیع تعادلی نیز به صورت زیر پیش‌نهاد می‌گردد.

$$g_i^{eq} = \omega_i \left( T + \frac{1}{c_s^2} T \vec{c}_i \cdot \vec{u} - \frac{D}{c_s^2} \vec{c}_i \cdot \vec{\nabla} T \right) \quad (3)$$

که در آن دما براساس رابطه  $T = \sum g_i$  تعریف می‌شود و  $c_s$  سرعت صوت شبکه و  $\vec{u}$  سرعت ماکروسکوپی می‌باشند. ضریب پخش حرارتی بر اساس رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\alpha = \alpha_0 + D \quad (4)$$

که در آن  $\alpha_0$  مقدار ثابت و  $D$  بخش متغیر ضریب پخش حرارتی می‌باشد. در روش حاضر مقدار  $\alpha_0$  بر اساس رابطه  $\alpha_0 = c_s^2(\lambda - 0.5)$  قابل محاسبه است. با استفاده از آنالیز چاپمن انسکوگ [27] معادله انرژی به فرم زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned} \partial_t(T) + \vec{\nabla} \cdot (T\vec{u}) &= \vec{\nabla} \cdot [\alpha \vec{\nabla} T] \\ &+ \varepsilon \vec{\nabla} \cdot \left[ \frac{\alpha_0}{c_s^2} \partial_t(T\vec{u} - D\vec{\nabla} T) \right] \\ &\quad \text{unwanted term} \\ &- \varepsilon \vec{\nabla} \cdot [\lambda c_s^2 \delta j_{CT}^1] - \varepsilon \frac{\delta j_{ST}^1}{c_s^2} + O(\varepsilon^2) \\ &\quad \text{correction term} \quad \text{source term} \end{aligned} \quad (5)$$

رابطه (5) معادله پخش-جابجایی را با ضریب پخش کلی  $\alpha$  نشان می‌دهد. علاوه بر آن، یک ترم خطا (یا ترم ناخواسته) و یک ترم اصلاح کننده نیز در معادله ظاهر شده‌اند. در پیوست، محاسبات مربوط به ترم اصلاحی آورده شده است. این ترم طوری انتخاب خواهد شد که ترم خطا از بین برود. هم چنین ترم  $\delta j_{ST}^1$  نیز طوری در معادله شبکه بولتزمن اعمال شده است که به عنوان ترم منبع در معادله پخش-جابجایی ظاهر شود. روش حاضر استفاده از روش زمان آرامش چندگانه را جهت بالا بردن پایداری حل میسر می‌سازد که در قسمت بعد به معرفی آن پرداخته خواهد شد.

زمانی که ترم اصلاحی در نظر گرفته شود می‌توان ادعا نمود که روش شبکه بولتزمن حرارتی ارائه شده برای معادله پخش-جابجایی بدون هیچ قید و شرطی بر روی زمان دقتی از مرتبه دو دارد. به علاوه این روش از خانواده روش‌های صریح است چرا که مقادیر در گام زمانی  $t + 1$  از مقادیر گام زمانی  $t$  به صورت صریح به دست می‌آیند و هیچ الگوریتم تکراری برای رسیدن به پاسخ در زمان  $t + 1$  نیاز نیست. قابل ذکر است روش‌های عددی پیش‌روی زمانی موجود که از دقت مرتبه دوم برخوردار هستند هیچ کدام به صورت صریح اعمال نمی‌شوند و همگی نیاز به تکرار دارند. در حالی که روش شبکه بولتزمن حرارتی با ترم اصلاحی فوق این مزیت را داراست. در مقایسه با سایر الگوریتم‌ها می‌توان گفت که روش شبکه بولتزمن از نظر نیاز به حافظه بسیار پرهزینه می‌باشد، چرا که به‌عنوان مثال در شبکه D2Q9، 9 مجهول در هر نقطه از شبکه وجود دارد. این در حالی است که این روش به جهت استفاده از روش صریح بر روی زمان، روشی بسیار سریع در قیاس با روش‌های مرتبه دوم دیگر است. البته علاوه بر آن، روش شبکه بولتزمن حرارتی قابلیت بالایی را در استفاده از پردازش‌گرهای موازی در اختیار کاربر خود قرار می‌دهد. از آن جایی که امروزه شرکت‌های سازنده پردازش‌گر رو به تولید پردازش‌گرهای

زاپولی و کارلس [16] به صورت عددی بر روی طبیعت پدیده اثر پیستونی مطالعه کردند. هندسه مورد مطالعه، فضای پر شده میان دو صفحه بود که تغییرات آن به صورت یک بعدی مورد مطالعه قرار گرفته است. معادلات حاکم در پژوهش زاپولی و کارلس، معادلات بی‌بعد ناوبر استوکس تراکم‌پذیر یک بعدی بوده است. به علاوه که در معادله انرژی فرض شده که انرژی داخلی سیال نزدیک نقطه فوق بحرانی تنها تابعی از دما است. در سال 2006 میلادی آکاری و راسپو [24] با ترکیب روش‌های مختلفی از روش حجم محدود و با استفاده از فیلتراسیون آکوستیکی موفق به ارائه روشی پایدار شدند که بتواند جریان جابجایی آزاد سیال فوق بحرانی را در یک محفظه مکعبی مدل‌سازی نماید. در سال 2008 میلادی هاژی و مارکوس [17] روش شبکه بولتزمن را برای شبیه‌سازی پدیده اثر پیستونی در نزدیک نقطه بحرانی مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها از روشی شبیه به روش شان و چن برای شبیه‌سازی تراکم‌پذیری سیال فوق بحرانی استفاده نمودند.

پیچیدگی رفتار جریان سیال فوق بحرانی را می‌توان در تغییرات شدید خصوصیات فیزیکی و عین حال تراکم‌پذیری بالای آن دانست. بسط روش شبکه بولتزمن برای سیال فوق بحرانی می‌تواند از چند دیدگاه مورد اهمیت باشد. از جمله این موارد می‌توان به تراکم‌پذیری سیال فوق بحرانی اشاره نمود، لذا نیاز هست تا یک مدل تراکم‌پذیر شبکه بولتزمن با فرض سیال غیرایده‌آل فرض شود. مورد دیگر مربوط به روش شبکه بولتزمن حرارتی است که نیاز هست تا مدلی مناسب جهت مدل‌سازی جریان خواص متغیر ارائه شود. به‌علاوه پدیده اثر پیستونی نقش مهمی در انتقال حرارت سیال فوق بحرانی ایفا می‌کند. مدل‌سازی این پدیده و اعمال اثر آن بر روی توزیع دمای سیال نیازمند آن است که مقدار کار تراکم محاسبه شود. در روش استاندارد شبکه بولتزمن حرارتی از این ترم صرف‌نظر شده است، پس فرمولاسیون شبکه بولتزمن حرارتی با هدف مدل‌سازی کار تراکم می‌بایست اصلاح شود و این مدل طوری تنظیم گردد که همواره خطایی از مرتبه دو بر روی عدد نودسن داشته باشد. هم چنین روش‌های مختلف شبیه‌ساز نیرو در روش شبکه بولتزمن با هدف اعمال نیروی بین مولکولی و اندروالس معرفی خواهد شد. از جمله مواردی که در این مدل‌سازی مورد توجه است فرمولاسیون شرایط مرزی است. پایداری حل عددی در روش شبکه بولتزمن به شدت تابع فرمولاسیون و نحوه اعمال شرط مرزی است. در پژوهش حاضر نیاز هست تا شرط مرزی مناسبی هم برای روش شبکه بولتزمن و هم برای شبکه بولتزمن حرارتی انتخاب شود تا منجر به واگرایی حل نشود.

## 2- شبکه بولتزمن حرارتی

ایده اساسی چگونگی محاسبه تغییرات ضریب پخش با دما در این مطالعه، از مقاله ورمزیار و بازارگان [25] گرفته شده است. آن‌ها مدلی را در روش شبکه بولتزمن توسعه دادند که توانایی شبیه‌سازی تغییرات خواص را در شرایط غیر خطی شدید دارا می‌باشد [25]. این روش عددی در مرجع [26] جهت مدل‌سازی مسایل جابجایی آزاد مورد بررسی قرار گرفته است. بخش متغیر ضریب پخش حرارتی با اضافه کردن یک ترم به تابع توزیع تعادلی شبیه‌سازی شده است. در قیاس با روش‌های ماکروسکوپی، این روش اثرات غیر خطی معادله انرژی را حذف می‌کند. ترم منبع نیز به عنوان یک ترم در سمت راست معادله شبکه بولتزمن در نظر گرفته شده است. بر این اساس معادله شبکه بولتزمن حرارتی در راستای  $t$  به صورت زیر تغییر می‌کند که در آن جهت شبیه‌سازی ترم منبع می‌باشد:

$$\Omega_i = g_i(\vec{r} + \vec{c}_i, t + 1) - g_i(\vec{r}, t) - \omega_i \delta j_{ST} \quad (1)$$

پتانسیل فوق می‌توان مقدار نیروی بین مولکولی را حساب نمود [31].

$$\vec{F} = -G \psi \vec{\nabla} \psi \quad (14)$$

نیروی مذکور به صورت یک نیروی خارجی در سمت راست معادله شبکه بولتزمن به صورت زیر اعمال می‌شود.

$$f_i(\vec{r} + \vec{c}_i, t + 1) - f_i(\vec{r}, t) = \Omega_i + \vec{F}_i \quad (15)$$

شبه‌سازی نیروهای خارجی در روش شبکه بولتزمن را می‌توان به سه دسته کلی تقسیم نمود. دسته اول مبتنی بر روش لو [32] می‌باشد. این روش مقدار نیرو را در معادله شبکه بولتزمن به صورت زیر پیشنهاد می‌دهد.

$$\vec{F}_i = -\frac{1}{c_s^2} \omega_i \rho \vec{c}_i \vec{F} \quad (16)$$

که در آن  $\vec{F}$  نیروی حجمی (نیروی بین مولکولی) و  $\vec{F}_i$  اثر نیرو در جهت  $i$  شبکه بولتزمن می‌باشد. در دسته دوم اثر نیرو بر روی سرعت میکروسکوپی، طبق قانون دوم نیوتن اعمال می‌گردد [33]. به عبارت دیگر سرعت میکروسکوپی و تعادلی به صورت زیر اصلاح می‌شود.

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}'(\vec{r}, t) + \tau \frac{\vec{F}(\vec{r}, t)}{\rho} \quad (17)$$

$$\vec{u}^{eq}(\vec{r}, t) = \vec{u}'(\vec{r}, t) + \tau \frac{\vec{F}(\vec{r}, t)}{\rho}$$

که در آن  $\tau$  ثابت آرامش در روش شبکه بولتزمن،  $\vec{u}$  سرعت میکروسکوپی و  $\vec{u}^{eq}$  سرعت متناظر با تابع توزیع تعادلی است.  $\vec{u}'$  سرعت میکروسکوپی می‌باشد که براساس رابطه (18) تعریف می‌شود.

$$\vec{u}'(\vec{r}, t) = \frac{1}{\rho} \sum_i \vec{c}_i f_i(\vec{r}, t) \quad (18)$$

مقدار ثابت آرامش براساس رابطه  $\tau = v/c_s^2$  قابل محاسبه است که در آن  $v$  لزجت سینماتیکی سیال می‌باشد. دسته سوم مبتنی بر روش گو و همکاران [34] می‌باشد. این روش به صورت هم زمان هم مقدار نیرو را در معادله شبکه بولتزمن وارد می‌سازد و هم مقدار سرعت‌ها را اصلاح می‌کند.

$$\vec{F}_i = \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) \omega_i \left(\frac{\vec{c}_i - \vec{u}}{c_s^2} + \frac{\vec{c}_i \vec{u}}{c_s^4}\right) \vec{F} \quad (19)$$

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}'(\vec{r}, t) + \frac{\vec{F}(\vec{r}, t)}{\rho}$$

$$\vec{u}^{eq}(\vec{r}, t) = \vec{u}'(\vec{r}, t) + \frac{\vec{F}(\vec{r}, t)}{\rho} \quad (20)$$

با کمک آنالیز چاپمن انسکوگ می‌توان نشان داد که تنها دسته سوم است که دقیقاً معادلات میکروسکوپی ناویر استوکس را شبیه‌سازی می‌کند [34]. دسته‌های اول و دوم دارای خطا می‌باشند که با استفاده از بسط چاپمن انسکوگ می‌توان آن‌ها را محاسبه نمود [34]. به عنوان مثال مقدار خطای معادله پیوستگی ( $Err_{Cntnty}$ ) برای دسته اول به صورت زیر است.

$$Err_{Cntnty} = -\frac{1}{2} \vec{\nabla} \vec{F} \quad (21)$$

و مقدار خطای معادله ممنوم ( $Err_{Mmntm}$ ) نیز به فرمت زیر قابل حصول است.

$$Err_{Mmntm} = -\frac{1}{2} \epsilon' \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \left(\tau - \frac{1}{2}\right) \vec{\nabla} (\vec{u} \vec{F} + \vec{F} \vec{u}) \quad (22)$$

که در آن  $\epsilon'$  پارامتری است که در بسط چاپمن انسکوگ متغیرها حول آن بسط داده می‌شوند. خطای دسته اول و دوم ممکن است در پاره‌ای از مسایل چندان اهمیت نداشته باشد. به عنوان مثال در مورد جریان پویزلی، با فرض این که گرادیان فشار به عنوان نیرو در معادله ممنوم اثر بگذارد، می‌توان گفت که ترم نیرو در زمان و مکان ثابت است و بنابراین خطای دسته اول صفر خواهد بود.

چند هسته‌ای به جای بالابردن سرعت پردازش آن‌ها آورده‌اند، استفاده از این روش می‌تواند سرعت و دقت حل را تا حد بسیار بالایی افزایش دهد.

### 3- روش زمان آرامش چندگانه

یکی از مزیت‌هایی که مدل شبکه بولتزمن حرارتی حاضر به ارمغان می‌آورد قابلیت استفاده از روش زمان آرامش چندگانه است. معادله شبکه بولتزمن حرارتی در روش مذکور به صورت زیر تغییر می‌کند.

$$g_i(\vec{r} + \vec{c}_i, t + 1) - g_i(\vec{r}, t) = -\sum_j \Omega_{ij} (g_j(\vec{r}, t) - g_j^{eq}(\vec{r}, t)) \quad (6)$$

استفاده از روش زمان آرامش چندگانه می‌تواند باعث افزایش دقت و پایداری روش شبکه بولتزمن حرارتی گردد [29,28]. معادله (6) به فرمت زیر تبدیل می‌شود.

$$g_i(\vec{r} + \vec{c}_i, t + 1) - g_i(\vec{r}, t) = -M^{-1} \Lambda (\vec{g}(\vec{r}, t) - \vec{g}^{eq}(\vec{r}, t)) \quad (7)$$

که در آن  $\vec{g}(\vec{r}, t)$  بردار ممان می‌باشند. انتقال میان تابع توزیع و بردارهای ممان با استفاده از رابطه خطی زیر قابل انجام می‌باشد.

$$f(\vec{r}, t) = M \vec{f}(\vec{r}, t) \quad (8)$$

با استفاده از الگوریتم متعامدسازی گرام-اشمیت، ماتریس  $M$  قابل محاسبه می‌باشد. فرمت کلی ماتریس  $M$  توسط گینزبرگ پیشنهاد شده است [30]. بر این اساس در شبکه D2Q9 ماتریس  $M$  به صورت زیر قابل بیان است.

$$M = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & +2 & +2 & +2 & +2 \\ +4 & -2 & -2 & -2 & -2 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ 0 & -2 & +1 & +2 & 0 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & +2 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ 0 & +1 & -1 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & -1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

ماتریس آرامش  $\Lambda$  یک ماتریس قطری است که در زیر تعریف شده است [28].

$$\Lambda = \text{diagonal} (0.0, 1.63, 1.14, \Lambda_4, 1.92, \Lambda_6, 1.92, \frac{2}{1+6\alpha_0}, \frac{2}{1+6\alpha_0}) \quad (10)$$

که  $\Lambda_4$  و  $\Lambda_6$  می‌توانند مقادیر دلخواه داشته باشند. ممان‌های تعادلی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\vec{f}_1^{eq} = T, \vec{f}_2^{eq} = -2T + 3(\vec{u} \cdot \vec{u}),$$

$$\vec{f}_3^{eq} = T + 3(\vec{u} \cdot \vec{u}), \vec{f}_4^{eq} = Tu_x,$$

$$\vec{f}_5^{eq} = -Tu_x, \vec{f}_6^{eq} = Tu_y, \vec{f}_7^{eq} = -Tu_y,$$

$$\vec{f}_8^{eq} = (Tu_x)^2 - (Tu_y)^2, \vec{f}_9^{eq} = T^2 u_x u_y \quad (11)$$

### 4- مدل تراکم‌پذیر سیال فوق بحرانی

جهت شبیه‌سازی جریان سیال تراکم‌پذیر فوق بحرانی، از معادله حالت و اندروالس استفاده شده است [31].

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad (12)$$

که در آن  $P$  فشار ترمودینامیک،  $v$  حجم مخصوص،  $a$  و  $b$  ثابت‌های واندروالس و  $R$  ثابت گازها می‌باشد. جهت شبیه‌سازی این حالت در معادله شبکه بولتزمن، پتانسیل بین مولکولی ( $\psi$ ) براساس رابطه (12) به صورت زیر تعریف می‌شود [31].

$$\psi^2 = 2 \frac{P - \rho RT}{G RT} \quad (13)$$

که در آن  $G$  قدرت تقابل میان ذرات را نشان می‌دهد. با استفاده از تابع

### 5- شرط مرزی مدل حاضر

برای برقراری شرط مرزی دیریشله در شبکه بولتزمن حرارتی، فرض می‌شود شار در تمام جهات برابر است.

$$g_i - g_i^{eq} = g_j - g_j^{eq} \quad (23)$$

جهت  $i$  نشان‌دهنده جهت ذراتی است که به داخل میدان حل باز می‌گردند. جهت  $j$  به قرینه جهت  $i$  اطلاق می‌شود. برای گره‌های دیواره، موازنه شار را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$g_i = (\omega_i + \omega_j)T_w - g_i^{eq} \quad (24)$$

که در آن  $T_w$  دمای دیواره می‌باشد. برای شرط مرزی عایق، مقادیر تابع توزیع بر روی گره‌های مرزی از روی مقادیر متناظر آن در نزدیک‌ترین گره داخلی محاسبه می‌شوند. "شکل 2" مدل شبکه بر روی مرز بالا را نشان می‌دهد. بر این اساس مجهولات مربوط به شرط مرزی هیدرودینامیکی توابع توزیع احتمال در راستاهای 4، 7 و 8 و چگالی جریان ( $f_4, f_7, f_8$ ) می‌باشند.

معادلات حاکم بر مساله به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} f_4 + f_7 + f_8 &= \rho - (f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6) \\ f_4 + f_7 + f_8 &= f_2 + f_5 + f_6 - \rho u_y + \frac{F_y}{2} \\ f_3 + f_6 + f_7 &= f_1 + f_5 + f_8 - \rho u_x + \frac{F_x}{2} \end{aligned} \quad (25)$$

با توجه به معادلات فوق و از آنجایی که چگالی از رابطه  $\rho = \sum f_i(x, t)$  قابل محاسبه است، مقدار چگالی را بر روی دیواره می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود.

$$\rho = \frac{f_0 + f_1 + f_3 - 2(f_2 + f_5 + f_6) + \frac{F_y}{2}}{1 + u_y} \quad (26)$$

اولین بار ژو و هی [35] فرض کردند که شرط مرزی بازگشت بر روی قسمت غیرتعدالی تابع توزیع برقرار است ( $f_2 - f_2^{eq} = f_4 - f_4^{eq}$ ). بر این اساس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f_4 &= f_2 - \frac{2}{3}\rho u_y \\ f_7 &= f_5 + \frac{1}{2}(f_1 - f_3) - \frac{1}{6}\rho u_y - \frac{1}{2}\rho u_x + \frac{F_x}{4} + \frac{F_y}{4} \\ f_8 &= f_6 + \frac{1}{2}(f_1 - f_3) - \frac{1}{6}\rho u_y - \frac{1}{2}\rho u_x + \frac{F_x}{4} + \frac{F_y}{4} \end{aligned} \quad (27)$$

### 6- نتایج

ابتدا مرتبه خطای مدل شبکه بولتزمن حرارتی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در این مثال نشان داده می‌شود که خطای مدل عددی حاضر بر روی زمان از مرتبه دوم می‌باشد. سپس پدیده اثر پیستونی در محیط میکروگرانش

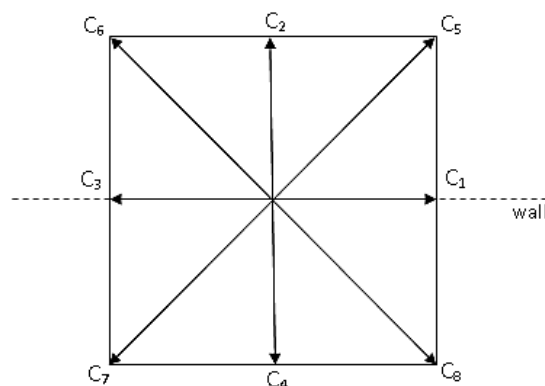


Fig. 2 D2Q9 lattice model on the bottom boundary

شکل 2 مدل شبکه D2Q9 بر روی مرز پایین

شبیه‌سازی می‌شود. در این تحقیق از مدل D2Q9 برای هر دو شبکه بولتزمن هیدرودینامیکی و حرارتی استفاده شده است. به علاوه تغییرات هدایت حرارتی با استفاده از رابطه زیر حساب می‌شود.

$$\alpha_0 + D(T) = \frac{k_0 + k(T)}{\rho c_p} = \alpha_0 [1 + \gamma(T - T_c)^{-0.5}] \quad (28)$$

که در آن  $k_0$  بخش ثابت ضریب هدایت حرارتی،  $k(T)$  بخش متغیر ضریب هدایت حرارتی،  $\rho$  چگالی جریان،  $c_p$  ظرفیت حرارتی مخصوص سیال در فشار ثابت،  $\gamma$  پارامتر متناسب با تغییر ضریب هدایت حرارتی و  $T_c$  دمای بی بعد بحرانی می‌باشند. مقدار  $\gamma$  طبق مرجع [24] 0.75 انتخاب گردیده است.

### 6-1- خطای شبکه بولتزمن حرارتی

جهت بررسی مرتبه خطای مدل حاضر، مساله یک بعدی انتقال حرارت سیال با توزیع سرعت مشخص در نظر گرفته شد [26]. توزیع اولیه دما بر اساس مکان به صورت زیر می‌باشد.

$$T(x^*) = 1/\sqrt{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^* - 0.5}{2\sigma^2}\right) \quad (29)$$

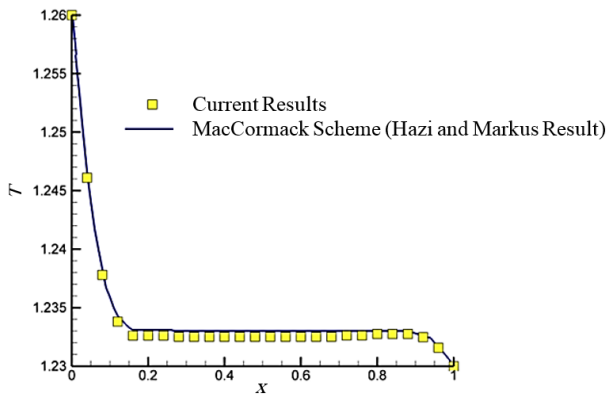
که در آن  $x^*$  مقدار بی‌بعد مکان و  $\sigma'$  ثابت موثر در موج اولیه دما است. تابع سرعت به صورت زیر فرض می‌شود.

$$u(x^*, t) = u_{\max} \cos(\omega't) \sin(\pi x^*) \quad (30)$$

که در آن  $u_{\max}$  مقدار بیشینه سرعت و  $\omega'$  فرکانس زاویه‌ای است. جهت حذف خطای ناشی از شرط مرزی، از شرط مرزی پرپودیک برای مرزها استفاده شده است. جهت حصول حل مستقل از شبکه و گام زمانی، گام زمانی و مکانی به اندازه‌ای ریز شده است که فاصله میان نتایج، تأثیری در جمع‌بندی زیر نداشته باشد. نتایج خطای نسبی روش شبکه بولتزمن استاندارد و مدل حاضر به همراه استفاده از ترم اصلاح در "شکل 3" آورده شده است. نتایج نشان می‌دهد که خطای روش شبکه بولتزمن استاندارد بر روی زمان از مرتبه دوم می‌باشد. استفاده از ترم اصلاح کننده خطا نیز مرتبه خطای روش را حفظ نموده و تنها مقدار خطا را کاهش می‌دهد. خطای مرتبه دوم بر روی زمان، مزیت روش شبکه بولتزمن به نسبت روش‌های صریح دیگر می‌باشد.

### 6-2- پدیده اثر پیستونی

در این قسمت انتقال حرارت سیال فوق بحرانی میان دو صفحه مورد بررسی قرار خواهد گرفت. سیال تحت دمایی نزدیک دمای بحرانی ( $T = \varepsilon T_c$ ) قرار دارد. ناگهان دمای صفحه پایین تغییر پیدا می‌کند. به دلیل انبساط پذیری بالای سیال فوق بحرانی، این تغییر باعث ایجاد انبساط شدید سیال در نزدیک دیواره خواهد شد. موج ایجاد شده تغییرات دما را به سایر نقاط سیال منتقل می‌کند. اساساً این موج به دلیل این است که در یک راستا حرکت می‌کند ماهیتی یک بعدی دارد. محیط در نظر گرفته شده یک مستطیل با تعداد گره  $20 \times 100$  می‌باشد. دیواره‌های بالا و پایین دارای شرط مرزی عدم لغزش هستند. شرط مرزی پرپودیک برای دو مرز دیگر انتخاب شده است. جریان سیال فوق بحرانی تحت گرانش معمولی زمین، حتی در اختلاف دماهای بسیار کم، نه تنها از رایلی بحرانی عبور کرده بلکه آشفتگی خواهد شد لذا جهت حذف جریان جابجایی آزاد و برقراری شرایط جریان آرام، لازم است که شبیه سازی حاضر در شرایط میکروگرانش صورت پذیرد [24]. بر این اساس عدد رایلی زیر عدد رایلی بحرانی انتخاب می‌شود، پس جریان جابجایی آزاد وجود ندارد. پارامترهای مورد استفاده برای سیال واندرالس به صورت  $a =$

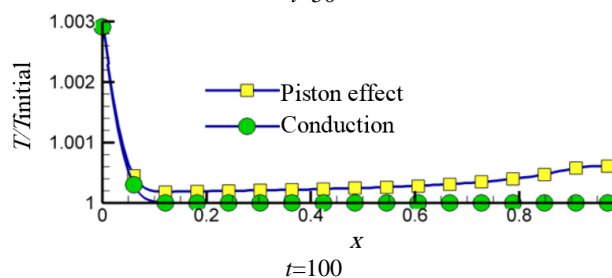
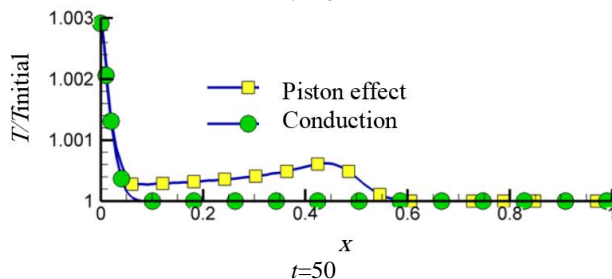
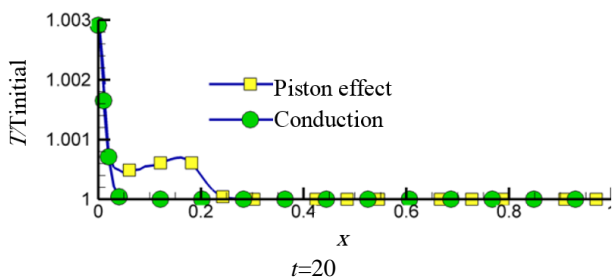


**Fig. 5** Comparison between McCormack simulation results employed in [16] and current method by taking the time step 40000 and  $N_{nx} = 1000$

شکل 5 مقایسه میان نتایج شبیه‌سازی حاضر و روش مک کورمک به کار گرفته شده در مرجع با در نظر گرفتن  $N_{nx} = 1000$  و در گام زمانی 40000

"اشکال 6 و 7" سکانس‌های مختلف حرکت موج انبساطی درون سیال و اثرات آن بر روی دما را نشان می‌دهد. دمای ترسیم شده مربوط به توزیع دما بر روی خط عمودی در نظر گرفته شده در وسط محفظه می‌باشد. شبیه‌سازی با پرفش دمایی  $T_w/T_{initial} = 1.003$  بر روی مرز پایین آغاز می‌شود که در آن دمایی اولیه کل میدان جریان می‌باشد. دمای مرز پایین و بالا در طول محاسبات ثابت فرض شده‌اند. نشان‌گرهای دایره‌ای بیانگر مقادیر محاسبه شده در وضعیت هدایت خالص است.

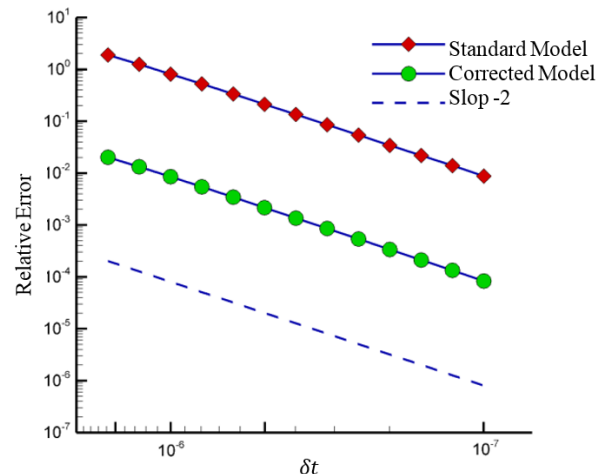
همان‌طور که ملاحظه می‌شود، تحت اثر پدیده پیستونی، پس از گذشت 50 گام زمانی موج به حدود نصف مسیر مربوطه رسیده است در حالی که این مسافت برای هدایت خالص در حدود 0.1 طول کل مسیر می‌باشد. زمانی که



$9/8, b = 1/3, R = 1$  می‌باشند. مقادیر دمای فوق بحرانی بی‌بعد و چگالی فوق بحرانی بی‌بعد به صورت  $\rho_c = 1, T_c = 1$  در نظر گرفته شده‌اند. ثابت آرامش شبکه بولتزمن حرارتی برابر 0.7 و ثابت آرامش شبکه بولتزمن برابر 0.8 لحاظ شده‌اند. "شکل 4" مقایسه میان روش‌های مختلف شبیه‌ساز نیرو (دسته اول، دوم و سوم) را پس از گذشت 500 گام زمانی نشان می‌دهد.

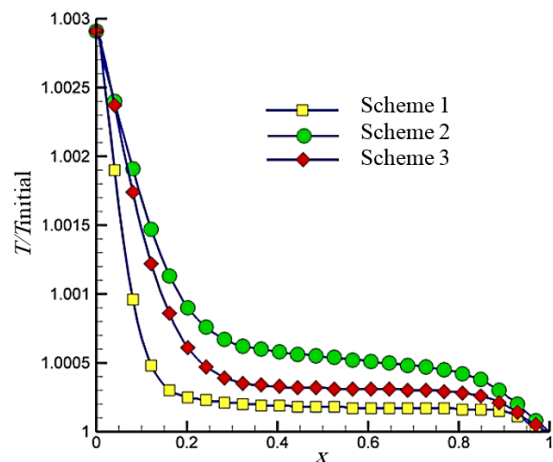
نتایج حاکی از آن است که اختلاف سه روش موردنظر غیرقابل صرف‌نظر می‌باشد. با توجه به آنالیز مرجع [34] قابل پیش‌بینی است که نتایج روش سه دارای کمترین خطا می‌باشد.

برای ارزیابی خطای روش سوم، نتایج با مقادیر منتشر شده در مرجع [17] مقایسه می‌شود. "شکل 5" مقایسه‌ی بین نتایج مدل حاضر و نتایج حاصل از روش مک کورمک [17] را پس از گذشت 40000 گام زمانی نشان می‌دهد. تعداد گره در نظر گرفته شده در این شبیه‌سازی  $N_{nx} \times N_{ny} = 20 \times 100$  می‌باشد. نتایج حاکی از آن است که روش سوم نتایجی نزدیک به مدل مک کورمک ارائه می‌کند.



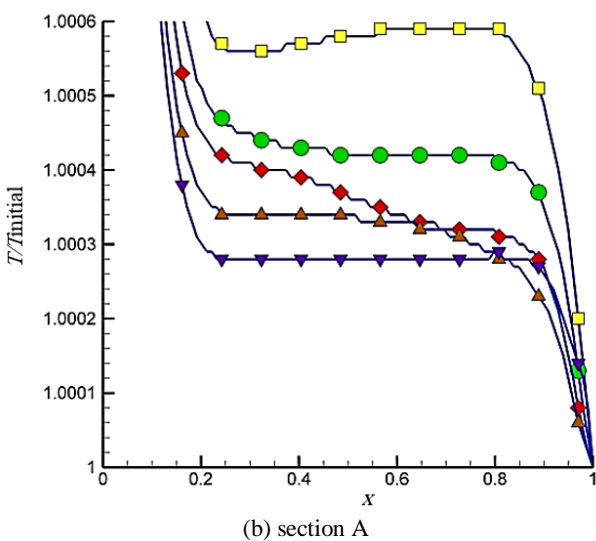
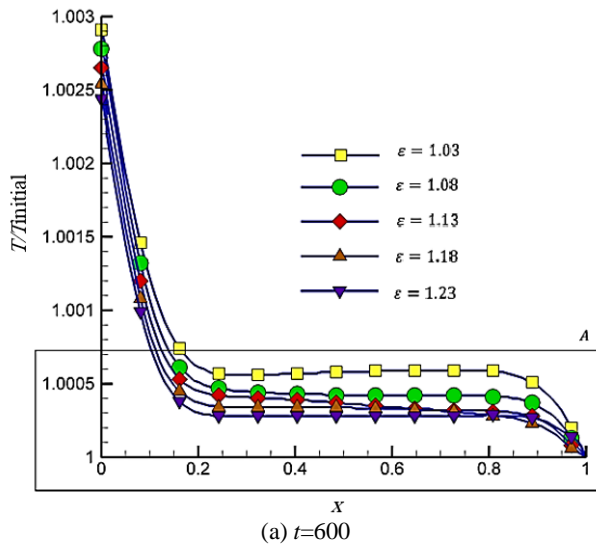
**Fig. 3** The relative error of the standard model and modified model for the one-dimensional lattice Boltzmann method under  $u_{max} = 1.0, \gamma = 0.08$  and  $\omega' = \pi/5$

شکل 3 خطای نسبی مدل استاندارد و مدل اصلاح شده روش شبکه بولتزمن برای مساله یک بعدی تحت شرایط  $u_{max} = 1.0, \gamma = 0.08$  و  $\omega' = \pi/5$



**Fig. 4** Comparison between three schemes for simulation of intermolecular force in the lattice  $20 \times 100$  and for time step equal 500

شکل 4 مقایسه نتایج بین روش یک، دو و سه برای شبیه‌سازی نیروی بین مولکولی در شبکه  $20 \times 100$  و در گام زمانی 500



**Fig. 8** The temperature distribution is calculated based on different initial temperatures ( $\varepsilon$ )

شکل 8 توزیع دمای محاسبه شده براساس دماهای اولیه مختلف ( $\varepsilon$ )

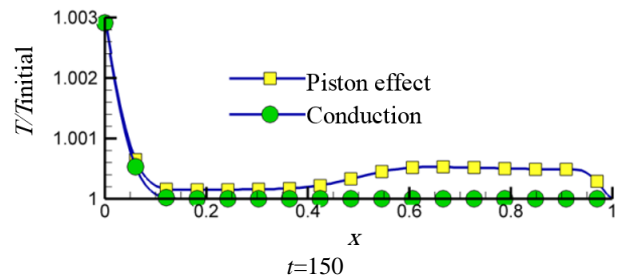
"شکل 8" توزیع دما ( $T/T_{initial}$ ) را در خط عمودی مرکز محفظه تحت شرایط مختلف دمای اولیه نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد که هر چه مقدار دمای اولیه به دمای بحرانی نزدیک‌تر باشد انتقال حرارت با سرعت بیشتری انجام می‌شود.

### 7- جمع بندی

پدیده اثر پیستونی با استفاده از مدل توسعه یافته شبکه بولتزمن شبیه‌سازی گردید. نتایج نشان از سرعت بالای انتقال حرارت این مکانیزم دارد که با مشاهدات تجربی منتشر شده کاملاً منطبق است. اثرات موج آکوستیکی منتشر شده بر روی دما در سکانس‌های مختلف زمانی نشان داده شد. علاوه بر این، نتایج نشان می‌دهد هرچه مقدار دمای اولیه به مقدار بحرانی نزدیک‌تر باشد انتقال حرارت با سرعت بیشتری انجام می‌گردد. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که روش سوم نیرو روش شبکه بولتزمن در شبیه‌سازی پدیده اثر پیستونی دارای دقت بالاتری نسبت به سایر روش‌هاست.

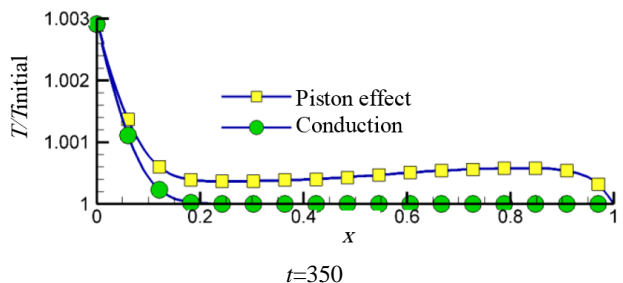
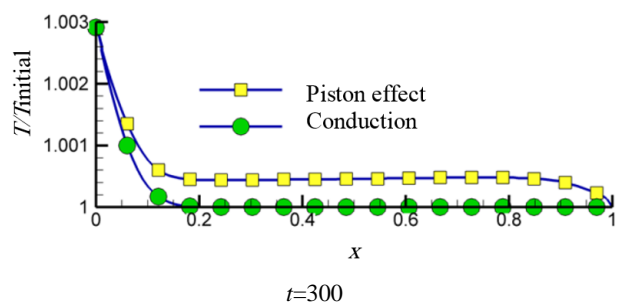
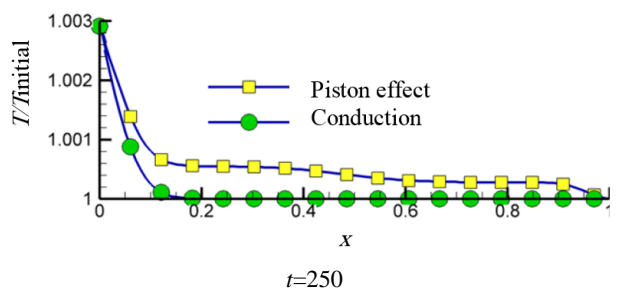
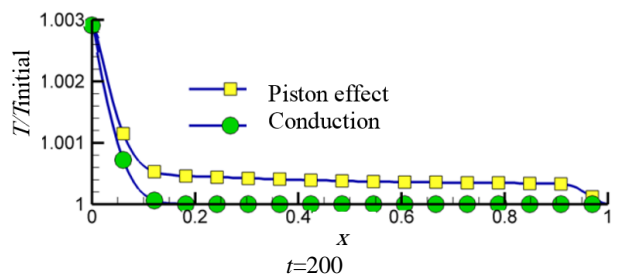
### 8- فهرست علامت‌ها

$a$  و  $b$  ثابت‌های واندروالس



**Fig. 6** Different sequences of wave motion of piston effect and its effect on temperature distribution in comparison with pure conduction

شکل 6 سکانس‌های مختلف از حرکت موج پدیده اثر پیستونی و اثرات آن بر توزیع دما در قیاس با هدایت خالص



**Fig. 7** Different sequences of wave motion of piston effect and its effects on temperature distribution in comparison with pure conduction

شکل 7 سکانس‌های مختلف از حرکت موج و اثرات آن بر توزیع دما در قیاس با هدایت خالص

موج به انتهای مسیر می‌رسد میان دو صفحه رفت و برگشت خواهد داشت و در هر بار حرکت باعث بالا رفتن دمای سیال می‌شود.

$\omega$  فرکانس زاویه‌ای  
 $\omega_i$  ثابت وزنی شبکه در جهت  $i$

### 9- پیوست

جهت کاهش خطا در حل گذرا می‌توان ترم اصلاح کننده  $\delta J_{CT}^1$  را به صورت زیر انتخاب کرد.

$$\varepsilon \left[ \frac{\alpha_0}{c_s^2} \partial_t (\vec{T}\vec{u} - D\vec{\nabla}T) \right] - \varepsilon \left[ \lambda c_s^2 \delta J_{CT}^1 \right] = 0 \quad (31)$$

معادله (31) به فرم زیر بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} \delta J_{CT}^1 &= \varepsilon \delta J_{CT}^1 = \varepsilon' \left[ \frac{\alpha_0}{\lambda c_s^4} \partial_{t_1} (\rho \vec{u} - D\vec{\nabla}\rho) \right] \\ &= \frac{1}{c_s^2} \left( 1 - \frac{1}{2\lambda} \right) \left( \frac{\varepsilon' \partial_{t_1} \rho \vec{u}}{(J_{CT})_1} - \frac{\varepsilon' \partial_{t_1} D\vec{\nabla}\rho}{(J_{CT})_2} \right) \end{aligned} \quad (32)$$

که در آن  $(J_{CT})_1$  به مشتق زمانی بر روی حاصل ضرب سرعت و دما وابسته است و دارای مشتق مکانی و زمانی بر روی دما می‌باشد. در آنالیز چاپمن انسکوگ به صورت  $t_1 = \varepsilon' t$  در نظر گرفته شده است. در رابطه (33) می‌توان مشتق بردار سرعت بر روی زمان را با تقریب  $O(\varepsilon'^2)$  به صورت زیر محاسبه نمود.

$$\varepsilon' \partial_t \vec{u} = \vec{u}(t+1) - \vec{u}(t) + O(\varepsilon'^2) \quad (33)$$

همین طور می‌توان مقدار مشتق دما بر روی زمان را نیز تخمین زد:

$$\varepsilon' \partial_t T = -\frac{1}{\lambda w_0} \varepsilon' f_0^1 \quad (34)$$

که  $g_i^1$  بخش غیرتعادلی تابع توزیع  $g_i$  است. در نهایت، رابطه (35) به صورت زیر اصلاح خواهد شد.

$$\begin{aligned} \delta J_{CT}^1 &= \frac{1}{c_s^2} \left( 1 - \frac{1}{2\lambda} \right) \left[ T(\vec{u}(t+1) - \vec{u}(t)) - \frac{\vec{u}(t)}{\lambda w_0} \varepsilon' f_0^1 + \right. \\ &\left. D\vec{\nabla} \left( \frac{1}{\lambda w_0} \varepsilon' f_0^1 \right) + O(\varepsilon'^2) \right] \end{aligned} \quad (35)$$

علاوه بر آن می‌توان ادعا نمود که ترم  $D\vec{\nabla}(\varepsilon' f_0^1 / \lambda w_0)$  نیز از  $O(\varepsilon'^2)$  می‌باشد، چرا که در آنالیز چاپمن انسکوگ بردار دیورژانس از مرتبه  $\varepsilon'$  و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{\nabla} = \varepsilon' \vec{\nabla}_1 \quad (36)$$

بنابراین می‌توان معادله (37) را به صورت زیر بازنویسی نمود.

$$\begin{aligned} \delta J_{CT}^1 &= \frac{1}{c_s^2} \left( 1 - \frac{1}{2\lambda} \right) \\ &\left[ \rho(\vec{u}(t+1) - \vec{u}(t)) - \frac{\vec{u}(t)}{\lambda w_0} \varepsilon' f_0^1 + O(\varepsilon'^2) \right] \end{aligned} \quad (37)$$

### 10- مراجع

- [1] A. Teymourash, S. Noorifard, Natural convection heat transfer of a supercritical fluid in a vertical channel with isothermal condition, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 33-41, 2014. (in Persian)
- [2] M. A. Brown, S. W. Churchill, Experimental measurements of pressure waves generated by impulsive heating of a surface, *AIChE Journal*, Vol. 41, No. 2, pp. 205-213, 1995.
- [3] B. Farouk, E. S. Oran, T. Fusegi, Numerical study of thermoacoustic waves in an enclosure, *Physics of Fluids*, Vol. 12, No. 5, pp. 1052-1061, 2000.

$\vec{c}_i$	بردار سرعت شبکه در جهت $i$ (m/s)
$c_p$	ظرفیت حرارتی مخصوص (kJ/kg K)
$c_s$	سرعت صوت شبکه (m/s)
$D$	بخش متغیر ضریب پخش حرارتی ( $m^2/s$ )
$G$	قدرت تقابل میان ذرات
$g_i$	تابع توزیع ذرات برای شبکه بولتزمن حرارتی جهت $i$
$g_i^{eq}$	تابع توزیع تعادلی ذرات برای شبکه بولتزمن حرارتی در جهت $i$
$\tilde{g}_i$	بردار ممان برای شبکه بولتزمن حرارتی
$g_i^1$	بخش غیرتعادلی تابع توزیع احتمال (K)
$\vec{F}_i$	بردار نیروی خارجی ( $N$ )
$\tilde{F}_i$	تصویر نیروی خارجی در راستای $i$ شبکه بولتزمن
$K$	بخش متغیر ضریب هدایت حرارتی (W/m K)
$k_0$	بخش ثابت ضریب هدایت حرارتی (W/m K)
$M$	ماتریس انتقال
$N_{nx}$	تعداد نقاط شبکه در راستای $x$
$N_{ny}$	تعداد نقاط شبکه در راستای $y$
$P$	فشار ترمودینامیک (Pa)
$R$	ثابت گازها
$\vec{r}$	بردار مکان ( $x, y$ ) (m)
$t$	زمان (s)
$T$	دما (K)
$T_c$	دمای بی بعد بحرانی
$T_w$	دمای دیوار (K)
$\vec{u}$	بردار سرعت ماکروسکوپی (m/s)
$\vec{u}^{eq}$	سرعت متناظر با تابع توزیع تعادلی (m/s)
$u'$	سرعت میکروسکوپی (m/s)
$u_{max}$	بیشینه سرعت (m/s)
$x^*$	مقدار بی بعد مکان
$x, y$	مختصات مکان (m)

### علامت‌های یونانی

$\alpha_0$	بخش ثابت ضریب پخش حرارتی ( $m^2/s$ )
$\gamma$	پارامتر متناسب با تغییرات ضریب هدایت حرارتی (1/K)
$\varepsilon$	پارامتر نشان دهنده میزان انحراف دمای دیواره از دمای اولیه
$\varepsilon'$	عدد نادسن شبکه
$\lambda$	زمان آرامش شبکه بولتزمن حرارتی
$\rho$	چگالی ( $kg/m^3$ )
$\sigma'$	ثابت موثر در موج اولیه دما
$\Lambda$	ماتریس آرامش
$\Omega$	عملگر برخورد
$\tau$	زمان آرامش در شبکه بولتزمن
$\nu$	لزجت سینماتیکی
$v$	حجم مخصوص
$\psi$	پتانسیل بین مولکولی



- Physical Review A*, Vol. 41, No. 4, pp. 2256, 1990 .
- [20] H. Boukari, J. Shaumeyer, M. E. Briggs, R. W. Gammon, Critical speeding up in pure fluids, *Physical Review A*, Vol. 41, No. 4, pp. 2260, 1990.
- [21] B. Zappoli, D. Bailly, Y. Garrabos, B. Le Neindre, P. Guenoun, D. Beysens, Anomalous heat transport by the piston effect in supercritical fluids under zero gravity, *Physical Review A*, Vol. 41, No. 4, pp. 2264, 1990.
- [22] H. Klein, G. Schmitz, D. Woermann, Temperature propagation in near-critical fluids prior to and during phase separation, *Physical Review A*, Vol. 43, No. 8, pp. 4562, 1991.
- [23] M. Bonetti, F. Perrot, D. Beysens, Y. Garrabos, Fast thermalization in supercritical fluids, *Physical Review E*, Vol. 49, No. 6, pp. R4779, 1994.
- [24] G. Accary, I. Raspo, A 3D finite volume method for the prediction of a supercritical fluid buoyant flow in a differentially heated cavity, *Computers & fluids*, Vol. 35, No. 10, pp. 1316-1331, 2006.
- [25] M. Varmazyar, M. Bazargan, Development of a thermal lattice Boltzmann method to simulate heat transfer problems with variable thermal conductivity, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 59, No. 2, pp. 363-371, 2013.
- [26] M. Varmazyar, M. Bazargan, A. Moahmmadi, A. Rahbari, Error analysis of thermal lattice boltzmann method in natural convection problems with varying fluid thermal diffusion coefficient, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 12, pp. 335-344, 2016.
- [27] J. Latt, Hydrodynamic Limit of Lattice Boltzmann Equations, Thesis, University of Geneva, 2007.
- [28] A. A. Mohamad, Lattice Boltzmann method: Fundamentals and engineering applications with computer codes: Springer Science & Business Media, pp. 34-45, 2011.
- [29] X. Niu, C. Shu, Y. Chew, Y. Peng, A momentum exchange-based immersed boundary-lattice Boltzmann method for simulating incompressible viscous flows, *Physics Letters A*, Vol. 354, No. 3, pp. 173-182, 2006.
- [30] I. Ginzburg, Equilibrium-type and link-type lattice Boltzmann models for generic advection and anisotropic-dispersion equation, *Advances in Water Resources*, Vol. 28, No. 11, pp. 1171-1195, 2005.
- [31] H. Huang, M. Sukop, X. Lu, *Multiphase Lattice Boltzmann Methods: Theory and Application*: Wiley, pp. 57-63, 2015.
- [32] L. S. Luo, Lattice-gas automata and lattice Boltzmann equations for two-dimensional hydrodynamics, *School of Physics*, Georgia Institute of Technology, 1993.
- [33] X. Shan, H. Chen, Simulation of nonideal gases and liquid-gas phase transitions by the lattice Boltzmann equation, *Physical Review E*, Vol. 49, No. 4, pp. 2941, 1994.
- [34] Z. Guo, C. Zheng, B. Shi, Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method, *Physical Review E*, Vol. 65, No. 4, pp. 046308, 2002.
- [35] Q. Zou, X. He, On pressure and velocity flow boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model, arXiv preprint comp-gas/9508001, 1995 .
- [4] B. Zappoli, S. Amiroudine, P. Carles, J. Ouazzani, Thermoacoustic and buoyancy-driven transport in a square side-heated cavity filled with a near-critical fluid, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 316, No. 4, pp. 53-72, 1996 .
- [5] K. Nitsche, J. Straub, *Proceedings of the Sixth European Symposium on Material Sciences under Microgravity Conditions*, Bordeaux, France, European Space Agency, Paris, 1987 .
- [6] H. Wagner, P. Hos, Y. Bayazitoglu, Variable property piston effect, *Journal of Thermophysics and heat transfer*, Vol. 15, No. 4, pp. 497-503, 2001.
- [7] Y. Garrabos, M. Bonetti, D. Beysens, F. Perrot, T. Fröhlich, P. Carles, B. Zappoli, Relaxation of a supercritical fluid after a heat pulse in the absence of gravity effects: Theory and experiments, *Physical Review E*, Vol. 57, No. 5, pp. 5665, 1998.
- [8] Z. Lei, M. K. Aktas, B. Farouk, E. S. Oran, Generation and propagation of thermoacoustic waves in mildly supercritical carbon dioxide, *Proceeding of, American Society of Mechanical Engineers*, pp. 129-135, 2004.
- [9] Z. Lei, B. Farouk, Generation and propagation of thermally induced acoustic waves in supercritical carbon dioxide, *Proceeding of American Society of Mechanical Engineers*, pp. 271-278, 2007 .
- [10] Z. Lei, B. Farouk, E. S. Oran, Numerical simulation of piston effect in supercritical carbon dioxide, *Proceeding of American Society of Mechanical Engineers*, pp. 805-810, 2005.
- [11] Lei Z, Lin Y, Farouk B, Oran ES, editors, Numerical Simulations of Heat Transfer in Supercritical carbon dioxide, International Heat Transfer Conference 13, Begel House Inc, 2006.
- [12] P. Guenoun, B. Khalil, D. Beysens, Y. Garrabos, F. Kammoun, B. Le Neindre, B. Zappoli, Thermal cycle around the critical point of carbon dioxide under reduced gravity, *Physical Review E*, Vol. 47, No. 3, pp. 1531, 1993.
- [13] K. Nitsche, J. Straub, Isochoric heat-capacity at the critical-point under reduced gravity, *Naturwissenschaften*, Vol. 73, No. 7, pp. 370-373, 1986 .
- [14] J. Straub, L. Eicher, A. Haupt, Dynamic temperature propagation in a pure fluid near its critical point observed under microgravity during the German Spacelab Mission D-2, *Physical Review E*, Vol. 51, No. 6, pp. 5556, 1995 .
- [15] B. Zappoli, Influence of convection on the piston effect, *International Journal of Thermophysics*, Vol. 19, No. 3, pp. 803-815, 1998 .
- [16] B. Zappoli, P. Carles, The thermo-acoustic nature of the critical speeding up, *European Journal of Mechanics*, B, Fluids, Vol. 14, No. 1, pp. 41-65, 1995.
- [17] G. Házi, A. Márkus, Modeling heat transfer in supercritical fluid using the lattice Boltzmann method, *Physical Review E*, Vol. 77, No. 2, pp. 026305, 2008.
- [18] Z. Lei, *Thermoacoustic Convection and Transport in Supercritical Fluids under Normal and Micro-gravity Conditions*, Thesis, Drexel University, 2009.
- [19] A. Onuki, H. Hao, R. A. Ferrell, Fast adiabatic equilibration in a single-component fluid near the liquid-vapor critical point,