مجله مهندسی مکانیک مدرس، خرداد 1393، دوره 14، شماره 3، ص‌ص 194-202

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

روش برآورد خطا و تظریف تطبیقی غنی‌سازی- جابه‌جایی در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته مختلط برای حل مسایل الاستیسیته

صائب فرجی[1]، محمد هادی افشار[2*]

1- دانش‌آموخته مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
2- دانشیار مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
* تهران، صندوق پستی 163-16765، mhafshar@iust.ac.ir

1اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 25 تیر 1392
پذیرش: 06 شهریور 1392
ارائه در سایت: 31 اردیبهشت 1393

کلید واژگان:
روش بدون شبکه
حداقل مربعات گسسته مختلط بدون شبکه
تظریف تطبیقی
غنی‌سازی-جابه‌جایی
الاستیسیته خطی

چکیده

در این مقاله روش برآورد خطا و تظریف تطبیقی غنی‌سازی-جابه‌جایی در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته مختلط، برای بهبود دقت جواب‌های مسایل الاستیسیته خطی مسطح ارائه شده است. این روش از دو روش غنی‌سازی و جابه‌جایی شبکه به طور هم‌زمان استفاده می‌کند. در هر مرحله غنی‌سازی، دیاگرام ورنی برای مشخص کردن موقعیت گره‌هایی که باید به شبکه اضافه شوند، به‌کار برده شده است. بعد از هر مرحله غنی‌سازی، خطای گره‌های جدید اضافه شده از روی خطای گره‌های آرایش مرحله قبلی تخمین زده می‌شوند، بنابراین هزینه محاسباتی اضافی برای تحلیل مجدد صرف نمی‌شود و تعداد مراحل لازم برای تحلیل شبکه در دو روش غنی‌سازی-جابه‌جایی و غنی‌سازی متداول یکسان هستند. سپس یک فرایند جابه‌جایی شبکه بعد از هر مرحله غنی‌سازی برای بهبود دقت جواب‌ها استفاده می‌شود. روش غنی‌سازی-جابه‌جایی تا بدست آوردن دقت مورد نظر ادامه می‌یابد. روش ارائه شده با بدست آوردن یک آرایش هموار، علاوه بر حل مشکل نزدیکی بیش از اندازه‌ی برخی گره‌ها که در روش غنی‌سازی متداول رخ می‌دهد، باعث بهبود دقت جواب‌ها نیز می‌شود. مثال‌های عددی حل شده در حوزه الاستیسیته خطی و مقایسه جواب‌های بدست آمده از روش غنی‌سازی-جابه‌جایی با روش غنی‌سازی متداول و جواب‌های تحلیلی دقیق، کارایی و دقت بالاتر روش ارائه شده را نشان داده‌اند.

Node enrichment-moving error estimate and adaptive refinement in Mixed Discrete Least Squares Meshless method for solution of elasticity problems

Saeb Faraji, Mohammadhadi Afshar*

Department of Civil Engineering, Iran University of Science and technology, Tehran, Iran
*P.O.B. 16765-163 Tehran, Iran, mhafshar@iust.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 16 July 2013
Accepted 28 August 2013
Available Online 21 May 2014

Keywords:
Meshless Method
Mixed Discrete Least Squares Meshless
Adaptive Refinement
Node Enrichment-moving
inear Elasticity

ABSTRACT

In this paper a node enrichment-moving error estimate and adaptive refinement procedure in Mixed Discrete Least Squares Meshless (MDLSM) method is suggested to improve the solution of elasticity problems. The suggested method uses of both node enrichment and node moving refinement procedures simultaneously. The voronoi diagram is used to locate the position of new added nodes in enrichment step. The errors of new added nodes, after each enrichment procedure, are calculated via interpolation rather than the error of simulation nodes to reduce the computational effort. So, the additional simulation effort does not spend and the steps of suggested method and conventional enrichment procedure are the same. Completing the enrichment step, a node moving procedure is used to improve the solutions and solving the nodes excessive vicinity problem that is happened in conventional node enrichment procedure, especially with irregular node distribution. The node enrichment-moving method is continued to obtain the desirable accuracy. The proposed method is used to solve several examples and the results are presented and compared with those of conventional node enrichment procedure and analytical exact solutions. The results show superior efficiency, effectiveness and accuracy of the proposed method compared to conventional node enrichment method.

1- مقدمه

روش اجزای محدود از روش‌های عددی است که کارایی خود را در حل مسایل مهندسی نشان داده است، اما این روش برای حل برخی مسایل مثل مسایلی با مرز متحرک، مسایلی با تغییر شکل‌های زیاد و گسترش ترک که احتیاج به گسسته‌سازی مجدد دارند با مشکلاتی همراه است. همچنین به‌کارگیری فرایندهای تظریفی مثل گسسته‌سازی مجدد، جابه‌جایی گره‌ها و غنی‌سازی در این روش به علت این که باید اتصال نظام مند اجزا حفظ شود، سخت‌تر است.

برای حل این مشکلات، روش بدون شبکه که برای گسسته‌سازی ناحیه مسأله، از آرایش گره‌ها به جای جزءبندی (المان‌بندی) ناحیه استفاده می‌کند،

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

S. Faraji, M.H. Afshar, Node enrichment-moving error estimate and adaptive refinement in Mixed Discrete Least Squares Meshless method for solution of elasticity problems, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 14, No. 3, pp. 194-202, 2014 (In Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.3.9.2]

ارائه شده است. ازجمله روش‌های بدون شبکه معروف می‌توان به روش ذره هیدرودینامیک هموار[1] [1]، روش بدون جزء گالرکین[2] [۲،۳]، روش بدون شبکه محلی پترف-گالرکین[3] [4]، روش ابر بدون شبکه[4] [5]، روش نقطه محدود[5] (FPM) [6]، روش دوباره‌سازی هسته ذره[6] [7] و روش معادله انتگرالی مرزی محلی[7] [8] اشاره کرد. روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته[8] اولین بار توسط افشار و ارزانی [9] برای حل معادلات پواسون به کار گرفته شد. به علت اینکه در این روش از شکل قوی معادلات دیفرانسیلی برای گسسته‌سازی آنها استفاده می‌شود، فرایند انتگرال‌گیری عددی حذف می‌شود، بنابراین هزینه محاسباتی آن از روش‌های بدون شبکه‌ای مثل روش بدون جز گالرکین، که از شکل ضعیف معادلات استفاده می‌کنند، کمتراست. اخیرا شبیری و افشار [10] از این روش برای شبیه‌سازی مسأله سطح آزاد استفاده کرده‌اند. روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته هم مکان[9] توسط فیروزجایی و افشار [11] برای حل معادلاتی از نوع بیضوی ارائه شد، و تاثیر نقاط هم مکان در بالا بردن دقت و نرخ همگرایی مورد مطالعه قرار گرفت. این روش بعدها توسط نیسی‌پور و همکاران [12] در حل مسایل الاستیسیته خطی مسطح به کار رفت. افشار و همکاران [13] از این روش برای شبیه-سازی تطبیقی معادلاتی از نوع هذلولی استفاده کردند.

اخیرا، روش حداقل مربعات گسسته مختلط[10] توسط امانی و همکاران [14] برای حل مسایل الاستیسیته خطی مسطح ارائه شده است. در روش حداقل مربعات گسسته مختلط، ناحیه مسأله با استفاده از گره‌هایی گسسته‌سازی شده و سپس جواب مسأله با استفاده از توابع شکل حداقل مربعات متحرک[11] تخمین زده می‌شود، با کمینه کردن تابعک باقی‌مانده‌ای نسبت به مقادیر گرهی مجهول، مقدار جواب در گره‌ها محاسبه می‌شود. تابعک باقی‌مانده‌ای از مجموع باقی‌مانده حاصل از قرار گیری تابع تخمینی در شرط معادله دیفرانسیلی حاکم بر مسأله و باقی‌مانده حاصل از قرارگیری آن در شرایط مرزی بدست می‌آید. در این روش از فرمول‌بندی مختلط استفاده می‌شود، به طوری که تغییر مکان‌ها و تنش‌ها به طور هم زمان محاسبه می-شوند. در فرمول‌بندی غیر مختلط ابتدا تغییر مکان‌ها محاسبه می‌شوند، سپس تنش‌ها با استفاده از مشتقات توابع شکل و رابطه بین تغییر مکان‌ها و تنش‌ها بدست آیند. اما در فرمول‌بندی مختلط توابع شکل به طور یکسان برای تخمین تغییر مکان‌ها و تنش‌ها به کار می‌روند و معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مسأله و معادلاتی که رابطه بین تغییر مکان‌ها و تنش‌ها را بیان می‌کنند به طور هم زمان حل می‌شوند. از آنجا که که دقت خود توابع شکل از مشتقاتشان یک مرتبه بالاتر است، دقت جواب‌های بدست آمده برای روش‌هایی که از فرمول‌بندی مختلط استفاده می‌کنند نسبت به روش‌هایی که از فرمول‌بندی غیر مختلط استفاده می‌کنند، بیشتر است. همچنین این موضوع باعث می‌شود تا نرخ همگرایی جواب‌های بدست آمده برای تنش‌ها، یک مرتبه نسبت به روش‌های غیر مختلط افزایش یابد.

به منظور افزایش دقت جواب‌های روش‌های عددی، روش‌هایی نیز برای برآورد خطا و تظریف تطبیقی، گسترش پیدا کرده‌اند. روش غنی‌سازی آرایش یکی از روش‌های تظریف تطبیقی خطا در روش‌های بدون شبکه است. در این روش با در نظر گرفتن یک سلول ورونوی[12] برای هر گره و اضافه کردن گره‌های جدید در رئوس سلول‌هایی که خطای گره مربوط به آن سلول بیشتر از میانگین خطای کل شبکه است، آرایش موجود غنی می‌شود. این روش با کاهش فاصله بین گره‌ها باعث کاهش خطا می‌شود. افشار و همکاران [15] این روش را برای غنی‌سازی شبکه با استفاده از روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته و برای حل مسایل الاستیسیته خطی به کار برده‌اند. روش جابه‌جایی گره‌ها نیز یک روش تظریف تطبیقی خطا در روش‌های بدون شبکه است که با جابه‌جا کردن گره‌ها به قسمتی از ناحیه مسأله که خطای بیشتری دارد، منجر به کاهش فاصله گره‌ها از همدیگر در آن ناحیه شده و خطا را کاهش می‌دهد. افشار و همکاران [16] این روش را در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته و برای حل مسایل الاستیسیته خطی به کار برده‌اند. روش غنی‌سازی کارایی مناسبی از خود نشان داده است. اما در بعضی موارد بدشکلی سلول ورونوی، منجر به نزدیکی بیش از اندازهٔ بعضی از گره‌ها جدید اضافه شده به همدیگر شده و این نزدیکی بیش از اندازه گره‌ها، قدرت تخمین توابع شکل را کاهش داده و در نتیجه دقت جواب‌ها کاهش می‌یابد. این مشکل در آرایش‌های نامنظم بیشتر خود را نشان می‌دهد. روش جابه‌جایی نیز به طور مؤثر در کاهش خطا به کار گرفته شده است، اما به علت این که در این روش گرهی به آرایش اولیه اضافه نمی‌شود، دقت جواب‌ها تا میزان مشخصی بهبود می‌یابد و برای افزایش دقت جواب‌ها از یک میزان مشخص باید از روش غنی‌سازی استفاده کرد. در این مقاله روش برآورد خطا و تظریف تطبیقی غنی‌سازی- جابه‌جایی با استفاده از روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته مختلط برای بدست آوردن جواب‌های دقیق‌تر در مسایل الاستیسیته مسطح، ارائه شده است. این روش از دو روش غنی-سازی و جابه‌جایی شبکه به طور هم‌زمان استفاده می‌کند. در مرحله غنی‌سازی، مانند روش غنی‌سازی متداول، دیاگرام ورونوی برای مشخص کردن موقعیت گره-هایی که باید به شبکه اضافه شوند، به‌کار برده می‌شود. بعد از هر مرحله غنی-سازی، خطای گره‌های جدید اضافه شده از روی خطای گره‌های آرایش مرحله قبلی تخمین زده می‌شوند و هر مرحله از روش با یک فرایند جابه‌جایی شبکه به اتمام می‌رسد. به همین ترتیب، فرایند غنی‌سازی- جابه‌جایی تا رسیدن به دقت مورد نظر ادامه می‌یابد. در روش غنی‌سازی- جابه‌جایی، خطای گره‌های جدید اضافه شده، بعد از هر مرحله غنی‌سازی، با استفاده از درون‌یابی تخمین زده می-شوند، بنابراین هزینه محاسباتی اضافی برای تحلیل مجدد صرف نمی‌شود و همان تعداد مراحلی که برای تحلیل شبکه در روش غنی‌سازی متداول لازم است در روش غنی‌سازی- جابه‌جایی استفاده می‌شود. فرایند جابه‌جایی شبکه علاوه بر حل مشکل نزدیکی بیش از اندازه برخی گره‌ها در روش غنی‌سازی متداول، با ارائه یک آرایش هموار شده به جواب‌هایی با دقت بالاتر منجر می‌شود. مثال‌های عددی حل شده در حوزه الاستیسیته خطی و مقایسه جواب‌های بدست آمده از روش پیشنهادی غنی‌سازی- جابه‌جایی با جواب‌های روش غنی‌سازی متداول و جواب-های تحلیلی دقیق موجود برای مثال‌های عددی حل شده، کارایی و دقت بالاتر روش ارائه شده را نشان می‌دهند.

2- تابع شکل حداقل مربعات متحرک

روش‌های مختلفی برای تولید توابع شکل در روش‌های بدون شبکه وجود دارند، از جمله این روش‌ها می‌توان به روش بیشینه انتروپی[13] [17و18]، روش تابع پایه شعاعی[14] [19]، روش کریجینگ متحرک[15] [20] و روش جزءبندی واحد[16] [21] اشاره کرد. تابع شکل حداقل مربعات متحرک [22] که در این مقاله از آن استفاده شده است، یکی از معمول‌ترین توابع تخمینی در

1- Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)
2- Element-free Galerkin (EFG)
3- Local Petrov-Galerkin (MLPG)
4- Hp-Meshless cloud
5- Finite Point Method (FPM)
6- Reproducing Kernel Particle Methods (RKPM)
7- Local Boundary Integral Equation (LBIE)
8- Discrete Least Square Meshless (DLSM)
9- Collocation Discrete Least Square Meshless (CDLSM)
10- Mixed Discrete Least Squares Meshless (MDLSM)
11- Moving Least Squares (MLS)
12- Voronoi Diagram
13- Maximum Entropy
14- Radial Basis Function (RBF)
15- Moving Kriging (MK)
16- Partition of Unity (PU)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.3.9.2]

روش‌های بدون شبکه است که به خوبی کارایی خود را نشان داده است. در این روش با در نظر گرفتن زیر ناحیه‌هایی برای هر گره، تابع تخمینی uدر هر زیر ناحیه از رابطه (1) محاسبه می‌شود.

$$u(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i(X)a_i(X) = P^T(X)a(X) \tag{1}$$

تابع پایه (P)در رابطه (2) معرفی شده است.

$$P^T = [1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^m, \dots, y^m] \tag{2}$$

که در آن m و k به ترتیب عبارتند از درجه تابع پایه و تعداد مؤلفه‌های آن. به طور مثال برای تابع پایه مرتبه دوم (m=2)، تعداد مؤلفه‌های تابع پایه (k) برابر شش است. a بردار ضرایب تابع پایه است. با تعریف تابعک نرم دوم وزن داری به صورت رابطه (3)

$$J = \sum_{m=1}^{n_s} w_m(X - X_m)(P^T(X_m)a(X) - \bar{u}_m)^2 \tag{3}$$

که در آن $\bar{u}_m$ و w_m به ترتیب جواب و تابع وزن در گره m ام هستند و n_s تعداد کل گره‌های موجود در هر ناحیه تأثیر است، تابع وزن مورد استفاده در این مقاله تابع وزن اسپلاین مرتبه سوم[1] است که در رابطه (4) معرفی شده است.در رابطه (4) $d=||X-Xm||\ /d_{wm}$ است، که در آن d_{wm} شعاع ناحیه تاثیر گره m را نشان می‌دهد.

$$w_m(d) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4d^2 + 4d^3 & d \le \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4d + 4d^2 - \frac{4}{3}d^3 & \frac{1}{2} \le d < 1 \\ 0 & d > 1 \end{cases} \tag{4}$$

با به حداقل رساندن تابع J رابطه (5) بدست می‌آید.

$$u(X) = P^T(X)S^{-1}(X)C(X)\bar{u} \tag{5}$$

در رابطه (5) $\bar{u}$ بردار جواب‌های گرهی است و ضرایب S و C در روابط (6) و (7) معرفی شده‌اند.

$$S(X) = \sum_{m=1}^{n_s} w_m(X - X_m)P(X_m)P^T(X_m) \tag{6}$$

$$C(X) = [w_1(X - X_1)P(X_1), w_2(X - X_2)P(X_2), \dots, w_{n_s}(X - X_{n_s})P(X_{n_s})] \tag{7}$$

در این صورت رابطه (8) برقرار است.

$$u(X) = N^T(X)\bar{u} \tag{8}$$

که در آن تابع شکل (N) از رابطه (9) بدست می‌آید.

$$N^T = P^T(X)S^{-1}(X)C(X) \tag{9}$$

از روابط (10) و (11) برای محاسبه مشتقات جزیی تابع شکل استفاده شده است.

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial P^T}{\partial x}S^{-1}C + P^T\frac{\partial S^{-1}}{\partial x}C + P^TS^{-1}\frac{\partial C}{\partial x} \tag{10}$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial P^T}{\partial y}S^{-1}C + P^T\frac{\partial S^{-1}}{\partial y}C + P^TS^{-1}\frac{\partial C}{\partial y} \tag{11}$$

3- روش حداقل مربعات گسسته مختلط برای حل مسایل الاستیسیته خطی مسطح

معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مسایل الاستیسیته خطی مسطح به صورت رابطه (12) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} \frac{-\partial}{\partial x}\left[(\varphi + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \varphi\frac{\partial v}{\partial y}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\frac{\partial u}{\partial y} + \mu\frac{\partial v}{\partial x}\right] &= f_x \\ \frac{-\partial}{\partial y}\left[(\varphi + 2\mu)\frac{\partial v}{\partial y} + \varphi\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\frac{\partial u}{\partial y} + \mu\frac{\partial v}{\partial x}\right] &= f_y \end{aligned} \quad On\ \Omega \tag{12}$$

که در آن u و v به ترتیب تغییر مکان در جهت x و y هستند. مقادیر φ و μ در حالت تنش مسطح از رابطه (13) محاسبه می‌شوند.

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \varphi = \frac{E\nu}{(1-\nu)(1+\nu)} \tag{13}$$

در رابطه (14) روابط بین تغییر مکان‌ها و تنش‌ها معرفی شده‌اند.

$$\begin{cases} \sigma_x = (\varphi + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \varphi\frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_y = \varphi\frac{\partial u}{\partial x} + (\varphi + 2\mu)\frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{cases} \tag{14}$$

که در آن σ_x و σ_y به ترتیب تنش قائم در جهت x و y بوده و τ_{xy} تنش برشی است. با استفاده از رابطه (14) می‌توان معادله (12) را به صورت رابطه (15) بازنویسی کرد.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -f_x \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -f_y \end{cases} \tag{15}$$

که در آن f_x و f_y نیروی بدنی در جهت x و y هستند. با جمع بندی و بازنویسی معادلات (14) و (15)، رابطه (16) بدست می‌آید.

$$T(u) + f = 0 \tag{16}$$

بردار f در رابطه (17) نشان داده شده است.

$$f = [0, 0, 0, f_x, f_y] \tag{17}$$

رابطه (18) بردار u را معرفی کرده است.

$$u^T = [u, v, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}] \tag{18}$$

عملگر T در رابطه (19) تعریف شده است.

$$T(u) = A_1u_{,x} + A_2u_{,y} + A_3u \tag{19}$$

ضرایب A_1 ، A_2 و A_3 در رابطه (20) نشان داده شده‌اند.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \varphi + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

در این صورت باقی‌مانده تابع تخمینی از معادله دیفرانسیلی حاکم بر مسأله در گره i ام از رابطه (21) بدست می‌آید.

$$(R_\Omega)_i = T(u)_i + f_i \tag{21}$$

با داشتن شرایط مرزی که در رابطه (22) ارائه شده‌اند

$$u = \bar{u}, v = \bar{v}, t_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy}n_y, \quad t_y = \sigma_y n_y + \tau_{xy}n_x \tag{22}$$

و در آن n_x و n_y بردار نرمال وارد بر مرز و t_x و t_y نیروی گسترده وارد بر مرز در جهت x و y هستند، باقی‌مانده تابع تخمینی از شرایط مرزی حاکم بر مسأله در گره i ام از رابطه (23) محاسبه می‌شود.

$$(R_\Gamma)_i = D(u)_i - \bar{u}_i \tag{23}$$

$\bar{u}$ و D از روابط (24) و (25) محاسبه می‌شوند.

$$\bar{u}^T = [\bar{u}, \bar{v}, t_x, t_x] \tag{24}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_x & 0 & n_y \\ 0 & 0 & 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \tag{25}$$

با جمع باقی‌مانده حاصل از قرارگیری تابع تخمینی برای مقادیر مجهول

1- Cubic spline Weight Function

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.3.9.2]

گرهی در شرط معادله دیفرانسیلی حاکم بر مسأله و شرایط مرزی، برای هر گره فرضی i ام تابعک باقی‌مانده‌ای به صورت رابطه (26) تعریف می‌شود.

$$I_i = (R_\Omega^T R_\Omega)_i + \alpha (R_\Gamma^T R_\Gamma)_i \tag{26}$$

با جمع تابعک باقی‌مانده‌ای گره‌ها، تابعک باقی‌مانده‌ای کل بدست می‌آید. با به حداقل رساندن تابعک باقی‌مانده‌ای کل نسبت به مقادیر مجهول گرهی، رابطه (27) محاسبه می‌شود.

$$KU = F \tag{27}$$

$$K_{mn} = \sum_{i=1}^{n_t} [T(N_m)]_i^T [T(N_n)]_i + \alpha \sum_{i=1}^{n_b} [DN_m]_i^T [DN_n]_i \tag{28}$$

$$F_m = \sum_{i=1}^{n_t} [T(N_m)]_i^T f_i + \alpha \sum_{i=1}^{n_b} [DN_m]_i^T \bar{u}_i \tag{29}$$

U بردار مقادیر مجهول گرهی بوده و n_t و n_b به ترتیب نشان دهنده تعداد گره‌های موجود در کل ناحیه و تعداد گره‌های موجود در مرزها می‌باشند. α ضریب پنالتی است، که باید مقداری به اندازه کافی بزرگ اختیار شود.

4- برآورد خطا و روش تظریف تطبیقی غنی‌سازی - جابه‌جایی

4-1- برآورد خطا

برآورد خطا اولین قدم برای انجام یک فرایند تظریف تطبیقی است. با الهام از روش‌های به کار گرفته شده در اجزای محدود، روش‌های متعددی برای برآورد خطا در روش‌ها بدون شبکه ارائه شده‌اند. این روش‌ها را می‌توان در دو گروه عمده روش‌های باقی‌مانده‌ای[1] و روش‌های دوباره‌یابی[2] تقسیم‌بندی کرد. در روش‌های باقی‌مانده‌ای، با قرارگیری جواب‌های روش عددی در شرط دیفرانسیلی حاکم بر مسأله و شرایط مرزی، باقی‌مانده‌های دیفرانسیلی و مرزی بدست می‌آیند و مجموع این دو باقی‌مانده برای تخمین خطا استفاده می‌شود. روش‌های دوباره‌یابی از کمیت‌های دیگری مثل گرادیان (تغییرات) جواب‌ها که با دوباره‌یابی از روی جواب‌ها بدست می‌آیند، برای تخمین خطا استفاده می‌کنند. در این مقاله از روش باقی‌مانده‌ای برای تخمین خطا استفاده شده است. در این مقاله برای محاسبه خطای هر گره فرضی i ام از رابطه (30) استفاده شده است.

$$e_i = \sqrt{\frac{I_i}{U^T U}} \tag{30}$$

در این رابطه e_i خطای اختصاص داده شده به هر گره بوده و کمیت‌های I_i و U به ترتیب در روابط (26) و (27) معرفی شده‌اند.

4-2- روش غنی‌سازی -جابه‌جایی

روش ارائه شده در این مقاله به نام روش غنی‌سازی-جابه‌جایی از دو مرحله تشکیل شده است. در مرحله غنی‌سازی بعد از تحلیل و برآورد خطای آرایش، گره‌های جدید در قسمتی از ناحیه که خطای بیشتری دارد اضافه می‌شوند و سپس خطای گرهای اضافه شده، با درون‌یابی از روی خطا گره‌های آرایش تحلیل شده تخمین زده می‌شوند. بعد از تکمیل مرحله غنی‌سازی، یک فرایند جابه‌جایی شبکه با توجه به خطاهای بدست آمده برای گره‌های آرایش تحلیل شده و خطاهای تخمین زده شده برای گره‌های جدید اضافه شده انجام می‌شود. جابه‌جایی شبکه با در اختیار قرار دادن یک آرایش هموار و مناسب، به بهبود دقت جواب‌ها می‌انجامد. در روش ارائه شده، از روش درون‌یابی برای تخمین خطای گره‌های جدید اضافه شده، بعد از هر مرحله غنی‌سازی استفاده می‌شود، بنابراین هزینه محاسباتی اضافی برای تحلیل مجدد صرف نمی‌شود و تعداد مراحل لازم برای تحلیل شبکه در دو روش غنی‌سازی-جابه‌جایی و غنی‌سازی متداول یکسان هستند. از طرف دیگر، با توجه به اینکه فرایندهای درون‌یابی خطا و جابه‌جایی شبکه هزینه محاسباتی بسیار ناچیزی در مقایسه با تحلیل شبکه دارند، بنابراین روش ارائه شده از نظر هزینه محاسباتی تفاوت محسوسی با روش غنی‌سازی متداول ندارد.

4-2-1- روش غنی‌سازی

در مرحله غنی‌سازی از دیاگرام ورونوی برای پیدا کردن موقعیت گره‌های جدیدی که باید به آرایش موجود اضافه شوند، استفاده شده است. در این روش گره‌های جدید در رئوس سلول‌های ورونوی که خطای گره‌های مربوط به آنها از خطای میانگین بیشتر است، اضافه می‌شوند. سلول‌های ورونی با کمک دیاگرام دلونوی که با ایجاد یک مشبندی مثلثی به شناسایی گره‌های همسایه میپردازند، ساخته می‌شوند؛ به این ترتیب که پس از ترسیم دیاگرام دلونوی عمود منصف هر یک از خطوط واصل بین گره‌های همسایه که از روی دیاگرام دلونوی بدست آمده‌اند ترسیم می‌شوند، عمود منصف‌های ترسیمی همدیگر را در نقاطی قطع می‌کنند، اشکال محدب حاصل از وصل کردن این تقاطع‌ها به همدیگر سلول‌های ورونوی را می‌سازند. شکل 1 نحوه اضافه شدن گره‌های جدید را نشان می‌دهد. از این روش برای غنی‌سازی آرایش، جهت بهبود دقت جواب‌های مسائل الاستیسیته خطی در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته استفاده شده است [15]. در این روش خطای میانگین از رابطه (31) محاسبه می شود.

$$e_{average} = \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^{n_t} e_i\right)^2}{n_t}} \tag{31}$$

4-2-2- روش جابه‌جایی شبکه

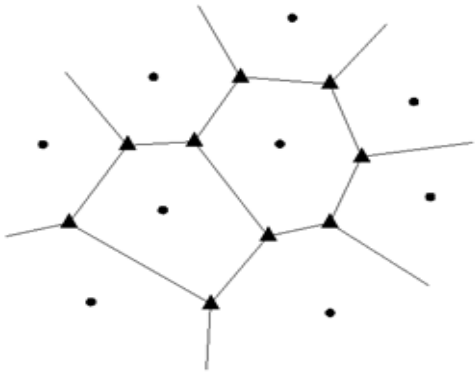
در این بخش به طور خلاصه روش جابه‌جایی شبکه توضیح داده می‌شود، از این روش برای تظریف تطبیقی خطا در روش حداقل مربعات گسسته و برای حل مسائل الاستیسیته خطی استفاده شده است [16] که برای توضیح بیشتر می‌توان به آن مراجعه کرد. برای جابه‌جایی شبکه، گره‌های همسایه با استفاده از فنرهای مجازی به همدیگر متصل می‌شوند. همانطور که در شکل 2 نشان داده شده است، برای مشخص کردن گره‌های همسایه از دیاگرام ورونوی استفاده شده است. سختی این فنرهای مجازی از رابطه (32) محاسبه می‌شود.

$$l_{ij} = e_i + e_j \tag{32}$$

که در این رابطه e_i و e_j به ترتیب خطای گره‌های i و j هستند و l_{ij} سختی فنری است که گره‌های i و j را به همدیگر متصل کرده است.

در این صورت نیروی محوری این فنر از رابطه (33) محاسبه می‌شود.

$$b_{ij} = l_{ij} \| X_i - X_j \| \tag{33}$$



شکل 1 (● گره‌های آرایش موجود، ▲ گره‌های اضافه شده)

1- Residual Based Methods
2- Recovery Based Methods

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.3.9.2]

که در رابطه بالا X_i و X_j مختصات گره‌های i و j بوده و b_{ij} نیروی محوری است که در گره‌ها به فنر وارد می‌شود. با بازنویسی رابطه (33) در حالت دو بعدی رابطه (34) بدست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} l_{ij} & 0 & -l_{ij} & 0 \\ 0 & l_{ij} & 0 & -l_{ij} \\ -l_{ij} & 0 & l_{ij} & 0 \\ 0 & -l_{ij} & 0 & l_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x^i \\ b_y^i \\ b_x^j \\ b_y^j \end{bmatrix} \tag{34}$$

در رابطه بالا b_x^i ، b_y^i و x_i، y_i به ترتیب نیروی محوری و مختصات گره i ام در جهت x و y هستند. در حالت کلی، با جمع بندی رابطه (34) معادله (35) بدست می‌آید.

$$LX = B \tag{35}$$

که در آن L ماتریس سختی، B بردار نیروها و X مختصات جدید گره‌هاست. برای محاسبه مختصات جدید گره‌ها معادله تعادلی (36) حل می‌شود.

$$LX = 0 \tag{36}$$

شرایط مرزی که برای حل معادله تعادلی استفاده شده‌اند، در رابطه (37) ارائه شده‌اند.

$$\Delta X_i^T n_i = [\Delta x_i \quad \Delta y_i] \begin{bmatrix} n_x^i \\ n_y^i \end{bmatrix} = [(x_i - \bar{x}_i) \quad (y_i - \bar{y}_i)] \begin{bmatrix} n_x^i \\ n_y^i \end{bmatrix} = 0 \tag{37}$$

$\bar{x}_i$ و $\bar{y}_i$ به ترتیب مختصات اولیه گره مرزی i ام و n_x^i و n_y^i به ترتیب بردار نرمال وارد بر این گره در جهت x و y هستند. شرایط مرزی اعمال شده باعث می‌شوند تا گره‌های مرزی فقط در راستای مرز جابه‌جا شوند و از ناحیه مسأله خارج نشوند. شکل 3 شرایط مرزی اعمال شده با این روش را برای یک سیستم ساده نشان می‌دهد.

5- مثال‌های عددی

در این بخش با حل دو مثال عددی در حوزه الاستیسیته خطی و مقایسه جواب‌های بدست آمده از روش غنی‌سازی- جابه‌جایی با جواب‌های بدست آمده از روش غنی‌سازی متداول و همچنین جواب‌های تحلیلی دقیق موجود برای مثال‌ها، کارایی روش غنی‌سازی- جابه‌جایی نشان داده شده است. در این مقاله از روش حداقل مربعات متحرک، با تابع پایه مرتبه دوم برای تولید توابع شکل استفاده شده است و روش حداقل مربعات گسسته مختلط با اختیار ضریب پنالتی (α) برابر 10^8 برای شبیه‌سازی مثال‌ها به کار رفته است. در این مثال‌ها خطای کل از رابطه (38) محاسبه شده است.

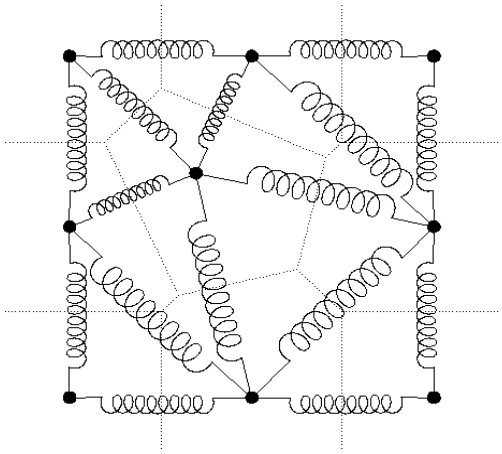
$$\text{خطای کل} = \sum_{i=1}^{n_t} e_i^2 \tag{38}$$

5-1- صفحه بی‌نهایت با سوراخ مرکزی

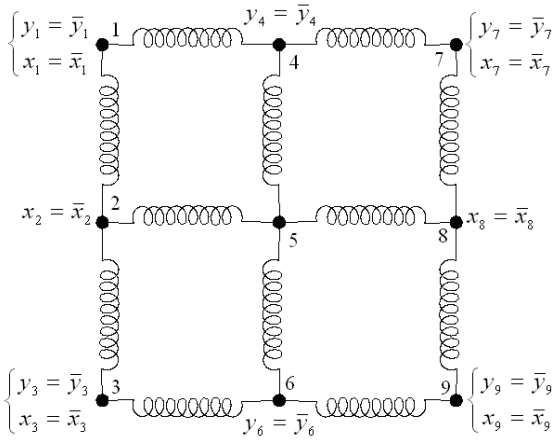
در این مثال یک صفحه بی‌نهایت با سوراخ دایره‌ای که تحت اثر نیروی گسترده محوری t قرار دارد حل شده است. به دلیل بی‌نهایت بودن صفحه و با توجه به شرایط تقارنی فقط ربعی از ناحیه به ابعاد 5c حل شده است. شکل 4 مشخصات این مثال را نشان می‌دهد.

شرایط مرزی حاکم بر این مثال در شکل 5 نشان داده شده است. برای مرزهای AB و EDشرط تقارنی، برای مرز AE شرط فیزیکی عاری از بار و برای مرزهای BC و CD شرط مرزی تنشی بدست آمده از جواب دقیق مسأله مورد استفاده قرار گرفته است.

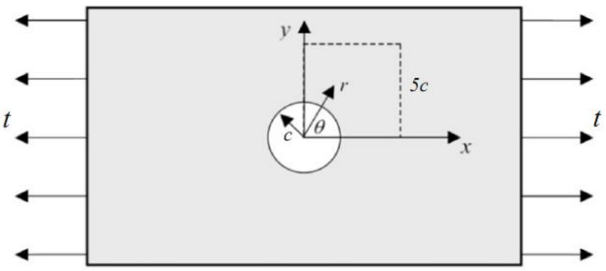
جواب تحلیلی دقیق این مسأله که توسط تیموشنکو و گودیر ارائه شده است [23] در روابط (43-39) ارائه شده‌اند.



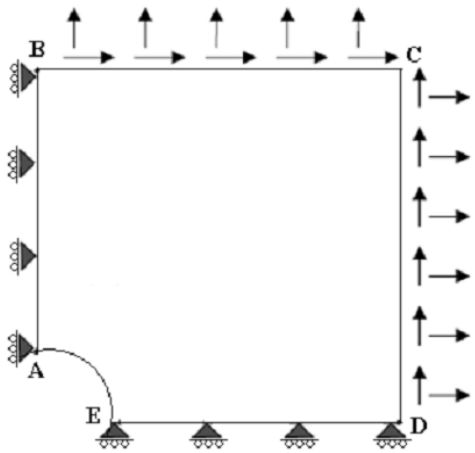
شکل 2 دیاگرام ورونوی برای گره‌های همسایه و فنرهای بین آنها



شکل 3 شرایط مرزی برای یک سیستم ساده از فنرها



شکل 4 صفحه بی‌نهایت با سوراخ دایره‌ای، تحت اثر بار محوری گسترده t



شکل 5 شرایط مرزی اعمال شده برای صفحه بی‌نهایت با سوراخ دایره‌ای

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.3.9.2]

$$u_r = \frac{t}{4G}\left[r\left(\frac{\phi-1}{2}+\cos(2\theta)\right)+\frac{c^2}{r}\left(1+(1+\phi)\cos(2\theta)\right) - \frac{c^4}{r^3}\cos(2\theta)\right] \quad (39)$$

$$u_\theta = \frac{t}{4G}\sin(2\theta)\left[(1-\phi)\frac{c^2}{r}-r\frac{c^4}{r^3}\right] \quad (40)$$

$$\sigma_x = t\left[1-\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{3}{2}\cos(2\theta)+\cos(4\theta)\right)+\frac{3c^4}{2r^4}\cos(4\theta)\right] \quad (41)$$

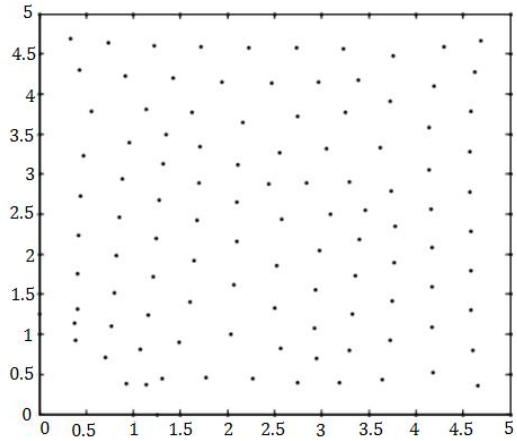
$$\sigma_y = -\left[\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}\cos(2\theta)-\cos(4\theta)\right)+\frac{3c^4}{2r^4}\cos(4\theta)\right] \quad (42)$$

$$\tau_{xy} = -t\left[\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}\sin(2\theta)+\sin(4\theta)\right)-\frac{3c^4}{2r^4}\sin(4\theta)\right] \quad (43)$$

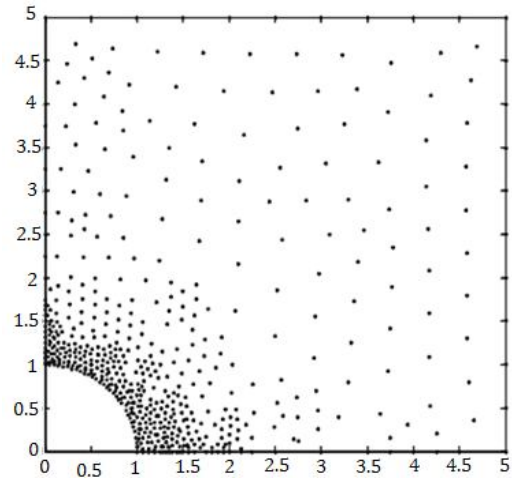
که در آنها $\phi = (3-\nu)/(1+\nu)$ ، ν ضریب پواسون و G مدول برشی هستند. در این مثال c=1، E=1000، ν = 0.3 و t=1 فرض شده‌اند. شکل‌های 6 تا 8 آرایش اولیه و نهایی روش‌های غنی‌سازی متداول و روش غنی‌سازی-جابه‌جایی را بعد از سه مرحله تظریف نشان می‌دهند. خطای آرایش اولیه 145 گرهی 0/058 بدست آمده است.

جواب‌های بدست آمده برای تنش نرمال در جهت x، برای آرایش اولیه و نهایی روش‌های غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی-جابه‌جایی در شکل 9 باهم مقایسه شده‌اند.

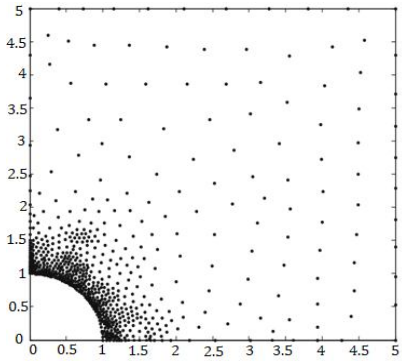
اشکال 10 و 11 و جدول 1 خطای بدست آمده برای روش‌های غنی-سازی متداول و غنی‌سازی-جابه‌جایی را باهم مقایسه کرده‌اند. نتایج بدست آمده کارایی و دقت بالاتر روش ارائه شده غنی‌سازی-جابه‌جایی را در مقایسه با روش غنی‌سازی متداول نشان می‌دهند.



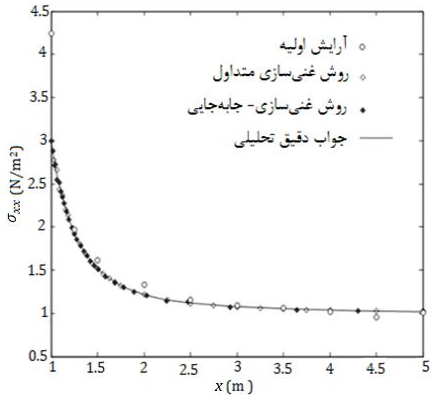
شکل 6 آرایش اولیه 145 گرهی برای مثال اول



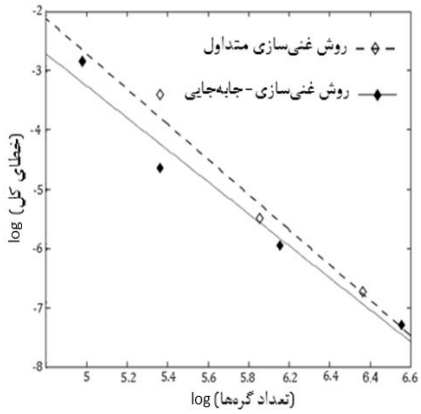
شکل 7 آرایش نهایی 579 گرهی بدست آمده برای مثال اول بعد از سه مرحله تظریف با استفاده از روش غنی‌سازی متداول



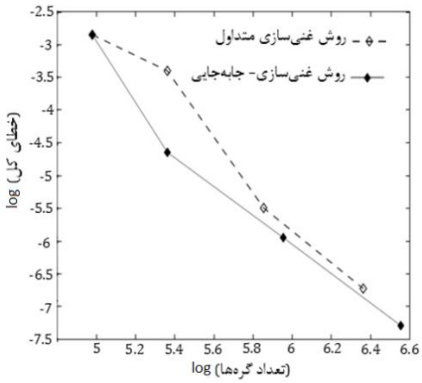
شکل 8 آرایش نهایی 702 گرهی بدست آمده برای مثال اول بعد از سه مرحله تظریف با استفاده از روش غنی‌سازی-جابه‌جایی



شکل 9 مقایسه تنش σ_{xx} بر روی مرز x=0 برای مثال اول



شکل 10 مقایسه خطای دو روش غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی- جابه‌جایی در مراحل مختلف تظریف برای مثال اول



شکل 11 مقایسه خطای دو روش غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی- جابه‌جایی در مراحل مختلف تظریف برای مثال اول

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.3.9.2]

جدول 1 مقایسه تعداد گره‌ها و خطای روش‌های غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی- جابه‌جایی برای مثال اول

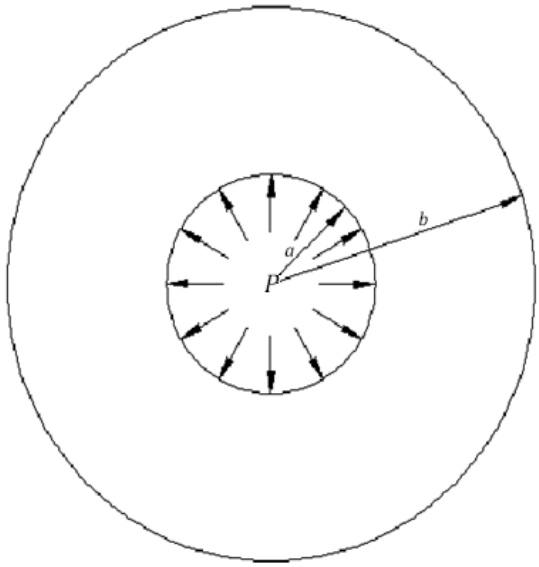
نام روش	خطای کل		تعداد گره‌ها		زمان محاسباتی	
	روش غنی‌سازی- جابه‌جایی	روش غنی‌سازی متداول	روش غنی‌سازی- جابه‌جایی	روش غنی‌سازی متداول	روش غنی‌سازی- جابه‌جایی تحلیل و غنی‌سازی جابه‌جایی	روش غنی‌سازی متداول
مرحله اول تظریف	0/0096	0/0333	213	213	(s)1 (s)21	(s)21
مرحله دوم تظریف	0/0026	0/0041	385	348	(s)1 (s)82	(s)72
مرحله سوم تظریف	4E-6/82	0/0012	702	579	(s)3 (s)322	(s)255

5-2- استوانه توخالی تحت فشار داخلی

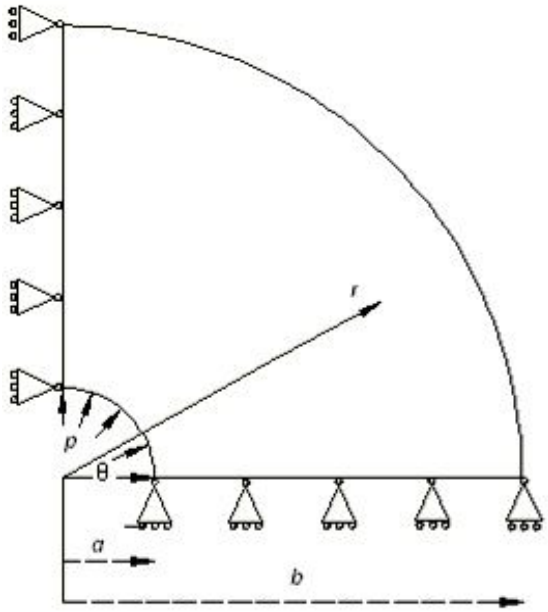
در این مثال، همان‌طور که در شکل 12 نشان داده شده است، یک استوانه توخالی که تحت اثر فشار داخلی P قرار دارد مورد بررسی قرار گرفته است.

به دلیل تقارن، ربعی از این مثال مورد تحلیل قرار گرفته است. شکل 13 شرایط مرزی تقارنی و فیزیکی حاکم بر این مسأله را نشان می‌دهد.

جواب تحلیلی دقیق این مسأله [23] در روابط (44و45) ارائه شده است.



شکل 12 مقطع استوانه توخالی تحت فشار داخلی



شکل 13 شرایط مرزی اعمال شده برای استوانه توخالی تحت فشار داخلی

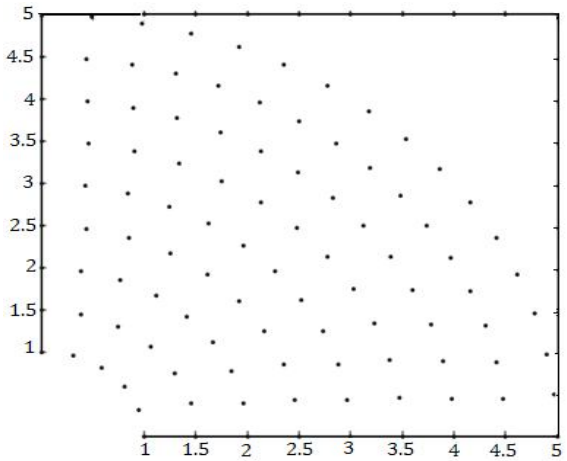
$$\sigma_r = \frac{a^2 P}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \quad (44)$$

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 P}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \quad (45)$$

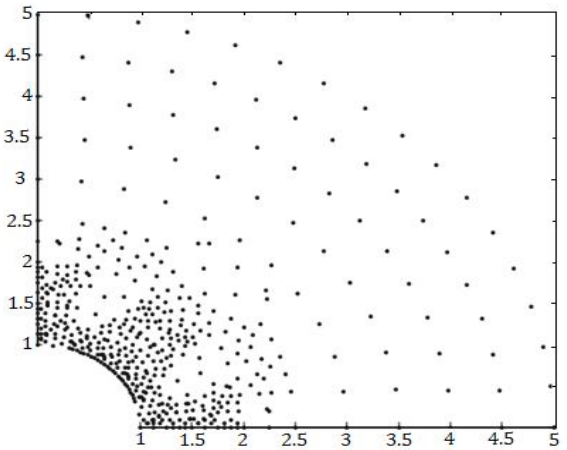
σ_r و σ_θ به ترتیب تنش نرمال در جهت شعاعی و زاویه‌ای هستند. مقادیر ثابت در نظر گرفته شده برای این مثال عبارتند از: $a=1, b=5, P=1, \nu = 0.3$.

شکل‌های 14 تا 16 آرایش اولیه و نهایی بدست آمده بعد از سه مرحله تظریف را برای روش‌های غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی-جابه‌جایی نشان می‌دهند. خطای بدست آمده برای آرایش اولیه 106 گرهی برابر 0/0280 می‌باشد.

در شکل 17 تنش نرمال در جهت x، برای آرایش اولیه و آرایش نهایی روش‌های غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی-جابه‌جایی باهم مقایسه شده‌اند. شکل‌های 18و 19 خطای دو روش غنی‌سازی متداول و روش غنی‌سازی-جابه‌جایی را در مراحل مختلف تظریف باهم مقایسه کرده‌اند.



شکل 14 آرایش اولیه 106 گرهی برای مثال دوم



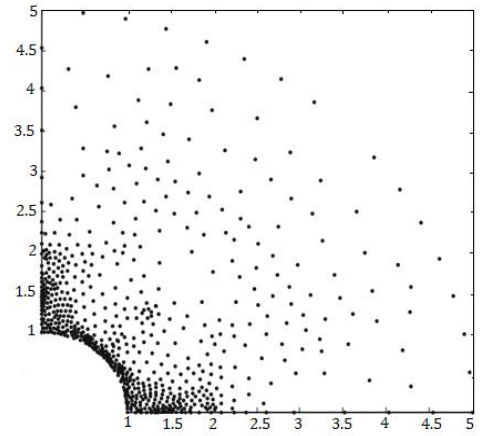
شکل 15 آرایش نهایی 491 گرهی بدست آمده برای مثال دوم بعد از سه مرحله تظریف با استفاده از روش غنی‌سازی متداول

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

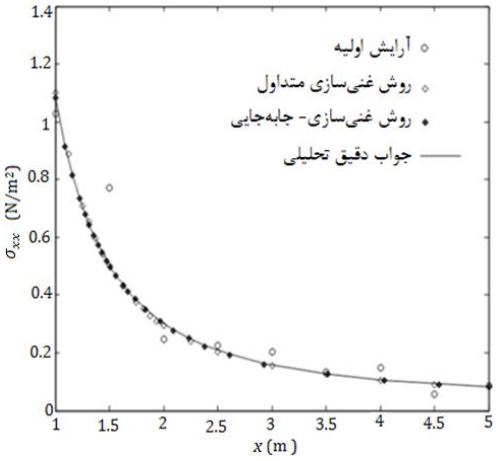
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.3.9.2]

جدول 2 مقایسه تعداد گره‌ها و خطای روش‌های غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی- جابه‌جایی برای مثال دوم

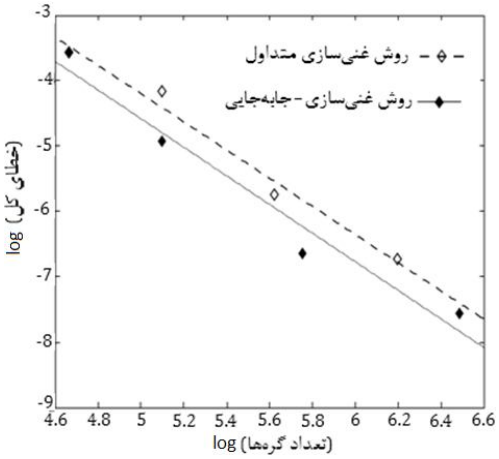
نام روش	خطای کل		تعداد گره‌ها		زمان محاسباتی	
	روش غنی‌سازی - جابه‌جایی	روش غنی‌سازی متداول	روش غنی‌سازی- جابه‌جایی	روش غنی سازی متداول	روش غنی‌سازی- جابه‌جایی تحلیل و غنی‌سازی جابه‌جایی	روش غنی‌سازی متداول
مرحله اول تظریف	0/0072	0/0156	164	164	1(s) 17(s)	17(s)
مرحله دوم تظریف	0/0013	0/0032	315	276	1(s) 62(s)	55(s)
مرحله سوم تظریف	4E-5/21	0/0012	656	491	3(s) 305(s)	187(s)



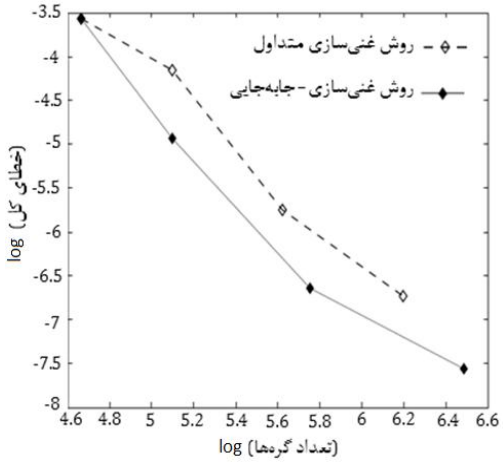
شکل 16 آرایش نهایی 656 گرهی بدست آمده برای مثال دوم بعد از سه مرحله تظریف با استفاده از روش غنی‌سازی- جابه‌جایی



شکل 17 مقایسه تنش σxx بر روی مرز x=0 برای مثال دوم



شکل 18 مقایسه خطای دو روش غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی- جابه‌جایی در مراحل مختلف تظریف برای مثال دوم



شکل 19 مقایسه خطای دو روش غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی- جابه‌جایی در مراحل مختلف تظریف برای مثال دوم

در جدول 2 خطا و تعداد گره‌های دو روش غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی- جابه‌جایی مقایسه شده‌اند. نتایج بدست آمده کارایی و دقت بالاتر روش غنی- سازی-جابه‌جایی را نسبت به روش غنی‌سازی متداول نشان می‌دهند.

6- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش تظریف تطبیقی غنی‌سازی-جابه‌جایی در روش حداقل مربعات گسسته مختلط و برای بدست آوردن جواب‌هایی با دقت بالاتر در مسائل الاستیسیته خطی ارائه شد. روش ارائه شده، از دو روش غنی‌سازی و جابه‌جایی شبکه به طور هم‌زمان استفاده می‌کند. در مرحله غنی‌سازی، مانند روش غنی‌سازی متداول، دیاگرام ورونوی برای مشخص کردن موقعیت گره- هایی که باید به شبکه اضافه شوند، به‌کار برده شد. بعد از هر مرحله غنی- سازی، خطای گره‌های جدید اضافه شده از روی خطای گره‌های آرایش تحلیل شده در مرحله قبلی تخمین زده شد. بعد از تکمیل فرایند غنی‌سازی و تخمین خطای گره‌های جدید اضافه شده، در هر مرحله یک فرایند جابه- جایی شبکه به کار برده شد. و به همین ترتیب، فرایند غنی‌سازی-جابه‌جایی تا رسیدن به دقت مورد نظر ادامه یافت. از آنجا که در روش ارائه شده، از روش درون‌یابی برای تخمین خطای گره‌های جدید اضافه شده، بعد از هر مرحله غنی‌سازی استفاده شد، هزینه محاسباتی اضافی برای تحلیل مجدد صرف نشد و تعداد مراحل لازم برای تحلیل شبکه در روش غنی‌سازی- جابه- جایی نسبت به روش غنی‌سازی متداول تغییر نکرد. روش غنی‌سازی- جابه- جایی علاوه این که، مشکل نزدیکی بیش از اندازهٔ برخی گره‌ها را که در روش غنی‌سازی متداول به علت بدشکلی سلول‌های ورونوی رخ می‌دهد رفع می- کند، با دست‌یابی به یک آرایش هموار، جواب‌هایی با دقت بالاتر، در مقایسه با روش غنی‌سازی متداول، ارائه می‌کند؛ در حالی که از نظر هزینه محاسباتی روش ارائه شده تغییر محسوسی نسبت به روش غنی‌سازی متداول ندارد. مثال‌های عددی حل شده در حوزه الاستیسیته خطی و مقایسه جواب‌های

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.3.9.2]

بدست آمده از روش پیشنهادی غنی‌سازی- جابه‌جایی با جواب‌های روش غنی‌سازی متداول و جواب‌های تحلیلی دقیق موجود برای مثال‌های عددی حل شده، کارایی و دقت بالاتر روش ارائه شده را نشان دادند.

7- مراجع

[1] R. A. Gingold, J. J. Monaghan, Smoothed particle hydrodynamics-theory and application to non-spherical stars, *Monthly notices of the royal astronomical society*, Vol. 181, pp. 375-389, 1977.

[2] M. Fleming, Y. Chu, B. Moran, T. Belytschko, Y. Lu, L. Gu, Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 40, No. 8, pp. 1483-1504, 1997.

[3] [T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu, Element-free Galerkin methods, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 37, No. 2, pp. 229-256, 1994.

[4] S. Atluri, T. Zhu, A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics, *Computational mechanics*, Vol. 22, No. 2, pp. 117-127, 1998.

[5] T. Liszka, C. Duarte, W. Tworzydlo, hp-Meshless cloud method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, No. 1, pp. 263-288, 1996.

[6] E. Oñate, F. Perazzo, J. Miquel, A finite point method for elasticity problems, *Computers & Structures*, Vol. 79, No. 22, pp. 2151-2163, 2001.

[7] W. K. Liu, S. Jun, Y. F. Zhang, Reproducing kernel particle methods, *International journal for numerical methods in fluids*, Vol. 20, No. 8-9, pp. 1081-1106, 1995.

[8] T. Zhu, J.-D. Zhang, S. Atluri, A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach, *Computational mechanics*, Vol. 21, No. 3, pp. 223-235, 1998.

[9] H. Arzani, M. Afshar, Solving Poisson's equations by the discrete least square meshless method, *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, Vol. 42, pp. 23-31, 2006.

[10] G. Shobeyri, M. Afshar, Simulating free surface problems using discrete least squares meshless method, *Computers & Fluids*, Vol. 39, No. 3, pp. 461-470, 2010.

[11] A. R. Firoozjaee, M. H. Afshar, Discrete least squares meshless method with sampling points for the solution of elliptic partial differential equations, *Engineering analysis with boundary elements*, Vol. 33, No. 1, pp. 83-92, 2009.

[12] M. Naisipour, M. H. Afshar, B. Hassani, A. R. Firoozjaee, Collocation discrete least square (CDLS) method for elasticity problems, *International Journal of Civil Engineering. v7*, pp. 9-18, 2009.

[13] M. Afshar, M. Lashckarbolok, G. Shobeyri, Collocated discrete least squares meshless (CDLSM) method for the solution of transient and steady-state hyperbolic problems, *International journal for numerical methods in fluids*, Vol. 60, No. 10, pp. 1055-1078, 2009.

[14] J. Amani, M. Afshar, M. Naisipour, Mixed discrete least squares meshless method for planar elasticity problems using regular and irregular nodal distributions, *Engineering analysis with boundary elements*, Vol. 36, No. 5, pp. 894-902, 2012.

[15] M. Afshar, J. Amani, M. Naisipour, A node enrichment adaptive refinement in Discrete Least Squares Meshless method for solution of elasticity problems, *Engineering analysis with boundary elements*, Vol. 36, No. 3, pp. 385-393, 2012.

[16] M. Afshar, M. Naisipour, J. Amani, Node moving adaptive refinement strategy for planar elasticity problems using discrete least squares meshless method, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 47, No. 12, pp. 1315-1325, 2011.

[17] N. Sukumar, Construction of polygonal interpolants: a maximum entropy approach, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 61, No. 12, pp. 2159-2181, 2004.

[18] M. Arroyo, M. Ortiz, Local maximum-entropy approximation schemes: a seamless bridge between finite elements and meshfree methods, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 65, No. 13, pp. 2167-2202, 2006.

[19] G.-R. Liu, Y.-T. Gu, *An introduction to meshfree methods and their programming*: Springer, 2005.

[20] L. Gu, Moving kriging interpolation and element-free Galerkin method, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 56, No. 1, pp. 1-11, 2003.

[21] N. Sukumar, Z. Huang, J. H. Prévost, Z. Suo, Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 59, No. 8, pp. 1075-1102, 2004.

[22] P. Lancaster, K. Salkauskas, Surfaces generated by moving least squares methods, *Mathematics of computation*, Vol. 37, No. 155, pp. 141-158, 1981.

[23] S. Timoshenko, J. Goodier, *Theory of elasticity*, Third ed., New York: McGraw-Hill, 1970.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.3.9.2]