http://mme.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

آذر ۱۳۹۲، دوره ۱۳ شماره ۹ ص ص ۵۸-۶۸

مقاله پژوهشی کامل
تاریخ دریافت ۹۱/۱۱/۲٤
تاریخ پذیرش ۹۲/۱/۲۸
ارائه در سایت ۹۲/۶/۳۰

بررسی ارتعاشات تیر هدفمند دو جهته مقید در لایه‌های پیزوالکتریک روی بستر الاستیک با استفاده از دیفرانسیل کوادریچر

غلامحسین رحیمی[۱*]، حسین طورانی[۲]، محمد سجاد گازر[۲]

۱- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
۲- کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
* تهران، صندوق پستی ۱۴۱۱۵۱۴۳، Rahimi_gh@modares.ac.ir

چکیده- در این مقاله با ترکیب روش‌های دیفرانسیل کوادریچر و روش فضای حالت یک حل الاستیسیته برای بررسی ارتعاشات آزاد و تأثیر بستر الاستیک در یک تیر هدفمند دوجهته مقید در لایه‌های پیزوالکتریک، ارائه شده است. به این صورت که در راستای طولی تیر از روش دیفرانسیل کوادریچر و در راستای ضخامت تیر از تکنیک فضای حالت استفاده شده است. بستر الاستیک تیر مدل دو پارامتری یا وینکلر-پسترناک می‌باشد که دو نوع شرایط مرزی ساده-ساده و گیردار-گیردار مورد بررسی قرار گرفته و فرض شده است که خواص تیر در راستای ضخامت و طولی آن به صورت نمایی تغییر می‌کند. و ضریب پواسون ثابت فرض شده که تأثیرات تغییر شاخص‌های گرادیان خواص مواد و عدد موج بر روی ارتعاشات آزاد این تیر بررسی شده است. نتایج به دست آمده نشان داد که این روش از دقت عالی و سرعت همگرایی بالایی برخوردار است. همچنین نتایجی برای نشان دادن رفتار مکانیکی این تیرها ارائه شده است.

کلیدواژگان: ارتعاشات آزاد، تیر هدفمند پیزوالکتریک، دیفرانسیل کوادریچر، بستر الاستیک.

Analysis vibrations of two-direction functionally graded beam with integrated piezoelectric layers on resting elastic foundation using differential quadrature

GH. Rahimi[1*], H. Toorani[2], M.S. Gazor[2]

1- Prof., Mech. Eng., Tarbiat modares Univ, Tehran, Iran
2- MSc. Student, Mech. Eng., Tarbiat Modares Univ., Tehran, Iran
* P.O.B. 14115143 Tehran, Iran. Rahimi_gh@modares.ac.ir

Abstract- In this paper a two dimensional elasticity for free vibrations and the effect of elastic foundantion on a two-direction functionally graded beams with integrated surface piezoelectric layers with combination of differential quadrature method and space-state method is presented here. Differential quadrature method in axial direction and space-state method in transverse direction is used. It's considered that two parameters model or winkler-pasternak for elastic foundation which has been considered two kinds of boundary conditions include simply support and clamped-clamped. Also, It is assumed that beam properties in thickness and axial direction varying exponentially and poison factor is constant which has been considered the effects of materials properties gradient index and number waves on free vibrations beams. The obtained results show that this method has good accuracy and high speed of convergence.

keywords: Differential Quadrature, Functionally Graded Beam, Piezoelectric Layers, Free Vibrations, Elastic Foundation.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.9.7.5]

۱- مقدمه

مواد FGM یا مواد با خصوصیات درجه‌بندی به صورت تابعی، مواد غیر ایزوتروپ و غیر همگن می‌باشند. مهم‌ترین خصوصیت این مواد این است که اجزای تشکیل دهنده آنها می‌توانند با خصوصیات متفاوت انتخاب شوند، به طوری که خواص در آنها به صورت پیوسته و بر اساس کسر حجمی‌تغییر می‌کند و نحوه این تغییر ، قابل انتخاب و مطلوب برای کاربردهای گوناگون می‌باشد. همین خصوصیت این مواد باعث کاربردهای زیاد آنها شده است. از جمله این کاربردها می‌توان به زمینه‌های هوافضایی، ماشین آلات صنعتی و پزشکی هسته‌ای، خودرو و صنایع وابسته به آن اشاره کرد [۱]. ایده اصلی ساخت مواد هدفمند به سال ۱۹۸۴ باز می‌گردد. ژاپنی‌ها اولین افرادی بودند که این مواد را ساختند، آنها زمانی که مشغول ساختن سفینه فضایی بودند نیاز به ماده‌ای پیدا کردند که بتواند در برابر دماهای بالا عایق خوبی بوده و همچنین این ماده می‌بایست قابلیت جوش‌کاری با فلز و استحکام بالا را نیز داشته باشد [۲]. مواد پیزو الکتریک موادی هستند که زمانی که در شرایط تنش و فشار قرار می‌گیرند، میدان الکتریکی تولید می‌کنند. از آنجا که این اثر حالت برگشت‌پذیری دارد، القای میدان الکتریکی در این مواد، تنش را در طول سازه ایجاد خواهد کرد. بنابراین ساختارهایی با طراحی مناسب و با استفاده از این مواد می‌توانند در صورت ایجاد یک میدان الکتریکی، خم، منبسط و یا منقبض شوند. مواد پیزوالکتریک به طور گسترده در سیستم‌های الکتریکی و مکانیکی و ساختارهای هوشمند به عنوان سنسورها و محرک‌ها به کار برده می‌شوند [۳].

در سال ۱۹۹۶ یک تحلیل الکتروالاستیک دقیق برای ورق‌های پیزوالکتریک با تکیه‌گاه ساده با روش فضاحالت ارائه شد [۴]. برت و مالیک در سال ۱۹۹۷ از روش دیفرانسیل کوادریچر به عنوان یک تکنیک قدرتمند برای آنالیز کامپوزیت‌های لایه‌ای استفاده کردند [۵]. در سال ۲۰۰۹ آنالیز ارتعاشات ترمو-مکانیکی تیر ساندویچی هدفمند روی بستر الاستیک با استفاده از روش دیفرانسیل کوادریچر اصلاح شده بیان شد [۶]. آنالیز ارتعاشات سه‌بعدی ورق‌های هدفمند با تکیه‌گاه ساده روی بستر الاستیک با استفاده از روش سری و دیفرانسیل کوادریچر براساس تئوری الاستیسیته را ارائه شد [۷]. همچنین بر اساس تئوری دو بعدی الاستیسیته تیر هدفمند روی بستر الاستیک با استفاده از روش فضای حالت تحلیل ارتعاشی و خمشی ارائه شد [۸]. تیر هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از سری فوریه و فضاحالت آنالیز ترموالاستیسیته ارائه شد [۹]. در این مقاله با روش دیفرانسیل کوادریچر بر مبنای فضاحالت به تحلیل ارتعاشات آزاد و نیز تأثیر ضرایب وینکلر و لایه برشی بستر الاستیک در یک تیر هدفمند دوجهته با لایه‌های پیزوالکتریک با دو شرایط مرزی ساده-ساده و گیردار-گیردار پرداخته شده است. برای استفاده از تکنیک دیفرانسیل کوادریچر راستای طولی تیر را به N نقطه تقسیم کرده و برای هر نقطه تیر چهار متغیر حالت شامل جابجایی (u, w)، تنش‌ها (σ_z, τ_{xz})، و برای لایه‌های پیزوالکتریک علاوه بر آنها دو متغیر پتانسیل الکتریکی (φ) و جابجایی الکتریکی (D_z)، اختصاص یافته است. با در نظر گرفتن شرایط مرزی و استفاده از روش دیفرانسیل کوادریچر، از معادلات حاکم اولیه معادلات فضاحالت گسسته‌سازی شده استخراج شد و با حل این معادلات حالت و اعمال شرایط در سطح بالا و پایین تیر، رفتار مکانیکی این تیرها بررسی شده است.

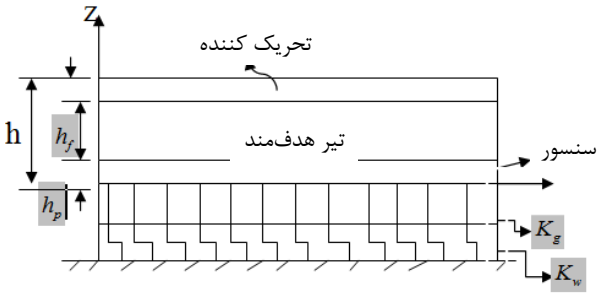
۲- معادلات حاکم

۲-۱- برای تیر هدفمند

یک تیر هدفمند دوجهته مقید در لایه‌های پیزوالکتریک بر روی بستر الاستیک در یک دستگاه دکارتی دوبعدی (x, z)، در شکل ۱ نشان داده شده، فرض می‌شود که خواص تیر در راستای ضخامت و طولی به صورت نمایی طبق رابطه (۱) تغییر می‌کند.

$$\tilde{p} = p e^{\alpha_1 \frac{z}{h} + \alpha_2 \frac{x}{l}} \qquad (۱)$$

که α_1 و α_2 شاخص گرادیان خواص مواد بـه ترتیـب در راستای ضخامت و طولی می‌باشند.



[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.9.7.5]

شکل ۱ هندسه یک تیر هدفمند مقید درلایه‌های پیزوالکتریک بر روی بسترالاستیک

بدون در نظر گرفتن نیروهای حجمی معادلات حرکت را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی (۲) نوشت.

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=\tilde{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=\tilde{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (۲)$$

که در آن σ_x,σ_z تنش‌های محوری، τ_{xz} تنش برشی، u,w جابه‌جایی‌های مکانیکی به ترتیب در راستای عرضی و محوری، $\tilde{\rho}$ چگالی مواد و t زمان می‌باشند.

ارتباط کرنش با جابجایی مکانیکی را می‌توان به‌صورت رابطه (۳) بیان نمود.

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\ \varepsilon_{xz}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}, \qquad (۳)$$

که در آن $\varepsilon_x,\varepsilon_z,\varepsilon_{xz}$ مؤلفه‌های کرنش می‌باشند.

در این مقاله دو نوع شرط مرزی ساده- ساده و گیردار- گیردار $c-c$، مطرح شده است. شرایط مرزی مکانیکی و الکتریکی به صورت روابط (۴) و (۵) فرض شده است:

$$S-S:\ w=0,\sigma_x=0,\varphi=0 \quad \text{در} \quad x=0,l \qquad (۴)$$

$$c-c:\ u=0,w=0,\varphi=0 \quad \text{در} \quad x=0,l \qquad (۵)$$

که φ پتانسیل الکتریکی می‌باشد. و برای تفکیک متغیر t، از متغیرهای مکان از رابطه (۶) در نظر گرفته شده است.

$$f(x,z,t)=\hat{f}(x,z)e^{i\omega t} \quad \text{برای} \quad u,w$$

$$f(x,z,t)=\hat{f}(x,z)e^{i\omega t}e^{\alpha_1\frac{z}{h}+\alpha_2\frac{x}{l}} \quad \text{برای} \quad \sigma_x,\sigma_z,\tau_{xz} \qquad (۶)$$

که در آنها $i=\sqrt{-1}$ ، ω فرکانس طبیعی تیر می‌باشد.

۲-۱-۱- دیفرانسیل کوادریچر

برای از بین بردن بستگی معادلات به متغیر مستقل x معادلات به کمک روش دیفرانسیل کوادریچر گسسته‌سازی شده است. در این روش مشتقات جزئی مرتبه n یک تابع پیوسته $f(x,z)$ نسبت به x در نقطه x_i به صورت مجموع خطی مقادیر تابع وزن در همه نقاط بازه به صورت رابطه (۷) بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^n f(x_i,z)}{\partial x^n}=\sum_{j=1}^{N}g_{ij}^{(n)}f(x_j,z)$$

$$(i=1,\dots,N,\ n=1,\dots,N-1) \qquad (۷)$$

که در آن N تعداد نقاط نمونه‌گیری و $g_{ij}^{(n)}$ ضرایب وزنی وابسته به x_i می‌باشند. که مقادیر آن از رابطه (۸) به‌دست می‌آید [۱۰].

$$g_{ij}^{(1)}=\frac{M(x_i)}{(x_i-x_j)},\quad i,j=1,\dots,N\ (i\neq j)$$

$$M(x_i)=\prod_{j=i,i\neq j}^{N}(x_i-x_j),\quad g_{ii}^{(1)}=-\sum_{j=1,i\neq j}^{N}g_{ij}^{(1)} \qquad (۸)$$

با ترکیب کردن معادله تنش-کرنش تیر دوبعدی و معادله (۳) و با استفاده از روابط بی‌بعد (پیوست بخش الف) معادلات به‌صورت (۹)، (۱۰) و (۱۱) به‌دست می‌آید.

$$\bar{\sigma}_x=\bar{c}_{11}\frac{h_f}{L}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\bar{c}_{33}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{z}} \qquad (۹)$$

$$\bar{\sigma}_z=\bar{c}_{13}\frac{h_f}{L}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\bar{c}_{33}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{z}} \qquad (۱۰)$$

$$\bar{\tau}_{xz}=\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{z}}+\frac{h_f}{L}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}} \qquad (۱۱)$$

به همین ترتیب با بی‌بعد کردن معادلات حرکت (۲) روابط (۱۲) و (۱۳) به‌دست می‌آید.

$$\frac{h_f}{L}\frac{\partial\bar{\sigma}_x}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{\tau}_{xz}}{\partial\bar{z}}+\frac{h_f}{L}\alpha_2\bar{\sigma}_x+\alpha_1\bar{\tau}_{xz}=-\varpi^2\bar{u} \qquad (۱۲)$$

$$\frac{h_f}{L}\frac{\partial\bar{\tau}_{xz}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{\sigma}_z}{\partial\bar{z}}+\frac{h_f}{L}\alpha_2\bar{\tau}_{xz}+\alpha_1\bar{\sigma}_z=-\varpi^2\bar{w} \qquad (۱۳)$$

بعد از اعمال روش دیفرانسیل کوادریچر که روابط به‌صورت (۱۴)، (۱۵) و (۱۶) خواهد شد.

$$\bar{\sigma}_{x_i}=\frac{h_f}{L}\bar{c}_{11}\sum_{k=1}^{N}g_{ik}^{(1)}\bar{u}_k+\bar{c}_{13}\frac{d\bar{w}_i}{d\bar{z}},\quad i=1,\dots,N \qquad (۱۴)$$

$$\bar{\sigma}_{z_i}=\bar{c}_{13}\frac{h_f}{L}\sum_{k=1}^{N}g_{ik}^{(1)}\bar{u}_k+\bar{c}_{33}\frac{d\bar{w}_i}{d\bar{z}},\quad i=1,\dots,N \qquad (۱۵)$$

$$\bar{\tau}_{xz.i}=\frac{d\bar{u}_i}{d\bar{z}}+\frac{h_f}{L}\sum_{k=1}^{N}g_{ik}^{(1)}\bar{w}_k,\quad i=1,\dots,N \qquad (۱۶)$$

۲-۱-۲- معادلات فضاحالت تیر هدفمند

با استفاده از معادلات (۱۴-۱۶) و اعمال روش DQ روی معادلات حرکت بی‌بعد شده (۱۲) و (۱۳) معادلات فضاحالت به صورت رابطه (۱۷) به‌دست می‌آید:

$$\frac{d}{d\bar{z}}\delta(\bar{z})=G_f\,\delta(\bar{z}) \qquad (۱۷)$$

که در آن:

$$\delta(z)=\left[[\sigma_{zi}][u_i][w_i][\tau_{xzi}]\right]^{\mathrm{T}}$$

G_f ماتریس ضرایب ثابت می‌باشد، که برای هر حالت

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.9.7.5]

تکیه‌گاهی به دست می‌آید. (پیوست بخش ب).

معادله (۱۷) یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول بوده و حل آن به‌صورت (۱۸) می‌باشد.

$$\delta(\bar{z}) = e^{G_f(\bar{z}-\bar{z}_0)}\delta(\bar{z}_0) \qquad (۱۸)$$

از آنجا که $\bar{z}_o = h_p$، پس برای تیر هدفمند دوجهته در راستای ضخامت رابطه (۱۹) نوشته شده است.

$$\delta_f(\bar{z}) = e^{G_f z}e^{-G_f h_p}\delta_f(h_p) \quad h_p \le \bar{z} \le h_p + h_f \qquad (۱۹)$$

۲-۲- لایه پیزوالکتریک

معادلات تشکیل دهنده برای این لایه پیزوالکتریک به‌صورت رابطه (۲۰) در نظر گرفته شده است.

$$\sigma = C\varepsilon - e^{\mathrm{T}}E \ , \ D = e\varepsilon + kE \qquad (۲۰)$$

که در آن:

$$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}\}^{\mathrm{T}}, \ E = \{E_x, E_z\}^{\mathrm{T}}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_z, \varepsilon_{xz}\}^{\mathrm{T}}, \ D = \{D_x, D_z\}^{\mathrm{T}}$$

$$C = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{13} & 0 \\ \tilde{C}_{13} & \tilde{C}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{55} \end{bmatrix}, \ e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{e}_5 \\ \tilde{e}_1 & \tilde{e}_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{k}_3 \end{bmatrix}$$

e^T ترانهاده e و $\tilde{C}_{ij}$ ضرایب سفتی الاستیک ماده، $\tilde{e}_i$ ضرایب سفتی پیزوالکتریک و K_i ضرایب دی‌الکتریک E_i بردار میدان الکتریکی می‌باشند. در جدول ۱ بعضی از خواص آورده شده است.

جدول ۱ خواص مواد پیزوالکتریک

	$BaTiO_3$	PZT-4	
	۱۶۶۰	۱۳۹	(GPa)
C_{13}	۷۸۰	۷۴	
C_{33}	۱۶۲۰	۱۱۵	
C_{55}	۴۳۰	۲۵/۶	
e_1	-۴/۴	-۵/۲	(C/m^2)
C_{11} e_3	۱۸/۶	۱۵/۱	
e_5	۱۱/۶	۱۲/۷	
K_1	۱۱۲	۶/۵	(nF/m)
K_3	۱۲۶	۵/۶	
	۵۷۰۰	۷۵۰۰	(kg/m^2)

حال با ترکیب معادلات اساسی مربوط به لایه پیزوالکتریک (۲۰) و روابط کرنش- جابجایی (۳) و میدان الکتریکی- پتانسیل و حذف زمان با استفاده از معادلات و بی‌بعد کردن معادلات و اعمال روش دیفرانسیل کوادریچر روابط (۲۱)، (۲۲)، (۲۳)، (۲۴) و (۲۵) به‌دست آمده است.

$$\bar{\sigma}_{x_i} = \frac{h}{L}\bar{c}_{11}\sum_{k=1}^{N} g_{ik}^{(1)}\bar{u}_k + \bar{c}_{13}\frac{d\bar{w}_i}{d\bar{z}} + \bar{e}_1\frac{d\bar{\phi}_i}{d\bar{z}} \qquad (۲۱)$$

$$\bar{\sigma}_{z_i} = \bar{c}_{13}\frac{h}{L}\sum_{k=1}^{N} g_{ik}^{(1)}\bar{u}_k + \bar{c}_{33}\frac{d\bar{w}_i}{d\bar{z}} + \bar{e}_3\frac{d\bar{\phi}_i}{d\bar{z}} \qquad (۲۲)$$

$$\bar{\tau}_{xz.i} = \frac{d\bar{u}_i}{d\bar{z}} + \frac{h}{L}\sum_{k=1}^{N} g_{ik}^{(1)}\bar{w}_k + \frac{h}{L}\bar{e}_5\sum_{k=1}^{N} g_{ik}^{(1)}\bar{\phi}_k \qquad (۲۳)$$

$$\bar{D}_{x.i} = \bar{e}_5\frac{d\bar{u}_i}{d\bar{z}} + \frac{h}{L}\sum_{k=1}^{N} g_{ik}^{(1)}\bar{w}_k - \frac{h}{L}\sum_{k=1}^{N} g_{ik}^{(1)}\bar{\phi}_k \qquad (۲۴)$$

$$\bar{D}_{z.i} = \bar{e}_1\frac{h}{L}\sum_{k=1}^{N} g_{ik}^{(1)}\bar{u}_k + \bar{e}_3\frac{d\bar{w}_i}{d\bar{z}} - k_3\frac{d\bar{\phi}_i}{d\bar{z}} \qquad (۲۵)$$

حال با اعمال روش دیفرانسیل کوادریچر (DQ) بر روی معادلات حرکت و گاوس بی‌بعد شده معادلات فضای حالت را به‌صورت رابطه (۲۶) به‌دست آورده شده است.

$$\frac{d}{d\bar{z}}\delta_p(\bar{z}) = G_p\delta_p(\bar{z}) \qquad (۲۶)$$

که در آن:

$$\delta(\bar{z}) = \left[[\bar{\sigma}_{zi}][\bar{u}_i][\bar{w}_i][\bar{\tau}_{xzi}][\bar{D}_{zi}][\bar{\varphi}_i]\right]^{\mathrm{T}}$$

$$[\bar{\sigma}_{zi}] = [\bar{\sigma}_{z1}....\bar{\sigma}_{zN}]^{\mathrm{T}}, \ [\bar{u}_i] = [\bar{u}_1...\bar{u}_N]^{\mathrm{T}}$$

G_p ماتریس ضرایب ثابت است که برای مواد پیزوالکتریک سطح بالا و پایین می‌تواند متفاوت باشد (پیوست بخش ب).

حل عمومی‌معادله بالا به‌صورت رابطه (۲۷) می‌باشد.

$$\delta(z) = e^{G_s z}\delta(0) \quad at \quad 0 \le Z \le h_p \qquad (۲۷)$$

$$\delta(z) = e^{G_a z}\left[e^{-G_a(h_p+h_f)}\right] \quad at \quad h_p + h_f \le Z \le h \qquad (۲۸)$$

حال ارتباط بین سطوح که به ترتیب از بالا تحریک‌کننده، تیر هدفمند و سنسور به صورت رابطه (۲۹) می‌باشد.

$$\delta(h) = M^a\delta(h_p + h_f) \qquad (۲۹)$$

$$\delta(h_p + h_f) = M^f\delta(h_p) \qquad (۳۰)$$

$$\delta(h_p + h_f) = M^s\delta(h_p) \qquad (۳۱)$$

$$\delta(h_p) = M^a\delta(0) \qquad (۳۲)$$

که در روابط (۳۰)، (۳۱) و (۳۲) مقادیر داده شده است.

$$M^a = \exp\left(G_a h_p\right)$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.9.7.5]

$$M^f = \exp\left(G_f h_f\right)$$
$$M^s = \exp\left(G_s h_p\right)$$

۳- ماتریس تبدیل عمومی‌و شرایط مرزی

از معادله (۳۰) و شرط $\varphi(h)=\varphi(h_p+h_f)=0$ از سطر ششم مقدار (۳۳) به‌دست می‌آید.

$$D_z=(h_p+h_f)=\frac{1}{m_{65}^a}\left(-\left[m_{6j}^a\right]\delta^m(h_p+h_f)\right)$$
$$j=1,...,4, k=1,...,6 \qquad (۳۳)$$

پس می‌توان ارتباط متغیرهای حالت در سطوح تحریک کننده را به‌صورت (۳۴) نوشت.

$$\delta^m(h)=Z^a\delta^m(h_p+h_f)$$
$$Z^a=\left(\left[m_{ij}^a\right]-\frac{1}{m_{65}^a}\left\{m_{i5}^a\right\}\left[m_{6j}^a\right]\right), i,j=1,...,4$$
$$\delta^m(z)=\left[\left[\sigma_{zi}\right]\left[u_i\right]\left[w_i\right]\left[\tau_{xzi}\right]\right]^T \qquad (۳۴)$$

با استفاده از معادله (۳۲) می‌توان ارتباط سطوح بالا و پایین سنسور به صورت (۳۵) نوشت.

$$\delta^m(h_s)=Z^s\delta^m(0)$$
$$Z^s=\left(\left[m_{ij}^s\right]-\frac{1}{m_{66}^s}\left\{m_{i5}^s\right\}\left[m_{6j}^s\right]\right), i,j=1,...,4 \qquad (۳۵)$$

از آنجا که متغیرهای حالت برای تحریک کننده، تیر هدفمند و سنسور یکسان و پیوسته شد، می‌توان با استفاده از روابط بالا ارتباط سطوح بالا و پایین تیر را به‌صورت معادله (۳۶) نوشت.

$$\delta(h)=S\delta(0) \quad , \quad S=Z^aM^fZ^s \qquad (۳۶)$$

۴- تیر روی بستر الاستیک

برای بستر الاستیک مدل دو پارامتری یا پسترناک- وینکلر در نظر گرفته شد [۸]. با قراردادن بستر در سطح زیرین تیر $z=0$ مقدار تنش را به‌صورت رابطه (۳۷) حاصل می‌شود.

$$\sigma_z=k_w w-k_g\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (۳۷)$$

حال با بی‌بعد کردن رابطه (۳۷) و اعمال روش DQ معادله (۳۸) به‌دست می‌آید.

$$\bar{\sigma}_{z,i}=K\bar{w}_i, \quad K=\frac{k_w h}{c_{55}}I_N-\frac{k_g h}{c_{55}L^2}g_{ij}^{(2)} \quad i=j=1,...,N \qquad (۳۸)$$

که K_w ضریب وینکلر و K_g ضریب الاستیک لایه برشی می‌باشد. شکل بی‌بعد این ضرایب و پارامتر بی‌بعد فرکانس طبیعی به صورت (۳۹) در نظر گرفته شده است.

$$\bar{k}_w=\frac{L^4k_w}{D}, \quad \bar{k}_g=\frac{L^2k_g}{D}, \quad \Omega=\omega L\sqrt{\rho h/D}$$
$$D=\frac{c_{55}h^3}{12(1-\vartheta^2)} \qquad (۳۹)$$

با اعمال شرایط تنش در بالا و بستر الاستیک در پایین تیر، بر روی معادله (۱۸) معادله (۴۰) حاصل می‌شود.

$$\begin{Bmatrix}[0]\\[\bar{u}]\\[\bar{w}]\\[0]\end{Bmatrix}_{z=h}=\begin{bmatrix}s_{11}&s_{12}&s_{13}&s_{14}\\s_{21}&s_{22}&s_{23}&s_{24}\\s_{31}&s_{32}&s_{33}&s_{34}\\s_{41}&s_{42}&s_{43}&s_{44}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}[k\bar{w}]\\[\bar{u}]\\[\bar{w}]\\[0]\end{Bmatrix}_{z=0} \qquad (۴۰)$$

از سطرهای اول و چهارم دستگاه (۴۰) معادله (۴۱) به‌دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix}s_{12}&ks_{11}+s_{13}\\s_{42}&ks_{41}+s_{43}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{u}\\\bar{w}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \qquad (۴۱)$$

حال با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب رابطه بالا، پارامترهای فرکانس طبیعی بی‌بعد Ω به‌دست می‌آید.

۵- نتایج عددی و مقایسه‌ها

برای به‌دست آوردن نتایج عددی، نقاط نمونه در جهت x از روش چپیشف استفاده می‌شود [۵].

$$x_i=\frac{L}{2}\left[1-\cos\frac{(i-1)\pi}{N-1}\right] \qquad (۴۲)$$

ابتدا همگرایی و دقت روش ارائه شده با به‌دست آوردن اولین ده فرکانس بی‌بعد $\varpi=\omega h\sqrt{\rho/c_{55}}$ یک تیر هدفمند در حالت بدون بستر الاستیک با خواص $c_{11o}=139\text{GPa}$، $c_{13o}=14\text{GPa}$، $c_{33o}=336.4\text{GPa}$، $c_{55o}=162.5\text{GPa}$، $\rho_o=7500$ و شاخص گرادیان ماده $\alpha_1=0.5$ و $\alpha_2=0$ ابعاد $h_f=1$، $L=15$ و $L=7$ در حالت شرایط مرزی ساده اعتباردهی شده، و مقایسه این نتایج، با نتایج جی یانگ [۸] و لو و چن [۱۱] در جدول ۲ برای $N=14$ نشان می‌دهد که این روش از سرعت همگرایی و دقت خوبی برخوردار است.

در جدول‌های ۳ و ۴ فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد تیر هدفمند دو جهته به ازای $\alpha_1=0.5$ و مقادیر مختلف برای α_2 و نسبت ضخامت به طول به ترتیب برای شرایط ساده- ساده و گیردار-گیردار آورده شده است.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.9.7.5]

جدول ۲ جدول اعتبارسنجی برای شرایط ساده-ساده (N=۱۴)

شماره مد	l/h=۱۵ حاضر	لو و چن [۱۱]	یانگ [۸]	l/h=۷ لو و چن [۱۱]	یانگ [۸]
۱	۰/۰۱۱۶	۰/۰۱۱۵۷۳	۰/۰۱۱۵۷	۰/۰۵۲۴۷۱	۰/۰۵۲۲۴۷
۲	۰/۰۴۵۸	۰/۰۴۵۸۰۲	۰/۰۴۵۸	۰/۲۰۰۷۲۸	۰/۲۰۰۷۳
۳	۰/۱۰۱۳	۰/۱۰۱۳۲	۰/۱۰۱۳۲	۰/۴۱۴۲۰۴	۰/۴۱۴۲
۴	۰/۱۷۶۱	۰/۱۷۶۱۳۱	۰/۱۷۶۱۳	۰/۴۲۳۸۱	۰/۴۲۳۸۲
۵	۰/۱۹۳۳	۰/۱۹۳۲۹۲	۰/۱۹۳۳	۰/۷۰۰۰۲	۰/۷۰۰۰۲
۶	۰/۲۶۷۸	۰/۲۶۷۹۱۷	۰/۲۶۷۹۲	۰/۸۲۸۳۷	۰/۸۲۸۳۷
۷	۰/۳۷۳۴	۰/۳۷۴۲۹۹	۰/۳۷۴۳۱	۱/۰۱۲۴۱۸	۱/۰۱۲۴۶
۸	۰/۳۸۶۷	۰/۳۸۶۵۹۱	۰/۳۸۶۵۹	۱/۲۴۲۴۵۵	۱/۲۴۲۴۴۶
۹	۰/۵۰۰۹	۰/۴۹۳۴۲۴	۰/۴۹۳۰۸	۱/۳۴۹۳۷	۱/۳۴۹۴۶
۱۰	۰/۵۸۰۰	۰/۵۷۹۸۷۷	۰/۵۷۹۸۸	۱/۶۵۶۳۹۸	۱/۶۵۶۴

جدول ۳ تغییرات فرکانس طبیعی تیر به ازای α_1 = ۰/۵ و مقادیر مختلف برای α_2 و نسبت h/l برای شرایط ساده- ساده

h_f/l	α_2	ϖ_1	ϖ_2	ϖ_3	ϖ_4	ϖ_5
۰/۱	۰/۵	۰/۰۲۶	۰/۱۰۱۴	۰/۲۲۰۱	۰/۲۳۰۴	۰/۲۴۴
	۱	۰/۰۲۶۲	۰/۱۰۱۷	۰/۲۲۰۴	۰/۲۴۳۶	۰/۲۵۱
	۲	۰/۰۲۷	۰/۱۰۲۸	۰/۲۲۱۵	۰/۲۵۴۳	۰/۲۶۵
	۵	۰/۰۳۱۳	۰/۱۱۰۱	۰/۲۲۹۴	۰/۲۸۰۶	۰/۳۶۳
	۱۰	۰/۰۴۰۹	۰/۱۳۰۴	۰/۲۵۴۲	۰/۳۰۹۶	۰/۳۹۴
۰/۲	۰/۵	۰/۱۰۱۶	۰/۳۷۴۴	۰/۴۸۱۸	۰/۵۴۹۳	۰/۶۶۰
	۱	۰/۱۰۲۳	۰/۳۷۵۴	۰/۵۰۷۳	۰/۵۶۰۳	۰/۶۶۳
	۲	۰/۱۰۵۲	۰/۳۷۹۴	۰/۵۲۸۶	۰/۵۸۴۲	۰/۶۶۸
	۵	۰/۱۲۱۸	۰/۴۰۵۳	۰/۵۷۱۲	۰/۷۹۰۸	۱/۱۴
	۱۰	۰/۱۵۷۱	۰/۴۷۶۴	۰/۶۵۳۴	۰/۸۶۹	۱/۳۲

جدول ۴ تغییرات فرکانس طبیعی تیر به ازای α_1=۰/۵ و مقادیر مختلف برای α_2 و نسبت h/l برای شرایط گیردار

h_f/l	α_2	ϖ_1	ϖ_2	ϖ_3	ϖ_4	ϖ_5
۰/۱	۰/۵	۰/۰۵۰۷	۰/۱۳۷۴	۰/۲۵۷۷	۰/۲۶۲۳	۰/۲۷۶۲
	۱	۰/۰۵۰۹	۰/۱۳۷۷	۰/۲۵۸۱	۰/۲۶۲۶	۰/۲۸۳۸
	۲	۰/۰۵۲	۰/۱۳۸۸	۰/۲۶۷۹	۰/۲۶۴	۰/۲۹۶۲
	۵	۰/۰۵۸۷	۰/۱۴۶۱	۰/۲۷۳۸	۰/۳۱۸۵	۰/۴۲۶۷
	۱۰	۰/۰۷۶۱	۰/۱۶۶۳	۰/۳۰۹۱	۰/۳۲۹۵	۰/۴۴۳
۰/۲	۰/۵	۰/۱۷۱۶	۰/۴۸۸۶	۰/۵۱۵۴	۰/۵۵۲۴	۰/۸۳۶۲
	۱	۰/۱۷۲۵	۰/۴۹۰۱	۰/۵۴۲۶	۰/۵۶۷۵	۰/۸۳۶۹
	۲	۰/۱۷۶	۰/۵۲۵۶	۰/۵۶۵۹	۰/۵۹۲۳	۰/۸۳۹۶
	۵	۰/۱۹۷۷	۰/۵۳۴۴	۰/۶۳۶۹	۰/۸۵۷۹	۱/۳۶۴
	۱۰	۰/۲۵۴۱	۰/۶۴۹۴	۰/۶۵۸۶	۰/۹۱۳۷	۱/۴۲۵

مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار α_2 و نسبت ضخامت به طول فرکانس طبیعی بی‌بعد افزایش می‌یابد که دلالت بر سخت

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.9.7.5]

شدن ماده می‌باشد. همچنین بیشتر بودن فرکانس‌ها در شرایط تکیه‌گاهی گیردار-گیردار نسبت به ساده-ساده را می‌توان ملاحظه نمود.

حال در ادامه همان تیر هدفمند دو جهته در بین لایه‌های پیزوالکتریک با ضخامت h_p = ۰/۱ که خواص آن در جدول ۱ آورده شده، مقید می‌شود که نتایج این حالت در جداول ۴ و ۵ به ترتیب برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار و ساده آورده شده است. در این حالت با اضافه شدن لایه پیزوالکتریک به تیر، فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد.

در ادامه تیر هدفمند دو جهتهٔ پیزوالکتریک روی بستر الاستیک دو پارامتری قرار داده می‌شود که نتایج شرایط تکیه‌گاهی گیردار-گیردار به ازای α_1 ثابت و مقادیر مختلف α_2، ضرایب بستر الاستیک و نسبت ضخامت به طول در جدول‌های ۶، ۷ و ۸ به ترتیب برای α_2=۱، α_2=۲ و α_2=۵ بیان شده است که مشاهده می‌شود مقدار پارامترهای فرکانس با افزایش α_2 و افزایش ضرایب بستر الاستیک افزایش می‌یابد.

جدول ۵ تغییرات فرکانس طبیعی تیر دوجهته مقید در لایه‌های پیزوالکتریک به ازای α_1=۰/۵ و مقادیر مختلف برای α_2 و نسبت h/l برای شرایط ساده-ساده (N=۱۴)

h_p/l	α_2	ϖ_1	ϖ_2	ϖ_3	ϖ_4	ϖ_5
۰/۱	۰/۵	۰/۰۳۷۴	۰/۰۹۸	۰/۱۶۷۴	۰/۱۷۹۲	۰/۲۷۵
	۱	۰/۰۳۷۶	۰/۰۹۸۲	۰/۱۶۹	۰/۱۷۹۳	۰/۲۷۵
	۲	۰/۰۳۸	۰/۰۹۸۸	۰/۱۷۵۵	۰/۱۷۹۷	۰/۲۷۶
	۵	۰/۰۴۱۵	۰/۱۰۳۲	۰/۱۸۳۲	۰/۲۲۲۲	۰/۲۸۰
	۱۰	۰/۰۵۶۱	۰/۱۲۱۴	۰/۱۹۳	۰/۲۹۴	۰/۶۱۰
۰/۲	۰/۵	۰/۱۳۲۶	۰/۳۱۸	۰/۳۲۹۱	۰/۵۲۴۵	۰/۵۶۷
	۱	۰/۱۳۲۹	۰/۳۱۸۹	۰/۳۳۳۱	۰/۵۲۴۵	۰/۵۶۶
	۲	۰/۱۳۴	۰/۳۲۱۶	۰/۳۵۰۳	۰/۵۲۵	۰/۵۶۲
	۵	۰/۱۴۲۳	۰/۳۳۸۴	۰/۵۳۶۳	۰/۷۵۴۷	۰/۹۳۹
	۱۰	۰/۱۷۰۷	۰/۴۳۸۱	۰/۵۰۴۲	۰/۷۹۹۳	۰/۹۵۲

جدول ۶ پارامترهای فرکانس برای تیر دوجهته با لایه‌های پیزوالکتریک روی بستر الاستیک به ازای $\alpha_2 = 1$ حالت گیردار

h/l	k_w	k_g =۰			k_g =۱۰۰			k_g =۱۰۰۰		
		مد اول	مد دوم	مد سوم	مد اول	مد دوم	مد سوم	مد اول	مد دوم	مد سوم
۰/۰۵	۰	۱۸/۶۳۷	۵۰/۳۶۱	۹۵/۵۶۷	۲۳/۵۲۸	۵۷/۴۹۹	۱۰۳/۷۶۲	۴۷/۹۸۱	۱۰۰/۱۹۳	۱۵۸/۴۸
	۱۰۰	۱۹/۱۶۶	۵۰/۴۹۳	۹۵/۵۶۷	۲۳/۹۲۴	۵۷/۶۳۱	۱۰۳/۷۶۲	۴۸/۲۴۶	۱۰۰/۱۹۳	۱۵۸/۶۱
	۱۰۰۰	۲۲/۹۹۹	۵۲/۰۸	۹۶/۴۹۲	۲۷/۰۹۷	۵۹/۰۸۵	۱۰۴/۵۵۵	۴۹/۸۳۲	۱۰۰/۹۸۶	۱۵۹/۰۱
۰/۱	۰	۱۷/۰۸۴	۴۴/۹۷۵	۷۹/۵۷۳	۲۲/۰۰۸	۵۲/۲۴۴	۸۸/۲۶۴	۴۵/۹۶۶	۸۸/۳۹۶	۹۲/۱۳
	۱۰۰	۱۷/۵۸۰	۴۵/۱۷۳	۷۹/۶۷۲	۲۲/۴۰۴	۵۲/۴۱۰	۸۸/۳۶۳	۴۶/۱۶۴	۸۸/۳۹۷	۹۲/۲۲
	۱۰۰۰	۲۱/۷۱۰	۴۶/۸۵۸	۸۰/۵۹۷	۲۵/۷۷۵	۵۳/۸۶۴	۸۹/۲۲۲	۴۷/۸۱۶	۸۸/۴۲۹	۹۲/۲۲

جدول ۷ پارامترهای فرکانس برای تیر دوجهته با لایه‌های پیزوالکتریک روی بستر الاستیک به ازای $\alpha_2 = 2$ حالت گیردار

h/l	k_w	k_g =۰			k_g =۱۰۰			k_g =۱۰۰۰		
		مد اول	مد دوم	مد سوم	مد اول	مد دوم	مد سوم	مد اول	مد دوم	مد سوم
۰/۰۵	۰	۱۹/۰۳۴	۵۰/۷۵۸	۹۵/۹۶۳	۲۳/۵۲۸	۵۷/۷۶۳	۱۰۴/۰۲۷	۴۷/۹۹۱	۱۰۰/۱۹۳	۱۵۸/۴۸۵
	۱۰۰	۱۹/۴۳۰	۵۰/۸۹	۹۵/۹۶۳	۲۳/۹۲۴	۵۷/۸۹۵	۱۰۴/۱۵۹	۴۸/۲۴۶	۱۰۰/۱۹۳	۱۵۸/۶۱۸
	۱۰۰۰	۲۳/۲۶۳	۵۲/۴۷۶	۹۶/۸۸۹	۲۷/۲۲۹	۵۹/۲۱۷	۱۰۴/۸۲۰	۴۹/۸۳۲	۱۰۰/۹۸۶	۱۵۹/۰۱۴
۰/۱	۰	۱۷/۲۸۲	۴۵/۵۰۴	۷۹/۷۳۸	۲۲/۰۰۸	۵۲/۵۷۵	۸۸/۳۶۳	۴۵/۹۶۶	۸۸/۳۹۶	۹۲/۱۳۰
	۱۰۰	۱۷/۷۷۸	۴۵/۷۰۲	۷۹/۸۳۷	۲۲/۴۰۴	۵۲/۷۴۰	۸۸/۴۲۹	۴۶/۱۶۴	۸۸/۳۹۷	۹۲/۲۲۹

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.9.7.5]

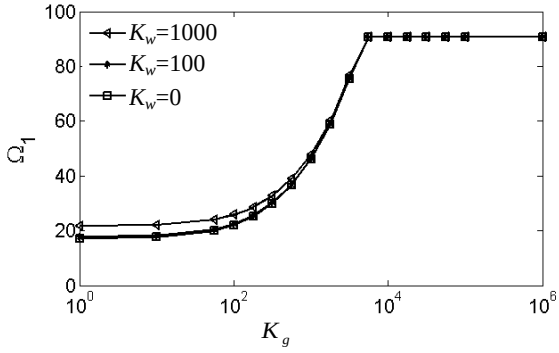
	۱۰۰۰	۲۱/۸۷۶	۴۷/۳۵۴	۸۰/۷۲۹	۲۵/۷۴۲	۵۴/۱۶۱	۸۹/۲۵۵	۴۷/۸۱۶	۸۸/۴۲۹	۹۲/۹۲۳

جدول ۸ پارامترهای فرکانس برای تیر دوجهته با لایه‌های پیزوالکتریک روی بستر الاستیک به ازای $\alpha_2 = 5$ حالت گیردار

h/l	k_w	k_g=۰			k_g=۱۰۰			k_g =۱۰۰۰		
		مد اول	مد دوم	مد سوم	مد اول	مد دوم	مد سوم	مد اول	مد دوم	مد سوم
۰/۰۵	۰	۲۱/۴۱۳	۵۳/۶۶۵	۹۸/۷۳۹	۲۴/۳۲۱	۵۹/۶۱۳	۱۰۶/۲۷۴	۴۷/۹۹۸	۱۰۰/۱۹۳	۱۵۸/۴۸۵
	۱۰۰	۲۱/۸۰۹	۵۳/۷۹۷	۹۸/۸۷۱	۲۴/۷۱۷	۵۹/۷۴۶	۱۰۶/۴۰۶	۴۸/۲۴۶	۱۰۰/۱۹۳	۱۵۸/۶۱۸
	۱۰۰۰	۲۵/۳۷۸	۵۵/۳۸۴	۹۹/۶۶۵	۲۷/۸۹۰	۶۱/۰۶۷	۱۰۷/۰۶۷	۴۹/۸۳۲	۱۰۰/۹۸۶	۱۵۹/۰۱۴
۰/۱	۰	۱۸/۷۳۶	۴۹/۷۰۰	۷۹/۹۰۳	۲۲/۰۷۴	۵۵/۱۱۹	۸۸/۵۶۱	۴۵/۹۶۶	۸۸/۳۹۶	۹۲/۱۳۰
	۱۰۰	۱۹/۱۹۹	۴۹/۸۶۵	۸۰/۰۰۳	۲۲/۴۷۰	۵۵/۲۸۴	۸۸/۶۶۰	۴۶/۱۶۴	۸۸/۳۹۷	۹۲/۲۲۹
	۱۰۰۰	۲۲/۹۹۹	۵۱/۳۸۵	۸۰/۸۹۵	۲۵/۸۰۸	۵۶/۶۳۹	۸۹/۴۵۴	۴۷/۸۱۶	۸۸/۴۲۹	۹۲/۹۲۳

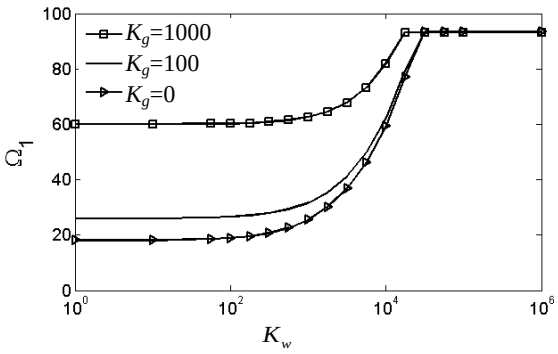
همچنین با افزایش نسبت ضخامت به طول مقدار پارامترهای فرکانس کاهش می‌یابد. می‌توان مشاهده کرد که ضریب لایهٔ برشی موثرتر از ضریب لایه وینکلر می‌باشد. همچنین مشاهده می‌شود که به ازای مقادیر بزرگ ضرایب پارامترهای فرکانس تقریبا ثابت می‌شوند، به عبارت دیگر به سمت مقدار مشخصی میل می‌کنند.

در شکل ۲ نمودار تغییرات اولین فرکانس طبیعی بر حسب ضریب لایه برشی برای مقادیر مختلف ضریب وینکلر مشاهده می‌شود. در این نمودار به ازای مقدار کمتر از ۱۰۰۰۰ برای ضریب لایه برشی فرکانس به سمت مقدار معینی میل می‌کند که دیگر به ضریب لایه وینکلر بستگی ندارد. در شکل ۳ نمودار اولین فرکانس طبیعی برحسب ضریب لایه وینکر به ازای مقادیر مختلف ضریب لایه برشی مشاهده می‌شود که دیده می‌شود با افزایش ضرایب لایه بستر فرکانس افزایش می‌یابد. در این نمودار به ازای مقدار بیشتر ۱۰۰۰۰ فرکانس تقریباً ثابت شده و دیگر به ضریب لایه برشی بستگی ندارد. با مقایسه نمودارهای ۲ و ۳ می‌توان به مؤثر بودن ضریب لایه برشی نسبت به ضریب لایه وینکلر پی برد.

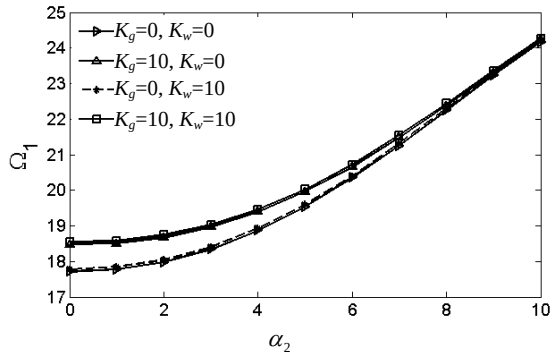


شکل ۲ تغییرات اولین فرکانس طبیعی برحسب K_g

شکل‌های ۴ و ۵ تغییرات اولین فرکانس طبیعی تیر به ترتیب برحسب α_2 و α_1 به ازای مقادیر مختلف ضرایب بستر الاستیک را نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود با افزایش α_2 اولین فرکانس طبیعی افزایش و با افزایش α_1 کاهش می‌یابد.



شکل ۳ تغییرات اولین فرکانس طبیعی برحسب k_w

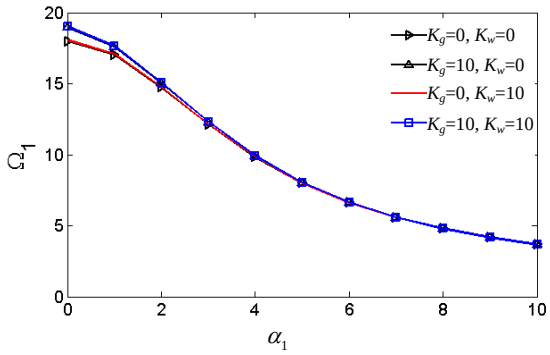


شکل ۴ تغییرات اولین فرکانس طبیعی برحسب α_2

۶- نتیجه‌گیری

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.9.7.5]

این مقاله با استفاده از ترکیب روش‌های دیفرانسیل کوادریچر و فضاحالت یک حل الاستیسیته برای بررسی ارتعاشات آزاد و تأثیر بستر الاستیک در یک تیر هدفمند دو جهته مقید با لایه‌های پیزوالکتریک ارائه شده است.



شکل ۵ تغییر اولین فرکانس برحسب α_1

برای بستر الاستیک از مدل وینکلر-پسترناک استفاده شده و فرض شده که خواص تیر در راستای ضخامت و طولی به صورت نمایی تغییر می‌کند. استفاده از روش دیفرانسیل کوادریچر امکان حل این مسأله را برای شرایط مرزی مختلف را فراهم کرد. نتایج به دست آمده درستی و دقت این روش را تصدیق نمود و نشان داد که همگرایی در این روش سریع است. مشاهده شد که فرکانس طبیعی بی‌بعد تیر با افزایش مقدار α_1 (شاخص گرادیان خواص مواد در راستای ضخامت) کاهش می‌یابد که دلالت بر کاهش سختی تیر و همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش α_2 (شاخص گرادیان خواص مواد در راستای طولی) فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد که دلالت بر افزایش سفتی ماده در این جهت می‌باشد. همچنین دیده می‌شود وجود لایه پیزوالکتریک روی تیر باعث افزایش فرکانس تیر می‌شود. در حالت تیر روی بستر الاستیک با افزایش نسبت ضخامت به طول کاهش و با تغییر شرایط تکیه‌گاهی از ساده به گیردار افزایش، همچنین مشاهده می‌شود که ضریب الاستیک لایه برشی نسبت به ضریب وینکلر، بر روی رفتار مکانیکی تیر مؤثرتر است. همچنین به ازای مقادیر بزرگ شاخص‌های گرادیان خواص ماده، تغییر ضرایب پارمترهای بستر k_g, k_w بر روی پارامتر بی‌بعد فرکانس طبیعی تأثیرات تقریبا بی‌تأثیر می‌باشد.

۷- پیوست

الف)

$$\bar{z}=\frac{z}{L},\bar{x}=\frac{x}{L},\bar{c}_{ij}=\frac{c_{ij}}{c_{55}},(\bar{u},\bar{w})=\frac{(\hat{u},\hat{w})}{h_f},(\bar{\sigma}_x,\bar{\sigma}_z,\bar{\tau}_{xz})=\frac{(\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_z,\hat{\tau}_{xz})}{c_{55}}$$

$$(\bar{D}_x,\bar{D}_z)=\frac{(\hat{D}_x,\hat{D}_z)}{\sqrt{c_{55}k_1}},\bar{k}_i=\frac{k_i}{k_1},\bar{e}_i=\frac{e_i}{\sqrt{c_{55}k_1}},\bar{\phi}=\frac{\hat{\phi}}{h\sqrt{c_{55}/k_1}},$$

ب)

ماتریس A_b

$$\begin{bmatrix} -\alpha I_N & 0 & -\Omega^2 I_N & -\frac{h}{L}\left[g^{(1)}\right]_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{h}{L}\left[g^{(1)}\right]_{ij} & I_N & 0 & -\frac{h}{L}\bar{e}_5\left[g^{(1)}\right]_{ij} \\ q_1 I_N & q_2\left[g^{(1)}\right]_{ij} & 0 & 0 & q_3 I_N & 0 \\ d_2\left[g^{(1)}\right]_{ij} & d_1\left[g^{2}\right]_{ij} & -\Omega^2 I_N & 0 & -\alpha I_N & d_3\left[g^{(1)}\right]_{ij} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{h}{L}\bar{e}_5\left[g^{(1)}\right]_{ij} & -\alpha I_N & -\frac{h^2}{L^2}(\bar{e}_5^2+1)\left[g^{(2)}\right]_{ij} \\ p_1 I_N & p_2\left[g^{(1)}\right]_{ij} & 0 & 0 & p_3 I_N & 0 \end{bmatrix}$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.9.7.5]

$$q_1=\frac{\bar{k}_3}{\bar{c}_{33}\bar{k}_3+\bar{e}^2{}_3},\quad q_2=-\frac{h}{L}\frac{\bar{k}_3\bar{c}_{13}+\bar{e}_1\bar{e}_3}{\bar{c}_{33}\bar{k}_3+\bar{e}_3^2},\quad q_3=\frac{\bar{e}_3}{\bar{c}_{33}\bar{k}_3+\bar{e}_3^2}=p_1,\quad p_2=\frac{h}{L}\frac{\bar{e}_1c_{33}-c_{13}\bar{e}_3}{\bar{c}_{33}\bar{k}_3+\bar{e}_3^2}=d_3$$

$$p_3=-\frac{c_{33}}{\bar{c}_{33}\bar{k}_3+\bar{e}_3^2},\ d_2=-\frac{h}{L}\frac{\bar{k}_3\bar{c}_{13}+\bar{e}_1\bar{e}_3}{\bar{c}_{33}\bar{k}_3+\bar{e}_3^2},\quad d_1=-\frac{h^2}{L^2}\left(c_{11}+\frac{\bar{e}_1(\bar{e}_1\bar{c}_{33}-\bar{e}_3\bar{c}_{13})-\bar{c}_{13}(\bar{e}_1e_3+\bar{k}_3\bar{c}_{13})}{\bar{e}_3^2+\bar{k}_3\bar{c}_{33}}\right)$$

$$d_4=-\frac{h^2}{L^2}\frac{\bar{e}_1(\bar{e}_1\bar{c}_{33}-\bar{e}_3\bar{c}_{13})-\bar{c}_{13}(\bar{e}_1e_3+\bar{k}_3\bar{c}_{13})}{\bar{e}_3^2+\bar{k}_3\bar{c}_{33}}$$

برای حالت گیردار-گیردار:

$$\begin{bmatrix}
-\alpha I_{N-2} & 0 & -\frac{h}{L}[f_{cc}]_{ij}-\Omega^2 I_{N-2} & -\frac{h}{L}\left[g_{cc}^{(1)}\right]_{ij} & 0 & -\frac{h^2}{L^2}\bar{e}_5[f_{cc}]_{ij} \\
0 & 0 & -\frac{h}{L}\left[g_{cc}^{(1)}\right]_{ij} & I_{N-2} & 0 & -\frac{h}{L}\bar{e}_5\left[g_{cc}^{(1)}\right]_{ij} \\
q_1 I_{N-2} & q_2\left[g_{cc}^{(1)}\right]_{ij} & 0 & & q_3 I_{N-2} & 0 \\
d_2\left[g_{cc}^{(1)}\right]_{ij} & -\frac{h^2}{L^2}(\bar{c}_{11}+d_4)\left[g_{cc}^{2}\right]_{ij}-\Omega^2 I_{N-2} & 0 & -\alpha I_{N-2} & d_3\left[g_{cc}^{(1)}\right]_{ij} & 0 \\
0 & 0 & -\frac{h^2}{L^2}\bar{e}_5[f_{cc}]_{ij} & -\frac{h}{L}\bar{e}_5\left[g_{cc}^{(1)}\right]_{ij} & -\alpha I_{N-2} & -\frac{h^2}{L^2}(\bar{e}_5^2+1)\left[g_{cc}^{(2)}\right]_{ij}-\frac{h^2}{L^2}\bar{e}_5[f_{cc}]_{ij} \\
p_1 I_{N-2} & p_2\left[g_{cc}^{(1)}\right]_{ij} & 0 & 0 & p_3 I_{N-2} & 0
\end{bmatrix}$$

برای حالت ساده-ساده:

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.9.7.5]

$$\begin{bmatrix} -\alpha I_{N-2} & 0 & -\Omega^2 I_{N-2} & -\frac{h}{L}\left[g_{RR}^{(1)}\right]_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{h}{L}\left[g_{RR}^{(1)}\right]_{ij} & I_N & 0 & -\frac{h}{L}\bar{e}_5\left[g_{RR}^{(1)}\right]_{ij} \\ q_1 I_{N-2} & q_2\left[g_{RR}^{(1)}\right]_{ij} & 0 & 0 & q_3 I_{N-2} & 0 \\ d_2\left[g_{RR}^{(1)}\right]_{ij} & d_1\left[g_{RR}^{2}\right]_{ij} - \Omega^2 I_N & 0 & -\alpha I_N & d_3\left[g_{RR}^{(1)}\right]_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{h}{L}\bar{e}_5\left[g^{(1)}\right]_{ij} & -\alpha I_{N-2} & -\frac{h^2}{L^2}(\bar{e}_5^2+1)\left[g_{RR}^{(2)}\right]_{ij} \\ p_1 I_{N-2} & p_2\left[g_{RR}^{(1)}\right]_{ij} & 0 & 0 & p_3 I_{N-2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[f_{cc}\right]_{ij} = \left[g_{cc}{}^{(1)}\right]_{i1}\left[g_{cc}{}^{(1)}\right]_{1N} + \left[g_{cc}{}^{(1)}\right]_{iN}\left[g_{cc}{}^{(1)}\right]_{Nj}$$

$$\left[g_{RR}^{(1)}\right]_{ij} = \left[g^{(1)}\right]_{ij}, (i, j = 2,...,N-1),$$

$$\left[g_{cc}^{(1)}\right]_{ij} = \left[g^{(1)}\right]_{ij}, (i, j = 2,...,N-1),$$

$$\left[g_{cc}^{(2)}\right]_{ij} = \left[g^{(2)}\right]_{ij}, (i, j = 2,...,N-1)$$

$$\left[g_{RR}^{(1)}\right]_{ij} = \left[g^{(1)}\right]_{ij}, (i, j = 2,...,N-1),$$

$$\left[g_{RR}^{(2)}\right]_{ij} = \left[g^{(2)}\right]_{ij}, (i, j = 2,...,N-1)$$

۸- مراجع

[1] Rao, S. S., Sunar, M., "Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of flexible structures: A survey", *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 47, No. 4, 1994, pp. 113-123.

[2] Zhong, Z., Shang, E. T., "Three-dimensional exact analysis of a simply supported functionally gradient piezoelectric plate", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 4, No. 20, 2003, pp. 5335-5352.

[3] Lu, P., Lee, H. P., Lu, C. "Exact solutions for simply supported functionally graded piezoelectric laminates by Stroh-like formalism", *Compos Struct*, Vol. 72, No. 3, 2006, pp. 352-363.

[4] Lee, J. S., Jiang, L. Z. "Exact electroelastic analysis of piezoelectric laminae via state-space approach", *Int J Solids Struct*, No. 33 Vol. 7, 1996, pp. 977-990.

[5] Bert, C. W., Malik, M., "Differential quadrature: a powerful new technique for analysis of composite structures", *Compos Struct*, Vol. 3-4, No. 39 1997, pp. 179-189.

[6] S.C.Pradhan, T.Murmu, "Thermo-mechanical vibration of FGM sandwich beams under variable elastic fundation using differentoal method", *Sound and vibration*, Vol. 321, No. 1-2, 2009, pp. 342-362.

[7] P.Malekzadeh, "Three-dimemnsional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic fundation", *Composite structure* Vol. 89, No. 3, 2009, pp. 376-373.

[8] J.Yang, C.F. Lu, W.Q. Chen, "Two-dimension elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic fundations", *Composite structure* Vol.84, No. 3, 2008, pp. 209-219.

[9] A.Alibeigloo, "Thermoelasticity analysis of functionally graded beam with integrated surface piezoelectric layers", *Composite structure* Vol. 92, No. 6, pp. 1535-1543.

[10] Li, Y., Shi, Z. F., 2009. "Free vibration of a functionally graded piezoelectric beam via state-space based differential quadrature", *Composite Structures*, Vol. 87, No. 3, pp. 257-264.

[11] Lu CF, Chen W.Q, "free vibration of orthotropic functionally graded beams with various condition", *Structure engineering and mechanics*, 2005, Vol. 4, No. 20, pp. 465-76.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.9.7.5]