



# بررسی ارتعاشات تیر هدفمند دو جهته مقید در لایه‌های پیزوالکتریک روی بستر الاستیک با استفاده از دیفرانسیل کوادریچر

غلامحسین رحیمی<sup>۱\*</sup>، حسین طورانی<sup>۲</sup>، محمد سجاد گازر<sup>۲</sup>

۱- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۲- کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

\* تهران، صندوق پستی ۱۴۱۱۵۱۴۳، Rahimi\_gh@modares.ac.ir

**چکیده-** در این مقاله با ترکیب روش‌های دیفرانسیل کوادریچر و روش فضای حالت یک حل الاستیسیته برای بررسی ارتعاشات آزاد و تأثیر بستر الاستیک در یک تیر هدفمند دو جهته مقید در لایه‌های پیزوالکتریک، ارائه شده است. به این صورت که در راستای طولی تیر از روش دیفرانسیل کوادریچر و در راستای ضخامت تیر از تکنیک فضای حالت استفاده شده است. بستر الاستیک تیر مدل دو پارامتری یا وینکلر-پسترناک می‌باشد که دو نوع شرایط مرزی ساده-ساده و گیردار-گیردار مورد بررسی قرار گرفته و فرض شده است که خواص تیر در راستای ضخامت و طولی آن به صورت نمایی تغییر می‌کند. و ضریب پواسون ثابت فرض شده که تأثیرات تغییر شاخص‌های گرادین خواص مواد و عدد موج بر روی ارتعاشات آزاد این تیر بررسی شده است. نتایج به دست آمده نشان داد که این روش از دقت عالی و سرعت همگرایی بالایی برخوردار است. همچنین نتایجی برای نشان دادن رفتار مکانیکی این تیرها ارائه شده است.

**کلیدواژه‌گان:** ارتعاشات آزاد، تیر هدفمند پیزوالکتریک، دیفرانسیل کوادریچر، بستر الاستیک.

## Analysis vibrations of two-direction functionally graded beam with integrated piezoelectric layers on resting elastic foundation using differential quadrature

GH. Rahimi<sup>1\*</sup>, H. Toorani<sup>2</sup>, M.S. Gazor<sup>2</sup>

1- Prof., Mech. Eng., Tarbiat modares Univ, Tehran, Iran

2- MSc. Student, Mech. Eng., Tarbiat Modares Univ., Tehran, Iran

\* P.O.B. 14115143 Tehran, Iran. Rahimi\_gh@modares.ac.ir

**Abstract-** In this paper a two dimensional elasticity for free vibrations and the effect of elastic foundation on a two-direction functionally graded beams with integrated surface piezoelectric layers with combination of differential quadrature method and space-state method is presented here. Differential quadrature method in axial direction and space-state method in transverse direction is used. It's considered that two parameters model or winkler-pasternak for elastic foundation which has been considered two kinds of boundary conditions include simply support and clamped-clamped. Also, It is assumed that beam properties in thickness and axial direction varying exponentially and poisson factor is constant which has been considered the effects of materials properties gradient index and number waves on free vibrations beams. The obtained results show that this method has good accuracy and high speed of convergence.

**keywords:** Differential Quadrature, Functionally Graded Beam, Piezoelectric Layers, Free Vibrations, Elastic Foundation.

## ۱- مقدمه

هدفمند روی بستر الاستیک با استفاده از روش فضای حالت تحلیل ارتعاشی و خمشی ارائه شد [۸]. تیر هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از سری فوریه و فضاحالت آنالیز ترموالاستیسیته ارائه شد [۹]. در این مقاله با روش دیفرانسیل کوادریچر بر مبنای فضاحالت به تحلیل ارتعاشات آزاد و نیز تأثیر ضرایب وینکلر و لایه برشی بستر الاستیک در یک تیر هدفمند دوجته با لایه‌های پیزوالکتریک با دو شرایط مرزی ساده-ساده و گیردار-گیردار پرداخته شده است. برای استفاده از تکنیک دیفرانسیل کوادریچر راستای طولی تیر را به  $N$  نقطه تقسیم کرده و برای هر نقطه تیر چهار متغیر حالت شامل جابجایی  $(u, w)$ ، تنش‌ها  $(\sigma_z, \tau_{xz})$ ، و برای لایه‌های پیزوالکتریک علاوه بر آنها دو متغیر پتانسیل الکتریکی  $(\phi)$  و جابجایی الکتریکی  $(D_z)$ ، اختصاص یافته است. با در نظر گرفتن شرایط مرزی و استفاده از روش دیفرانسیل کوادریچر، از معادلات حاکم اولیه معادلات فضاحالت گسسته‌سازی شده استخراج شد و با حل این معادلات حالت و اعمال شرایط در سطح بالا و پایین تیر، رفتار مکانیکی این تیرها بررسی شده است.

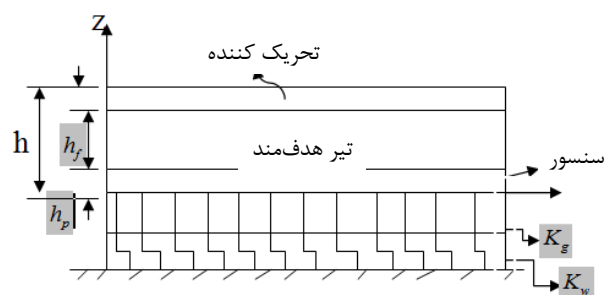
## ۲- معادلات حاکم

## ۲-۱- برای تیر هدفمند

یک تیر هدفمند دوجته مقید در لایه‌های پیزوالکتریک بر روی بستر الاستیک در یک دستگاه دکارتی دوبعدی  $(x, z)$ ، در شکل ۱ نشان داده شده، فرض می‌شود که خواص تیر در راستای ضخامت و طولی به صورت نمایی طبق رابطه (۱) تغییر می‌کند.

$$\tilde{p} = pe^{\alpha_1 \frac{z}{h} + \alpha_2 \frac{x}{l}} \quad (1)$$

که  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  شاخص گرادبان خواص مواد به ترتیب در راستای ضخامت و طولی می‌باشند.



مواد FGM یا مواد با خصوصیات درجه‌بندی به صورت تابعی، مواد غیر ایزوتروپ و غیر همگن می‌باشند. مهم‌ترین خصوصیت این مواد این است که اجزای تشکیل دهنده آنها می‌توانند با خصوصیات متفاوت انتخاب شوند، به طوری که خواص در آنها به صورت پیوسته و بر اساس کسر حجمی تغییر می‌کند و نحوه این تغییر، قابل انتخاب و مطلوب برای کاربردهای گوناگون می‌باشد. همین خصوصیت این مواد باعث کاربردهای زیاد آنها شده است. از جمله این کاربردها می‌توان به زمینه‌های هوافضایی، ماشین آلات صنعتی و پزشکی هسته‌ای، خودرو و صنایع وابسته به آن اشاره کرد [۱]. ایده اصلی ساخت مواد هدفمند به سال ۱۹۸۴ باز می‌گردد. ژاپنی‌ها اولین افرادی بودند که این مواد را ساختند، آنها زمانی که مشغول ساختن سفینه فضایی بودند نیاز به ماده‌ای پیدا کردند که بتواند در برابر دماهای بالا عایق خوبی بوده و همچنین این ماده می‌بایست قابلیت جوش کاری با فلز و استحکام بالا را نیز داشته باشد [۲]. مواد پیزوالکتریک موادی هستند که زمانی که در شرایط تنش و فشار قرار می‌گیرند، میدان الکتریکی تولید می‌کنند. از آنجا که این اثر حالت برگشت‌پذیری دارد، القای میدان الکتریکی در این مواد، تنش را در طول سازه ایجاد خواهد کرد. بنابراین ساختارهایی با طراحی مناسب و با استفاده از این مواد می‌توانند در صورت ایجاد یک میدان الکتریکی، خم، منبسط و یا منقبض شوند. مواد پیزوالکتریک به طور گسترده در سیستم‌های الکتریکی و مکانیکی و ساختارهای هوشمند به عنوان سنسورها و محرک‌ها به کار برده می‌شوند [۳].

در سال ۱۹۹۶ یک تحلیل الکتروالاستیک دقیق برای ورق‌های پیزوالکتریک با تکیه‌گاه ساده با روش فضاحالت ارائه شد [۴]. برت و مالیک در سال ۱۹۹۷ از روش دیفرانسیل کوادریچر به عنوان یک تکنیک قدرتمند برای آنالیز کامپوزیت‌های لایه‌ای استفاده کردند [۵]. در سال ۲۰۰۹ آنالیز ارتعاشات ترمو-مکانیکی تیر ساندویچی هدفمند روی بستر الاستیک با استفاده از روش دیفرانسیل کوادریچر اصلاح شده بیان شد [۶]. آنالیز ارتعاشات سه‌بعدی ورق‌های هدفمند با تکیه‌گاه ساده روی بستر الاستیک با استفاده از روش سری و دیفرانسیل کوادریچر بر اساس تئوری الاستیسیته را ارائه شد [۷]. همچنین بر اساس تئوری دو بعدی الاستیسیته تیر

وابسته به  $x_i$  می‌باشند. که مقادیر آن از رابطه (۸) به دست می‌آید [۱۰].

$$g_{ij}^{(1)} = \frac{M(x_i)}{(x_i - x_j)}, \quad i, j = 1, \dots, N (i \neq j)$$

$$M(x_i) = \prod_{j=i, i \neq j}^N (x_i - x_j), \quad g_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, i \neq j}^N g_{ij}^{(1)} \quad (8)$$

با ترکیب کردن معادله تنش-کرنش تیر دوبعدی و معادله (۳) و با استفاده از روابط بی‌بعد (پیوست بخش الف) معادلات به صورت (۹)، (۱۰) و (۱۱) به دست می‌آید.

$$\bar{\sigma}_x = \bar{c}_{11} \frac{h_f}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{c}_{33} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \quad (9)$$

$$\bar{\sigma}_z = \bar{c}_{13} \frac{h_f}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{c}_{33} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \quad (10)$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{h_f}{L} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \quad (11)$$

به همین ترتیب با بی‌بعد کردن معادلات حرکت (۲) روابط (۱۲) و (۱۳) به دست می‌آید.

$$\frac{h_f}{L} \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial \bar{z}} + \frac{h_f}{L} \alpha_2 \bar{\sigma}_x + \alpha_1 \bar{\tau}_{xz} = -\omega^2 \bar{u} \quad (12)$$

$$\frac{h_f}{L} \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial \bar{z}} + \frac{h_f}{L} \alpha_2 \bar{\tau}_{xz} + \alpha_1 \bar{\sigma}_z = -\omega^2 \bar{w} \quad (13)$$

بعد از اعمال روش دیفرانسیل کوادریچر که روابط به صورت (۱۴)، (۱۵) و (۱۶) خواهد شد.

$$\bar{\sigma}_{x_i} = \frac{h_f}{L} \bar{c}_{11} \sum_{k=1}^N g_{ik}^{(1)} \bar{u}_k + \bar{c}_{13} \frac{d\bar{w}_i}{d\bar{z}}, \quad i = 1, \dots, N \quad (14)$$

$$\bar{\sigma}_{z_i} = \bar{c}_{13} \frac{h_f}{L} \sum_{k=1}^N g_{ik}^{(1)} \bar{u}_k + \bar{c}_{33} \frac{d\bar{w}_i}{d\bar{z}}, \quad i = 1, \dots, N \quad (15)$$

$$\bar{\tau}_{xz,i} = \frac{d\bar{u}_i}{d\bar{z}} + \frac{h_f}{L} \sum_{k=1}^N g_{ik}^{(1)} \bar{w}_k, \quad i = 1, \dots, N \quad (16)$$

### ۲-۱-۲- معادلات فضاحالت تیر هدفمند

با استفاده از معادلات (۱۴-۱۶) و اعمال روش DQ روی معادلات حرکت بی‌بعد شده (۱۲) و (۱۳) معادلات فضاحالت به صورت رابطه (۱۷) به دست می‌آید:

$$\frac{d}{d\bar{z}} \delta(\bar{z}) = G_f \delta(\bar{z}) \quad (17)$$

که در آن:  $\delta(z) = [[\sigma_{zi}] [u_i] [w_i] [\tau_{xzi}]]^T$  ماتریس ضرایب ثابت می‌باشد، که برای هر حالت

شکل ۱ هندسه یک تیر هدفمند مقید در لایه‌های پیزوالکتریک بر روی بسترالاستیک

بدون در نظر گرفتن نیروهای حجمی معادلات حرکت را می‌توان به صورت رابطه‌ی (۲) نوشت.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \tilde{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \tilde{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2)$$

که در آن  $\sigma_x, \sigma_z$  تنش‌های محوری،  $\tau_{xz}$  تنش برشی،  $u, w$  جابه‌جایی‌های مکانیکی به ترتیب در راستای عرضی و محوری،  $\tilde{\rho}$  چگالی مواد و  $t$  زمان می‌باشند.

ارتباط کرنش با جابجایی مکانیکی را می‌توان به صورت رابطه (۳) بیان نمود.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (3)$$

که در آن  $\varepsilon_x, \varepsilon_z, \varepsilon_{xz}$  مؤلفه‌های کرنش می‌باشند. در این مقاله دو نوع شرط مرزی ساده-ساده و گیردار-گیردار  $c-c$ ، مطرح شده است. شرایط مرزی مکانیکی و الکتریکی به صورت روابط (۴) و (۵) فرض شده است:

$$S-S: \quad w=0, \sigma_x=0, \varphi=0 \quad \text{در} \quad x=0, l \quad (4)$$

$$c-c: \quad u=0, w=0, \varphi=0 \quad \text{در} \quad x=0, l \quad (5)$$

که  $\varphi$  پتانسیل الکتریکی می‌باشد. و برای تفکیک متغیر  $t$ ، از متغیرهای مکان از رابطه (۶) در نظر گرفته شده است.

$$u, w \quad \text{برای} \quad f(x, z, t) = \hat{f}(x, z) e^{i\omega t}$$

$$f(x, z, t) = \hat{f}(x, z) e^{i\omega t} e^{\alpha_1 \frac{z}{h} + \alpha_2 \frac{x}{l}} \quad \text{برای} \quad \sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$$

که در آنها  $i = \sqrt{-1}$ ،  $\omega$  فرکانس طبیعی تیر می‌باشد.

### ۲-۱-۲- دیفرانسیل کوادریچر

برای از بین بردن بستگی معادلات به متغیر مستقل  $x$  معادلات به کمک روش دیفرانسیل کوادریچر گسسته‌سازی شده است. در این روش مشتقات جزئی مرتبه  $n$  یک تابع پیوسته  $f(x, z)$  نسبت به  $x$  در نقطه  $x_i$  به صورت مجموع خطی مقادیر تابع وزن در همه نقاط بازه به صورت رابطه (۷) بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^n f(x_i, z)}{\partial x^n} = \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(n)} f(x_j, z)$$

$$(i = 1, \dots, N, n = 1, \dots, N-1) \quad (7)$$

که در آن  $N$  تعداد نقاط نمونه‌گیری و  $g_{ij}^{(n)}$  ضرایب وزنی

حال با ترکیب معادلات اساسی مربوط به لایه پیزوالکتریک (۲۰) و روابط کرنش-جابجایی (۳) و میدان الکتریکی-پتانسیل و حذف زمان با استفاده از معادلات و بی‌بعد کردن معادلات و اعمال روش دیفرانسیل کوادریچر روابط (۲۱)، (۲۲)، (۲۳)، (۲۴) و (۲۵) به‌دست آمده است.

$$\bar{\sigma}_{x_i} = \frac{h}{L} \bar{c}_{11} \sum_{k=1}^N g_{ik}^{(1)} \bar{u}_k + \bar{c}_{13} \frac{d\bar{w}_i}{d\bar{z}} + \bar{e}_1 \frac{d\bar{\phi}_i}{d\bar{z}} \quad (21)$$

$$\bar{\sigma}_{z_i} = \bar{c}_{13} \frac{h}{L} \sum_{k=1}^N g_{ik}^{(1)} \bar{u}_k + \bar{c}_{33} \frac{d\bar{w}_i}{d\bar{z}} + \bar{e}_3 \frac{d\bar{\phi}_i}{d\bar{z}} \quad (22)$$

$$\bar{\tau}_{xz,i} = \frac{d\bar{u}_i}{d\bar{z}} + \frac{h}{L} \sum_{k=1}^N g_{ik}^{(1)} \bar{w}_k + \frac{h}{L} \bar{e}_5 \sum_{k=1}^N g_{ik}^{(1)} \bar{\phi}_k \quad (23)$$

$$\bar{D}_{x,i} = \bar{e}_5 \frac{d\bar{u}_i}{d\bar{z}} + \frac{h}{L} \sum_{k=1}^N g_{ik}^{(1)} \bar{w}_k - \frac{h}{L} \sum_{k=1}^N g_{ik}^{(1)} \bar{\phi}_k \quad (24)$$

$$\bar{D}_{z,i} = \bar{e}_1 \frac{h}{L} \sum_{k=1}^N g_{ik}^{(1)} \bar{u}_k + \bar{e}_3 \frac{d\bar{w}_i}{d\bar{z}} - k_3 \frac{d\bar{\phi}_i}{d\bar{z}} \quad (25)$$

حال با اعمال روش دیفرانسیل کوادریچر (DQ) بر روی معادلات حرکت و گاوس بی‌بعد شده معادلات فضای حالت را به‌صورت رابطه (۲۶) به‌دست آورده شده است.

$$\frac{d}{d\bar{z}} \delta_p(\bar{z}) = G_p \delta_p(\bar{z}) \quad (26)$$

که در آن:

$$\delta(\bar{z}) = \left[ [\bar{\sigma}_{z_i}] [\bar{u}_i] [\bar{w}_i] [\bar{\tau}_{xz,i}] [\bar{D}_{z_i}] [\bar{\phi}_i] \right]^T$$

$$[\bar{\sigma}_{z_i}] = [\bar{\sigma}_{z_1} \dots \bar{\sigma}_{z_N}]^T, [\bar{u}_i] = [\bar{u}_1 \dots \bar{u}_N]^T$$

$G_p$  ماتریس ضرایب ثابت است که برای مواد پیزوالکتریک سطح بالا و پایین می‌تواند متفاوت باشد (پیوست بخش ب).

حل عمومی معادله بالا به‌صورت رابطه (۲۷) می‌باشد.

$$\delta(z) = e^{G_p z} \delta(0) \quad \text{at } 0 \leq z \leq h_p \quad (27)$$

$$\delta(z) = e^{G_a z} \left[ e^{-G_a(h_p+h_f)} \right] \quad \text{at } h_p + h_f \leq z \leq h \quad (28)$$

حال ارتباط بین سطوح که به ترتیب از بالا تحریک‌کننده، تیر هدفمند و سنسور به صورت رابطه (۲۹) می‌باشد.

$$\delta(h) = M^a \delta(h_p + h_f) \quad (29)$$

$$\delta(h_p + h_f) = M^f \delta(h_p) \quad (30)$$

$$\delta(h_p + h_f) = M^s \delta(h_p) \quad (31)$$

$$\delta(h_p) = M^a \delta(0) \quad (32)$$

که در روابط (۳۰)، (۳۱) و (۳۲) مقادیر داده شده است.

$$M^a = \exp(G_a h_p)$$

تکیه‌گاهی به دست می‌آید. (پیوست بخش ب).

معادله (۱۷) یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول بوده و حل آن به‌صورت (۱۸) می‌باشد.

$$\delta(\bar{z}) = e^{G_f(\bar{z}-\bar{z}_0)} \delta(\bar{z}_0) \quad (18)$$

از آنجا که  $\bar{z}_0 = h_p$  پس برای تیر هدفمند دو جهته در

راستای ضخامت رابطه (۱۹) نوشته شده است.

$$\delta_f(\bar{z}) = e^{G_f z} e^{-G_f h_p} \delta_f(h_p) \quad h_p \leq \bar{z} \leq h_p + h_f \quad (19)$$

## ۲-۲- لایه پیزوالکتریک

معادلات تشکیل دهنده برای این لایه پیزوالکتریک به‌صورت رابطه (۲۰) در نظر گرفته شده است.

$$\sigma = C \varepsilon - e^T E, \quad D = e \varepsilon + k E \quad (20)$$

که در آن:

$$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}\}^T, \quad E = \{E_x, E_z\}^T$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_z, \varepsilon_{xz}\}^T, \quad D = \{D_x, D_z\}^T$$

$$C = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{13} & 0 \\ \tilde{C}_{13} & \tilde{C}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{55} \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{e}_5 \\ \tilde{e}_1 & \tilde{e}_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{k}_3 \end{bmatrix}$$

$e^T$  ترانهاده  $e$  و  $\tilde{C}_{ij}$  ضرایب سفتی الاستیک ماده،

$\tilde{e}_i$  ضرایب سفتی پیزوالکتریک و  $K_i$  ضرایب دی‌الکتریک بردار میدان الکتریکی می‌باشند. در جدول ۱ بعضی از خواص آورده شده است.

جدول ۱ خواص مواد پیزوالکتریک

	BaTiO <sub>3</sub>	PZT-4	
	۱۶۶۰	۱۳۹	(GPa)
$C_{13}$	۷۸۰	۷۴	
$C_{33}$	۱۶۲۰	۱۱۵	
$C_{55}$	۴۳۰	۲۵/۶	
$e_1$	-۴/۴	-۵/۲	(C/m <sup>2</sup> )
$C_{11} e_3$	۱۸/۶	۱۵/۱	
$e_5$	۱۱/۶	۱۲/۷	
$K_1$	۱۱۲	۶/۵	(nF/m)
$K_3$	۱۲۶	۵/۶	
	۵۷۰۰	۷۵۰۰	(kg/m <sup>2</sup> )

می‌باشد. شکل بی‌بعد این ضرایب و پارامتر بی‌بعد فرکانس طبیعی به صورت (۳۹) در نظر گرفته شده است.

$$\bar{k}_w = \frac{L^4 k_w}{D}, \quad \bar{k}_g = \frac{L^2 k_g}{D}, \quad \Omega = \omega L \sqrt{\rho h / D}$$

$$D = \frac{c_{55} h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (39)$$

با اعمال شرایط تنش در بالا و بستر الاستیک در پایین تیر، بر روی معادله (۱۸) معادله (۴۰) حاصل می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} [0] \\ [\bar{u}] \\ [\bar{w}] \\ [0] \end{Bmatrix}_{z=h} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [k\bar{w}] \\ [\bar{u}] \\ [\bar{w}] \\ [0] \end{Bmatrix}_{z=0} \quad (40)$$

از سطرهای اول و چهارم دستگاه (۴۰) معادله (۴۱) به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} s_{12} & ks_{11} + s_{13} \\ s_{42} & ks_{41} + s_{43} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (41)$$

حال با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب رابطه بالا، پارامترهای فرکانس طبیعی بی‌بعد  $\Omega$  به دست می‌آید.

### ۵- نتایج عددی و مقایسه‌ها

برای به دست آوردن نتایج عددی، نقاط نمونه در جهت  $x$  از روش چپیشف استفاده می‌شود [۵].

$$x_i = \frac{L}{2} \left[ 1 - \cos \frac{(i-1)\pi}{N-1} \right] \quad (42)$$

ابتدا همگرایی و دقت روش ارائه شده با به دست آوردن اولین ده فرکانس بی‌بعد  $\omega = \omega h \sqrt{\rho / c_{55}}$  یک تیر هدفمند در حالت بدون بستر الاستیک با خواص  $c_{110} = 139 \text{ GPa}$ ،  $c_{550} = 162.5 \text{ GPa}$ ،  $c_{330} = 336.4 \text{ GPa}$ ،  $c_{130} = 14 \text{ GPa}$ ،  $\rho_0 = 7500$  و شاخص گرادیان ماده  $\alpha_1 = 0.5$  و  $\alpha_2 = 0$  ابعاد  $h_f = 1$ ،  $L = 15$  و  $L = 7$  در حالت شرایط مرزی ساده اعتباردهی شده، و مقایسه این نتایج، با نتایج جی یانگ [۸] و لو و چن [۱۱] در جدول ۲ برای  $N = 14$  نشان می‌دهد که این روش از سرعت همگرایی و دقت خوبی برخوردار است.

در جدول‌های ۳ و ۴ فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد تیر هدفمند دو جهته به ازای  $\alpha_1 = 0.5$  و مقادیر مختلف برای  $\alpha_2$  و نسبت ضخامت به طول به ترتیب برای شرایط ساده-ساده و گیردار-گیردار آورده شده است.

$$M^f = \exp(G_f h_f)$$

$$M^s = \exp(G_s h_p)$$

### ۳- ماتریس تبدیل عمومی و شرایط مرزی

از معادله (۳۰) و شرط  $\varphi(h) = \varphi(h_p + h_f) = 0$  از سطر ششم مقدار (۳۳) به دست می‌آید.

$$D_z = (h_p + h_f) = \frac{1}{m_{65}^a} \left( -[m_{6j}^a] \delta^m(h_p + h_f) \right)$$

$$j = 1, \dots, 4, k = 1, \dots, 6 \quad (33)$$

پس می‌توان ارتباط متغیرهای حالت در سطوح تحریک کننده را به صورت (۳۴) نوشت.

$$\delta^m(h) = Z^a \delta^m(h_p + h_f)$$

$$Z^a = \left( [m_{ij}^a] - \frac{1}{m_{65}^a} \{m_{i5}^a\} [m_{6j}^a] \right), i, j = 1, \dots, 4$$

$$\delta^m(z) = [[\sigma_{zi}] [u_i] [w_i] [\tau_{xzi}]]^T \quad (34)$$

با استفاده از معادله (۳۲) می‌توان ارتباط سطوح بالا و پایین سنسور به صورت (۳۵) نوشت.

$$\delta^m(h_s) = Z^s \delta^m(0)$$

$$Z^s = \left( [m_{ij}^s] - \frac{1}{m_{66}^s} \{m_{i5}^s\} [m_{6j}^s] \right), i, j = 1, \dots, 4 \quad (35)$$

از آنجا که متغیرهای حالت برای تحریک کننده، تیر هدفمند و سنسور یکسان و پیوسته شد، می‌توان با استفاده از روابط بالا ارتباط سطوح بالا و پایین تیر را به صورت معادله (۳۶) نوشت.

$$\delta(h) = S \delta(0), \quad S = Z^a M^f Z^s \quad (36)$$

### ۴- تیر روی بستر الاستیک

برای بستر الاستیک مدل دو پارامتری یا پسترناک-وینکلر در نظر گرفته شد [۸]. با قراردادن بستر در سطح زیرین تیر  $z = 0$  مقدار تنش را به صورت رابطه (۳۷) حاصل می‌شود.

$$\sigma_z = k_w w - k_g \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (37)$$

حال با بی‌بعد کردن رابطه (۳۷) و اعمال روش DQ معادله (۳۸) به دست می‌آید.

$$\bar{\sigma}_{z,i} = K \bar{w}_i, \quad K = \frac{k_w h}{c_{55}} I_N - \frac{k_g h}{c_{55} L^2} g_{ij}^{(2)} \quad i = j = 1, \dots, N \quad (38)$$

که  $K_w$  ضریب وینکلر و  $K_g$  ضریب الاستیک لایه برشی

جدول ۲ جدول اعتبارسنجی برای شرایط ساده-ساده (N=۱۴)

$l/h=7$		$l/h=15$		شماره مد	حاضر
یانگ [۸]	لو و چن [۱۱]	یانگ [۸]	لو و چن [۱۱]		
۰/۰۵۲۲۴۷	۰/۰۵۲۴۷۱	۰/۰۱۱۵۷	۰/۰۱۱۵۷۳	۰/۰۱۱۶	۱
۰/۲۰۰۷۳	۰/۲۰۰۷۲۸	۰/۰۴۵۸	۰/۰۴۵۸۰۲	۰/۰۴۵۸	۲
۰/۴۱۴۲	۰/۴۱۴۲۰۴	۰/۱۰۱۳۲	۰/۱۰۱۳۲	۰/۱۰۱۳	۳
۰/۴۲۳۸۲	۰/۴۲۳۸۱	۰/۱۷۶۱۳	۰/۱۷۶۱۳۱	۰/۱۷۶۱	۴
۰/۷۰۰۰۲	۰/۷۰۰۰۲	۰/۱۹۳۳	۰/۱۹۳۳۹۲	۰/۱۹۳۳	۵
۰/۸۲۸۳۷	۰/۸۲۸۳۷	۰/۲۶۷۹۲	۰/۲۶۷۹۱۷	۰/۲۶۷۸	۶
۱/۰۱۲۴۶	۱/۰۱۲۴۱۸	۰/۳۷۴۳۱	۰/۳۷۴۲۹۹	۰/۳۷۳۴	۷
۱/۲۴۲۴۴۶	۱/۲۴۲۴۵۵	۰/۳۸۶۵۹	۰/۳۸۶۵۹۱	۰/۳۸۶۷	۸
۱/۳۴۹۴۶	۱/۳۴۹۳۷	۰/۴۹۳۰۸	۰/۴۹۳۴۲۴	۰/۵۰۰۹	۹
۱/۶۵۶۴	۱/۶۵۶۳۹۸	۰/۵۷۹۸۸	۰/۵۷۹۸۷۷	۰/۵۸۰۰	۱۰

جدول ۳ تغییرات فرکانس طبیعی تیر به ازای  $\alpha_1 = 0.5$  و مقادیر مختلف برای  $\alpha_2$  و نسبت  $h/l$  برای شرایط ساده-ساده

$\omega_5$	$\omega_4$	$\omega_3$	$\omega_2$	$\omega_1$	$\alpha_2$	$h/l$
۰/۲۴۴	۰/۲۳۰۴	۰/۲۲۰۱	۰/۱۰۱۴	۰/۰۲۶	۰/۵	۰/۱
۰/۲۵۱	۰/۲۴۳۶	۰/۲۲۰۴	۰/۱۰۱۷	۰/۰۲۶۲	۱	
۰/۲۶۵	۰/۲۵۴۳	۰/۲۲۱۵	۰/۱۰۲۸	۰/۰۲۷	۲	
۰/۳۶۳	۰/۲۸۰۶	۰/۲۲۹۴	۰/۱۱۰۱	۰/۰۳۱۳	۵	
۰/۳۹۴	۰/۳۰۹۶	۰/۲۵۴۲	۰/۱۳۰۴	۰/۰۴۰۹	۱۰	
۰/۶۶۰	۰/۵۴۹۳	۰/۴۸۱۸	۰/۳۷۴۴	۰/۱۰۱۶	۰/۵	۰/۲
۰/۶۶۳	۰/۵۶۰۳	۰/۵۰۷۳	۰/۳۷۵۴	۰/۱۰۲۳	۱	
۰/۶۶۸	۰/۵۸۴۲	۰/۵۲۸۶	۰/۳۷۹۴	۰/۱۰۵۲	۲	
۱/۱۴	۰/۷۹۰۸	۰/۵۷۱۲	۰/۴۰۵۳	۰/۱۲۱۸	۵	
۱/۳۲	۰/۸۶۹	۰/۶۵۳۴	۰/۴۷۶۴	۰/۱۵۷۱	۱۰	

جدول ۴ تغییرات فرکانس طبیعی تیر به ازای  $\alpha_1 = 0.5$  و مقادیر مختلف برای  $\alpha_2$  و نسبت  $h/l$  برای شرایط گیردار

$\omega_5$	$\omega_4$	$\omega_3$	$\omega_2$	$\omega_1$	$\alpha_2$	$h/l$
۰/۲۷۶۲	۰/۲۶۲۳	۰/۲۵۷۷	۰/۱۳۷۴	۰/۰۵۰۷	۰/۵	۰/۱
۰/۲۸۳۸	۰/۲۶۲۶	۰/۲۵۸۱	۰/۱۳۷۷	۰/۰۵۰۹	۱	
۰/۲۹۶۲	۰/۲۶۴	۰/۲۶۷۹	۰/۱۳۸۸	۰/۰۵۲	۲	
۰/۴۲۶۷	۰/۳۱۸۵	۰/۲۷۳۸	۰/۱۴۶۱	۰/۰۵۸۷	۵	
۰/۴۴۳	۰/۳۲۹۵	۰/۳۰۹۱	۰/۱۶۶۳	۰/۰۷۶۱	۱۰	
۰/۸۳۶۲	۰/۵۵۲۴	۰/۵۱۵۴	۰/۴۸۸۶	۰/۱۷۱۶	۰/۵	۰/۲
۰/۸۳۶۹	۰/۵۶۷۵	۰/۵۴۲۶	۰/۴۹۰۱	۰/۱۷۲۵	۱	
۰/۸۳۹۶	۰/۵۹۲۳	۰/۵۶۵۹	۰/۵۲۵۶	۰/۱۷۶	۲	
۱/۳۶۴	۰/۸۵۷۹	۰/۶۳۶۹	۰/۵۳۴۴	۰/۱۹۷۷	۵	
۱/۴۲۵	۰/۹۱۳۷	۰/۶۵۸۶	۰/۶۴۹۴	۰/۲۵۴۱	۱۰	

مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار  $\alpha_2$  و نسبت ضخامت به طول فرکانس طبیعی بی‌بعد افزایش می‌یابد که دلالت بر سخت

شدن ماده می‌باشد. همچنین بیشتر بودن فرکانس‌ها در شرایط تکیه‌گاهی گیردار-گیردار نسبت به ساده-ساده را می‌توان ملاحظه نمود.

حال در ادامه همان تیر هدفمند دو جهته در بین لایه‌های پیزوالکتریک با ضخامت  $h_p = 0.1$  که خواص آن در جدول ۱ آورده شده، مقید می‌شود که نتایج این حالت در جداول ۴ و ۵ به ترتیب برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار و ساده آورده شده است. در این حالت با اضافه شدن لایه پیزوالکتریک به تیر،

فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. در ادامه تیر هدفمند دو جهته پیزوالکتریک روی بستر الاستیک دو پارامتری قرار داده می‌شود که نتایج شرایط تکیه‌گاهی گیردار-گیردار به ازای ثابت و مقادیر مختلف  $\alpha_2$ ، ضرایب بستر الاستیک و نسبت ضخامت به طول در جداول‌های ۶، ۷ و ۸ به ترتیب برای  $\alpha_1 = 1$ ،  $\alpha_2 = 2$  و  $\alpha_2 = 5$  بیان شده است که مشاهده می‌شود مقدار پارامترهای فرکانس با افزایش  $\alpha_2$  و افزایش ضرایب بستر الاستیک افزایش می‌یابد.

**جدول ۵** تغییرات فرکانس طبیعی تیر دوجته مقید در لایه‌های پیزوالکتریک به ازای  $\alpha_1 = 0.5$  و مقادیر مختلف برای  $\alpha_2$  و نسبت  $h/l$  برای شرایط ساده-ساده ( $N=14$ )

$\omega_5$	$\omega_4$	$\omega_3$	$\omega_2$	$\omega_1$	$\alpha_2$	$h/l$
0.275	0.1792	0.1674	0.098	0.374	0.5	0.1
0.275	0.1793	0.169	0.0982	0.376	1	
0.276	0.1797	0.1755	0.0988	0.38	2	
0.280	0.2222	0.1832	0.1032	0.415	5	
0.610	0.294	0.193	0.1214	0.561	10	
0.567	0.5245	0.3291	0.318	0.326	0.5	0.2
0.566	0.5245	0.3331	0.3189	0.329	1	
0.562	0.525	0.3503	0.3216	0.334	2	
0.939	0.7547	0.5363	0.3384	0.423	5	
0.952	0.7993	0.5042	0.4381	0.1707	10	

**جدول ۶** پارامترهای فرکانس برای تیر دوجته با لایه‌های پیزوالکتریک روی بستر الاستیک به ازای  $\alpha_2 = 1$  حالت گیردار

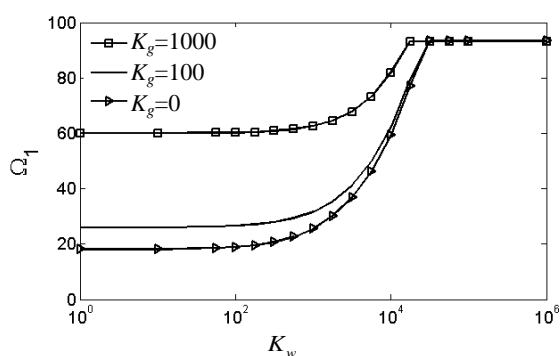
$k_g = 1000$			$k_g = 100$			$k_g = 0$			$k_w$	$h/l$
مد سوم	مد دوم	مد اول	مد سوم	مد دوم	مد اول	مد سوم	مد دوم	مد اول		
158/48	100/193	47/981	103/762	57/499	23/528	95/567	50/361	18/637	0	0.05
158/61	100/193	48/246	103/762	57/631	23/924	95/567	50/493	19/166	100	
159/01	100/986	49/832	104/555	59/085	27/097	96/492	52/08	22/999	1000	
92/13	88/396	45/966	88/264	52/244	22/008	79/573	44/975	17/084	0	0.1
92/22	88/397	46/164	88/363	52/410	22/404	79/672	45/173	17/580	100	
92/22	88/429	47/816	89/222	53/864	25/775	80/597	46/858	21/710	1000	

**جدول ۷** پارامترهای فرکانس برای تیر دوجته با لایه‌های پیزوالکتریک روی بستر الاستیک به ازای  $\alpha_2 = 2$  حالت گیردار

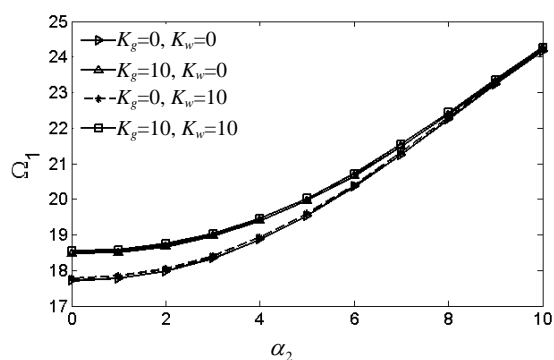
$k_g = 1000$			$k_g = 100$			$k_g = 0$			$k_w$	$h/l$
مد سوم	مد دوم	مد اول	مد سوم	مد دوم	مد اول	مد سوم	مد دوم	مد اول		
158/485	100/193	47/991	104/027	57/763	23/528	95/963	50/758	19/034	0	0.05
158/618	100/193	48/246	104/159	57/895	23/924	95/963	50/89	19/430	100	
159/014	100/986	49/832	104/820	59/217	27/229	96/889	52/476	23/263	1000	
92/130	88/396	45/966	88/363	52/575	22/008	79/738	45/504	17/282	0	0.1
92/229	88/397	46/164	88/429	52/740	22/404	79/837	45/702	17/778	100	

جدول ۸ پارامترهای فرکانس برای تیر دوجته با لایه‌های پیزوالکتریک روی بستر الاستیک به ازای $\alpha_2 = 5$ حالت گیردار										
$k_g = 1000$			$k_g = 100$			$k_g = 0$			$k_w$	$h/l$
مد سوم	مد دوم	مد اول	مد سوم	مد دوم	مد اول	مد سوم	مد دوم	مد اول		
۱۵۸/۴۸۵	۱۰۰/۱۹۳	۴۷/۹۹۸	۱۰۶/۲۷۴	۵۹/۶۱۳	۲۴/۳۲۱	۹۸/۷۳۹	۵۳/۶۶۵	۲۱/۴۱۳	۰	۰/۰۵
۱۵۸/۶۱۸	۱۰۰/۱۹۳	۴۸/۲۴۶	۱۰۶/۴۰۶	۵۹/۷۴۶	۲۴/۷۱۷	۹۸/۸۷۱	۵۳/۷۹۷	۲۱/۸۰۹	۱۰۰	
۱۵۹/۰۱۴	۱۰۰/۹۸۶	۴۹/۸۳۲	۱۰۷/۰۶۷	۶۱/۰۶۷	۲۷/۸۹۰	۹۹/۶۶۵	۵۵/۳۸۴	۲۵/۳۷۸	۱۰۰۰	
۹۲/۱۳۰	۸۸/۳۹۶	۴۵/۹۶۶	۸۸/۵۶۱	۵۵/۱۱۹	۲۲/۰۷۴	۷۹/۹۰۳	۴۹/۷۰۰	۱۸/۷۳۶	۰	۰/۱
۹۲/۲۲۹	۸۸/۳۹۷	۴۶/۱۶۴	۸۸/۶۶۰	۵۵/۲۸۴	۲۲/۴۷۰	۸۰/۰۰۳	۴۹/۸۶۵	۱۹/۱۹۹	۱۰۰	
۹۲/۹۲۳	۸۸/۴۲۹	۴۷/۸۱۶	۸۹/۴۵۴	۵۶/۶۳۹	۲۵/۸۰۸	۸۰/۸۹۵	۵۱/۳۸۵	۲۲/۹۹۹	۱۰۰۰	

شکل ۲ تغییرات اولین فرکانس طبیعی بر حسب  $K_g$  شکل‌های ۴ و ۵ تغییرات اولین فرکانس طبیعی تیر به ترتیب بر حسب  $\alpha_2$  و  $\alpha_1$  به ازای مقادیر مختلف ضرایب بستر الاستیک را نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود با افزایش  $\alpha_2$  اولین فرکانس طبیعی افزایش و با افزایش  $\alpha_1$  کاهش می‌یابد.



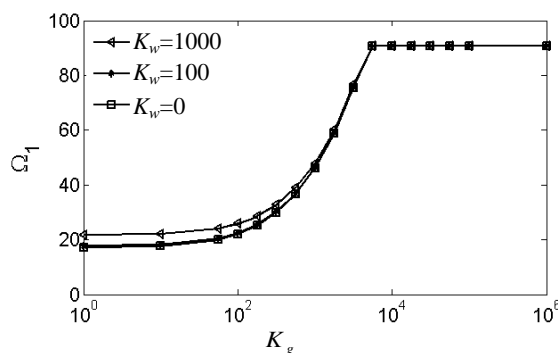
شکل ۳ تغییرات اولین فرکانس طبیعی بر حسب  $k_w$



شکل ۴ تغییرات اولین فرکانس طبیعی بر حسب  $\alpha_2$

همچنین با افزایش نسبت ضخامت به طول مقدار پارامترهای فرکانس کاهش می‌یابد. می‌توان مشاهده کرد که ضریب لایه برشی موثرتر از ضریب لایه وینکلر می‌باشد. همچنین مشاهده می‌شود که به ازای مقادیر بزرگ ضرایب پارامترهای فرکانس تقریباً ثابت می‌شوند، به عبارت دیگر به سمت مقدار مشخصی میل می‌کنند.

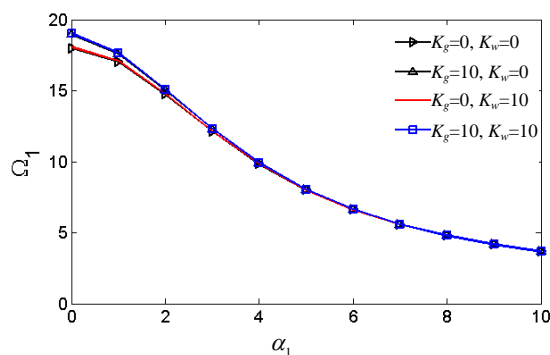
در شکل ۲ نمودار تغییرات اولین فرکانس طبیعی بر حسب ضریب لایه برشی برای مقادیر مختلف ضریب وینکلر مشاهده می‌شود. در این نمودار به ازای مقدار کمتر از ۱۰۰۰۰ برای ضریب لایه برشی فرکانس به سمت مقدار معینی میل می‌کند که دیگر به ضریب لایه وینکلر بستگی ندارد. در شکل ۳ نمودار اولین فرکانس طبیعی بر حسب ضریب لایه وینکلر به ازای مقادیر مختلف ضریب لایه برشی مشاهده می‌شود که دیده می‌شود با افزایش ضرایب لایه بستر فرکانس افزایش می‌یابد. در این نمودار به ازای مقدار بیشتر ۱۰۰۰۰ فرکانس تقریباً ثابت شده و دیگر به ضریب لایه برشی بستگی ندارد. با مقایسه نمودارهای ۲ و ۳ می‌توان به مؤثر بودن ضریب لایه برشی نسبت به ضریب لایه وینکلر پی برد.



## ۶- نتیجه‌گیری



این مقاله با استفاده از ترکیب روش‌های دیفرانسیل کوادریچر و فضاحالت یک حل الاستیسیته برای بررسی ارتعاشات آزاد و تأثیر بستر الاستیک در یک تیر هدفمند دو جهته مقید با لایه‌های پیزوالکتریک ارائه شده است.



شکل ۵ تغییر اولین فرکانس بر حسب  $\alpha_1$

برای بستر الاستیک از مدل وینکلر-پسترناک استفاده شده و فرض شده که خواص تیر در راستای ضخامت و طولی به صورت نمایی تغییر می‌کند. استفاده از روش دیفرانسیل کوادریچر امکان حل این مسأله را برای شرایط مرزی مختلف را فراهم

کرد. نتایج به دست آمده درستی و دقت این روش را تصدیق نمود و نشان داد که همگرایی در این روش سریع است. مشاهده شد که فرکانس طبیعی بی‌بعد تیر با افزایش مقدار  $\alpha_1$  (شاخص گرادیان خواص مواد در راستای ضخامت) کاهش می‌یابد که دلالت بر کاهش سختی تیر و همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش  $\alpha_2$  (شاخص گرادیان خواص مواد در راستای طولی) فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد که دلالت بر افزایش سفتی ماده در این جهت می‌باشد. همچنین دیده می‌شود وجود لایه پیزوالکتریک روی تیر باعث افزایش فرکانس تیر می‌شود. در حالت تیر روی بستر الاستیک با افزایش نسبت ضخامت به طول کاهش و با تغییر شرایط تکیه‌گاهی از ساده به گیردار افزایش، همچنین مشاهده می‌شود که ضریب الاستیک لایه برشی نسبت به ضریب وینکلر، بر روی رفتار مکانیکی تیر مؤثرتر است. همچنین به ازای مقادیر بزرگ شاخص‌های گرادیان خواص ماده، تغییر ضرایب پارمترهای بستر  $k_g, k_w$  بر روی پارامتر بی‌بعد فرکانس طبیعی تأثیرات تقریباً بی‌تأثیر می‌باشد.

## ۷- پیوست

(الف)

$$\bar{z} = \frac{z}{L}, \bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{55}}, (\bar{u}, \bar{w}) = \frac{(\hat{u}, \hat{w})}{h_f}, (\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_z, \bar{\tau}_{xz}) = \frac{(\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_z, \hat{\tau}_{xz})}{c_{55}}$$

$$(\bar{D}_x, \bar{D}_z) = \frac{(\hat{D}_x, \hat{D}_z)}{\sqrt{c_{55}k_1}}, \bar{k}_i = \frac{k_i}{k_1}, \bar{e}_i = \frac{e_i}{\sqrt{c_{55}k_1}}, \bar{\phi} = \frac{\hat{\phi}}{h\sqrt{c_{55}/k_1}}$$

(ب)

ماتریس  $A_b$

$$\begin{bmatrix} -\alpha I_N & 0 & -\Omega^2 I_N & -\frac{h}{L} [g^{(1)}]_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{h}{L} [g^{(1)}]_{ij} & I_N & 0 & -\frac{h}{L} \bar{e}_5 [g^{(1)}]_{ij} \\ q_1 I_N & q_2 [g^{(1)}]_{ij} & 0 & 0 & q_3 I_N & 0 \\ d_2 [g^{(1)}]_{ij} & d_1 [g^{(2)}]_{ij} & -\Omega^2 I_N & 0 & -\alpha I_N & d_3 [g^{(1)}]_{ij} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{h}{L} \bar{e}_5 [g^{(1)}]_{ij} & -\alpha I_N & -\frac{h^2}{L^2} (\bar{e}_5^2 + 1) [g^{(2)}]_{ij} \\ p_1 I_N & p_2 [g^{(1)}]_{ij} & 0 & 0 & p_3 I_N & 0 \end{bmatrix}$$

$$q_1 = \frac{\bar{k}_3}{\bar{c}_{33}\bar{k}_3 + \bar{e}_3^2}, \quad q_2 = -\frac{h}{L} \frac{\bar{k}_3\bar{c}_{13} + \bar{e}_1\bar{e}_3}{\bar{c}_{33}\bar{k}_3 + \bar{e}_3^2}, \quad q_3 = \frac{\bar{e}_3}{\bar{c}_{33}\bar{k}_3 + \bar{e}_3^2} = p_1, \quad p_2 = \frac{h}{L} \frac{\bar{e}_1\bar{c}_{33} - \bar{c}_{13}\bar{e}_3}{\bar{c}_{33}\bar{k}_3 + \bar{e}_3^2} = d_3$$

$$p_3 = -\frac{c_{33}}{\bar{c}_{33}\bar{k}_3 + \bar{e}_3^2}, \quad d_2 = -\frac{h}{L} \frac{\bar{k}_3\bar{c}_{13} + \bar{e}_1\bar{e}_3}{\bar{c}_{33}\bar{k}_3 + \bar{e}_3^2}, \quad d_1 = -\frac{h^2}{L^2} \left( c_{11} + \frac{\bar{e}_1(\bar{e}_1\bar{c}_{33} - \bar{e}_3\bar{c}_{13}) - \bar{c}_{13}(\bar{e}_1\bar{e}_3 + \bar{k}_3\bar{c}_{13})}{\bar{e}_3^2 + \bar{k}_3\bar{c}_{33}} \right)$$

$$d_4 = -\frac{h^2}{L^2} \frac{\bar{e}_1(\bar{e}_1\bar{c}_{33} - \bar{e}_3\bar{c}_{13}) - \bar{c}_{13}(\bar{e}_1\bar{e}_3 + \bar{k}_3\bar{c}_{13})}{\bar{e}_3^2 + \bar{k}_3\bar{c}_{33}}$$

برای حالت گیردار-گیردار:

$$\begin{bmatrix} -\alpha I_{N-2} & 0 & -\frac{h}{L} [f_{cc}]_{ij} - \Omega^2 I_{N-2} & -\frac{h}{L} [g_{cc}^{(1)}]_{ij} \\ 0 & 0 & -\frac{h}{L} [g_{cc}^{(1)}]_{ij} & I_{N-2} \\ q_1 I_{N-2} & q_2 [g_{cc}^{(1)}]_{ij} & 0 & 0 \\ d_2 [g_{cc}^{(1)}]_{ij} & -\frac{h^2}{L^2} (\bar{c}_{11} + d_4) [g_{cc}^{(2)}]_{ij} - \Omega^2 I_{N-2} & 0 & -\alpha I_{N-2} \\ 0 & 0 & -\frac{h^2}{L^2} \bar{e}_5 [f_{cc}]_{ij} & -\frac{h}{L} \bar{e}_5 [g_{cc}^{(1)}]_{ij} \\ p_1 I_{N-2} & p_2 [g_{cc}^{(1)}]_{ij} & 0 & 0 \\ & & 0 & -\frac{h^2}{L^2} \bar{e}_5 [f_{cc}]_{ij} \\ & & 0 & -\frac{h}{L} \bar{e}_5 [g_{cc}^{(1)}]_{ij} \\ & q_3 I_{N-2} & 0 & 0 \\ & d_3 [g_{cc}^{(1)}]_{ij} & 0 & 0 \\ & -\alpha I_{N-2} & -\frac{h^2}{L^2} (\bar{e}_5^2 + 1) [g_{cc}^{(2)}]_{ij} - \frac{h^2}{L^2} \bar{e}_5 [f_{cc}]_{ij} & \\ & p_3 I_{N-2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

برای حالت ساده-ساده:

$$\begin{bmatrix} -\alpha I_{N-2} & 0 & -\Omega^2 I_{N-2} & -\frac{h}{L} [g_{RR}^{(1)}]_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{h}{L} [g_{RR}^{(1)}]_{ij} & I_N & 0 & -\frac{h}{L} \bar{e}_5 [g_{RR}^{(1)}]_{ij} \\ q_1 I_{N-2} & q_2 [g_{RR}^{(1)}]_{ij} & 0 & 0 & q_3 I_{N-2} & 0 \\ d_2 [g_{RR}^{(1)}]_{ij} & d_1 [g_{RR}^{(2)}]_{ij} & -\Omega^2 I_N & 0 & -\alpha I_N & d_3 [g_{RR}^{(1)}]_{ij} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{h}{L} \bar{e}_5 [g_{RR}^{(1)}]_{ij} & -\alpha I_{N-2} & -\frac{h^2}{L^2} (\bar{e}_5^2 + 1) [g_{RR}^{(2)}]_{ij} \\ p_1 I_{N-2} & p_2 [g_{RR}^{(1)}]_{ij} & 0 & 0 & p_3 I_{N-2} & 0 \end{bmatrix}$$

*Int J Solids Struct*, No. 33 Vol. 7, 1996, pp. 977-990.

- [5] Bert, C. W., Malik, M., "Differential quadrature: a powerful new technique for analysis of composite structures", *Compos Struct*, Vol. 3-4, No. 39 1997, pp. 179-189.
- [6] S.C.Pradhan, T.Murmu, "Thermo-mechanical vibration of FGM sandwich beams under variable elastic foundation using differential method", *Sound and vibration*, Vol. 321, No. 1-2, 2009, pp. 342-362.
- [7] P.Malekzadeh, "Three-dimemnsional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundation", *Composite structure* Vol. 89, No. 3, 2009, pp. 376-373.
- [8] J.Yang, C.F. Lu, W.Q. Chen, "Two-dimension elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic foundations", *Composite structure* Vol.84, No. 3, 2008, pp. 209-219.
- [9] A.Alibeigloo, "Thermoelasticity analysis of functionally graded beam with integrated surface piezoelectric layers", *Composite structure* Vol. 92, No. 6, pp. 1535-1543.
- [10] Li, Y., Shi, Z. F., 2009. "Free vibration of a functionally graded piezoelectric beam via state-space based differential quadrature", *Composite Structures*, Vol. 87, No. 3, pp. 257-264.
- [11] Lu CF, Chen W.Q, "free vibration of orthotropic functionally graded beams with various condition", *Structure engineering and mechanics*, 2005, Vol. 4, No. 20, pp. 465-76.

$$[f_{cc}]_{ij} = [g_{cc}^{(1)}]_{i1} [g_{cc}^{(1)}]_{1N} + [g_{cc}^{(1)}]_{iN} [g_{cc}^{(1)}]_{Nj}$$

$$[g_{RR}^{(1)}]_{ij} = [g^{(1)}]_{ij}, (i, j = 2, \dots, N-1),$$

$$[g_{cc}^{(1)}]_{ij} = [g^{(1)}]_{ij}, (i, j = 2, \dots, N-1),$$

$$[g_{cc}^{(2)}]_{ij} = [g^{(2)}]_{ij}, (i, j = 2, \dots, N-1)$$

$$[g_{RR}^{(1)}]_{ij} = [g^{(1)}]_{ij}, (i, j = 2, \dots, N-1),$$

$$[g_{RR}^{(2)}]_{ij} = [g^{(2)}]_{ij}, (i, j = 2, \dots, N-1)$$

## ۸- مراجع

- [1] Rao, S. S., Sunar, M., "Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of flexible structures: A survey", *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 47, No. 4, 1994, pp. 113-123.
- [2] Zhong, Z., Shang, E. T., "Three-dimensional exact analysis of a simply supported functionally gradient piezoelectric plate", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 4, No. 20, 2003, pp. 5335-5352.
- [3] Lu, P., Lee, H. P., Lu, C. "Exact solutions for simply supported functionally graded piezoelectric laminates by Stroh-like formalism", *Compos Struct*, Vol. 72, No. 3, 2006, pp. 352-363.
- [4] Lee, J. S., Jiang, L. Z. "Exact electroelastic analysis of piezoelectric laminae via state-space approach",