



## تحلیل پس کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده احاطه شده توسط بستر الاستیک تحت بار حرارتی شعاعی

پرهام زاهدی‌نژاد<sup>1\*</sup>، مهرداد محمدی<sup>1</sup>، کامران فروتن<sup>2</sup>

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شیراز، شیراز  
2- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شیراز، شیراز  
\* zahedinejad@iaushiraz.ac.ir 71987-74731 صندوق پستی

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 01 دی 1395  
پذیرش: 27 بهمن 1395  
ارائه در سایت: 14 فروردین 1396  
کلید واژگان:

پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده  
مواد مدرج تابعی  
تحلیل غیر خطی  
پس کمانش حرارتی

### چکیده

در این مقاله، تحلیل دقیق رفتار پس کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای مدور نازک تقویت شده مدرج تابعی که تحت بار حرارتی شعاعی قرار گرفته و توسط محیط الاستیک احاطه گردیده، انجام می‌شود. تقویت‌کننده‌های طولی و حلقوی به صورت داخلی در نظر گرفته می‌شوند و خواص پوسته و تقویت‌کننده‌ها به صورت وابسته به دما و مدرج تابعی در راستای ضخامت لحاظ می‌گردند. محیط الاستیک اطراف پوسته استوانه‌ای براساس مدل دو پارامتری وینکلر و پاسترناک مدل‌سازی می‌شود. روابط اساسی و معادلات تعادل براساس تکنیک تقویت‌کننده‌های تکه‌ای و تئوری کلاسیک پوسته و با توجه به روابط غیرخطی فن-کارمن، به دست می‌آید. با استفاده از روش گالرکین، پاسخ معادله غیرخطی پوسته استوانه‌ای محاسبه می‌گردد. به منظور صحت‌سنجی روش، نتایج به دست آمده با نتایج سایر تحقیقات موجود مقایسه می‌گردد و در ادامه تأثیر پارامترهای مختلف مانند شاخص کسر حجمی ماده، تعداد تقویت‌کننده‌ها و پارامترهای بستر ارتجاعی بر روی پاسخ پس کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای تقویت شده بررسی می‌شود. نتایج عددی نشان می‌دهند که وجود تقویت‌کننده‌ها و بستر ارتجاعی باعث بالابردن پایداری پوسته استوانه‌ای می‌گردد. به علاوه، افزایش ضخامت پوسته، کاهش شاخص کسر حجمی، افزایش تعداد تقویت‌کننده‌های طولی و حلقوی و به کار بردن بستر الاستیک باعث افزایش دمای پس کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای تقویت شده مدرج تابعی می‌گردد.

## Thermal post-buckling analysis of eccentrically stiffened FG cylindrical shells surrounded by elastic foundation and subjected to thermal radial loading

Parham Zahedinejad<sup>\*</sup>, Mehrdad Mohammadi, Kamran Foroutan

Mechanical Engineering Department, Islamic Azad University of Shiraz Branch, Shiraz, Iran  
\* P.O.B. 71987-74731, Shiraz, Iran, zahedinejad@iaushiraz.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 21 December 2016  
Accepted 15 February 2017  
Available Online 03 April 2017

#### Keywords:

Stiffened cylindrical shell  
FGM  
Nonlinear analysis  
Thermal post-buckling

### ABSTRACT

In this paper, an exact analysis of thermal post-buckling behavior of eccentrically stiffened functionally graded (FG) thin circular cylindrical shells subjected to thermal radial loading and surrounded by elastic foundation, is presented. Stringer and ring stiffeners are assumed to be placed on the inner surface of the FG cylinder shell and the material properties of the shell and stiffeners are assumed to be temperature dependent and continuously graded in the thickness direction. The elastic medium around the circular cylindrical shell is modeled by a two parameter elastic foundation based on the Winkler and Pasternak model. Fundamental relations and equilibrium equations are derived based on the smeared stiffeners technique and the classical theory of shells according to the von-Karman nonlinear equations. By using the Galerkin method, the thermal post-buckling response of eccentrically stiffened FG thin circular cylindrical shells is obtained. In order to validate the method, the obtained results are compared with available solutions and to continue, the effects of different parameters such as volume fraction exponent, number of stiffeners and elastic foundation parameters, on the thermal post-buckling response of eccentrically stiffened FG thin circular cylindrical shells are considered. Numerical results show that stiffeners and elastic foundation enhance the stability of the FG shells. Moreover, increasing the shell thickness, reducing the volume fraction index, increasing the number of Stringer and ring stiffeners and applying stiffer elastic foundation lead to an increase in the thermal post-buckling response of stiffened FG circular cylindrical shells.

### 1- مقدمه

مهندسی مانند زیردریایی‌ها، پل‌ها، هواپیماها، ماهواره‌ها، کشتی‌ها و سازه‌های دریایی به‌طور گسترده استفاده شده است [1]. به دلیل مشکلاتی که در صنایع مختلف برای مواد تحت تنش‌های حرارتی بالا وجود داشته است، دانشمندان علم مواد در سال 1984 در منطقه سندایی ژاپن برای اولین بار مواد مدرج

پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده با خواص مدرج تابعی<sup>1</sup> در مهندسی مدرن، کاربرد زیادی دارند. این نوع سازه‌ها با شرط مرزی‌های متفاوت در کاربردهای

<sup>1</sup> Functionally graded material

### Please cite this article using:

P. Zahedinejad, M. Mohammadi, K. Foroutan, Thermal post-buckling analysis of eccentrically stiffened FG cylindrical shells surrounded by elastic foundation and subjected to thermal radial loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 3, pp. 397-404, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

خارجی و احاطه شده توسط بستر الاستیک پرداخته‌اند. تحلیل کمانش غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی احاطه شده توسط بستر الاستیک غیرخطی در محیط حرارتی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مراتب بالاتر توسط داک و همکاران [13] ارائه شده است. نین و بیچ [14] به تحلیل غیرخطی کمانش پوسته‌های حلقوی تقویت‌شده تحت بارگذاری پیچشی و احاطه شده توسط بستر الاستیک در محیط حرارتی پرداخته‌اند. تانگ و نگلین‌توا [15] به تأثیر تقویت‌کننده بر کمانش غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تحت بارگذاری پیچشی پرداخته‌اند. تحلیل کمانش و پس‌کمانش غیرخطی صفحه‌های مدرج تابعی تقویت‌شده در محیط حرارتی توسط تاکزالا و همکاران [16] ارائه شده است.

مروری بر مطالعات انجام شده نشان می‌دهد که در خصوص حل تحلیلی پس‌کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک در محیط حرارتی مطالعات زیادی انجام نشده است. در این مقاله، رفتار پس‌کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده، تحت اثر تنش‌های حرارتی شعاعی و بستر ارتجاعی بررسی شده است. جنس پوسته استوانه‌ای و تقویت‌کننده‌ها از مواد مدرج تابعی در نظر گرفته شده و وابستگی خواص مواد به دما لحاظ گردیده است. رفتار محیط الاستیک پیرامون پوسته استوانه‌ای براساس بستر ارتجاعی دو پارامتری وینکلر و پسترناک مدل‌سازی شده است. معادلات غیرخطی با استفاده از تئوری کلاسیک پوسته و لحاظ کردن روابط کرنش جابه‌جایی غیرخطی جهت تغییر شکل‌های بزرگ، تکنیک تقویت‌کننده‌های تک‌ای<sup>۷</sup> و روش گالرکین به دست آمده است. تأثیر پارامترهای متفاوت هندسی، مدهای کمانش، بستر الاستیک، شاخص کسر حجمی ماده و تعداد تقویت‌کننده‌ها بر دمای بحرانی پس‌کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است.

## 2- فرمول‌بندی مسأله

### 2-1- مشخصات قانون توانی<sup>۸</sup> مواد مدرج تابعی

یک نمای شماتیک از یک سیلندر استوانه‌ای تقویت شده که از مواد با خواص مدرج تابعی ساخته شده و توسط بستر ارتجاعی احاطه گردیده است، در "شکل 1" نشان داده شده است. مشخصات ابعادی استوانه بر روی شکل نشان داده شده است. مختصات اصلی  $x$ ،  $y$  و  $z$  به ترتیب در راستای محوری، محیطی و شعاعی می‌باشد.

جنس پوسته و تقویت‌کننده‌ها مدرج تابعی و تقویت‌کننده‌ها به صورت داخلی در نظر گرفته شده‌اند. نحوه تغییر رفتار مواد در پوسته و تقویت‌کننده‌ها بدین نحو است که سطح خارجی پوسته فلز و سطح داخلی آن سرامیک و همچنین سطح بالایی تقویت‌کننده‌ها سرامیک و سطح پایینی آن-ها از جنس فلز در نظر گرفته شده است به طوری که در سطح تماس، پوسته و تقویت‌کننده‌ها هر دو از جنس سرامیک می‌باشند. ترکیب مواد به صورت پیوسته با اعمال قانون توانی جهت کسر حجمی به صورت رابطه (1) تغییر می‌کند [12]:

$$V_c = V_c(z) = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k$$

$$V_m = V_m(z) = 1 - V_c(z) \quad (1)$$

که  $h$  ضخامت پوسته؛  $0 \leq k$  شاخص کسر حجمی؛  $z$  مختصات ضخامت که بین  $-h/2$  و  $h/2$  می‌باشد؛ زیرنویس  $c$  و  $m$  به ترتیب سرامیک و فلز را

تابعی را به‌عنوان مواد با تحمل حرارتی بالا پیشنهاد نموده‌اند. مزایای استفاده از این مواد این است که به‌علت تغییرات تدریجی در ساختار و خصوصیات ماده، مشکلات موجود در فصل مشترک دو ماده متفاوت حذف شده و تنش‌های حرارتی، تنش‌های پسماند و عامل تمرکز تنش، نسبت به مواد مرکب<sup>۱</sup> لایه‌ای بسیار کاهش یافته است. در سال‌های اخیر با توسعه صنایع گوناگون در زمینه‌های مختلف مانند هوافضا، نفت، خودروسازی و نیروگاه‌ها استفاده از مواد با مقاومت مکانیکی و حرارتی بالا در ساخت تجهیزات گوناگون مانند توربین‌ها، موتورهای راکتورها افزایش بسیاری داشته است. مواد مدرج تابعی دارای مقاومت مکانیکی، مقاومت حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، مقاومت در برابر خزش و خستگی می‌باشند، از این‌رو در بسیاری از صنایع مورد توجه ویژه قرار گرفته‌اند. سازه‌های پوسته‌ای مدور در طیف وسیعی از ساختارهای مهندسی دارای کاربرد فراوان می‌باشند. در بسیاری از این سازه‌ها، پوسته‌ها تحت بار فشاری می‌باشند و ممکن است کمانش پیدا کنند. بنابراین، تحقیق در مورد پایداری غیرخطی این ساختارها مورد توجه دانشمندان قرار گرفته است.

باروج و سینگر [2] تأثیر تقویت‌کننده‌ها را بر ناپایداری عمومی پوسته-های استوانه‌ای تقویت‌شده تحت فشار هیدرواستاتیک<sup>۲</sup> بررسی کرده‌اند. آن‌ها یافتند که رفتار تقویت‌کننده‌ها به شدت به هندسه پوسته وابسته است. شن و همکاران [3] رفتار کمانش و پس‌کمانش<sup>۳</sup> پوسته استوانه‌ای تقویت شده کامل و ناقص تحت فشار خارجی و فشار محوری با استفاده از تئوری لایه مرزی<sup>۴</sup> را مطالعه کرده‌اند. آن‌ها از تکنیک اغتشاشات<sup>۵</sup> برای محاسبه بار کمانش و منحنی پس‌کمانش استفاده نموده‌اند. تحلیل کمانش پوسته‌های نازک استوانه‌ای مدرج تابعی کامل و ناقص در محیط‌های حرارتی تحت فشار جانبی و با استفاده از تئوری کلاسیک و با استفاده از هندسه‌ی تئوری غیرخطی فن-کارمن-دانل<sup>۶</sup> توسط شن [4] ارائه شده است. لی و شن [5] به تحلیل سه بعدی پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مرکب تحت فشار خارجی و فشار محوری در محیط حرارتی پرداخته‌اند. آن‌ها با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای پوسته و تکنیک اغتشاشات به محاسبه بارهای کمانش و منحنی پس‌کمانش پرداخته‌اند. شن [6] همچنین کمانش پیچشی و پس-کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی در محیط‌های حرارتی را بررسی نموده است. تحلیل کمانش مکانیکی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی شامل بستر الاستیک پسترناک توسط باقری زاده و همکاران [7] انجام شده است. بیچ و همکاران [8] پس‌کمانش غیرخطی پوسته‌های کم عمق و ورق‌های مدرج تابعی با تقویت‌کننده‌های همگن را بررسی کرده‌اند. قاسمی و همکاران [9] با استفاده از روش معادل‌سازی، کمانش پوسته‌های استوانه‌ای با تقویت‌کننده‌های مشبک لوزی تحت بار محوری را بررسی نموده‌اند. دانگ و نگا [10] کمانش غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده فلزی و بستر الاستیک تحت فشار خارجی را بررسی کرده‌اند. شبیه‌سازی و آنالیز پوسته‌های استوانه‌ای فولادی جدار نازک با ضخامت، طول و قطرهای مختلف دارای حفره مثلثی شکل که به صورت محوری تحت بار فشاری قرار گرفته‌اند، با استفاده از روش اجزای محدود و به کمک نرم‌افزار آباکوس توسط تاجداری و همکاران [11] ارائه شده است. شاطرزاده و فروتن [12] به تحلیل پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده تحت بار فشاری

<sup>1</sup> Composite material

<sup>2</sup> hydrostatic pressure

<sup>3</sup> Post buckling

<sup>4</sup> boundary layer theory

<sup>5</sup> perturbation technique

<sup>6</sup> von Karman-Donnell

<sup>7</sup> Smearred stiffeners technique

<sup>8</sup> Power law

$$\begin{aligned} \sigma_s^{st} &= E_s(z, T) \varepsilon_x - \frac{E_s(z, T)}{1-2\nu} \alpha_s(z, T) \Delta T(z) \\ \sigma_r^{st} &= E_r(z, T) \varepsilon_y - \frac{E_r(z, T)}{1-2\nu} \alpha_r(z, T) \Delta T(z) \end{aligned} \quad (8)$$

که ضریب پواسون<sup>1</sup> ( $\nu$ ) ثابت فرض می‌شود،  $\sigma_y^{sh}$  تنش نرمال در مختصات  $x, y$  روی پوسته بدون تقویت کننده و تنش برشی بر روی پوسته بدون تقویت کننده می‌باشد.  $\sigma_s^{st}, \sigma_r^{st}$  به ترتیب تنش نرمال برای تقویت کننده‌های حلقوی و طولی می‌باشد. در این مقاله تقویت کننده‌ها از جنس مواد مدرج تابعی در نظر گرفته شده است و فرض می‌شود تنش حرارتی تقویت کننده‌ها که به‌طور یکنواخت بر روی پوسته توزیع شده‌اند، ناچیز می‌باشند. لذا می‌توان اثر آن را نادیده گرفت. برای لحاظ کردن اثر تقویت کننده‌ها بر پوسته از تکنیک تقویت کننده‌های تکه‌ای استفاده می‌شود. همچنین از اثرات پیچشی تقویت کننده‌ها به‌دلیل کوچکی صرف نظر شده است. با یکپارچه‌سازی معادلات تنش-کرنش و محاسبه نیروها و ممان‌های منتهجه برای پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت کننده روابط (9) و (10) را خواهیم داشت [19,18,13]:

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11} \varepsilon_x^0 + A_{12} \varepsilon_y^0 - A_{14} X_x - A_{15} X_y + \phi_1 \\ N_y &= A_{12} \varepsilon_x^0 + A_{22} \varepsilon_y^0 - A_{15} X_x - A_{25} X_y + \phi_1 \\ N_{xy} &= A_{33} \gamma_{xy}^0 - 2A_{36} X_{xy} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} M_x &= A_{14} \varepsilon_x^0 + A_{15} \varepsilon_y^0 - A_{44} X_x - A_{45} X_y + \phi_2 \\ M_y &= A_{15} \varepsilon_x^0 + A_{25} \varepsilon_y^0 - A_{45} X_x - A_{55} X_y + \phi_2 \\ M_{xy} &= A_{36} \gamma_{xy}^0 - 2A_{66} X_{xy} \end{aligned} \quad (10)$$

$A_{ij}$  مؤلفه‌های سفتی کششی، خمشی و کوپل‌شده‌ی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت کننده می‌باشد که مقدار آن‌ها در رابطه (11) نشان داده شده است.  $N_x, N_y, N_{xy}$  به ترتیب نیروهای نرمال و نیروهای برشی در صفحه  $xy$  می‌باشند.  $M_x, M_y, M_{xy}$  نیز به ترتیب گشتاور خمشی و گشتاور پیچشی صفحه‌ای می‌باشند.

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu^2} + \frac{E_{15} d_s}{S_s}, A_{12} = \frac{E_1 \nu}{1-\nu^2}, A_{14} = \frac{E_2}{1-\nu^2} + \frac{E_{25} d_s}{S_s} \\ A_{15} &= \frac{E_2 \nu}{1-\nu^2}, A_{22} = \frac{E_1}{1-\nu^2} + \frac{E_{1r} d_r}{S_r}, A_{25} = \frac{E_2}{1-\nu^2} + \frac{E_{1r} d_r}{S_r} \\ A_{33} &= \frac{E_1}{2(1+\nu)}, A_{36} = \frac{E_2}{2(1+\nu)}, A_{44} = \frac{E_3}{1-\nu^2} + \frac{E_{35} d_s}{S_s} \\ A_{45} &= \frac{E_3 \nu}{1-\nu^2}, A_{55} = \frac{E_3}{1-\nu^2} + \frac{E_{3r} d_r}{S_r}, A_{66} = \frac{E_3}{2(1+\nu)} \end{aligned}$$

$$(\phi_1, \phi_2) = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z) \alpha(z)}{1-\nu} \Delta T(z) (1, z) dz \quad (11)$$

مطابق مرجع [17] روابط مدول یانگ برای پوسته و تقویت کننده‌ها به صورت روابط (12) می‌باشد:

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} E_{sh}(z, T) dz = \left( E_m(T) + \frac{E_{cm}(T)}{k+1} \right) h \\ E_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} z E_{sh}(z, T) dz = \frac{E_{cm}(T) k h^2}{2(k+1)(k+2)} \\ E_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2 E_{sh}(z, T) dz \\ &= \left[ \frac{E_m(T) h^3}{12} + E_{cm}(T) \left( \frac{1}{4(k+1)} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} \right) \right] \quad (12\text{-الف}) \\ E_{1s} &= \int_{-h/2}^{h/2+h_s} E_s(z, T) dz = \left( E_c + \frac{E_{mc}(T)}{k_1+1} \right) h_s \\ E_{2s} &= \int_{-h/2}^{h/2+h_s} z E_s(z, T) dz = \frac{E_c}{2} h h_s \left( \frac{h_s}{h} + 1 \right) \\ &\quad + E_{mc}(T) h h_s \left( \frac{1}{k_1+2} \frac{h_s}{h} + \frac{1}{2k_1+2} \right) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Poisson's ratio

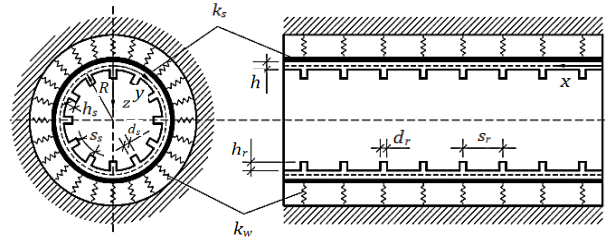


Fig. 1. An eccentrically stiffened FG cylindrical shell on elastic foundation

شکل 1 پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده در محیط الاستیک

نشان می‌دهد.

مشخصه مؤثر ( $Pr_{eff}$ ) پوسته مدرج تابعی براساس قانون ترکیب خطی به‌صورت رابطه (2) تعیین می‌شود [4]:

$$Pr_{eff} = Pr_m(z) V_m(z) + Pr_c(z) V_c(z) \quad (2)$$

که  $Pr$  نشان دهنده خواص مواد وابسته به دما می‌باشد و تابع غیرخطی از دما به صورت رابطه (3) می‌باشد [13]:

$$Pr = P_0 (P_{-1} T^{-1} + 1 + PT + P_2 T^2 + P_3 T^3) \quad (3)$$

برطبق قانون ذکر شده و با فرض این که تقویت کننده‌ها در داخل پوسته قرار گرفته باشند، مدول یانگ ( $E$ ) و ضریب انبساط ( $\alpha$ ) حرارتی برای پوسته و تقویت کننده‌ها به صورت رابطه (4) می‌باشد:

$$\begin{aligned} [E_{sh}(z, T), \alpha_{sh}(z, T)] &= [E_m(T), \alpha_m(T)] + [E_{cm}(T), \alpha_{cm}(T)] \\ &\quad \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^k, E_{cm} = E_c - E_m, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \\ [E_s(z, T), \alpha_s(z, T)] &= [E_c(T), \alpha_c(T)] + [E_{mc}(T), \alpha_{mc}(T)] \\ &\quad \left( \frac{2z-h}{2h_s} \right)^{k_1}, E_{mc} = E_m - E_c, \frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} + h_s \\ [E_r(z, T), \alpha_r(z, T)] &= [E_c(T), \alpha_c(T)] + [E_{mc}(T), \alpha_{mc}(T)] \\ &\quad \left( \frac{2z-h}{2h_r} \right)^{k_2}, E_{mc} = E_m - E_c, \frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} + h_r \end{aligned} \quad (4)$$

که  $k, k_1, k_2, \alpha_s, \alpha_{sh}, \alpha_r, E_s, E_{sh}, E_r$  به ترتیب شاخص کسر حجمی، ضریب انبساط حرارتی و مدول یانگ پوسته، تقویت کننده طولی و حلقوی را نشان می‌دهند. زیرنویس  $s, sh$  و  $r$  به ترتیب بیانگر پوسته، تقویت کننده طولی و حلقوی می‌باشند.

بر طبق روابط غیرخطی کرنش-جابجایی فن کارمن، مؤلفه‌های کرنش بر روی سطح میانی پوسته‌های استوانه‌ای به فرم رابطه (5) می‌باشند [17]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= u_{,x} + \frac{1}{2} (w_{,x})^2 \\ \varepsilon_y^0 &= v_{,y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} (w_{,y})^2 \\ \gamma_{xy}^0 &= u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} \\ \chi_x &= w_{,xx}, \chi_y = w_{,yy}, \chi_{xy} = w_{,xy} \end{aligned} \quad (5)$$

کرنش‌ها در سراسر ضخامت پوسته در فاصله  $z$  از سطح میانی به صورت رابطه (6) می‌باشند [17]:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 - z \chi_x, \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 - z \chi_y, \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 - 2z \chi_{xy} \quad (6)$$

با توجه به رابطه (5) معادله سازگاری به صورت رابطه (7) می‌باشد:

$$\varepsilon_{x,yy}^0 + \varepsilon_{y,xx}^0 - \gamma_{xy,xy}^0 = -\frac{1}{R} w_{,xx} + (w_{,xy})^2 - w_{,xx} w_{,yy} \quad (7)$$

روابط تنش-کرنش برای پوسته‌های مدرج تابعی و تقویت کننده‌ها به صورت رابطه (8) می‌باشند [13]:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{sh} &= \frac{E_{sh}(z, T)}{1-\nu^2} [(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) - (1+\nu) \alpha_{sh}(z, T) \Delta T(z)] \\ \sigma_y^{sh} &= \frac{E_{sh}(z, T)}{1-\nu^2} [(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) - (1+\nu) \alpha_{sh}(z, T) \Delta T(z)] \\ \tau_{xy}^{sh} &= \frac{E(z, T)}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{aligned}$$

$$\frac{N_y}{R} - k_w w + k_s (w_{,xx} + w_{,yy}) = 0 \quad (18)$$

که  $k_w$  مدول بستر وینکلر،  $k_s$  سفتی لایه برشی براساس مدل پسترناک می‌باشد. بستر الاستیک براساس مدل دو پارامتری وینکلر و پاسترناک مدل‌سازی شده است و محیط اطراف پوسته استوانه‌ای را احاطه نموده است. همان‌طور که در معادله (18) نشان داده شده است اثر بستر ارتجاعی به‌صورت ضریبی خطی از خیز در معادلات پایداری پوسته استوانه‌ای ظاهر گردیده است. بایستی به این نکته توجه داشت که وجود بستر ارتجاعی پیرامون پوسته استوانه‌ای هیچ‌گونه تأثیری بر شرایط مرزی ابتدا و انتهای پوسته استوانه‌ای ندارد.

با توجه به دو معادله اول رابطه (18) تابع تنش  $\varphi$  به‌صورت رابطه (19) تعریف می‌شود:

$$N_x = \varphi_{,yy}, N_y = \varphi_{,xx}, N_{xy} = -\varphi_{,xy} \quad (19)$$

با جایگذاری معادلات (14) در معادله سازگاری (7) و معادلات (16) در سومین معادله رابطه (18) و با توجه به معادلات (5) و (19) روابط (20) و (21) را خواهیم داشت:

$$A_{11}^* \varphi_{,xxxx} + (A_{33}^* - 2A_{12}^*) \varphi_{,xxyy} + A_{22}^* \varphi_{,yyyy} + A_{24}^* w_{,xxxx} + (A_{14}^* + A_{25}^* - 2A_{36}^*) w_{,xxyy} + A_{15}^* w_{,yyyy} + \frac{1}{R} w_{,xx} + [(w_{,xx})^2 - w_{,xx} w_{,yy}] = 0 \quad (20)$$

$$A_{44}^* w_{,xxxx} + (A_{45}^* + A_{54}^* + 4A_{66}^*) w_{,xxyy} + A_{55}^* w_{,yyyy} - A_{24}^* \varphi_{,xxxx} - (A_{14}^* + A_{25}^* - 2A_{36}^*) \varphi_{,xxyy} - A_{15}^* \varphi_{,yyy} - \frac{1}{R} \varphi_{,xx} - \varphi_{,yy} w_{,xx} + 2\varphi_{,xy} w_{,xy} - \varphi_{,xx} w_{,yy} + k_w w - k_s (w_{,xx} + w_{,yy}) = 0 \quad (21)$$

معادلات (20) و (21) سیستم معادلات غیرخطی برحسب دو پارامتر مجهول  $w$  و  $\varphi$  می‌باشند. این معادلات به‌منظور بررسی ویژگی‌های پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده مورد استفاده قرار می‌گیرند.

### 3- تحلیل کمانش مکانیکی

شرایط تکیه‌گاهی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده و احاطه شده توسط بستر الاستیک، ساده می‌باشد و پوسته در معرض توزیع نیروی فشاری شعاعی  $N_{0y} = -\sigma_{0y} h$  قراردارد. تنش محیطی متوسط می‌باشد. بنابراین شرایط مرزی به صورت رابطه (22) می‌باشد:

$$w = 0, M_x = 0, N_y = -\sigma_{0y} h, N_{xy} = 0 \text{ at } x = 0; L \quad (22)$$

خیز پوسته‌های استوانه‌ای را به‌صورت رابطه (23) در نظر می‌گیریم [23,13]:

$$w = f \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} \quad (23)$$

که  $f$ ،  $\sin(m\pi x/L) \sin(ny/R)$ ،  $m$  و  $n$  به ترتیب بیانگر بیشینه دامنه، شکل کمانش، تعداد نیم موج و تعداد موج کامل در راستای محوری و محیطی می‌باشد.

با جایگزینی معادله (23) در معادله (20) و حل آن، معادله‌ای برای تابع مجهول  $\varphi$  به دست می‌آید که به صورت رابطه (24) می‌باشد:

$$\varphi = \varphi_1 \cos \frac{2m\pi x}{L} + \varphi_2 \cos \frac{2ny}{R} - \varphi_3 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + N_{0y} \frac{x^2}{2} \quad (24)$$

که ضرایب  $\varphi_i$  به‌صورت روابط (25) می‌باشد:

$$\varphi_1 = \frac{n^2 \lambda^2}{32A_{11}^* m^2 \pi^2} f^2, \varphi_2 = \frac{m^2 \pi^2}{32A_{22}^* n^2 \lambda^2} f^2, \varphi_3 = \frac{B}{A} f \quad (25)$$

که مقدار ضرایب رابطه (25)، در رابطه (26) نشان داده شده است:

$$A = A_{11}^* m^4 \pi^4 + (A_{33}^* - 2A_{12}^*) m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2 + A_{22}^* n^4 \lambda^4$$

$$E_{3s} = \int_{-h/2}^{h/2+h_s} z^2 E_s(z, T) dz = \frac{E_c}{3} h_s^3 \left( \frac{3h^2}{4h_s^2} + \frac{3h}{2h_s} + 1 \right) + E_{mc}(T) h_s^3 \left[ \frac{1}{k_1 + 3} + \frac{1}{k_1 + 2h_s} + \frac{1}{4(k_1 + 1)h_s^2} \right] \quad (ب-12)$$

$$E_{1r} = \int_{-h/2}^{h/2+h_r} E_r(z, T) dz = \left( E_c + \frac{E_{mc}(T)}{k_2 + 1} \right) h_r$$

$$E_{2r} = \int_{-h/2}^{h/2+h_r} z E_r(z, T) dz = \frac{E_c}{2} h_r \left( \frac{h_r}{h} + 1 \right) + E_{mc}(T) h h_r \left( \frac{1}{k_2 + 2} \frac{h_r}{h} + \frac{1}{2k_2 + 2} \right)$$

$$E_{3r} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_r} z^2 E_r(z, T) dz = \frac{E_c}{3} h_r^3 \left( \frac{3h^2}{4h_r^2} + \frac{3h}{2h_r} + 1 \right) + E_{mc}(T) h_r^3 \left[ \frac{1}{k_2 + 3} + \frac{1}{k_2 + 2} \frac{h}{h_r} + \frac{1}{4(k_2 + 1)h_r^2} \right] \quad (ج-12)$$

$d_s, d_r, s_r, s_s, h_s, d_s, s_s$  به ترتیب فاصله، عرض و ضخامت تقویت‌کننده‌های طولی و حلقوی می‌باشد. اگرچه تقویت‌کننده‌ها با افزایش دما تغییر شکل و اندازه می‌دهند، اما در این مطالعه فرض می‌شود که تقویت‌کننده‌ها شکل سطح مقطع خود را حفظ می‌نمایند و پس از تغییر شکل حرارتی، ابعاد هندسی تقویت‌کننده‌ها تغییر نموده که این تغییرات به‌صورت رابطه (13) محاسبه می‌شود [20]:

$$d_s^T = d_s [1 + \alpha_s(T, z)T(z)], d_r^T = d_r [1 + \alpha_r(T, z)T(z)]$$

$$h_s^T = h_s [1 + \alpha_s(T, z)T(z)], h_r^T = h_r [1 + \alpha_r(T, z)T(z)]$$

$$S_s^T = S_s [1 + \alpha_s(T, z)T(z)], S_r^T = S_r [1 + \alpha_r(T, z)T(z)] \quad (13)$$

از روابط (9) می‌توان کرنش‌ها را برحسب نیروهای منتهجه بازنویسی نمود و به‌صورت رابطه (14) نشان داد:

$$\varepsilon_x^0 = A_{22}^* N_x - A_{12}^* N_y + A_{14}^* X_x + A_{15}^* X_y - (A_{22}^* - A_{12}^*) \phi_1$$

$$\varepsilon_y^0 = A_{11}^* N_y - A_{12}^* N_x + A_{24}^* X_x + A_{25}^* X_y - (A_{11}^* - A_{12}^*) \phi_1$$

$$\gamma_{xy}^0 = A_{33}^* N_{xy} + 2A_{36}^* X_{xy} \quad (14)$$

مقادیر  $A_{ij}^*$  که در رابطه (14) بیان شده است در رابطه (15) نشان شده است:

$$A_{11}^* = \frac{1}{\Delta} A_{11}, A_{22}^* = \frac{1}{\Delta} A_{22}, A_{12}^* = \frac{A_{12}}{\Delta}, A_{33}^* = \frac{1}{A_{33}}$$

$$\Delta = A_{11} A_{22} - A_{12}^2, A_{36}^* = \frac{A_{36}}{A_{33}}$$

$$A_{14}^* = A_{22}^* A_{14} - A_{12}^* A_{15}, A_{25}^* = A_{11}^* A_{25} - A_{12}^* A_{15}$$

$$A_{15}^* = A_{22}^* A_{15} - A_{12}^* A_{25}, A_{24}^* = A_{11}^* A_{15} - A_{12}^* A_{14} \quad (15)$$

با جایگزینی معادلات (14) در معادلات (10)، رابطه (16) را خواهیم داشت:

$$M_x = A_{14}^* N_x + A_{24}^* N_y - A_{44}^* X_x - A_{45}^* X_y - A_{46}^* \phi_1 + \phi_2$$

$$M_y = A_{15}^* N_x + A_{25}^* N_y - A_{54}^* X_x - A_{55}^* X_y - A_{56}^* \phi_1 + \phi_2$$

$$M_{xy} = A_{36}^* N_{xy} - 2A_{66}^* X_{xy} \quad (16)$$

مقدار ضرایب رابطه (16) در رابطه (17) نشان شده است:

$$A_{44}^* = A_{44} - A_{14} A_{14}^* - A_{15} A_{24}^*$$

$$A_{55}^* = A_{55} - A_{14} A_{15}^* - A_{15} A_{25}^*$$

$$A_{45}^* = A_{45} - A_{14} A_{15}^* - A_{15} A_{25}^*$$

$$A_{54}^* = A_{45} - A_{25} A_{24}^* - A_{15} A_{14}^*$$

$$A_{66}^* = A_{66} - A_{36} A_{36}^*$$

$$A_{46}^* = A_{14} (A_{22}^* - A_{12}^*) + A_{15} (A_{11}^* - A_{12}^*)$$

$$A_{56}^* = A_{15} (A_{22}^* - A_{12}^*) + A_{25} (A_{11}^* - A_{12}^*) \quad (17)$$

معادلات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدور نازک براساس تئوری کلاسیک پوسته به شکل رابطه (18) می‌باشد [22,21]:

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = 0$$

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy}$$

4-1- الگوریتم کدنویسی

فلوچارت نحوه محاسبه  $\Delta T$  و تعیین خواص مواد تحت شرایط حرارتی در "شکل 2" نشان داده شده است. مقدار حداقل  $\Delta T$  به دست آمده بیان کننده دمای بحرانی پس کماتش می‌باشد. پس از تعیین  $\Delta T$  مد مربوطه نیز تعیین می‌گردد.

5- نتایج عددی

در این قسمت، پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت کننده و بدون تقویت کننده، با بستر الاستیک و بدون بستر الاستیک با طول (L) 0.75 متر و شعاع (R) 0.5 متر در نظر گرفته شده است. پارامترهای بستر الاستیک ( $k_s$  و  $k_w$ ) به ترتیب  $5 \times 10^5$  نیوتن بر متر مکعب و  $2.5 \times 10^4$  نیوتن بر متر، شاخص کسر حجمی ( $k, k_1, k_2$ ) برابر 1، ضریب پواسون ( $\nu$ ) برابر 0.3 و نسبت‌های  $L/R$  و  $R/h$  به ترتیب برابر 1.5 و 250 در نظر گرفته شده است. به منظور انجام آنالیز پس کماتش حرارتی خواص پوسته استوانه‌ای وابسته به دما در نظر گرفته شده است. در جدول 1 خواص مادی وابسته به دما جهت  $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$  ارائه شده است [4].

به منظور راستی آزمایی فرمول بندی حاضر، پاسخ کماتش استاتیکی پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک تقویت شده بدون بستر الاستیک تحت فشار خارجی، با مطالعات باروچ و سینگر [2]، ردی و استارنس [24] و شن [19] مقایسه گردیده است. نتایج این مقایسه در جدول 2 ارائه شده است. از بررسی

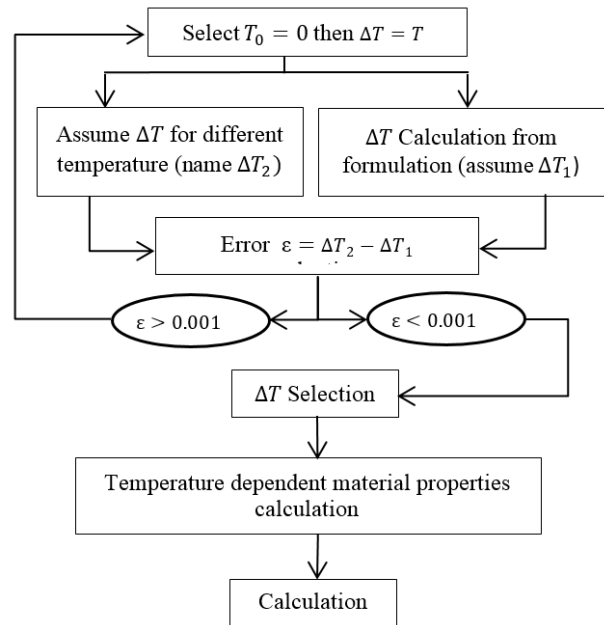


Fig. 2 The flowchart of programming algorithm

شکل 2 فلوچارت روند برنامه نویسی

جدول 1 ضرایب مادی وابسته به دما جهت پوسته استوانه مدرج تابعی ساخته شده از  $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$  [4]

مواد	خواص	$P_0$	$P_{-1}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
سرامیک ( $\text{Si}_3\text{N}_4$ )	$E(\text{Pa})$	3.48e11	0	-3.1e-4	2.16e-7	-8.95e-11
	$\alpha(\text{K}^{-1})$	5.87e-6	0	9.10e-4	0	0
فلز (SUS304)	$E(\text{Pa})$	2.01e11	0	3.08e-4	-6.5e-7	0
	$\alpha(\text{K}^{-1})$	1.23e-5	0	8.09e-4	0	0

$$B = A_{24}^* m^4 \pi^4 + (A_{14}^* + A_{25}^* - 2A_{36}^*) m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2 + A_{15}^* n^4 \lambda^4 - \frac{L^2}{R} m^2 n^2 \quad (26)$$

با جایگزینی معادلات (23) و (24) در معادله (21) و اعمال روش گالرکین در بازه  $0 \leq y \leq 2\pi R$  و  $0 \leq x \leq L$  را خواهیم داشت:

$$\left(D + \frac{B^2}{A}\right) f + G f^3 + n^2 L^2 \lambda^2 N_{0y} f + L^4 k_w f(t) + L^2 k_s f[(\lambda n)^2 + (m\pi)^2] = 0 \quad (27)$$

که مقدار ضرایب رابطه (27)، در رابطه (28) نشان داده شده است:

$$D = A_{44}^* m^4 \pi^4 + (A_{45}^* + A_{54}^* + 4A_{66}^*) m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2 + A_{55}^* n^4 \lambda^4$$

$$G = \left(\frac{n^4 \lambda^4}{16A_{11}^*} + \frac{m^4 \pi^4}{16A_{22}^*}\right) \quad (28)$$

با جایگذاری تنش محیطی در معادله (27)، رابطه تنش محیطی برحسب ماکزیمم دامنه به صورت رابطه (29) می‌باشد:

$$\sigma_{0y} = a_1 + a_2 f^2 + a_3 k_w + a_4 k_s \quad (29)$$

که مقدار ضرایب رابطه (29)، در رابطه (30) نشان داده شده است:

$$a_1 = \frac{1}{n^2 L^2 \lambda^2 h} \left(D + \frac{B^2}{A}\right), \quad a_2 = \frac{G}{n^2 L^2 \lambda^2 h}$$

$$a_3 = \frac{L^2}{n^2 \lambda^2 h}, \quad a_4 = \frac{(\lambda n)^2 + (m\pi)^2}{n^2 \lambda^2 h} \quad (30)$$

4- تحلیل کماتش حرارتی

پوسته در معرض افزایش درجه حرارت ثابت قرار دارد و علاوه بر این، پوسته استوانه‌ای باید شرایط بسته محیطی را نیز ارضا نماید. بنابراین رابطه (31) را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\int_0^{2\pi R} \int_0^L \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left[\varepsilon_y^0 + \frac{w}{R} - \frac{1}{2}(w,y)^2\right] dx dy = 0 \quad (31)$$

با استفاده از معادلات (14)، (16)، (19)، (23) و (24)، مقدار انتگرال رابطه (31)، به صورت رابطه (32) محاسبه می‌شود:

$$N_{0y} = \frac{m^2 \pi^2}{8L^2 A_{22}^*} f^2 - \frac{(A_{12}^* - A_{22}^*)}{A_{22}^*} \phi_1 \quad (32)$$

با استفاده از رابطه (11)، پارامتر حرارتی  $\phi_1$  را می‌توان برحسب  $\Delta T$  به صورت رابطه (33) بیان نمود:

$$\phi_1 = H h \Delta T \quad (33)$$

که ضریب  $H$  به صورت رابطه (34) تعریف می‌شود:

$$+ \int_0^1 \frac{E_{cm} \alpha_{cm} t^{2k}}{1 - (\nu_m + \nu_{cm} t^k)} dt \quad (34)$$

با جایگذاری روابط (32) و (33) در رابطه (27)، می‌توان رابطه (35) را برای  $\Delta T$  برحسب بیشینه دامنه بیان نمود:

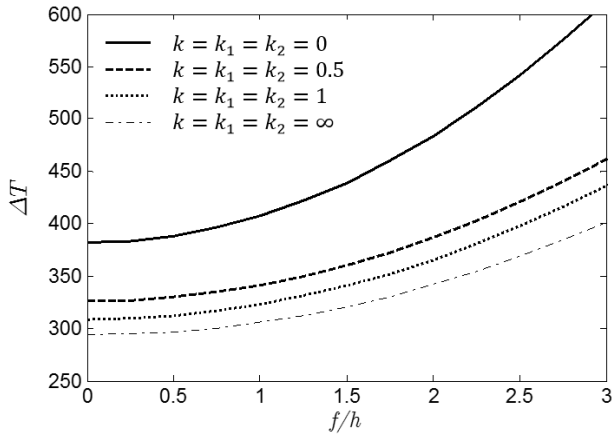
$$\Delta T = b_1 + b_2 f^2 + b_3 k_w + b_4 k_s \quad (35)$$

که مقدار ضرایب رابطه (35)، در رابطه (36) نشان داده شده است:

$$b_1 = b_0 \left(D + \frac{B^2}{A}\right), \quad b_2 = 3b_0 G$$

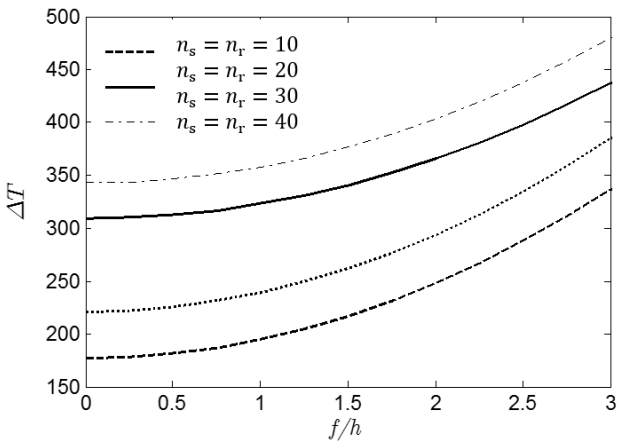
$$b_3 = b_0 L^4, \quad b_4 = b_0 L^2 [(\lambda n)^2 + (m\pi)^2] \quad (36)$$

معادله (35)، رابطه غیرخطی بیشینه دامنه برحسب دمای پس کماتش حرارتی برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت کننده و احاطه شده توسط بستر الاستیک را نشان می‌دهد.



**Fig. 4** Thermal post-buckling curve of eccentrically stiffened FG cylindrical shell without elastic foundation for different values of volume fractions indexes

شکل 4 منحنی پس کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای تقویت شده و بدون بستر الاستیک با در نظر گرفتن مقادیر مختلف شاخص کسر حجمی



**Fig. 5** Effect of the number of stringer and ring stiffeners on the thermal post-buckling response of eccentrically stiffened FG cylindrical shell without elastic foundation

شکل 5 تأثیر تقویت‌کننده‌های طولی و حلقوی بر پاسخ پس کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی بدون بستر الاستیک

پس کمانش حرارتی افزایش پیدا کرده است. با توجه به این نمودار می‌توان نتیجه گرفت که تعداد تقویت‌کننده‌ها در افزایش مقاومت پوسته در برابر بار حرارتی کمانش بسیار مؤثر است.

در "شکل 6" منحنی پس کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای با تقویت‌کننده و بدون تقویت‌کننده با پارامترهای بستر الاستیک ( $k_s$  و  $k_w$ ) به ترتیب  $5 \times 10^5$  نیوتن بر متر مکعب و  $2.5 \times 10^4$  نیوتن بر متر و همچنین بدون بستر الاستیک با شاخص کسر حجمی  $(k, k_1, k_2)$  برابر 1 و نسبت  $L/R$  برابر 1.5 نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تقویت‌کننده‌ها و بستر الاستیک باعث می‌شود که دمای بحرانی پس کمانش حرارتی به طور قابل توجهی افزایش یابد بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که با استفاده از تقویت‌کننده یا به کار بردن بستر الاستیک و یا استفاده از هر دو مورد، می‌تواند مقاومت پوسته را در برابر بار حرارتی کمانش به طور چشمگیری افزایش داد.

"شکل 7" تأثیر بستر الاستیک وینکلر و پاسترناک را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش 100000 برابری ضریب وینکلر دمای حرارتی کمانشی پوسته حدود 6.1 درصد افزایش می‌یابد در صورتی که با 1000 برابر کردن ضریب پاسترناک دمای حرارتی کمانشی پوسته حدود 7.2

نتایج می‌توان دریافت که نتایج حاصل از روش ارائه شده با سایر مراجع هم-خوانی مناسبی دارد.

در "شکل 3" منحنی پس کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده و بدون بستر الاستیک با پارامترهای شاخص کسر حجمی  $(k, k_1, k_2)$  برابر 1، نسبت  $L/R$  برابر 1.5 و  $m = 1$  را نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت  $R/h$ ، دمای بحرانی پس کمانش حرارتی به طور قابل توجهی کاهش می‌یابد بنابراین هر چه پوسته نازک‌تر باشد دمای بحرانی پس کمانش حرارتی کم‌تر می‌شود. با نازک‌تر شدن پوسته ضمن رسیدن دما به دمای بحرانی پس کمانش، برای پوسته‌های نازک‌تر بدون افزایش چشمگیر دمای اعمالی، پوسته دچار خیزهای بزرگ می‌گردد.

در "شکل 4" منحنی پس کمانش حرارتی پوسته تقویت‌شده بدون بستر الاستیک با شاخص کسر حجمی متفاوت نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش شاخص کسر حجمی، دمای پس کمانش حرارتی کاهش می‌یابد. افزایش شاخص کسر حجمی باعث می‌شود که جنس پوسته از سرامیک به سمت فلز میل می‌کند و با توجه به بیشتر بودن مدول یانگ سرامیک نسبت به فلز و کمتر بودن ضریب انبساط حرارتی سرامیک نسبت به فلز، پوسته‌های استوانه‌ای سرامیکی در برابر بار حرارتی کمانش مقاومت به مراتب بالاتری نسبت به پوسته‌های استوانه‌ای فلزی دارند.

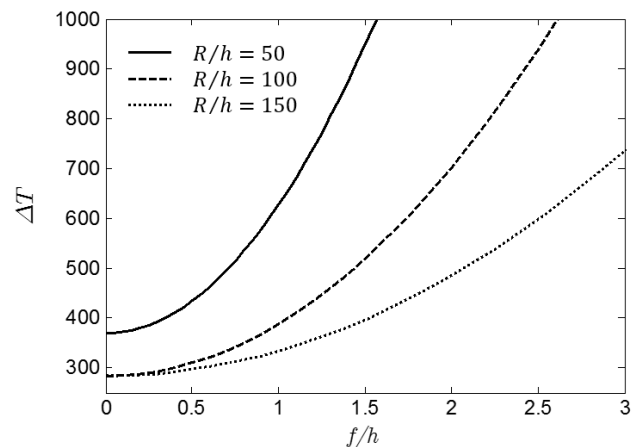
در "شکل 5" تأثیر تقویت‌کننده‌های طولی و حلقوی برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی و بدون بستر الاستیک نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش تعداد تقویت‌کننده‌ها، دمای بحرانی

**جدول 2** پاسخ کمانش استاتیکی پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک تقویت‌شده بدون بستر الاستیک تحت فشار خارجی

**Table 2** Static buckling response of eccentrically stiffened isotropic cylindrical shell without elastic foundation subjected to external pressure

شماره	ردی و استارنس	باروج و سینگر	مطالعه حاضر	بدون تقویت‌کننده
100.7	93.5	102	103.3 (4)*	تقویت‌کننده طولی
102.2	94.7	103	104.5 (4)	تقویت‌کننده حلقوی
368.3	357.5	370	379.7 (3)	هر دو تقویت‌کننده
374.1	365	377	387.2 (3)	

\*عدد داخل پرانتز شماره مد کمانش ( $m$ ) می‌باشد.



**Fig. 3** Thermal post-buckling curve of eccentrically stiffened FG cylindrical shell without elastic foundation for different values of radius-to-thickness ratio

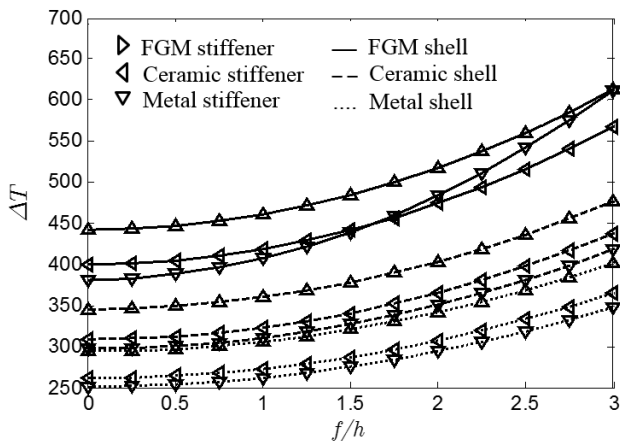
شکل 3 منحنی پس کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده و بدون بستر الاستیک با در نظر گرفتن مقادیر مختلف نسبت شعاع به ضخامت

**جدول 3** پاسخ پس کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده بدون بستر الاستیک با در نظر گرفتن مقادیر مختلف نسبت طول به شعاع

**Table 3** Thermal post-buckling response of eccentrically stiffened FG cylindrical shell without elastic foundation for different values of length-to-radius ratio

$L/R$	بدون تقویت کننده	تقویت کننده طولی	تقویت کننده حلقوی	هر دو تقویت کننده
1	39.30 (11)*	38.40 (11)	494.10 (6)	477.60 (6)
2	19.20 (8)	18.60 (8)	221.10 (5)	214.20 (5)
3	12.60 (6)	12.30 (6)	127.20 (4)	124.20 (4)
4	9.90 (5)	9.60 (5)	83.10 (4)	80.70 (4)

\* عدد داخل پرانتز شماره مد کمانش حرارتی ( $m$ ) می‌باشد



**Fig. 8** Effect of material properties on the thermal post-buckling response of cylindrical shell

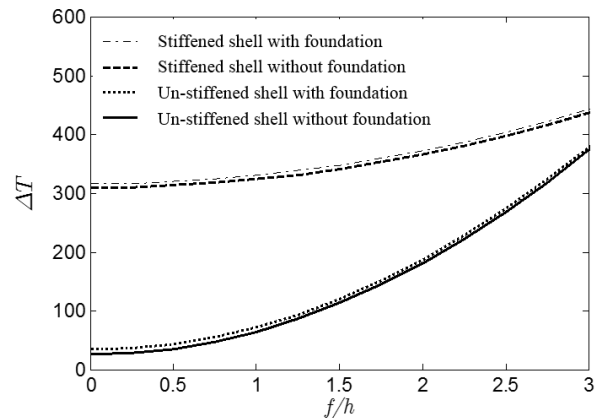
شکل 8 تأثیر خواص مواد بر پاسخ پس کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای

### 6- نتیجه گیری

در این مقاله یک روش تحلیلی برای تحلیل پوسته‌های نازک استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت کننده که در معرض بار حرارتی شعاعی قرار گرفته و توسط بستر الاستیک احاطه شده، پیشنهاد شده است. معادلات حاکم بر اساس تئوری کلاسیک پوسته و تکنیک تقویت کننده‌های تکه‌ای با در نظر گرفتن جمله‌های کرنش غیرخطی فن کارمن استخراج شده است و در نهایت با استفاده از روش گالرکین، پاسخ معادلات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده به دست آمده است.

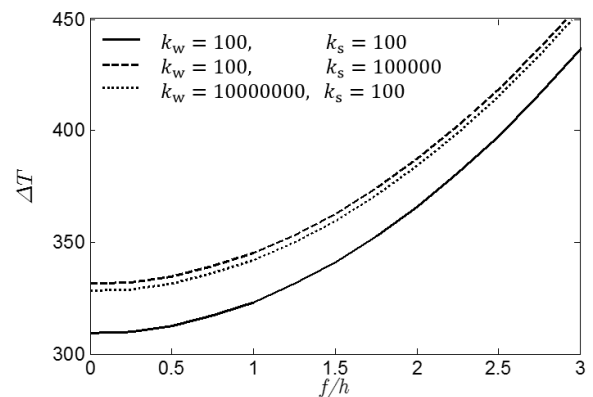
بعضی از نتایج به دست آمده از این مطالعه عبارت است:

- (الف) با افزایش تعداد تقویت کننده‌ها، دمای بحرانی پس کمانش حرارتی افزایش پیدا می‌کند.
- (ب) با افزایش مقدار سفتی بستر الاستیک، دمای بحرانی پس کمانش حرارتی افزایش پیدا می‌کند.
- (ج) با افزایش شاخص کسر حجمی، دمای بحرانی پس کمانش حرارتی کاهش پیدا می‌کند.
- (د) هر چه نسبت شعاع به ضخامت استوانه افزایش یابد دمای بحرانی پس کمانش حرارتی کاهش پیدا می‌کند.
- (ه) با افزایش نسبت طول به شعاع استوانه، دمای بحرانی پس کمانش حرارتی و شماره مود کمانش حرارتی، کاهش پیدا می‌کند.
- (و) تأثیر تقویت کننده حلقوی بر پاسخ پس کمانش حرارتی پوسته بیش تر از تقویت کننده طولی می‌باشد.
- (ز) بستر الاستیک پسترناک تأثیری به مراتب بیش تر از بستر وینکلر بر پاسخ پس کمانش حرارتی پوسته دارد.



**Fig. 6** Effect of elastic foundation on the thermal post-buckling response of FG cylindrical shell with stiffener and without stiffener

شکل 6 تأثیر بستر الاستیک بر پاسخ پس کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت کننده و بدون تقویت کننده



**Fig. 7** Effect of Winkler and Pasternak foundation modulus on the thermal post-buckling response of eccentrically stiffened FG cylindrical shell

شکل 7 تأثیر بستر الاستیک وینکلر و پسترناک بر پاسخ پس کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده

درصد افزایش را نشان می‌دهد. این نتیجه نشان می‌دهد که بستر الاستیک پسترناک تأثیری به مراتب بیش تر از بستر الاستیک وینکلر بر پاسخ پس کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده دارد.

با توجه به "شکل 8" می‌توان مشاهده نمود که پوسته‌های سرامیکی قوی‌ترین و پوسته‌های فلزی ضعیف‌ترین مقاومت در برابر دمای پس کمانش حرارتی را از خود نشان می‌دهند. همچنین استفاده از تقویت کننده‌های سرامیکی و فلزی به ترتیب باعث افزایش و کاهش ظرفیت تحمل تنش پس کمانش حرارتی پوسته نسبت به پوسته با تقویت کننده‌های مدرج تابعی می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که پوسته استوانه‌ای سرامیکی با تقویت کننده سرامیکی بیش ترین مقاومت را در برابر دمای پس کمانش حرارتی از خود نشان می‌دهد.

جدول 3 پاسخ دمای بحرانی پس کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای تقویت شده و بدون بستر الاستیک با پارامترهای شاخص کسر حجمی  $(k, k_1, k_2)$  برابر 1 و نسبت  $R/h$  برابر 250 را نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت  $L/R$ ، پاسخ دمای بحرانی پس کمانش حرارتی و شماره مود کمانش حرارتی، کاهش پیدا می‌کند. همچنین با توجه به نتایج به دست آمده، می‌توان مشاهده نمود که تأثیر تقویت کننده حلقوی بر پاسخ دمای بحرانی پس کمانش حرارتی بیش تر از تقویت کننده طولی می‌باشد.

- eccentrically stiffened FGM cylindrical shells under external pressure and elastic foundation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 7, pp. 80-88, 2015. (in Persian فارسی)
- [13] N. D. Duc, P. T. Thang, N. T. Dao, H. V. Tac, Nonlinear buckling of higher deformable S-FGM thick circular cylindrical shells with metal-ceramic-metal layers surrounded on elastic foundations in thermal environment, *Composite Structures*, Vol. 121, pp. 134-141, 2015.
- [14] D. G. Ninh and D. H. Bich, Nonlinear buckling of eccentrically stiffened functionally graded toroidal shell segments under torsional load surrounded by elastic foundation in thermal environment, *Mechanic Research Communications*, Vol. 72, pp. 1-15, 2015.
- [15] P. T. Thang, T. Nguyen-Thoi, Effect of stiffeners on nonlinear buckling of cylindrical shells with functionally graded coatings under torsional load, *Composite Structures* Vol. 153, pp. 654-661, 2016.
- [16] M. Taczala, R. Buczkowski, M. Kleiber, Nonlinear buckling and post-buckling response of stiffened FGM plates in thermal environments, *Composites part B*, Vol. 107, pp. 238-247, 2017.
- [17] D. O. Brush, B. O. Almroth, *Buckling of Bars, Plates and Shells*, pp. 140-220, New York: Mc Graw-Hill, 1975.
- [18] M. M. Najafzadeh, A. Hasani, Khazaeinejad P. Mechanical stability of function-ally graded stiffened cylindrical shells, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 33, No. 2, pp. 1151-1157, 2009.
- [19] H. S. Shen, Post-buckling analysis of imperfect stiffened laminated cylindrical shells under combined external pressure and thermal loading, *International Journal of Mechanical sciences*, Vol. 40, No. 4, pp. 339-355, 1998.
- [20] N. D. Duc, P. T. Thang, Nonlinear buckling of imperfect eccentrically stiffened metal-ceramic-metal S-FGM thin circular cylindrical shells with temperature-dependent properties in thermal environment, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 81, pp. 17-25, 2014.
- [21] M. Darabi, M. Darvizeh, A. Darvizeh, Non-linear analysis of dynamic stability for functionally graded cylindrical shells under periodic axial loading, *Composite Structures*, Vol. 83, No. 2, pp. 201-211, 2008.
- [22] A. H. Sofiyev, E. Schnack, The stability of functionally graded cylindrical shells under linearly increasing dynamic torsional loading, *Engineering Structures*, Vol. 26, No. 10, pp. 1321-1331, 2004.
- [23] A. S. Volmir, *Non-linear Dynamics of Plates and Shells*, Science Edition M, pp. 84-180, USSR: Foreign Technology Division, 1972. (in Russian).
- [24] J. N. Reddy, J. H. Starnes, General buckling of stiffened circular cylindrical shells according to a layerwise theory, *Computers & Structures*, Vol. 49, No. 4, pp. 605-616, 1993.
- ح) استفاده از تقویت‌کننده‌های سرامیکی و فلزی به ترتیب باعث افزایش و کاهش ظرفیت تحمل تنش پس‌کمانش حرارتی پوسته نسبت به پوسته با تقویت‌کننده‌های مدرج تابعی می‌شود.

## 7- مراجع

- [1] A. Louca, *Buckling behaviour of stiffener outstands*, PhD Thesis, University of Surrey, Guildford, 1991.
- [2] M. Baruch, J. Singer, Effect of eccentricity of stiffeners on the general instability of stiffened cylindrical shells under hydro-static pressure, *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 5, No. 1, pp. 23-27, 1963.
- [3] H. S. Shen, P. Zhou, T.Y. Chen, Post-buckling analysis of stiffened cylindrical shells under combined external pressure and axial compression, *Thin-Walled Structures*, Vol. 15, No. 1, pp. 43-63, 1993.
- [4] H. S. Shen, Post-buckling analysis of pressure-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments, *Engineering Structures*, Vol. 25, No. 4, pp. 487-497, 2003.
- [5] Z. M. Li, H. S. Shen, Post-buckling of 3D braided composite cylindrical shells under combined external pressure and axial compression in thermal environments, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 50, No. 4, pp. 719-731, 2008.
- [6] H. S. Shen, Torsional buckling and postbuckling of FGM cylindrical shells in thermal environments, *International Journal Non-Linear Mechanics*, Vol. 44, pp. 644-657, 2009.
- [7] E. Bagherizadeh, Y. Kiani, M. R. Eslami, Mechanical buckling of functionally graded material cylindrical shells surrounded by Pasternak elastic foundation, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 11, pp. 3063-3071, 2011.
- [8] D. H. Bich, V. H. Nam, N. T. Phuong, Nonlinear postbuckling of eccentrically stiffened functionally graded plates and shallow shells, *Vietnam Journal of Mechanics*, Vol. 33, No. 3, pp. 132-147, 2011.
- [9] M. A. Ghasemi, M. Yazdani, S. M. Hoseini, Analysis of effective parameters on the buckling of grid stiffened composite shells based on first order shear deformation theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 10, pp. 51-61, 2013. (in Persian فارسی)
- [10] D. V. Dung, N. T. Nga, Nonlinear buckling and post-buckling of eccentrically stiffened functionally graded cylindrical shells surrounded by an elastic medium based on the first order shear deformation theory, *Vietnam Journal of Mechanics*, VAST, Vol. 35, No. 4, pp. 285 - 298, 2013.
- [11] M. Tajdari, M. Azimi, M. Khorram, J. Eskandari Jam, Numerical and experimental investigations on buckling of steel cylindrical shells with triangular cutout subject to axial compression, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 1, pp. 24-37, 2013. (in Persian فارسی)
- [12] A. R. Shaterzadeh, K. Foroutan, Post-buckling analysis of