

روش برآورد خطأ و تطبيقى غنى سازى - جابه جايى در روش بدون شبکه حداقل مربعات گستته مختلط برای حل مسائل الاستيسيتة

صادب فرجى¹، محمد هادى افشار^{2*}

1- دانش آموخته مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
 2- دانشیار مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
 mhafshar@iust.ac.ir * تهران، صندوق پستی 16765-163

چکیده

در این مقاله روش برآورد خطأ و تطبيقى غنى سازى - جابه جايى در روش بدون شبکه حداقل مربعات گستته مختلط برای بهبود دقت جواب های مسائل الاستيسيتة خلی مسطح ارائه شده است. این روش از دو روش غنى سازى و جابه جايى شبکه به طور همزمان استفاده می کند. در هر مرحله غنى سازى، دیاگرام ورنی برای مشخص کردن موقعیت گره هایی که باید به شبکه اضافه شوند، به کار برد شده است. بعد از هر مرحله غنى سازى، خطای گره های جدید اضافه شده از روی خطای گره های آرایش مرحله قبلی تخمین زده می شوند، بنابراین هزینه محاسباتی اضافی برای تحلیل گردهای جدید اضافه شده از روی مرحله لازم تحلیل شبکه در دو روش غنى سازى جابه جايى و غنى سازى متداول یکسان هستند. سپس یک فرایند جابه جايى شبکه بعد از هر مرحله غنى سازى برای بهبود دقت جواب ها استفاده می شود. روش غنى سازى - جابه جايى تا بدست آوردن دقت مورد نظر ادامه می باید. روش ارائه شده با بدست آوردن یک آرایش هموار، علاوه بر حل مشکل نزدیکی بیش از اندازه دیگرها که در روش غنى سازى متداول رخ می دهد، باعث بهبود دقت جواب ها نیز می شود. مثال های عددی حل شده در حوزه الاستيسيتة خطى و مقایسه جواب های بدست آمدۀ از روش غنى سازى - جابه جايى با روش غنى سازى متداول و جواب های تحلیلی دقیق، کارایی و دقت بالاتر روش ارائه شده را نشان داده اند.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل	1392
دریافت: 25 تیر	1392
پذیرش: 06 شهریور	1393
ارائه در سایت: 31 اردیبهشت	1393
کلید واژگان:	
روش بدون شبکه	
دراقیل مربعات گستته مختلط بدون شبکه	
تطبیقی	
غنى سازى - جابه جايى	
الاستيسيتة خطى	

Node enrichment-moving error estimate and adaptive refinement in Mixed Discrete Least Squares Meshless method for solution of elasticity problems

Saeb Faraji, Mohammad Hadi Afshar*

Department of Civil Engineering, Iran University of Science and technology, Tehran, Iran
 *P.O.B. 16765-163 Tehran, Iran, mhafshar@iust.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
 Received 16 July 2013
 Accepted 28 August 2013
 Available Online 21 May 2014

Keywords:
 Meshless Method
 Mixed Discrete Least Squares Meshless
 Adaptive Refinement
 Node Enrichment-moving
 near Elasticity

ABSTRACT

In this paper a node enrichment-moving error estimate and adaptive refinement procedure in Mixed Discrete Least Squares Meshless (MDLSM) method is suggested to improve the solution of elasticity problems. The suggested method uses of both node enrichment and node moving refinement procedures simultaneously. The voronoi diagram is used to locate the position of new added nodes in enrichment step. The errors of new added nodes, after each enrichment procedure, are calculated via interpolation rather than the error of simulation nodes to reduce the computational effort. So, the additional simulation effort does not spend and the steps of suggested method and conventional enrichment procedure are the same. Completing the enrichment step, a node moving procedure is used to improve the solutions and solving the nodes excessive vicinity problem that is happened in conventional node enrichment procedure, especially with irregular node distribution. The node enrichment-moving method is continued to obtain the desirable accuracy. The proposed method is used to solve several examples and the results are presented and compared with those of conventional node enrichment procedure and analytical exact solutions. The results show superior efficiency, effectiveness and accuracy of the proposed method compared to conventional node enrichment method.

1- مقدمه

روش اجزای محدود از روش های عددی است که کارایی خود را در حل مسائل مهندسی نشان داده است، اما این روش برای حل برخی مسائل مثل مسائلی با مرز متحرک، مسائلی با تغییر شکل های زیاد و گسترش ترک که برای حل این مشکلات، روش بدون شبکه که برای گستته سازی ناحیه مسئله، از آرایش گره ها به جای جزء بندي (المان بندي) ناحیه استفاده می کند،

Please cite this article using:

S. Faraji, M.H. Afshar, Node enrichment-moving error estimate and adaptive refinement in Mixed Discrete Least Squares Meshless method for solution of elasticity problems, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 3, pp. 194-202, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

در نظر گرفتن یک سلول ورونوی¹² برای هر گره و اضافه کردن گره‌های جدید در رؤوس سلول‌هایی که خطای گره مربوط به آن سلول بیشتر از میانگین خطای کل شبکه است، آرایش موجود غنی می‌شود. این روش با کاهش فاصله بین گره‌ها باعث کاهش خطای می‌شود. افشار و همکاران [15] این روش را برای غنی‌سازی شبکه با استفاده از روش بدون شبکه حداقل مربعات گسته و برای حل مسائل الاستیسیتیه خطی به کار برده‌اند. روش جایه‌جایی گره‌ها نیز یک روش تظریف تطبیقی خطای می‌شود. افشار و همکاران [16] این روش را برای حل مسائل الاستیسیتیه خطی به کار برده‌اند. روش غنی‌سازی کارایی مناسبی از خود نشان داده است. اما در بعضی موارد بدشکالی سلول ورونوی، منجر به نزدیکی بیش از اندازه بعضی از گره‌ها جدید اضافه شده به همیگر شده و این نزدیکی بیش از اندازه گره‌ها، قدرت تخیین توابع شکل را کاهش داده و در نتیجه دقت جواب‌ها کاهش می‌یابد. این مشکل در آرایش‌های نامنظم بیشتر خود را نشان می‌دهد. روش جایه‌جایی نیز به طور مؤثر در کاهش خطای به کار گرفته شده است. اما به علت این که در این روش گرهی به آرایش اولیه اضافه نمی‌شود، دقت جواب‌ها تا میزان مشخصی بهبود می‌یابد و برای افزایش دقت جواب‌ها از یک میزان مشخص باید از روش غنی‌سازی استفاده کرد. در این مقاله روش برآورد خطای و تظریف تطبیقی غنی‌سازی - جایه‌جایی با استفاده از روش بدون شبکه حداقل مربعات گسته مختلط برای بدست آوردن جواب‌های دقیق‌تر در مسائل الاستیسیتیه مسطح، ارائه شده است. این روش از دو روش غنی‌سازی و جایه‌جایی شبکه به طور همزمان استفاده می‌کند. در مرحله غنی‌سازی، دیگر روش غنی‌سازی متداول، دیاگرام ورونوی برای مشخص کردن موقعیت گره‌هایی که باید به شبکه اضافه شوند، به کار برده می‌شود. بعد از هر مرحله غنی‌سازی، خطای گره‌های جدید اضافه شده از روی خطای گره‌های آرایش مرحله قبلی تخمین زده می‌شوند و هر مرحله از روش با یک فرایند جایه‌جایی شبکه به اتمام می‌رسد. به همین ترتیب، فرایند غنی‌سازی - جایه‌جایی تا رسیدن به دقت مورد نظر ادامه می‌یابد. در روش غنی‌سازی - جایه‌جایی، خطای گره‌های جدید اضافه شده، بعد از هر مرحله غنی‌سازی، با استفاده از درون‌بایی تخمین زده می‌شوند، بنابراین هزینه محاسباتی اضافی برای تحلیل مجدد صرف نمی‌شود و همان تعداد مراحلی که برای تحلیل شبکه در روش غنی‌سازی متداول لازم است در روش غنی‌سازی - جایه‌جایی استفاده می‌شود. فرایند جایه‌جایی شبکه علاوه بر حل مشکل نزدیکی بیش از اندازه برخی گره‌ها در روش غنی‌سازی متداول، با ارائه یک آرایش هموار شده به جواب‌هایی با دقت بالاتر منجر می‌شود. مثال‌های عددی حل شده در حوزه الاستیسیتیه خطی و مقایسه جواب‌های روش غنی‌سازی متداول و جواب‌های پیشنهادی غنی‌سازی - جایه‌جایی با جواب‌هایی روش غنی‌سازی متداول و جواب‌های تحلیلی دقیق موجود برای مثال‌های عددی حل شده، کارایی و دقت بالاتر روش ارائه شده را نشان می‌دهند.

2- تابع شکل حداقل مربعات متخرک

روش‌های مختلفی برای تولید توابع شکل در روش‌های بدون شبکه وجود دارند، از جمله این روش‌ها می‌توان به روش بیشینه انتروپی¹³ [17 و 18]، روش تابع پایه شعاعی¹⁴ [19]، روش کریجینگ متخرک¹⁵ [20] و روش جزء‌بندی واحد¹⁶ [21] اشاره کرد. تابع شکل حداقل مربعات متخرک [22] که در این مقاله از آن استفاده شده است، یکی از معمول‌ترین توابع تخمینی در

ارائه شده است. از جمله روش‌های بدون شبکه معروف می‌توان به روش ذره هیدرودینامیک هموار¹ [1]، روش بدون جزء گالرکین² [2، 3]، روش بدون شبکه محلی پترف-گالرکین³ [4]، روش ابر بدون شبکه⁴ [5]، روش نقطه محدود⁵ [6]، روش دوباره‌سازی هسته ذره⁶ [7] و روش معادله انتگرالی مرزی محلی⁷ [8] اشاره کرد. روش بدون شبکه حداقل مربعات گسته اولین بار توسط افشار و ارزانی⁸ [9] برای حل معادلات پواسون به کار گرفته شد. به علت اینکه در این روش از شکل قوی معادلات دیفرانسیلی برای گسته سازی آنها استفاده می‌شود، فرایند انتگرال گیری عددی حذف می‌شود، بنابراین هزینه محاسباتی آن از روش‌های بدون شبکه‌ای مثل روش بدون جز گالرکین، که از شکل ضعیف معادلات استفاده می‌کنند، کمتر است. اخیرا شبیری و افشار [10] از این روش برای شبیه‌سازی مسأله سطح آزاد استفاده کرده‌اند. روش بدون شبکه حداقل مربعات گسته هم مکان⁹ توسط فیروزجایی و افشار [11] برای حل معادلاتی از نوع پیضوی ارائه شد، و تاثیر نقاط هم مکان در بالا بردن دقت و نرخ همگرایی مورد مطالعه قرار گرفت. این روش بعدها توسط نیسیبور و همکاران [12] در حل مسائل الاستیسیتیه خطی مسطح به کار رفت. افشار و همکاران [13] از این روش برای شبیه‌سازی تطبیقی معادلاتی از نوع هذلولی استفاده کردند.

آخر، روش حداقل مربعات گسته مختلط¹⁰ توسط امانی و همکاران [14] برای حل مسائل الاستیسیتیه خطی مسطح ارائه شده است. در روش حداقل مربعات گسته مختلط، ناچیه مسأله با استفاده از گره‌هایی گسته سازی شده و سپس جواب مسأله با استفاده از توابع شکل حداقل مربعات متخرک¹¹ تخمین زده می‌شود، با کمینه کردن تابع باقی‌مانده‌ای نسبت به مقادیر گرهی مجھول، مقدار جواب در گره‌ها محاسبه می‌شود. تابع باقی‌مانده‌ای از مجموع باقی‌مانده حاصل از قرار گیری تابع تخمینی در شرط معادله دیفرانسیلی حاکم بر مسأله و باقی‌مانده حاصل از قرارگیری آن در شرایط مرزی بدست می‌آید. در این روش از فرمول‌بندی مختلط استفاده می‌شود، به طوری که تغییر مکان‌ها و تنش‌ها به طور هم زمان محاسبه می‌شوند. در فرمول‌بندی غیر مختلط ابتدا تغییر مکان‌ها محاسبه می‌شوند، سپس تنش‌ها با استفاده از مشتقات توابع شکل و رابطه بین تغییر مکان‌ها و تنش‌ها بدست آیند. اما در فرمول‌بندی مختلط توابع شکل به طور یکسان برای تخمین تغییر مکان‌ها و تنش‌ها به کار می‌رند و معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مسأله و معادلاتی که رابطه بین تغییر مکان‌ها و تنش‌ها را بیان می‌کنند به طور هم زمان حل می‌شوند. از آنجا که که دقت خود توابع شکل از مشتقاشان یک مرتبه بالاتر است، دقت جواب‌های بدست آمده برای روش‌هایی که از فرمول‌بندی غیر مختلط استفاده می‌کنند، بیشتر است. همچنین این موضوع باعث می‌شود تا نرخ همگرایی جواب‌های بدست آمده برای تنش‌ها، یک مرتبه نسبت به روش‌های غیر مختلط افزایش یابد.

به منظور افزایش دقت جواب‌های عددی، روش‌هایی نیز برای برآورد خطای و تظریف تطبیقی، گسترش پیدا کرده‌اند. روش غنی‌سازی آرایش یکی از روش‌های تظریف تطبیقی خطای در روش‌های بدون شبکه است. در این روش با

1- Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)

2- Element-free Galerkin (EFG)

3- Local Petrov-Galerkin (MLPG)

4- Hp-Meshless cloud

5- Finite Point Method (FPM)

6- Reproducing Kernel Particle Methods (RKPM)

7- Local Boundary Integral Equation (LBIE)

8- Discrete Least Square Meshless (DLSM)

9- Collocation Discrete Least Square Meshless (CDLSM)

10- Mixed Discrete Least Squares Meshless (MDLSM)

11- Moving Least Squares (MLS)

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \varphi = \frac{Ev}{(1-\nu)(1+\nu)} \quad (13)$$

در رابطه (14) روابط بین تغییر مکان‌ها و تنش‌ها معروف شده‌اند.

$$\begin{cases} \sigma_x = (\varphi + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_y = \varphi \frac{\partial u}{\partial x} + (\varphi + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (14)$$

که در آن σ_x و σ_y به ترتیب تنش قائم در جهت x و y بوده و τ_{xy} تنش برشی است. با استفاده از رابطه (14) می‌توان معادله (12) را به صورت رابطه (15) بازنویسی کرد.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -f_x \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -f_y \end{cases} \quad (15)$$

که در آن f_x و f_y نیروی بدنی در جهت x و y هستند. با جمع بندی و بازنویسی معادلات (14) و (15)، رابطه (16) بدست می‌آید.

$$T(u) + f = 0 \quad (16)$$

بردار f در رابطه (17) نشان داده شده است.

$$f = [0, 0, 0, f_x, f_y] \quad (17)$$

رابطه (18) بردار u را معروفی کرده است.

$$u^T = [u, v, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}] \quad (18)$$

عملگر T در رابطه (19) تعریف شده است.

$$T(u) = A_1 u_{,x} + A_2 u_{,y} + A_3 u \quad (19)$$

ضرایب A_1 ، A_2 و A_3 در رابطه (20) نشان داده شده‌اند.

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} \varphi + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

در این صورت باقی‌مانده تابع تخمینی از معادله دیفرانسیلی حاکم بر مسئله در گره i ام از رابطه (21) بدست می‌آید.

$$(R_Q)_i = T(u)_i + f_i \quad (21)$$

با داشتن شرایط مرزی که در رابطه (22) ارائه شده‌اند

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}, v = \bar{v}, t_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y, \\ t_y &= \sigma_y n_y + \tau_{xy} n_x \end{aligned} \quad (22)$$

و در آن n_x و n_y بردار نرمال وارد بر مرز x و t_x و t_y نیروی گستردگی وارد بر مرز در جهت x و y هستند، باقی‌مانده تابع تخمینی از شرایط مرزی حاکم بر مسئله در گره i ام از رابطه (23) محاسبه می‌شود.

$$(R_f)_i = D(u)_i - \bar{u}_i \quad (23)$$

با جمع باقی‌مانده حاصل از قرارگیری تابع تخمینی برای مقادیر مجہول

$$\bar{u} \text{ و } D \text{ از روابط (24) و (25) محاسبه می‌شوند.} \quad (24)$$

$$\bar{u}^T = [\bar{u}, \bar{v}, t_x, t_x] \quad (24)$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_x & 0 & n_y \\ 0 & 0 & 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (25)$$

با جمع باقی‌مانده حاصل از قرارگیری تابع تخمینی برای مقادیر مجہول

روش‌های بدون شبکه است که به خوبی کارایی خود را نشان داده است. در این روش با در نظر گرفتن زیر ناحیه‌هایی برای هر گره،تابع تخمینی \bar{u} در هر زیر ناحیه از رابطه (1) محاسبه می‌شود.

$$u(X) = \sum_{i=1}^k p_i(X) a_i(X) = P^T(X) a(X) \quad (1)$$

تابع پایه (P) در رابطه (2) معروفی شده است.

$$P^T = [1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^m, \dots, y^m] \quad (2)$$

که در آن m و k به ترتیب عبارتند از درجه تابع پایه و تعداد مؤلفه‌های آن. به طور مثال برای تابع پایه مرتبه دوم ($m=2$)، تعداد مؤلفه‌های تابع پایه (k) برابر شش است. بردار ضرایب تابع پایه است. با تعریف تابعک نرم وزن داری به صورت رابطه (3)

$$J = \sum_{m=1}^{n_s} w_m(X - X_m) (P^T(X_m) a(X) - \bar{u}_m)^2 \quad (3)$$

که در آن \bar{u}_m و w_m به ترتیب جواب و تابع وزن در گره m هستند و تعداد کل گره‌های موجود در هر ناحیه تأثیر است، تابع وزن مورد استفاده در این مقاله تابع وزن اسپلاین مرتبه سوم¹ است که در رابطه (4) معروفی شده است. در رابطه (4) d_{wm} شعاع ناحیه تأثیر گره m را نشان می‌دهد.

$$w_m(d) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4d^2 + 4d^3 d \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4d + 4d^2 - \frac{4}{3}d^3 \frac{1}{2} \leq d < 1 \\ 0 \quad d > 1 \end{cases} \quad (4)$$

با به حداقل رساندن تابع J رابطه (5) بدست می‌آید.

$$u(X) = P^T(X) S^{-1}(X) C(X) \bar{u} \quad (5)$$

در رابطه (5) \bar{u} بردار جواب‌های گرهی است و ضرایب S و C در روابط (6) و (7) معرفی شده‌اند.

$$S(X) = \sum_{m=1}^{n_s} w_m(X - X_m) P(X_m) P^T(X_m) \quad (6)$$

$$C(X) = [w_1(X - X_1) P(X_1), \quad (7)$$

$w_2(X - X_2) P(X_2), \dots, w_{n_s}(X - X_{n_s}) P(X_{n_s})]$ در این صورت رابطه (8) برقرار است.

$$u(X) = N^T(X) \bar{u} \quad (8)$$

که در آن تابع شکل (N) از رابطه (9) بدست می‌آید.

$$N^T = P^T(X) S^{-1}(X) C(X) \quad (9)$$

از روابط (10) و (11) برای محاسبه مشتقهای جزئی تابع شکل استفاده شده است.

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial P^T}{\partial x} S^{-1} C + P^T \frac{\partial S^{-1}}{\partial x} C + P^T S^{-1} \frac{\partial C}{\partial x} \quad (10)$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial P^T}{\partial y} S^{-1} C + P^T \frac{\partial S^{-1}}{\partial y} C + P^T S^{-1} \frac{\partial C}{\partial y} \quad (11)$$

3- روش حداقل مربعات گسته مختلط برای حل مسائل الاستیسیته خطی مسطح

معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مسائل الاستیسیته خطی مسطح به صورت رابطه (12) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left[(\varphi + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi \frac{\partial v}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right] &= f_x \\ -\frac{\partial}{\partial y} \left[(\varphi + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + \varphi \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] &= f_y \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن u و v به ترتیب تغییر مکان در جهت x و y هستند. مقادیر φ و μ

در حالت تنش مسطح از رابطه (13) محاسبه می‌شوند.

1- Cubic spline Weight Function

استفاده می‌شود، بنابراین هزینه محاسباتی اضافی برای تحلیل مجدد صرف نمی‌شود و تعداد مراحل لازم برای تحلیل شبکه در دو روش غنی‌سازی- جابه‌جایی و غنی‌سازی متداول یکسان هستند. از طرف دیگر، با توجه به اینکه فرآیندهای درون‌یابی خطأ و جابه‌جایی شبکه هزینه محاسباتی سیار ناچیزی در مقایسه با تحلیل شبکه دارند، بنابراین روش ارائه شده از نظر هزینه محاسباتی تفاوت محسوسی با روش غنی‌سازی متداول ندارد.

روش غنی‌سازی-1-2-4

در مرحله غنی‌سازی از دیاگرام ورونوی برای پیدا کردن موقعیت گره‌های جدیدی که باید به آرایش موجود اضافه شوند، استفاده شده است. در این روش گره‌های جدید در رئوس سلول‌های ورونوی که خطای گره‌های مربوط به آنها از خطای میانگین بیشتر است، اضافه می‌شوند. سلول‌های ورونی با کمک دیاگرام دلونوی که با ایجاد یک مشبندی مثلثی به شناسایی گره‌های همسایه می‌پردازند، ساخته می‌شوند؛ به این ترتیب که پس از ترسیم دیاگرام دلونوی عمود منصف هر یک از خطوط واصل بین گره‌های همسایه که از روی دیاگرام دلونوی بدست آمداند ترسیم می‌شوند، عمود منصف‌های ترسیمی همدیگر را در نقاطی قطع می‌کنند، اشکال محدب حاصل از وصل کردن این تقاطع‌ها به همدیگر سلول‌های ورونوی را می‌سازند. شکل 1 نحوه اضافه شدن گره‌های جدید را نشان می‌دهد. از این روش برای غنی‌سازی آرایش، جهت بهبود دقت جواب‌های مسائل الاستیستیته خطی در روش بدون شبکه حداقل مریعات گستته استفاده شده است [15]. در این روش خطای میانگین از اقطله (31) محاسبه می‌شود.

$$e_{average} = \sqrt{\frac{(\sum_{i=1}^{n_t} e_i)^2}{n_t}} \quad (31)$$

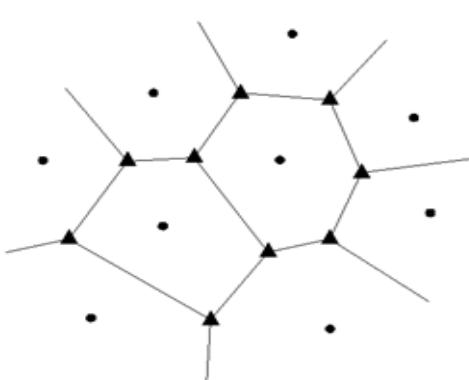
2-2-4- روش جابه جایی شبکه

در این بخش به طور خلاصه روش جایه‌جایی شبکه توضیح داده می‌شود، از این روش برای تظریفی تطبیقی خطأ در روش حداقل مربوطات گسترش و برای حل مسائل الاستیمیتی خطی استفاده شده است [16] که برای توضیح بیشتر می‌توان به آن مراجعه کرد. برای جایه‌جایی شبکه، گره‌های همسایه با استفاده از فنرها مجذبیت به همدیگر متصل می‌شوند. همانطور که در شکل 2 نشان داده شده است، برای مشخص کردن گره‌های همسایه از دیاگرام ورونوی استفاده شده است. سختی این فنرها مجذبیت از رابطه (32) محاسبه می‌شود.

$$l_{ij} = e_i + e_j \quad (32)$$

که در این رابطه e_i و e_j به ترتیب خطای گرههای i و j هستند و z_{ij} سختی فنری است که گرههای i و j را به هم دیگر متصل کرده است.

در این صورت نیروی محوری این فتر از رابطه (33) محاسبه می‌شود.



شکا ۱ (• گههای آرایش موحد، ▲ گههای اضافه شده)

گرهی در شرط معادله دیفرانسیلی حاکم بر مسئله و شرایط مرزی، برای هر گره فرضی / ام تابعک باقی ماندهای به صورت رابطه (26) تعیین می‌شود.

$$I_i = (R_\Omega^T R_\Omega)_i + \alpha (R_F^T R_F)_i \quad (26)$$

با جمع تابعک باقی ماندهای گره‌ها، تابعک باقی ماندهای کل بدست می‌آید. با به حداقل رساندن تابعک باقی ماندهای کل نسبت به مقادیر مجھول گرهی، رابطه (27) محاسبه می‌شود.

$$KU = F \quad (27)$$

$$K_{mn} = \sum_{i=1}^{n_t} [T(N_m)]_i^T [T(N_n)]_i + \alpha \sum_{i=1}^{n_b} [DN_m]_i^T [DN_n]_i \quad (28)$$

$$F_m = \sum_{i=1}^{n_t} [T(N_m)]_i^T f_i + \alpha \sum_{i=1}^{n_b} [D N_m]_i^T \bar{u}_i \quad (29)$$

U بردار مقادیر مجھول گرھی بوده و n_t و n_b به ترتیب نشان دهنده تعداد گرھهای موجود در کل ناحیه و تعداد گرھهای موجود در مزها می‌باشند. α ضریب پنالتی است، که باید مقداری به اندازه کافی بزرگ اختیار شود.

4- برآورد خط و روش تظریف تطبیقی غنی‌سازی - جابه‌جایی

۱-۴ خطای آورد

برآورده خطا اولین قدم برای انجام یک فرایند تطهیری است. با الهام از روش‌های به کار گرفته شده در اجزای محدود، روش‌های متعددی برای برآورد خطای روش‌ها بدون شبکه ارائه شده‌اند. این روش‌ها را می‌توان در دو گروه عمده روش‌های باقی‌مانده‌ای¹ و روش‌های دوباره‌یابی² تقسیم‌بندی کرد. در روش‌های باقی‌مانده‌ای، با قرارگیری جواب‌های روش عددی در شرط دیفرانسیلی حاکم بر مسئله و شرایط مرزی، باقی‌مانده‌های دیفرانسیلی و مرزی بدست می‌آیند و مجموع این دو باقی‌مانده برای تخمین خطای استفاده می‌شود. روش‌های دوباره‌یابی از کمیت‌های دیگری مثل گرادیان (تفییرات) جواب‌ها که با دوباره‌یابی از روی جواب‌ها بدست می‌آیند، برای تخمین خطای استفاده می‌کنند. در این مقاله از روش باقی‌مانده‌ای برای تخمین خطای استفاده شده است. در این مقاله برای محاسبه خطای هر گره فرضی ام از رابطه (30) استفاده شده است.

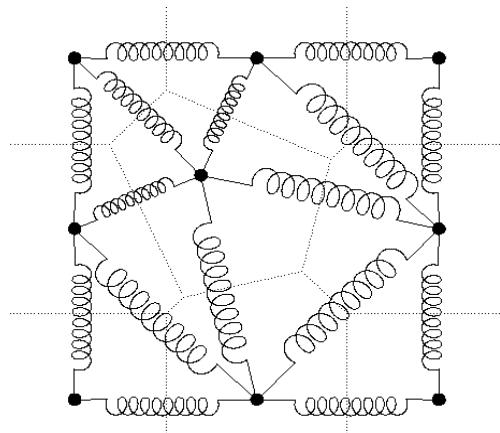
$$e_i = \sqrt{\frac{I_i}{U^T U}} \quad (30)$$

در این رابطه e_i خطای اختصاص داده شده به هر گره بوده و کمیت‌های I_i و U به ترتیب در روابط (26) و (27) معرفی شده‌اند.

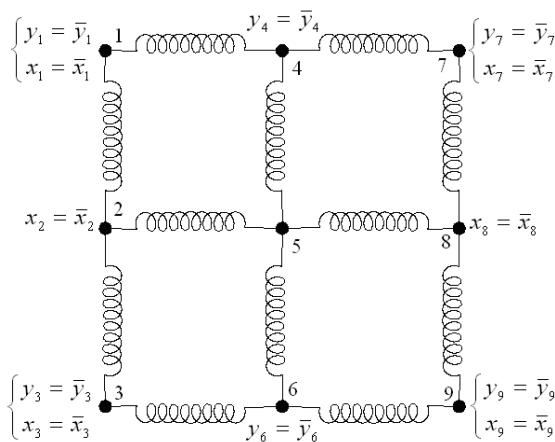
2-4- روش غنی سازی - جایه جایی

روش ارائه شده در این مقاله به نام روش غنی‌سازی-جایه‌جایی از دو مرحله تشكیل شده است. در مرحله غنی‌سازی بعد از تحلیل و برآورد خطای آرایش، گره‌های جدید در قسمتی از ناحیه که خطای بیشتری دارد اضافه می‌شوند و سپس خطای گره‌های اضافه شده، با درون‌بایی از روی خطای گره‌های آرایش تحلیل شده تخمین زده می‌شوند. بعد از تکمیل مرحله غنی‌سازی، یک فرایند جایه‌جایی شبکه با توجه به خطاهای بدست آمده برای گره‌های آرایش تحلیل شده و خطاهای تخمین زده شده برای گره‌های جدید اضافه شده انجام می‌شود. جایه‌جایی شبکه با در اختیار قرار دادن یک آرایش هموار و مناسب، به بهبود دقت جواب‌ها می‌انجامد. در روش ارائه شده، از روش درون‌بایی برای تخمین خطای گره‌های جدید اضافه شده، بعد از هر مرحله غنی‌سازی

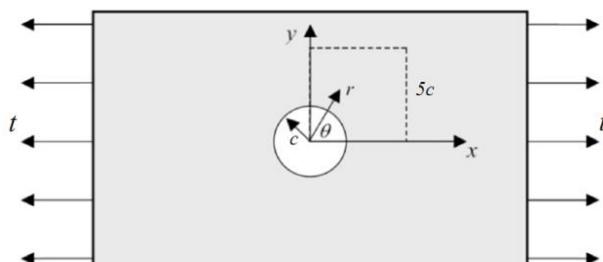
- 1- Residual Based Methods
- 2- Recovery Based Methods



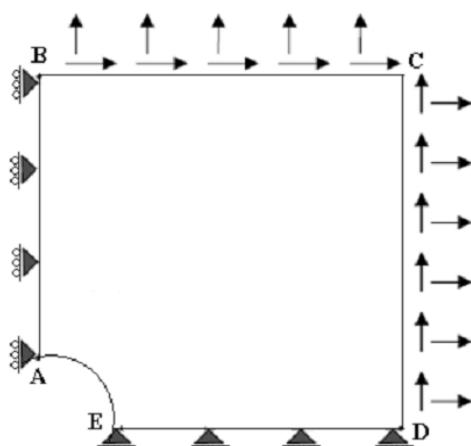
شکل 2 دیاگرام ورونوی برای گره‌های همسایه و فنرها بین آنها



شکل 3 شرایط مرزی برای یک سیستم ساده از فنرها



شکل 4 صفحه بینهایت با سوراخ دایره‌ای، تحت اثر بار محوری گسترده t



شکل 5 شرایط مرزی اعمال شده برای صفحه بینهایت با سوراخ دایره‌ای

که در رابطه بالا X_i و \bar{X}_i مختصات گره‌های i و \bar{i} بوده و b_{ij} نیروی محوری است که در گره‌ها به فنر وارد می‌شود. با بازنویسی رابطه (33) در حالت دو بعدی رابطه (34) بدست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} l_{ij} & 0 & -l_{ij} & 0 \\ 0 & l_{ij} & 0 & -l_{ij} \\ -l_{ij} & 0 & l_{ij} & 0 \\ 0 & -l_{ij} & 0 & l_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x^i \\ b_y^i \\ b_x^j \\ b_y^j \end{bmatrix} \quad (34)$$

در رابطه بالا b_x^i و b_y^i به ترتیب نیروی محوری و مختصات گره i در جهت x و y هستند. در حالت کلی، با جمع بندی رابطه (34) معادله (35) بدست می‌آید.

$$LX = B \quad (35)$$

که در آن L ماتریس سختی، B بردار نیروها و X مختصات جدید گره‌هاست. برای محاسبه مختصات جدید گره‌ها معادله تعادلی (36) حل می‌شود.

$$LX = 0 \quad (36)$$

شرط مرزی که برای حل معادله تعادلی استفاده شده‌اند، در رابطه (37) ارائه شده‌اند.

$$\begin{aligned} \Delta X_i^T n_i &= [\Delta x_i \quad \Delta y_i] \begin{bmatrix} n_x^i \\ n_y^i \end{bmatrix} \\ &= [(x_i - \bar{x}_i) \quad (y_i - \bar{y}_i)] \begin{bmatrix} n_x^i \\ n_y^i \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

\bar{x}_i و \bar{y}_i به ترتیب مختصات اولیه گره مرزی i ام و n_x^i و n_y^i به ترتیب بردار نرمال وارد بر این گره در جهت x و y هستند. شرایط مرزی اعمال شده باعث می‌شوند تا گره‌های مرزی فقط در راستای مرز جابه‌جا شوند و از ناحیه مسئله خارج نشوند. شکل 3 شرایط مرزی اعمال شده با این روش را برای یک سیستم ساده نشان می‌دهد.

5- مثال‌های عددی

در این بخش با حل دو مثال عددی در حوزه الاستیسیته خطی و مقایسه جواب‌های بدست آمده از روش غنی‌سازی - جابه‌جایی با جواب‌های بدست آمده از روش غنی‌سازی متداول و همچنین جواب‌های تحلیلی دقیق موجود برای مثال‌ها، کارایی روش غنی‌سازی - جابه‌جایی نشان داده شده است. در این مقاله از روش حداقل مربعات متحرک، باتابع پایه مرتبه دوم برای تولید توابع شکل استفاده شده است و روش حداقل مربعات گستته مختصات انتخاب با اختیار ضریب پنالتی (α) برابر 10^8 برای شبیه‌سازی مثال‌ها به کار رفته است. در این مثال‌ها خطای کل از رابطه (38) محاسبه شده است.

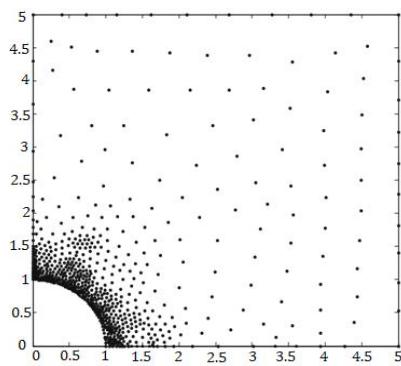
$$\sum_{i=1}^{n_t} e_i^2 = \text{خطای کل} \quad (38)$$

5-1- صفحه بینهایت با سوراخ مرکزی

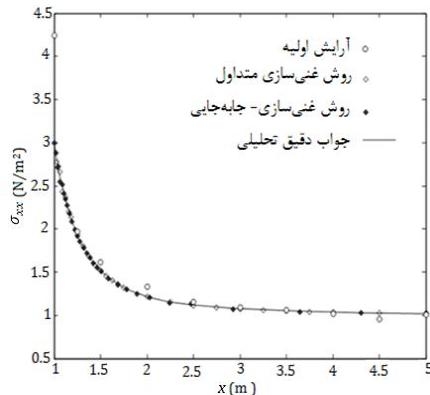
در این مثال یک صفحه بینهایت با سوراخ دایره‌ای که تحت اثر نیروی گسترده محوری t قرار دارد حل شده است. به دلیل بینهایت بودن صفحه و با توجه به شرایط تقارنی فقط ربعی از ناحیه به ابعاد $5c$ حل شده است. شکل 4 مشخصات این مثال را نشان می‌دهد.

شرط مرزی حاکم بر این مثال در شکل 5 نشان داده شده است. برای مزهای AB و ED شرط تقارنی، برای مز AE شرط فیزیکی عاری از بار و برای مزهای BC و CD شرط مرزی تنشی بدست آمده از جواب دقیق مسئله مورد استفاده قرار گرفته است.

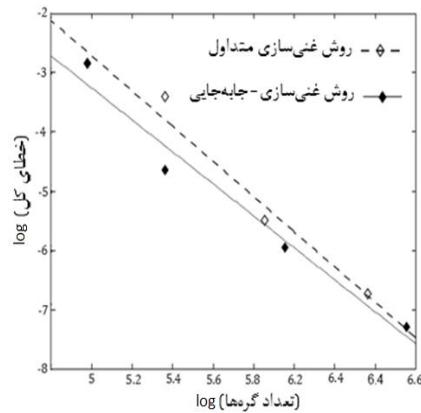
جواب تحلیلی دقیق این مسئله که توسط تیموشنسکو و گودیر ارائه شده است [23] در روابط (39-43) ارائه شده‌اند.



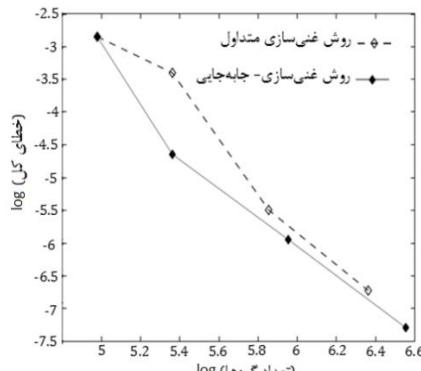
شکل 8 آرایش نهایی 702 گرهی بدست آمده برای مثال اول بعد از سه مرحله تطبيق با استفاده از روش غنی سازی-جایه جایی



شکل 9 مقایسه تنش σ_{xx} بر روی مرز $x=0$ برای مثال اول



شکل 10 مقایسه خطای دو روش غنی سازی متداول و غنی سازی-جایه جایی در مراحل مختلف تطبيق برای مثال اول



شکل 11 مقایسه خطای دو روش غنی سازی متداول و غنی سازی-جایه جایی در مراحل مختلف تطبيق برای مثال اول

$$u_r = \frac{t}{4G} \left[r \left(\frac{\phi - 1}{2} + \cos(2\theta) \right) + \frac{c^2}{r} (1 + (1 + \phi) \cos(2\theta)) - \frac{c^4}{r^3} \cos(2\theta) \right] \quad (39)$$

$$u_\theta = \frac{t}{4G} \sin(2\theta) \left[(1 - \phi) \frac{c^2}{r} - r \frac{c^4}{r^3} \right] \quad (40)$$

$$\sigma_x = t \left[1 - \frac{c^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos(2\theta) + \cos(4\theta) \right) + \frac{3c^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right] \quad (41)$$

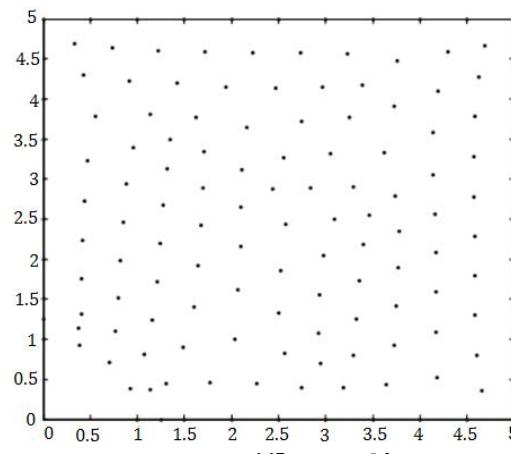
$$\sigma_y = - \left[\frac{c^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos(2\theta) - \cos(4\theta) \right) + \frac{3c^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right] \quad (42)$$

$$\tau_{xy} = -t \left[\frac{c^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin(2\theta) + \sin(4\theta) \right) - \frac{3c^4}{2r^4} \sin(4\theta) \right] \quad (43)$$

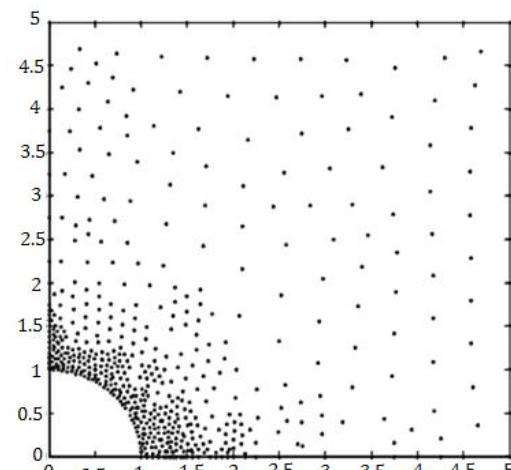
که در آنها $t = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, $\phi = G/(E + G)$, $v = c/(E + G)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \tan^{-1}(y/x)$, $c = \sqrt{E/(1 - \nu^2)}$ هستند. در این مثال $E = 1000$, $G = 1$, $\nu = 0.3$, $t = 1$, $c = 1$ و $v = 0.058$ فرض شده‌اند. شکل‌های 6 تا 8 آرایش اولیه و نهایی روش‌های غنی سازی متداول و روش غنی سازی-جایه جایی را بعد از سه مرحله تطبيق نشان می‌دهند. خطای آرایش اولیه 145 گرهی بدست آمده است.

جواب‌های بدست آمده برای تنش نرمال در جهت x , برای آرایش اولیه و نهایی روش‌های غنی سازی متداول و غنی سازی-جایه جایی در شکل 9 باهم مقایسه شده‌اند.

اشکال 10 و 11 و جدول 1 خطای بدست آمده برای روش‌های غنی سازی متداول و غنی سازی-جایه جایی را باهم مقایسه کرده‌اند. نتایج بدست آمده کارایی و دقیق‌تر روش ارائه شده غنی سازی-جایه جایی را در مقایسه با روش غنی سازی متداول نشان می‌دهند.



شکل 6 آرایش اولیه 145 گرهی برای مثال اول



شکل 7 آرایش نهایی 579 گرهی بدست آمده برای مثال اول بعد از سه مرحله تطبيق با استفاده از روش غنی سازی متداول

جدول ۱ مقایسه تعداد گره‌ها و خطای روش‌های غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی - جایه‌جایی برای مثال اول

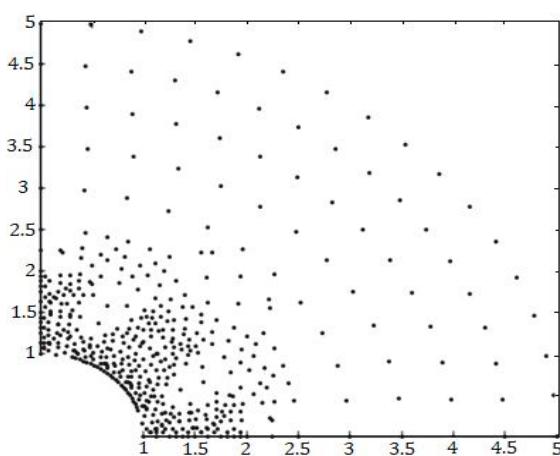
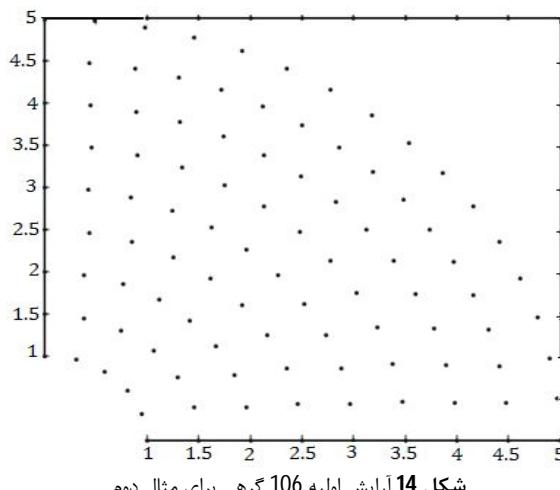
زمان محاسباتی	تعداد گره‌ها			خطای کل			نام روش
	روش غنی‌سازی متداول	روش غنی‌سازی - تحلیل و غنی‌سازی جایه‌جایی	روش غنی‌سازی - متداول	روش غنی‌سازی - جایه‌جایی	روش غنی‌سازی متداول	روش غنی‌سازی - جایه‌جایی	
(s)21	(s)21	(s)1	213	213	0/0333	0/0096	مرحله اول تظریف
(s)72	(s)82	(s)1	348	385	0/0041	0/0026	مرحله دوم تظریف
(s)255	(s)322	(s)3	579	702	0/0012	4E-6/82	مرحله سوم تظریف

$$\sigma_r = \frac{a^2 P}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (44)$$

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 P}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (45)$$

σ_r و σ_θ به ترتیب تنش نرمال در جهت شعاعی و زاویه‌ای هستند. مقادیر ثابت در نظر گرفته شده برای این مثال عبارتند از: $a=1$, $b=5$, $P=1$, $v=0.3$. شکل‌های 14 تا 16 آرایش اولیه و نهایی بدست آمده بعد از سه مرحله تظریف را برای روش‌های غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی - جایه‌جایی نشان می‌دهند. خطای بدست آمده برای آرایش اولیه 106 گرهی برابر 0/0280 می‌باشد.

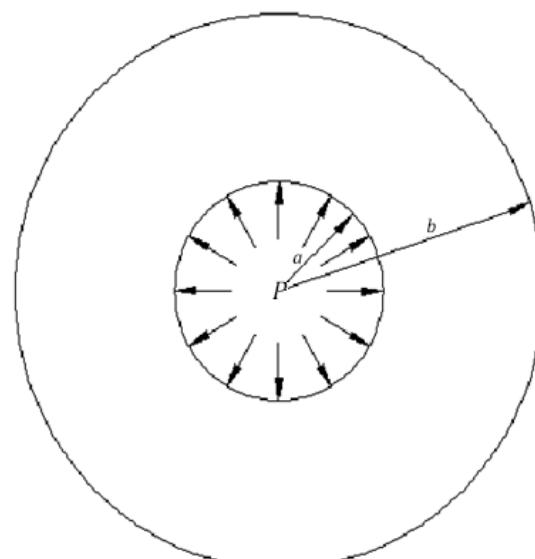
در شکل 17 تنش نرمال در جهت α , برای آرایش اولیه و آرایش نهایی روش‌های غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی - جایه‌جایی باهم مقایسه شده‌اند. شکل‌های 18 و 19 خطای دو روش غنی‌سازی متداول و روش غنی‌سازی - جایه‌جایی را در مراحل مختلف تظریف باهم مقایسه کرده‌اند.



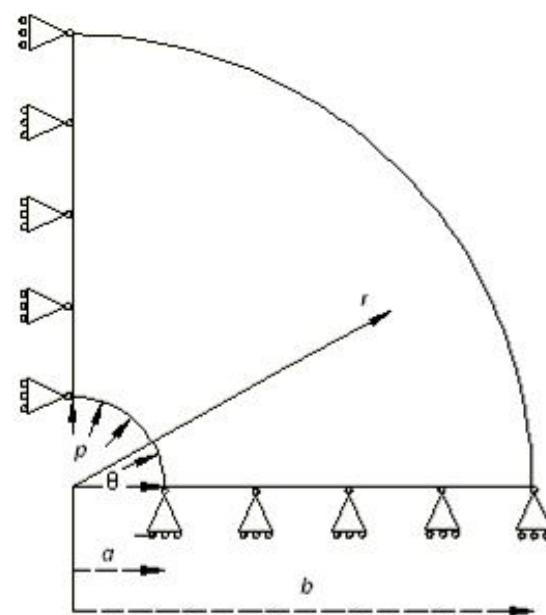
شکل 15 آرایش نهایی 491 گرهی بدست آمده برای مثال دوم بعد از سه مرحله تظریف با استفاده از روش غنی‌سازی متداول

5-2- استوانه توخالی تحت فشار داخلی

در این مثال، همان‌طور که در شکل 12 نشان داده شده است، یک استوانه توخالی که تحت اثر فشار داخلی P قرار دارد مورد بررسی قرار گرفته است. به دلیل تقارن، ربعی از این مثال مورد تحلیل قرار گرفته است. شکل 13 شرایط مرزی تقارنی و فیزیکی حاکم بر این مسئله را نشان می‌دهد. جواب تحلیلی دقیق این مسئله [23] در روابط (44) و (45) ارائه شده است.



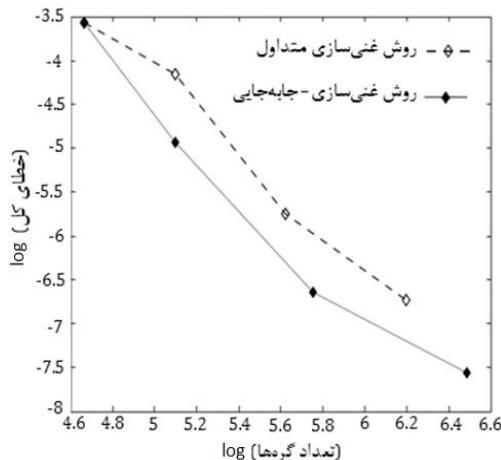
شکل 12 مقطع استوانه توخالی تحت فشار داخلی



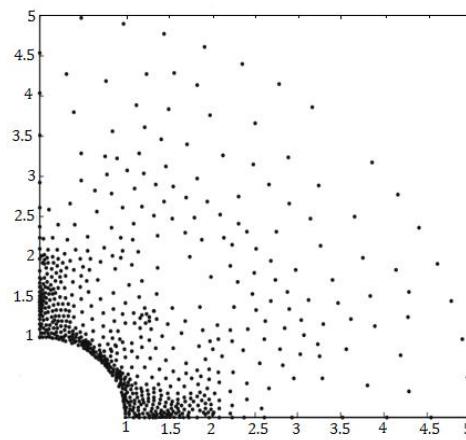
شکل 13 شرایط مرزی اعمال شده برای استوانه توخالی تحت فشار داخلی

جدول 2 مقایسه تعداد گره‌ها و خطای روش‌های غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی - جابه‌جایی برای مثال دوم

زمان محاسباتی	تعداد گره‌ها				خطای کل		نام روش
	روش غنی‌سازی - جابه‌جایی متداول	تحلیل و غنی‌سازی جابه‌جایی	روش غنی‌سازی - جابه‌جایی	روش غنی‌سازی - جابه‌جایی	روش غنی‌سازی متداول	- جابه‌جایی	
(s)17	(s)17 (s)1	164	164	0/0156	0/0072	مرحله اول تطبیقی	
(s)55	(s)62 (s)1	276	315	0/0032	0/0013	مرحله دوم تطبیقی	
(s)187	(s)305 (s)3	491	656	0/0012	4E-5/21	مرحله سوم تطبیقی	



شکل 19 مقایسه خطای دو روش غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی - جابه‌جایی در مراحل مختلف تطبیقی برای مثال دوم

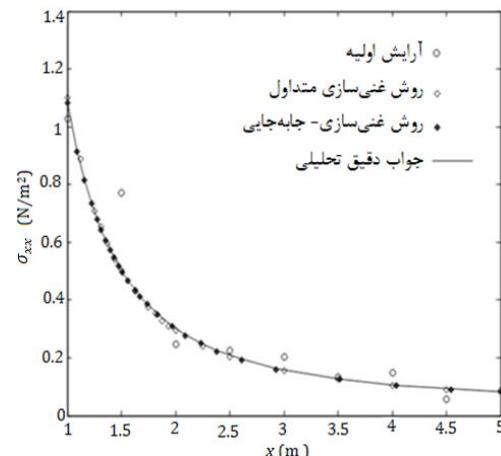
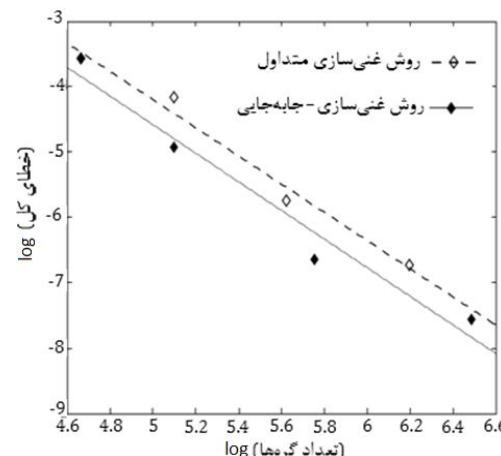


شکل 16 آرایش نهایی 656 گرهی بدست آمده برای مثال دوم بعد از سه مرحله تطبیق با استفاده از روش غنی‌سازی - جابه‌جایی

در جدول 2 خطای و تعداد گره‌های دو روش غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی - جابه‌جایی مقایسه شده‌اند. نتایج بدست آمده کارایی و دقت بالاتر روش غنی‌سازی - جابه‌جایی را نسبت به روش غنی‌سازی متداول نشان می‌دهند.

6- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش تطبیقی غنی‌سازی - جابه‌جایی در روش حداقل مربعات گسسته مختلط و برای بدست آوردن جواب‌هایی با دقت بالاتر در مسائل الاستیسیتیه خطی ارائه شد. روش ارائه شده، از دو روش غنی‌سازی و جابه‌جایی شبکه به طور همزمان استفاده می‌کند. در مرحله غنی‌سازی، مانند روش غنی‌سازی متداول، دیاگرام ورونوی برای مشخص کردن موقعیت گره‌هایی که باید به شبکه اضافه شوند، به کار برد. بعد از هر مرحله غنی‌سازی، خطای گره‌های جدید اضافه شده از روی خطای گره‌های آرایش تحلیل شده در مرحله قبلی تخمین زده شد. بعد از تکمیل فرایند غنی‌سازی و تخمین خطای گره‌های جدید اضافه شده، در هر مرحله یک فرایند جابه‌جایی شبکه به کار برد. و به همین ترتیب، فرایند غنی‌سازی - جابه‌جایی تا رسیدن به دقت مورد نظر ادامه یافت. از آنجا که در روش ارائه شده، از روش درون‌یابی برای تخمین خطای گره‌های جدید اضافه شده، بعد از هر مرحله غنی‌سازی استفاده شد، هزینه محاسباتی اضافی برای تحلیل مجدد صرف نشد و تعداد مراحل لازم برای تحلیل شبکه در روش غنی‌سازی - جابه‌جایی نسبت به روش غنی‌سازی متداول تغییر نکرد. روش غنی‌سازی - جابه‌جایی علاوه این که، مشکل نزدیکی بیش از اندازه برخی گره‌ها را که در روش غنی‌سازی متداول به علت بدشکلی سلول‌های ورونوی رخ می‌دهد رفع می‌کند، با دستیابی به یک آرایش هموار، جواب‌هایی با دقت بالاتر، در مقایسه با روش غنی‌سازی متداول، ارائه می‌کند؛ در حالی که از نظر هزینه محاسباتی روش ارائه شده تغییر محسوسی نسبت به روش غنی‌سازی متداول ندارد. مثال‌های عددی حل شده در حوزه الاستیسیتیه خطی و مقایسه جواب‌های

شکل 17 مقایسه تنش σ_{xx} بر روی مرز $x=0$ برای مثال دوم

شکل 18 مقایسه خطای دو روش غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی - جابه‌جایی در مراحل مختلف تطبیقی برای مثال دوم

- [12] M. Naisipour, M. H. Afshar, B. Hassani, A. R. Firoozjaee, Collocation discrete least square (CDLS) method for elasticity problems, *International Journal of Civil Engineering*, v7, pp. 9-18, 2009.
- [13] M. Afshar, M. Lashkarbolok, G. Shobeyri, Collocated discrete least squares meshless (CDLSM) method for the solution of transient and steady-state hyperbolic problems, *International journal for numerical methods in fluids*, Vol. 60, No. 10, pp. 1055-1078, 2009.
- [14] J. Amani, M. Afshar, M. Naisipour, Mixed discrete least squares meshless method for planar elasticity problems using regular and irregular nodal distributions, *Engineering analysis with boundary elements*, Vol. 36, No. 5, pp. 894-902, 2012.
- [15] M. Afshar, J. Amani, M. Naisipour, A node enrichment adaptive refinement in Discrete Least Squares Meshless method for solution of elasticity problems, *Engineering analysis with boundary elements*, Vol. 36, No. 3, pp. 385-393, 2012.
- [16] M. Afshar, M. Naisipour, J. Amani, Node moving adaptive refinement strategy for planar elasticity problems using discrete least squares meshless method, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 47, No. 12, pp. 1315-1325, 2011.
- [17] N. Sukumar, Construction of polygonal interpolants: a maximum entropy approach, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 61, No. 12, pp. 2159-2181, 2004.
- [18] M. Arroyo, M. Ortiz, Local maximum-entropy approximation schemes: a seamless bridge between finite elements and meshfree methods, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 65, No. 13, pp. 2167-2202, 2006.
- [19] G.-R. Liu, Y.-T. Gu, *An introduction to meshfree methods and their programming*: Springer, 2005.
- [20] L. Gu, Moving kriging interpolation and element-free Galerkin method, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 56, No. 1, pp. 1-11, 2003.
- [21] N. Sukumar, Z. Huang, J. H. Prévost, Z. Suo, Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 59, No. 8, pp. 1075-1102, 2004.
- [22] P. Lancaster, K. Salkauskas, Surfaces generated by moving least squares methods, *Mathematics of computation*, Vol. 37, No. 155, pp. 141-158, 1981.
- [23] S. Timoshenko, J. Goodier, *Theory of elasticity*, Third ed., New York: McGraw-Hill, 1970.

بدست آمده از روش پیشنهادی غنی‌سازی - جایه‌جایی با جواب‌های روش غنی‌سازی متداول و جواب‌های تحلیلی دقیق موجود برای مثال‌های عددی حل شده، کارایی و دقت بالاتر روش ارائه شده را نشان دادند.

7- مراجع

- [1] R. A. Gingold, J. J. Monaghan, Smoothed particle hydrodynamics-theory and application to non-spherical stars, *Monthly notices of the royal astronomical society*, Vol. 181, pp. 375-389, 1977.
- [2] M. Fleming, Y. Chu, B. Moran, T. Belytschko, Y. Lu, L. Gu, Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 40, No. 8, pp. 1483-1504, 1997.
- [3] T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu, Element-free Galerkin methods, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 37, No. 2, pp. 229-256, 1994.
- [4] S. Atluri, T. Zhu, A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics, *Computational mechanics*, Vol. 22, No. 2, pp. 117-127, 1998.
- [5] T. Liszka, C. Duarte, W. Tworzydlo, hp-Meshless cloud method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, No. 1, pp. 263-288, 1996.
- [6] E. Onate, F. Perazzo, J. Miquel, A finite point method for elasticity problems, *Computers & Structures*, Vol. 79, No. 22, pp. 2151-2163, 2001.
- [7] W. K. Liu, S. Jun, Y. F. Zhang, Reproducing kernel particle methods, *International journal for numerical methods in fluids*, Vol. 20, No. 8-9, pp. 1081-1106, 1995.
- [8] T. Zhu, J.-D. Zhang, S. Atluri, A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach, *Computational mechanics*, Vol. 21, No. 3, pp. 223-235, 1998.
- [9] H. Arzani, M. Afshar, Solving Poisson's equations by the discrete least square meshless method, *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, Vol. 42, pp. 23-31, 2006.
- [10] G. Shobeyri, M. Afshar, Simulating free surface problems using discrete least squares meshless method, *Computers & Fluids*, Vol. 39, No. 3, pp. 461-470, 2010.
- [11] A. R. Firoozjaee, M. H. Afshar, Discrete least squares meshless method with sampling points for the solution of elliptic partial differential equations, *Engineering analysis with boundary elements*, Vol. 33, No. 1, pp. 83-92, 2009.