ماهنامه علمى پژوهشى



مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بررسی اثرات پارامترهای طراحی در توپولوژی نهایی سازههای مسطح با روش بهبودیافته بهینهسازی تکاملی دوجهته سازه

سعيد شعباني نودهي¹، سيد رضا فلاحتكر^{2*}، رضا انصاري³

l -دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت 2-استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت 3-دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت *رشت، صندوق پستی3756، falahatgar@guilan.ac.ir

چکیدہ	اطلاعات مقاله
بهینهسازی توپولوژی سازه به دنبال دستیابی به بهترین چیدمان مواد در دامنه طراحی از پیش معینشده است. در این مقاله به بررسی تاثیر پارامترهای طراحی شامل پارامتر مقیاس طول و نرخ تکامل حجمی در روش بهبودیافته بهینهسازی تکاملی دوجهته سازهها با دیدگاه حذف نرم مواد پرداخته میشود. هدف اصلی در این روش بیشینه کردن سفتی سازه در یک حجم معین از مواد با استفاده از تحلیل المان محدود است. در	مقاله پژوهشی کامل دریافت: 21 بهمن 1394 پذیرش: 20 فروردین 1395 ارائه در سایت: 13 اردیبهشت 1395
— هر مرحله پس از تحلیل المان محدود، عدد حساسیت برای هر المان در بازهی طراحی محاسبه شده و به عدد حساسیت گرهای تبدیل میشود. با طرح یک فیلتر و بکارگیری یک مقیاس طول، عدد حساسیت بهبودیافتهای برای هر المان تعریف میشود. از این عدد بعنوان معیاری برای ارزش گذاری هر المان در بازه طراحی، بررسی حذف و اضافه نمودن المانها استفاده میشود. برای افزایش بیش تر همگرایی فرآیند بهینه -سازی، دقت عدد حساسیت المانی جدید با استفاده از اطلاعات مراحل پیشین بهبود مییابد. این روش مستقل از مش و همگرایی فرآیند بهینه -سازی، بهینه الگوی شطرنجی و جوابهای محلی مشاهده نمیشود. با استفاده از سه نمونهی طراحی، تیر یک سر گیردار، تیر کلاسیک و سازه نوع میشل، به بررسی عوامل تاثیرگذار بر طرح نهایی سازه پراذخه میشود. با تغییر پارامتر مقیاس طول طرحهای مختلفی در سازه نهایی مشاهده میشود که تعداد مراحل همگرایی با افزایش این پارامتر بیشتر شده است. کاهش نرخ تکاملی حجمی نیز موجب ایجاد توپولوژی نهایی کاملا میشود که تعداد مراحل همگرایی با افزایش این پارامتر بیشتر شده است. کاهش نرخ تکاملی حجمی نیز موجب ایجاد توپولوژی نهایی کاملا متفاوت و حتی نامتقارن شده و افزایش آن، طرحهای حامله نزدیکتر به توپولوژی بهینه ایجاد میکند.	<i>کلید واژگان:</i> بهینهسازی تکاملی سازه حذف نرم پارامتر مقیاس طول نرخ تکاملی

Studying the effects of design parameters on the final topology of planar structures by improved bi-directional evolutionary structural optimization method

Saeed Shabani Nodehi, Seyed Reza Falahatgar^{*}, Reza Ansari

Department of Mechanical Engineering, Guilan University, Rasht, Iran. *P.O.B. 3756, Rasht, Iran, falahatgar@guilan.ac.ir

ARTICLE INFORMATION	ABSTRACT
Original Research Paper Received 10 February 2016 Accepted 08 April 2016 Available Online 02 May 2016	Topology optimization of structure seeks to achieve the best material distribution in the Pre-deter design domain. In this paper, the effect of design parameters including length scale parameter evolutionary volume ratio in improved bi-directional evolutionary structural optimization methor soft kill approach is discussed. The main aim of this method is searching for the stiffest structure
<i>Keywords:</i> Evolutionary structural optimization Soft kill Length scale parameter Evolutionary ratio	given volume of material using finite element method. At each iteration of finite element analysis, sensitivity number is calculated for each individual element in design domain and then converted to the nodal sensitivity number. With Filter Scheme and using length scale, an improved sensitivity number is defined. This number is used as a criterion for rating each element in design domain and determining the addition and elimination (remove) of elements. To increase the convergence of the optimization process, the accuracy of the new elemental sensitivity numbers is improved by considering the sensitivity history. This method is convergent and mesh-independent and there are no checkerboard patterns and local solutions in optimal topologies. Using three design samples, a cantilever and classical beam and Michell type structure, affecting factors will be discussed on the final design of the structure. Change of length scale parameter produces various schemes in final structures in which, with increasing this parameter, more iteration is needed for convergent solution. Reducing evolutionary volume ratio forms different and even asymmetric topologies. Better optimized topologies are obtained with higher evolutionary volume ratios.

Please cite this article using:

S. Shabani Nodehi, S. R. Falahatgar, R. Ansari, Studying the effects of design parameters on the final topology of planar structures by improved bi-directional evolutionary structural optimization method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 5, pp. 29-38, 2016 (in Persian)

1- مقدمه

در دههای اخیر بهینهسازی سازهها با توجه به محدود بودن منابع مواد، اثرات زیست محیطی و نیاز به سازههای سبکتر و کم هزینهتر با کارایی بهتر مورد توجه قرار گرفتهاست. بهینهسازی سازهها به دنبال دستیابی به بهترین عملکرد برای یک سازه در حالتی است که قیدهای گوناگونی مانند مقدار ماده معین را تامین کند. در گذشته برای حل مسائل بهینهسازی سازه از تكنيكهاى مختلف برنامهنويسى رياضي¹ استفاده مىشد. اين روشها اغلب برای دستیابی به چیدمان بهینه ناکارآمد و نامناسب بودند. برای غلبه بر این مسائل معیارهای بهینگی²و نظریه چیدمان بهینه³ مطرح شده و توسعه پیدا کردند. استفاده از مبنای المان محدود در بهینهسازی توپولوژی سازه با پیشنهاد روش همگنسازی⁴ توسط بندسیکو و کیکوچی [1] مطرح شد. در این روش مواد در هر المان از تعداد نامحدودی سلول های میکروسکوپی دارای درجات مختلف جامد/تهی ⁵ تشکیل شدهاند که یک محیط متخلخل را تشکیل مىدهد [2]. اين روش ضمن اينكه نتايج قابل توجهى ارائه مىدهد اما داراى نقاط ضعفی از قبیل همگرا شدن به جوابهای بهینه محلی، روابط نسبتا پیچیده ریاضی و پیدایش نقصهایی از قبیل نواحی شطرنجی و خاکستری در نتايج آن است [3].

روشهای بهینهسازی تکاملی سازه⁶ یکی از پرطرفدارترین روشهای بهینهسازی توپولوژی است که بر اساس مفهوم ساده حذف تدریجی مواد غیر کارآمد از یک سازه استوار است. در حین این فرآیند شکل و توپولوژی سازه به سمت بهینه شدن تکامل مییابند. این روش اولین بار توسط زی و استیون [5,4] پیشنهاد شد که اساس آن حذف تدریجی مواد دارای تنش پایین از ساختار سازه بود. چو و همکارانش [7,6] برای ماکزیمم کردن سفتی⁷ سازه معیار تنش را با معیار انرژی کرنشی المانی جایگزین کردند و یک روند تکاملی بر اساس تحلیل المان محدود برای مینیمم کردن وزن سازه در حالتی که سفتی مورد نیاز را تامین کند، ارائه دادند. سپس آنها [8] به بررسی جنبههای مختلف این روند مانند تاثیر نرخ حذف المان، اندازهی مش و نوع المان در توپولوژیهای بهینه پرداختند.

نتایج حاصله از روشهای بهینهسازی تکاملی سازه ممکن است شامل جوابهای بهینه محلی باشد که به دلیل عدم بررسی کل بازه طراحی پس از حذف المانها حاصل میشود. برای رفع این مشکل الگوریتم تکاملی سازه دو جهته توسط کوئرن و همکارانش [9] ارائه شد. این الگوریتم تمام جهتهای ممکن برای کم کردن مقدار تنش را بررسی میکند که نه تنها شامل حذف مواد در نقاط کم تنش است بلکه اضافه کردن مواد در نقاط با تنش بالا را نیز شامل میشود. یانگ و همکارانش [10] به توسعه روش دوجهته بهینهسازی تکاملی سازه برای بهینهسازی توپولوژی سازه تحت قیود سفتی و جابجایی معین شده، پرداختند. مفاهیم اولیه روش بهینهسازی تکاملی سازه دو جهته ماند برونیابی جابهجایی در این مقاله پیشنهاد و روند بهینهسازی ارائه شد.

وجود الگوی شطرنجی در طرح نهایی یکی دیگر از کاستیهای روشهای مذکور است. الگوی شطرنجی به پدیده حضور متناوب المانهای جامد و تهی در یک بخش از سازه که تشکیل بخشی شبیه صفحه شطرنج را میدهند گفته میشود [11]. این الگوها در روشهای مختلف بهینهسازی سازه بر

حذف كامل يك المان جامد از دامنه طراحي مي تواند منجر به مشكلات تئوری در بهینهسازی توپولوژی شود. به نظر میرسد حذف مستقیم متغیر طراحی (یک المان) در مساله بهینهسازی توپولوژی غیر منطقی است. یک راه جایگزین برای از بین بردن موثر المان، کاهش مدول الاستیک المان یا کاهش يكي از ابعاد مشخصه المان مانند ضخامت، به مقادير كوچك است. هينتون و ساینز [16] مدول الاستیک المانهای حذف شده را با تقسیم بر ضریب **10**⁵ کاهش دادند. روزانی و کوئرن [17] روش رد و پذیرش متوالی المان را پیشنهاد کردند که در آن المان تهی با یک المان نرم با چگالی خیلی پایین جایگزین میشود. دیدگاه مشابهی برای روش بهینهسازی تکاملی دوجهته سازه توسط ژو و همکارانش [18] ارائه شد که در آن یک نوع سلول میکروسازهای معرفی شد تا جایگزین المان تهی شود. اما در نتایج این روشها در مقایسه با توپولوژیهای روش اصلی بهینهسازی تکاملی سازه تغییر قابل توجهای مشاهده نمی شود. سپس هیوانگ و زی [19] به معرفی روشی بر اساس دیدگاه حذف نرم⁸ برای بهینهسازی تکاملی دوجهته سازهها پرداختند. این فرآیند مشکلات تئوری روشهای پیشین را ندارد. روش بهبودیافته بهینهسازی تکاملی دوجهته سازه در طیف گستردهای از مسائل طراحی کاربرد دارد. برای نمونه سان و همکارانش [20] با استفاده از این روش و تعریف مجددی از معیارهای بهینگی، به بهینهسازی سازههایی از جنس مواد کامپوزیت ناهمسانگرد^و پرداختند. همچنین هیوانگ و زی [21] با بهره گیری از این روش بهینهسازی سازههای تحت بارهای وابسته به طراحی (بارگذاری تحت وزن سازه) را بررسی کردند. در زمینهی کارهای داخلی میتوان به مقاله قدوسیان و همکارانش [22] اشاره کرد. آنها با استفاده از روش بهینهسازی تکاملی دوجهته سازه اولیه و بکارگیری تنش بیشینه و میانگین وزنی به بهینهسازی شکل سطوح تماس در سازههای تحت بارگذاری چندگانه

¹ Mathematical Programming (MP)

² Optimality Criteria (OC) ³ Optimal layout theory

⁴ Homogenization method

⁵ Solid/Void

⁶ Evolutionary Structural Optimization (ESO)

اساس روش المان محدود رایج هستند. چنین اشکال و توپولوژیهایی با الگوهای شطرنجی در عمل غیرقابل قبول بوده و موجب عدم توزیع مطلوب مواد، دشواری در تولید شکل هندسی سازه و ناپایداری عددی در فرآیند تكامل مي شوند. مانيكاراجا و همكارانش [12] نشان دادند كه استفاده از المان های با مرتبه بالاتر، به عنوان مثال المان های هشت گرهای، می تواند ایجاد الگوی شطرنجی را به طور قابل توجهی کاهش دهد. اما این روش بدلیل افزایش قابل توجه در زمان محاسباتی یک راه حل مناسب محسوب نمی شود. لی و همکارانش [13] به معرفی یک تکنیک هموار کردن ادراکی ساده پرداختند. این روش بر اساس میانگین وزنی عدد حساسیت و هموار کردن مقدار عدد حساسیت هر المان با در نظر گرفتن مقادیر عدد حساسیت المانهای اطراف آن است. این دیدگاه مشبندی مدل المان محدود را تغییر نمیدهد و موجب افزایش درجه آزادی سیستم نمی شود. بنابراین در بهرهوری محاسباتي تاثير نمي گذارد. با اين حال، اين الگوريتم هموارسازي نمي تواند به مشكل وابستگى به مش غلبه كند. وابستگى به مش نيز موجب ايجاد توپولوژیهای مختلف با تغییر مشبندی در تحلیل المان محدود می شود. با یک مش ریزتر، فرآیند عددی بهینهسازی توپولوژی منجر به نتایجی با عضوهای بیشتر و با اندازهی کوچکتر میشود. در حالت ایدهآل، پالایش مش باید نتایج بهتری در مدل المان محدود طرح نهایی و تشریح شرایط مرزی ایجاد کند [14]. هیوانگ و زی [15] الگوریتم بهبودیافتهای را برای بهینه سازی تکاملی دوجهته سازه معرفی کردند که علاوه به حل مشکل وابستگی به مش، موجب همگرایی روش بهینه سازی تکاملی دوجهته سازه میشود.

⁸ Soft-kill ⁹ Anisotropic

يرداختند.

در مقاله حاضر روش بهبودیافته بهینهسازی تکاملی دوجهته سازه بر اساس دیدگاه حذف نرم بیان میشود. این روش یک روش ریاضی بر اساس گرادیان است که در ابتدا مقدار عدد حساسیت برای هر المان محاسبه شده و با طرح یک فیلتر این عدد حساسیت بهبود می یابد. سپس با حذف و اضافه المانها در هر مرحله، توپولوژی سازه به سمت بهینه شدن تکامل مییابد. در ادامه آن تاثیر پارامترهای طراحی مقیاس طول و نرخ تکاملی در طرح نهایی چند سازه با شرایط مرزی مختلف بررسی میشود.

2- بهینهسازی توپولوژی

1-2- بيان مساله

(1)

بهینهسازی توپولوژی اغلب در پی یافتن سفت ترین سازه ممکن در یک حجم معین از مواد با در نظر گرفتن قیدهای طراحی است. ایده اصلی روش بهینهسازی تکاملی دوجهته یافتن توپولوژی بهینهی سازه با حذف تدریجی المانهای ناکارآمد و اضافه نمودن تدریجی المانهای موثر در یک سازه است. نکته کلیدی در این روش بکارگیری یک معیار مناسب است که امکان ارزیابی سهم هر المان در رفتار کلی سازه را امکانپذیر کند. مساله بهینهسازی برای سفتی را میتوان به شیوهی معادله (1) بیان کرد:

کمینهسازی:
$$C = \frac{1}{2} \mathbf{f}^{\mathsf{T}} \mathbf{u}$$

: $\sum_{i=1}^{N_e} v_i x_i = V^*$

$$x_i = x_{\min}$$
 يا

که در آن **آ**و 🛚 بیانگر بردار نیرو و جابجایی و C تابعهدف، نرمی^۱ میانگین سازه (معکوس سفتی کل سازه) است. نرمی میانگین را میتوان انرژی کرنشی کل سازه یا کار خارجی انجام شده توسط بارهای اعمالی تعریف $N_{
m e}$ کرد. V^* حجم کل مادہ از پیش تعیین شدہ و v_i برابر حجم هر المان و تعداد كل المانها مىباشد. متغير طراحى x_i بيانگر چگالى نسبى المان *أ*ام است که می توان آن را برای المان های جامد برابر 1 و یا مقدار کوچک معین شده (به عنوان مثال 0.001) برای المانهای نرم در نظر گرفت. این مقدار نشان میدهد هیچ المانی مجاز نیست که به طور کامل از بازهی طراحی حذف شود. این برخلاف حالتی است که در دیدگاه حذف سخت² روی میدهد. در دیدگاه حذف سخت x_{min} برابر صفر در نظر گرفته میشود و نشان دهنده عدم وجود المان يا المان تهى است.

2-2- الگوريتم بهينهسازي

(2)

در روش بهینهسازی تکاملی دوجهته سازه با دیدگاه حذف نرم برای ارزیابی سهم هر المان در بازهی طراحی از عدد حساسیت المانی استفاده میشود. در ابتدا مدول یانگ مواد میانی به عنوان یک تابع از چگالی المان به صورت معادله (2)، درونیابی می شوند. این طرح که در دیدگاه حذف نرم کاربرد دارد، طرح میانیابی مواد³ نامیده میشود:

عدد حساسیت المانی از گرادیان ${\mathbb Z}$ یری تابع هدف C با توجه به متغیر

 $E(x_i) = E_1 x_i^p$

طراحی با استفادہ از روش الحاقی مطابق معادلہ (3) بدست میآید [19]:

$$\alpha_i = -\frac{1}{p} \frac{\partial C}{\partial x_i}$$
(3)

بنابراین عدد حساسیت برای المانهای جامد و نرم به صورت معادله (4)

است:

$$\alpha_{i} = -\frac{1}{p} \frac{\partial C}{\partial x_{i}} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{u}_{i}^{\mathrm{T}} \mathbf{K}_{i}^{0} \mathbf{u}_{i} & \mathbf{x}_{i} = \mathbf{1} \\ \frac{x_{\min}^{p-1}}{2} \mathbf{u}_{i}^{\mathrm{T}} \mathbf{K}_{i}^{0} \mathbf{u}_{i} & \mathbf{x}_{i} = x_{\min} \end{cases} \quad (4)$$

لازم بذكر است عدد حساسيت براى المانهاى نرم بستكى به انتخاب توان جريمه p دارد. زماني که توان جريمه به سمت بي نهايت ميل کند، عدد حساسيت براي المانها به صورت معادله (5) خواهد بود:

$$\alpha_{i} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{u}_{i}^{\mathrm{T}} \mathbf{K}_{i}^{0} \mathbf{u}_{i} & z_{i} = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{x}_{i} = x_{\min} \end{cases}$$
(5)

این معادله نشان میدهد، عدد حساسیت المانهای جامد و تهی بهترتیب برابر انرژی کرنشی المانی و صفر است. معادله (5) مطابق با عدد حساسیت دیدگاه حذف سخت روش بهینهسازی تکاملی دوجهته سازهها است. در نتیجه زمانی که یک المان جامد از سازه حذف می شود، تغیرات نرمی میانگین یا انرژی کرنشی کل برابر انرژی کرنشی المانی خواهد بود. در روش اصلی بهینهسازی تکاملی سازه برای کمینه کردن میانگین نرمی از طريق حذف المانها، موثرترين راه حذف المانهايي است كه كمترين مقادير عدد حساسیت المانی را دارا هستند تا موجب شود افزایش C کمینه گردد.

در روش بهبود یافته بهینهسازی تکاملی دوجهته سازه یک طرح فیلتر مورد استفاده قرار خواهد گرفت تا موجب هموار کردن عدد حساسیت در کل بازه طراحی شود. در نتیجه به کارگیری این فیلتر، مشکل وابستگی به مش و الگوی شطرنجی حل خواهد شد.

قبل از استفاده از قضیه فیلتر، عدد حساسیت گرهای که مفهوم فیزیکی خاصی ندارد، با میانگین گیری از عدد حساسیت المانی برای هر گره تعریف می شود:

$$\alpha_i^n = \sum_{i=1}^m w_i \alpha_i^{\rm e} \tag{6}$$

که در آن M تعداد کل المان های متصل به گره jام است. w_i فاکتور (7) وزنى المان iام و $\sum_{i=1}^{M} w_i = \sum_{i=1}^{M} w_i$ است. w_i را مىتوان بصورت معادله تعريف كرد:

$$w_i = \frac{\mathbf{1}}{M - \mathbf{1}} \left(\mathbf{1} - \frac{r_{ij}}{\sum_{1}^{M} r_{ij}} \right) \tag{7}$$

که در آن r_{ij} فاصله بین مرکز المان *i*ام و گره *j*ام است. فاکتور وزن فوق نشان میدهد هرچه المان به گره نزدیکتر باشد، عدد حساسیت المانی تاثیر بیشتری بر عدد حساسیت گرهای می گذارد.

حال مانند شکل 1 به طرح یک فیلتر برای تبدیل عدد حساسیت گرهای به عدد حساسیت بهبود یافته برای هر المان در بازه طراحی پرداخته می شود. این فیلتر شامل یک مقیاس طول r_{\min} است که با پالایش مش تغییر نمی-کند. این مقیاس را می توان با رسم یک دایره به شعاع r_{\min} در مرکز المان ام تجسم کرد. بنابراین زیر دامنه دایرهای شکلی Ω_i به شعاع $r_{
m min}$ بوجود میiآید. معمولا مقدار $r_{
m min}$ باید به اندازه کافی بزرگ باشد که Ω_i بیشتر از یک المان را شامل شود. اندازه زیر دامنه Ω_i با تغییر اندازه مش تغییر نمی کند .[23]

گرههایی که در داخل Ω_i قرار دارند در محاسبه عدد حساسیت بهبود

м

Compliance

Hard-kill ³ Material Interpolation Scheme





Fig.1 Nodes located inside the circular sub-domain Ω_i are used in the filter scheme for the *i*th element [23]

شکل 1 گره های واقع شده در داخل زیردامنه Ω در طرح فیلتر برای المان *i*ام استفاده میشوند [23]

یافته المان iام $lpha_i$ مطابق معادله (8) شرکت می کنند:

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=1}^{k} w(\mathbf{r}_{ij}) \alpha_j^n}{\sum_{j=1}^{k} w(\mathbf{r}_{ij})}$$
(8)

که k تعداد کل گرههای موجود در زیردامنه Ω است و w(**r**_{ij}) فاکتور وزنی خطی است که به صورت معادله (9) تعریف میشود:

عددی بهینه سازی توپولوژی مانند الگوی شطرنجی و وابستگی به مش به شیوه موثری از بین میروند.

در روشهای بهینه سازی تکاملی سازه نوسانات زیادی در روند تکاملی تابع هدف مشاهده میشود که علت آن گسسته بودن متغیرهای طراحی است. اگر چه در روش حذف نرم شاهد نوسانات کمتری هستیم، برای پایدارتر شدن این روند یک راه موثر میانگین گیری از عدد حساسیت با عدد مرحله قبلی است. یک طرح میانگین گیری ساده مطابق معادله (10) است:

$$\alpha_i = \frac{\alpha_i^k + \alpha_i^{k-1}}{2} \tag{10}$$

که k شمارهی مرحله جاری است. در نتیجه در هر مرحله عدد حساسیت بهروز رسانی شده و روند تکاملی پایدارتر میشود.

پیش از حذف و اضافه نمودن مواد در هر مرحله، حجم هدف برای مرحله بعد (V_{k+1}) باید تعیین شود. زیرا قید حجمی (V) می تواند بیشتر یا کمتر از حجم طرح اولیه باشد. حجم هدف در هر مرحله ممکن است به تدریج افزایش یا کاهش یابد تا زمانی که قید حجمی تامین گردد. تکامل حجم را می توان به صورت معادله (11) بیان کرد:

 $V_{k+1} = V_k (1 \pm ER)$, (k = 1,2,3,...) (11) $V_{k+1} = V_k (1 \pm ER)$, (k = 1,2,3,...) (11) $V_{k+1} = V_k$ (12) ثابت باقی می ماند، $V_{k+1} = V^*$ (12)

عدد حساسیت برای تمام المانها، هم المانهای جامد و هم المانهای

نرم مانند آنچه بیان شد، محاسبه میشود. المانها با توجه به مقدار عدد حساسیت بهبود یافته خود از مقدار بیشتر به کمتر مرتب میشوند. برای المانهای جامد عدد یک (1) در نظر گرفتهشده و المانهایی که مقدار عدد حساسیت آنها کمتر از مقدار حساسیت آستانه باشد، حذف (تبدیل به (0.001 میشوند: $\alpha_i \leq \alpha_{dal}^{th}$

$$\alpha_i \leq \alpha_{del}^{th}$$

و برای المانهای نرم (x_{min})، المانهایی که عدد حساسیت آنها بیش-تر از مقدار حساسیت آستانه باشد، با تبدیل به (1) به جمع المانهای موجود اضافه میشوند:

$$\alpha_i \ge \alpha_{\rm del}^{\rm th} \tag{14}$$

که $lpha_{ ext{th}}$ عدد حساسیت آستانه برای حذف و اضافه نمودن المانها است، که در شکل 2 الگوریتم بدست آوردن آن بیان شده است [24].

چرخه تحلیل المان محدود و حذف و اضافه المانها تا زمانی که حجم مورد نظر (*V) بدست آید و معیار همگرایی (14) که تغییرات تابع هدف است تامین شود، ادامه می یابد:

error =
$$\frac{\left|\sum_{i=1}^{N} C_{k-i+1} - \sum_{i=1}^{N} C_{k-i+1}\right|}{C_{k-i+1}} \le \tau$$
(15)

N که در آن M شمارهی مرحله جاری، au تلرانس همگرایی قابل قبول و Nیک عدد صحیح است که معمولا 5 در نظر گرفته میشود، که بیان میکند تغییرات نرمی در 10 مرحله آخر باید در حد قابل قبولی کوچک باشد [51]. بنابراین روند فرآیند بهبودیافته بهینهسازی تکاملی سازه برای بهینهسازی سفتی را میتوان در 6 گام بیان کرد:

گام 1) تعریف بازه طراحی، بارگذاری، شرایط مرزی و گسستهسازی دامنه طراحی با استفاده از مش المان محدود.

گام2) اجرای تحلیل المان محدود و محاسبه عدد حساسیت المانی بهبود یافته مطابق با معادله (8).

گام3) میانگین گیری از عدد حساسیت با استفاده از مقدار مرحله پیشین با استفاده از معادله (10) و سپس ذخیره کردن عدد حساسیت برای مرحله بعدی.

Input: sensitivities α_i , design variables x_i , target volume V_{k+1} , Output: threshold sensitivity α_{th}

 $lo = \min(\alpha_i), hi = \max(\alpha_i)$ While (hi-lo)/hi > 0.00001 $\alpha_{th} = (hi + lo)/2$ For $i = 1 \cup N_e$ If $\alpha_i(i) > \alpha_{th}$ $x_i = 1$ Else $x_i = 0.001$ EndIf If (sum(x_i)-V_{k+1}) > 0 lo = α_{th} Else hi = α_{th} EndIf EndIf

مهندسی مکانیک مدرس، مرداد 1395، دوره 16، شماره 5

EndWhile

Fig.2 The used algorithm in BESO for finding the sensitivity threshold شکل 2 الگوریتم استفاده شده در روش بهینهسازی تکاملی دوجهته سازه برای یافتن عدد حساسیت آستانه

گام4) معين كردن حجم هدف برای مرحله بعد با استفاده از معادله(11). گام5) حذف و اضافه المانها مطابق با الگوريتم شكل (2).

گام6) تکرار مرحله 2- 5 تا زمانی که قید حجمی(*V) بدستآید و معیار همگرایی (14) تامین شود.

APDL در مقاله حاضر این الگوریتم در محیط برنامه نویسی انسیس انسیس [25] پیادهسازی شده است. در مدلسازی انجام شده نیز المان صفحهای چهارگرهی PLANE182 مورد استفاده قرار گرفته است.

3- تأثير پارامترها

1-3- مقياس طول

نقش ابتدایی پارامتر مقیاس *r*_{min} در طرح فیلتر، مشخص کردن گرههایی است که در عدد حساسیت المان *i*ام تاثیرگذارند. در حقیقت هر چه این مقیاس بیشتر باشد، شعاع دایره بزرگتر شده و تعداد گرههای مشمول بیش-تر میشود و در نتیجه از لحاظ ظاهری مقدار عدد حساسیت جدید برای هر المان هموارتر میگردد. مقدار توصیه شده برای این پارامتر 1 تا 3 برابر اندازهی المان بکار رفته در طراحی است [15]. در این مقاله نشان داده شده حتی با استفاده از مقادیر توصیهشده، طرحهای نهایی حاصله با یکدیگر متفاوت است. در نتیجه اگرچه با استفاده از طرح فیلتر وابستگی به مش از بین میرود اما میتوان گفت توپولوژی نهایی سازه تا حدی به پارامتر مقیاس طول وابسته است.

2-3- نرخ تکاملی حجمی

نقش پارامتر نرخ تکاملی حجمی، مشخص کردن حجم ماده در هر مرحله است. به عبارت دیگر این پارامتر تعداد المانهایی را که در هر مرحله تا رسیدن به حجم مورد نظر حذف میشوند، مشخص میکند. تغییر این پارامتر نیز موجب تغییر در طرح بهینه نهایی میشود. نشان داده میشود حذف کمتر المانها در هر مرحله موجب بهبود توپولوژی بهینه سازه نمیشود.

4- نمونههای مورد بررسی

نمونههای طراحی ارائه شده در این مقاله از مطالعات پیشین انتخاب شده است. تمامی این نمونهها در گذشته مورد تحقیق قرار گرفته و تعدادی از پژوهشگران برای اثبات دیدگاه خود و یا نوآوری در روشهای تکاملی از این نمونهها استفاده کردهاند.

1-4- نمونه 1

در این نمونه به بهینه سازی سفتی تیر یک سرگیردار نشان داده شده در شکل 3 پرداخته می شود. بازه طراحی دارای 80 میلی متر طول و 50 میلی متر ارتفاع و به ضخامت 1 میلی متر است. نیروی 100 نیوتن به مرکز سطح آزاد آن وارد می شود. مدول یانگ برابر 100 گیگا پاسکال و ضریب پوآسون 0.3 در نظر گرفته می شود. حجم نهایی نیز برابر 50% حجم اولیه فرض می شود. بهینه سازی تکاملی دو جهته با مش بندی کل بازه طراحی با 50×80 المان مربعی چهار گره آغاز می شود. پارامترهای ثابت در روش بهینه سازی تکاملی دوجهته سازه برابر π = 0.100 π و آ

ابتدا نرخ تکاملی حجمی را ثابت و برابر **ER = 1%** در نظر گرفته و برای $r_{\min} = 2 \text{ mm} \cdot r_{\min} = 1.5 \text{ mm}$ و پارامتر مقیاس طول مقادیر متفاوت $r_{\min} = 1.5 \text{ mm}$ و $r_{\min} = 3 \text{ mm}$ فرض میشود. توپولوژی های بهینه سازه به ترتیب در شکل (a-c) 4 نشان داده شده است.







Fig.4 Optimal topology for cantilever beam with **ER = 1%**: (a) $r_{\min} = 1.5 \text{ mm}$; (b) $r_{\min} = 2 \text{ mm}$; (c) $r_{\min} = 3 \text{ mm}$

شكل 4 توپولوژى بهينه براى تير يک سرگيردار با نرخ تكاملى 1 درصد: r_{min} **= 3 mm** (c); r_{min} **= 2 mm** (b) ; r_{min} **= 1.5 mm** (a)

مقدار میانگین نرمی توپولوژی نهایی به ترتیب برابر Nmm 1.8650، میانگین Nmm و Nnm است، شکل b(4) دارای کمترین مقدار میانگین نرمی در این حالت است. در این شکلها طول ضلع هر المان برابر 1 میلی متر در نظر گرفته شده و اندازه پارامتر مقیاس طول بهترتیب 1.5، 2 و 3 برابر طول المان است. همان طور که مشاهده می شود افزایش پارامتر مقیاس در محدوده ی پیشنهاد شده، موجب ایجاد تفاوت در طرح نهایی سازه می شود.

لازم به ذکر است، تعداد المانهای موجود در توپولوژیهای بهینه مختلف یکسان بوده و این تعداد با توجه به قید حجمی تعیین میشود. در نتیجه تفاوت در سختی سازههای نهایی به سبب نحوهی توزیع مواد در بازهی طراحی است.

حال در قسمت دوم تنها نرخ تکاملی سازه را از مقدار **1% ER = 1%** به تغییر داده و با استفاده از همان سه مقدار پارامتر طول به بهینه سازی سازه پرداخته میشود. شکل 5 توپولوژی سازه را برای نرخ حذف 2



 Fig.5 Optimal topology for cantilever beam with ER = 2%:
 (a)

 $r_{\min} = 1.5 \text{ mm}$; (b) $r_{\min} = 2 \text{ mm}$; (c) $r_{\min} = 3 \text{ mm}$ (a)

 $m \ge 1.5 \text{ mm}$; (b) $r_{\min} = 2 \text{ mm}$; (c) $r_{\min} = 3 \text{ mm}$ (c) $r_{\min} = 3 \text{ mm}$
 $m \ge 1.5 \text{ mm}$; (c) $r_{\min} = 2 \text{ mm}$ (b); $r_{\min} = 1.5 \text{ mm}$ (a)

درصد نشان میدهد.

مقدار میانگین نرمی توپولوژی نهایی شکل 5 به ترتیب برابر مقدار میانگین نرمی توپولوژی نهایی شکل 5 به ترتیب برابر کمترین مقدار میانگین نرمی برای شکل 3(a) است. نرخ تکاملی 2 درصد به معنای حذف 80 المان در هر مرحله تا رسیدن به حجم مورد نظر خواهد بود. این تعداد المان دو برابر حالت قبلی است. با وجود حذف المان بیشتر در هر مرحله طرحهای حاصله از مقبولیت بیشتری برخودار است و طرح شکل (c) به نتایج هیوانگ و زی [19] شباهت دارد که مقدار میانگین نرمی آن برابر MMS 1.865 محاسبه شده بود.

در شکل 6 روند بهینهسازی تیر یک سرگیردار برای شکل (c،a) نشان داده شده است. محور افقی شمارهی هر مرحله و محورهای عمودی به ترتیب نسبت حجمی سازه و میانگین نرمی طی فرآیند تکامل را نشان میدهد. مشخص است که میانگین نرمی با حذف المانها به تدریج افزایش و حجم سازه کاهش مییابد.

همانگونه که در شکل 6 مشاهده میشود، برای mm = **3 mm** شرط همگرایی در مرحله 50 تامین شده و مقدار میانگین نرمی اندکی بیش تر است، در حالی که با r_{min} = **1.5 mm** شرط همگرایی در مرحله 44 تامین میشود. در این نمونه افزایش پارامتر مقیاس طول موجب بیش تر شدن تعداد مراحل مورد نیاز تا تامین شرط همگرایی (15) خواهد شد.

4-2- نمونه 2

در نمونه 2 به تحلیل تیر نشان داده شده در شکل 7 با استفاده از دو شرط



Fig.6 Evolution histories of the compliance and the volume fraction for fig.5(a,c)

شکل 6 روند تکاملی میانگین نرمی و نسبت حجمی سازه برای شکل 5(c*،*a)

مرزی و بارگذاری متفاوت پرداخته میشود. در حالت اول بار 100 نیوتن به مرکز سطح پایینی آن وارد شده است. بازه طراحی دارای 240 میلیمتر طول و 40 میلیمتر ارتفاع، به ضخامت 1 میلیمتر است. تکیهگاه سمت راست غلتکی و تکیهگاه سمت چپ تکیهگاه ساده است. مدول یانگ برابر 200 گیگا پاسکال و ضریب پوآسون 0.3 فرض میشود. حجم نهایی برابر 50% حجم اولیه در نظر گرفته میشود. کل بازه طراحی به 20×120 المان مربعی چهار گره تقسیم میشود. پارامترهای ثابت در روش بهینه سازی تکاملی دوجهته سازه برابر **%ma = 0.001** (τ = 0.11 س

ابتدا نرخ تکاملی حجمی را ثابت و برابر **ER = 2%** در نظر گرفته و برای $r_{\min} = 4 \text{ mm}$ و $r_{\min} = 3 \text{ mm}$ و $r_{\min} = 4 \text{ mm}$ و $r_{\min} = 3 \text{ mm}$ و r_{\min} و میشود. در شکل 8 طرحهای بهینه سازه با استفاده از روش بهینه سازی تکاملی دوجهته سازه نشان داده شده است.

مقدار میانگین نرمی طرح نهایی به ترتیب Nmm 2.3552 و مقدار میانگین نرمی طرح نهایی به ترتیب Nmm 2.3479Nmm مقیاس طول به ترتیب 1.5 و 2 برابر اندازه المان در نظر گرفته شده است. شکل 8(d) دارای میانگین نرمی اندکی کمتر است و به نتایج هیوانگ و زی [23] شباهت دارد که مقدار میانگین نرمی آن برابر Nmm 2.38 محاسبه شده بود.

برای قسمت دوم تنها نرخ تکاملی سازه از مقدار **8 = ER** به ۷۵ المان داده شده، یعنی تا رسیدن به حجم نهایی در هر مرحله ۱۹۵ المان (نصف حالت قبل) از سازه به المان نرم تبدیل می شوند. شکل ۱۹۵ نشان دهندهی توپولوژی بهینه سازه با نرخ حذف حجمی 1 درصد است.



شکل 7 بازه طراحی و شرایط تکیه گاهی برای تیر



شکل 8 توپولوژی بهینه برای تیر یک با نرخ تکاملی 2 درصد: رست (b) ; r_{\min} = **3 mm** (a)



(b) Fig.9 Optimal topology for beam with **ER = 1%**: (a) r_{\min} = 3 mm ; (b) r_{\min} = 4 mm شکل 9 توپولوژی بهینه برای تیر یک با نرخ تکاملی 1 درصد:

 $r_{\min} = 4 \text{ mm}$ (b) ; $r_{\min} = 3 \text{ mm}$ (a)

در این حالت نیز مقدار میانگین نرمی به ترتیب Nmm 2.3307 و 2.3456 و 2.4456 Nmm است. همان طور که مشاهده می شود شکل9 (b) که در آن المان های کمتری در هر مرحله نسبت به شکل 8(b) حذف شده است، علاوه بر نامتقارن بودن، میانگین نرمی بیشتری دارد.

در شکل 10 روند تکاملی تیر نمونه 2 برای شکل 8 نشان داده شده است. تعداد مراحل تا تامین شرط همگرایی برای هر دو پارامتر مقیاس طول 49 مرحله است و میانگین نرمی توپولوژیهای نهایی تقریبا یکسان است.

برای حالت دوم بازهی طراحی همانند شکل 7 است، با این تفاوت که تکیهگاه غلتکی به تکیهگاه ساده تبدیل شده و بار 100 نیوتن به مرکز سطح بالایی تیر وارد میشود. شکل 11 بازهی طراحی و نحوهی بارگذاری را برای این حالت نشان میدهد. پارامترهای طراحی برابر حالت اول است.

نرخ تكاملى حجمى را ثابت و برابر $\mathbf{FR} = \mathbf{1}^{*}$ در نظر گرفته و براى $r_{\min} = \mathbf{4} \, \mathbf{mm}$ و $r_{\min} = \mathbf{3} \, \mathbf{mm}$ و مقادير متفاوت $r_{\min} = \mathbf{4} \, \mathbf{mm}$ و r_{\min} و فرض مىشود. در شكل 12 طرحهاى بهينه سازه با استفاده از روش بهينهسازى تكاملى دوجهته سازه نشان داده شده است.

مقدار میانگین نرمی طرح نهایی به ترتیب Nmm 1.1854 و مقدار میانگین نرمی طرح نهایی به ترتیب Nmm اول، دو میله 1.1874Nmm حذف شده در قسمت پایینی سازه است که در حالت اول برای جلوگیری از حرکت سازه به سمت راست ایجاد شده بود. همانند حالت اول، طول ضلع



Fig.10 Evolution histories of the compliance and the volume fraction for fig.8







Fig.12 Optimal topology for beam by with two simple supports with ER = 1%: (a) r_{\min} = 3 mm ; (b) r_{\min} = 4 mm

شکل 12 توپولوژی بهینه برای تیر با دو تکیهگاه ساده یک با نرخ تکاملی 1 درصد: r_{min} **= 4 mm** (b) ; r_{min} **= 3 mm** (a)

المان مربعی برابر 2 میلیمتر و مقدار پارامتر مقیاس طول به ترتیب 1.5 و 2 برابر اندازه المان در نظر گرفته شده است.

3-4- نمونه

در نمونه سه به بهینهسازی سازه نوع میشل [26] با دو حالت تکیهگاهی پرداخته میشود. بازه طراحی برای سازه نوع میشل با یک تکیهگاه ساده و یک تکیهگاه غلتکی در شکل 13 نشان داده شده است. بازه طراحی دارای 10 متر طول، 5 متر عرض و ضخامت آن 0.1 متر است. سازه به 25×50 المان چهار گره تنش صفحهای تقسیم میشود. مدول یانگ برابر 100 گیگا پاسکال

و ضریب پوآسون 0.3 در نظر گرفته میشود. نیروی عمودی برابر 1 کیلونیوتن و حجم نهایی برابر 50% حجم اولیه است. پارامترهای ثابت در روش بهینهسازی تکاملی دوجهته سازه مطابق نمونه 1 است.

در این نمونه طول المان مربعی برابر 0.2 متر و مقدار پارامتر مقیاس طول بترتيب 1.5، 2 و 3 برابر اندازهى هر المان است.

برای قسمت دوم با استفاده از همین سه پارامتر مقیاس طول با استفاده از نرخ تکاملی حجمی دو درصد توپولوژیهای بهینه سازه در شکل 15 نشان داده شده است. مقدار میانگین نرمی طرح نهایی به ترتیب 66.983×10⁻⁵ Nm ،65.831×10⁻⁵ Nm ،65.831×10⁻⁵ Nm

در این مرحله نرخ تکاملی را ثابت و برابر ER = 1% در نظر گرفته و $r_{\min} = 0.4 \, \mathrm{m} \, r_{\min} = 0.3 \, \mathrm{m}$ و $r_{\min} = r_{\min}$ و r_{\min} فرض می شود. در شکل 14 توپولوژی بهینه سازه نشان داده $r_{\min} = 0.6 \,\mathrm{m}$ شده است.



Fig.13 Design domain of a Michell type structure with one simple support and one roller

شکل 13 بازهی طراحی برای تیر مدل میشل با یک تکیهگاه ساده و یک تکیهگاه



Fig.14 Optimal topology for Michell type structure with one roller support and **ER = 1%**: (a) r_{min} = **0.3 m**; (b) r_{min} = **0.4 m**; (c) $r_{\rm min}$ = 0.6 m

شكل 14 توپولوژى بهينه براى تير مدل ميشل با يك تكيه گاه غلتكى و نرخ تكاملى $r_{\min} = 0.6 \text{ m}$ (c); $r_{\min} = 0.4 \text{ m}$ (b) ; $r_{\min} = 0.3 \text{ m}$ (a) درصد: 1

با مقایسه توپولوژی نهایی شکل 14 و 15 مشاهده می شود در حالت (b،a) تغییر تعداد حذف المانها در هر مرحله موجب ایجاد تفاوت در اعضای بین قسمت کمانی شکل و قسمت پایینی سازه میشود.

برای حالت دوم تکیه گاه شرایط مرزی سازه عوض شده و تکیه گاه غلتکی به تکیهگاه ساده تبدیل می شود، در شکل 16 بازهی طراحی و نحوهی بار گذاری نشان داده شده است. پارامترهای طراحی برابر حالت اول است.

 $r_{\min} = r_{\min} = 0.3 \,\mathrm{m}$ برای پارامتر مقیاس طول مقادیر متفاوت و برابر انظر گرفته می شود و نرخ تکاملی ثابت و برابر $r_{\min} = 0.6 \text{ m}$ ER = 1% فرض میشود. در شکل 17 توپولوژیهای بهینه سازه نشان داده شده است.

بدلیل عدم حرکت سازه به سمت راست، میلههای پایینی حذف شده و به علت ثابت بودن حجم سازه، تراکم بیشتری از المانها (با قطور شدن



Fig.15 Optimal topology for Michell type structure with one roller support and **ER = 2%**: (a) r_{\min} = 0.3 m; (b) r_{\min} = 0.4 m; (c) $r_{\min} = 0.6 \, \mathrm{m}$

شکل 15 توپولوژی بهینه برای تیر مدل میشل با یک تکیه گاه غلتکی و نرخ تکاملی 2 r_{\min} = 0.6 m (c); r_{\min} = 0.4 m (b) ; r_{\min} = 0.3 m (a) :درصد:



Fig.16 Design domain of a Michell type structure with two simple support

مهندسی مکانیک مدرس، مرداد 1395، دوره 16، شماره 5

شکل 16 بازهی طراحی برای تیر مدل میشل با دو تکیهگاه ساده



 Fig.17 Optimal topology for Michell type structure with simple support

 and ER = 1%: (a) $r_{\min} = 0.3 \text{ m}$; (b) $r_{\min} = 0.4 \text{ m}$; (c) $r_{\min} = 0.6 \text{ m}$

 1 توپولوژی بهینه برای تیر مدل میشل با تکیهگاه ساده و نرخ تکاملی

 $r_{\min} = 0.6 \text{ m}$ (c); $r_{\min} = 0.4 \text{ m}$ (b); $r_{\min} = 0.3 \text{ m}$ (a)

 درصد: (a) (b) (c); $r_{\min} = 0.4 \text{ m}$ (c)

میلهها) نسبت به حالت اول، شکل 14 مشاهده می شود. در این حالت نیز با تغییر پارامتر مقیاس طول در بازهی پیشنهادی توپولوژیهای متفاوتی حاصل شده است.

برای مقایسه تفاوت ایجاد شده از تفاوت شرایط تکیهگاهی برای نرخ تکاملی برابر **ER = 1%** نتایج نرمی حاصل برای توپولوژی نهایی در جدول 1 آمده است. همانطور که از مقایسه مشخص است افزایش مقیاس طول در هر دو شرط مرزی باعث افزایش نرمی شده است. از طرف دیگر نرمی سازه با تکیهگاه غلتکی، با توجه به وجود بخش های افقی در لبه پایینی، بیشتر است.

5- نتیجه گیری

در این پژوهش روش بهبود یافته بهینهسازی تکاملی سازهها بر اساس حذف نرم معرفی و بر اساس الگوریتم ارائه شده برنامه آن در محیط برنامهنویسی انسیس پیادهسازی شده است. در این روش با تعریف المان نرم، طرح یک فیلتر و استفاده از معیار همگرایی مشکلات تئوری و عملی روشهای تکاملی پیشین مانند وابستگی به مش، جوابهای بهینه محلی و عدم همگرایی رفع

ER = 1% جدول 1 نرمی میانگین سازه میشل با شرایط تکیه گاهی مختلف و Table 1 Mean compliance of Michell type structure with different support conditions and ER = 1%

<u> </u>			
	ی تکیهگاه سمت راست	نرمی سازه با شرط مرز	
	غلتكى	سادە	r _{min} (m)
	65.985× 10 ⁻⁵ Nm	44.912× 10 ⁻⁵ Nm	0.3
	65.814× 10 ⁻⁵ Nm	45.234× 10 ⁻⁵ Nm	0.4
	69.812× 10 ⁻⁵ Nm	45.910× 10 ⁻⁵ Nm	0.6

شده است. همچنین در تمام توپولوژیهای بهینه حاصل، الگوی شطرنجی که برای طراحی نامناسب است وجود نداشت.

دو پارامتر طراحی مقیاس طول و نرخ تکاملی حجمی بررسی شد. اول: با تغییر پارامتر مقیاس طول در بازهی محدود پیشنهادی، طرحهای مختلفی در سازه نهایی مشاهده شد. با افزایش پارامتر مقیاس طول که به معنای تعداد گرههای بیشتر و عدد حساسیت هموارتری برای هر المان است، توپولوژی مناسبتری بدست آمد. با افزایش پارامتر طول، در نرخ حذف المان معین، میانگین نرمی توپولوژی نهایی افرایش یافت که به دلیل نحوه توزیع مواد در بازه طراحی است. همچنین تعداد مراحل همگرایی با افزایش پارامتر طول بیشتر شد. دوم: تغییر نرخ تکاملی حجمی نیز موجب ایجاد توپولوژی نهایی کاملا متفاوت و حتی نامتقارن شده است. همچنین نشان داده شد افزایش نرخ تکاملی حجمی، که به معنای حذف تعداد المانهای بیشتر در هر مرحله است، طرحهای حاصله نزدیکتر به توپولوژی بهینه ایجاد کرد. در مقایسه شرایط مرزی نیز مشخص شد شرایط مزری غلتکی به دلیل داشتن بخش پایینی دو طرف تکیهگاه، نسبت به تکیهگاه ساده ثابت، نرمی میانگین حدودا وابستگی شدید توپولوژی نهایی سازه به این پارامتر طول و نرخ حذف المان

6- مراجع

- M. P. Bendsøe, N. Kikuchi, Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 71, No. 2, pp. 197-224, 1988.
- [2] G. I. Rozvany, Structural design via optimality criteria: the Prager approach to structural optimization, pp. 17-20, Dordrecht: Kluwer Academic, 1989.
- [3] B. Hassani, E. Hinton, Homogenization and structural topology optimization: theory, practice and software, pp.103-137, London: Spriger-Verlag, 1999.
- [4] Y. Xie, G. P. Steven, A simple evolutionary procedure for structural optimization, *Computers & structures*, Vol. 49, No. 5, pp. 885-896, 1993.
- [5] Y. Xie, G. P. Steven, Optimal design of multiple load case structures using an evolutionary procedure, *Engineering computations*, Vol. 11, No. 4, pp. 295-302, 1994.
- [6] D. Chu, Y. Xie, A. Hira, G. Steven, An evolutionary procedure for structural optimization with displacement constraints, *Proceeding of the fifth East Asia-Pacific conference on structural engineering and construction*, Gold Coast, Australia, July 25-27, pp. 1091 - 1096, 1995.
- [7] D. N. Chu, Y. Xie, A. Hira, G. Steven, Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 21, No. 4, pp. 239-251, 1996.
- [8] D. N. Chu, Y. Xie, A. Hira, G. Steven, On various aspects of evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 24, No. 4, pp. 197-212, 1997.
- [9] O. Querin, G. Steven, Y. Xie, Evolutionary structural optimisation (ESO) using a bidirectional algorithm, *Engineering Computations*, Vol. 15, No. 8, pp. 1031-1048, 1998.
 [10] X. Yang, Y. Xei, G. Steven, O. Querin, Bidirectional evolutionary method
- [10] X. Yang, Y. Xei, G. Steven, O. Querin, Bidirectional evolutionary method for stiffness optimization, *AIAA journal*, Vol. 37, No. 11, pp. 1483-1488, 1999.
- [11] O. Sigmund, J. Petersson, Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima, *Structural optimization*, Vol. 16, No. 1, pp. 68-75, 1998.
- [12] D. Manickarajah, Y. Xie, G. Steven, Elimination of checkerboard patterns from plate buckling optimum design, *Proceedings of The Australasian Conference on Structural Optimisation*, Sydney, Australia, February 11-13, pp. 525-532, 1998.
- [13] Q. Li, G. Steven, Y. Xie, A simple checkerboard suppression algorithm for evolutionary structural optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 22, No. 3, pp. 230-239, 2001.
- [14] M. P. Bendsøe, O. Sigmund, Topology optimization: theory, methods, and applications, pp. 28-39, Berlin: Spriger-Verlag, 2003.
- [15] X. Huang, Y. Xie, Convergent and mesh-independent solutions for the bidirectional evolutionary structural optimization method, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 43, No. 14, pp. 1039-1049, 2007.
- [16] E. Hinton, J. Sienz, Fully stressed topological design of structures using an evolutionary procedure, *Engineering computations*, Vol. 12, No. 3, pp. 229-244, 1995.
- [17] G. I. Rozvany, O. M. Querin, Combining ESO with rigorous optimality criteria, *International journal of vehicle design*, Vol. 28, No. 4, pp. 294-299, 2002.
- [18] J. Zhu, W. Zhang, K. Qiu, Bi-directional evolutionary topology optimization

DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.5.16.7

structures under multiple loading using bi-directional evolutionary structures, (فارسى Modeling in Engineering, Vol. 10, No. 30, pp. 76-86, 2013. (in Persian)

- [23] X. Huang, M. Xie, Evolutionary topology optimization of continuum structures: methods and applications, pp. 17-38, United Kingdom: John Wiley & Sons, 2010.
- [24] Z. H. Zuo, Y. M. Xie, A simple and compact Python code for complex 3D topology optimization, Advances in Engineering Software, Vol. 85, pp. 1-11, 2015.
- [25] ANSYS Inc. PDF Documentation for Release 15.0, Accessed on16 April 2015; http://148.204.81.206/Ansys/readme.html.
- [26] A. G. M. Michell, The limits of economy of material in frame-structures, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Vol. 8, No. 47, pp. 589-597, 1904.

using element replaceable method, Computational Mechanics, Vol. 40, No. 1, pp. 97-109, 2007.

- [19] X. Huang, Y. Xie, Bi-directional evolutionary topology optimization of [17] X. Hading, T. Ale, Branchonal evolutional proposity optimization of continuum structures with one or multiple materials, *Computational Mechanics*, Vol. 43, No. 3, pp. 393-401, 2009.
 [20] X. Sun, J. Yang, Y. Xie, X. Huang, Z. Zuo, Topology optimization of composite structure using bi-directional evolutionary structural optimization
- method, Procedia Engineering, Vol. 14, pp. 2980-2985, 2011.
- [21] X. Huang, Y. Xie, Evolutionary topology optimization of continuum structures including design-dependent self-weight loads, Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 47, No. 8, pp. 942-948, 2011.
- [22] A. Ghoddosian, M. Sheykhi, M. Rostami, Contact shape optimization of