



## آنالیز وقوع گیر در سیستم‌های جاسازی قید و بندها با استفاده از اصل کمترین اندازه نیروها

هادی پرواز<sup>۱</sup>، محمدجواد ناطق<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۲- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

\* nategh@modares.ac.ir، ۱۱۱-۱۴۱۱۵

### چکیده

مدلسازی تحلیلی وقوع گیر در قید و بندها با استفاده از اصل کمترین اندازه نیروها، شاکله‌ی اصلی این مقاله را تشکیل می‌دهد. استفاده از این روش برای حذف نامعینی استاتیکی، منجر به بهینه‌سازی غیرخطی مرتبه‌ی چهارم می‌شود که پس از حل، نوع تماس‌ها (از نظر لغزش یا غلتش) تعیین شده و وقوع یا عدم وقوع گیر مشخص می‌شود. مدل ارائه شده در این مطالعه، یک ابزار مؤثر و چابک را برای طراحان قید و بند جهت نیل به طرح جاسازی عاری از گیر فراهم می‌کند. این روش دارای مزایایی (نسبت به پژوهش‌های پیشین) همچون کاهش حجم محاسبات، دقت بالاتر در پیش‌بینی گیر و حذف پیش‌شرط نیاز به دانستن نوع تماس‌های اولیه بین قطعه‌کار و قید و بند می‌باشد. پیش‌بینی گیر با استفاده از کمترین اطلاعات ورودی و همچنین پیروی از اصول ریاضیاتی سیستماتیک زمینه را برای استفاده از این روش توسط طراح در مراحل اولیه‌ی طراحی قید و بندها به کمک رایانه فراهم نموده است. توانایی مدل در پیش‌بینی گیر با استفاده از دو مدل جاساز در سوراخ و بلوک- دست مورد ارزیابی قرار گرفت. صحت‌سنجی نتایج بر مبنای مقایسه با نتایج پژوهش‌های پیشین اجرا گردید که تطابق بدست آمده، بیان‌گر دقت بالای مدل ارائه شده بود.

کلید واژگان: آنالیز گیر، اصل کمترین اندازه‌ی نیروها، تماس اجسام صلب، طراحی سیستم جاسازی، طراحی قید و بندها

## Analysis of jamming in locating systems of fixtures using minimum norm principle

Hadi Parvaz, Mohammad Javad Nategh\*

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

\* P.O.B. 14115-111, Tehran, Iran, nategh@modares.ac.ir

### ABSTRACT

In this study, the mathematical modeling of jamming occurrence in fixtures is presented using minimum norm principle. The incorporation of this principle eliminates the indeterminacy in equations and results in a non-linear quadratic optimization problem. By solving the optimization problem, the contact modes are determined and the jamming occurrence is predicted. The presented model provides a dexterous tool for fixture designer to avoid jamming in their locating plans. This method benefits from less computations, more accurate results (in comparison to the previous studies) and eliminates the pre-known initial contact modes requirements. This method can be integrated in the CAFD applications due to the straight forward systematic approach. Also, it assists the fixture designer in the early stages of fixture design practice when there is no sufficient information about contact modes and behavior. The model capabilities in jamming prediction are evaluated by two case studies: peg in hole and block & palm. The verification procedure is performed by comparing the results to the previous studies.

**Keywords:** Fixture design, Jamming, Locating system, Minimum norm principle, Rigid body dynamics.

### ۱- مقدمه

بارگزاری قطعه‌کار در قید و بند می‌باشد.

برای تحلیل پدیده‌ی گیر قطعه‌کار در سیستم جاسازی از مدل تماس اصطکاکی چند قطعه صلب با همدیگر استفاده می‌شود. ترینکل و زنگ [۳]، پژوهشی را با استفاده از مدل تماس اصطکاکی چند قطعه صلب در کارکردهای موقعیت‌دهی منتشر کردند. با فرض متغیر بودن ضریب اصطکاک در هر نقطه تماس، مدل ارائه شده منجر به حل چند نامعادله می‌گردید که پس از حل، نوع نقاط تماس (لغزش یا غلتش) معین می‌شد. برای ارزیابی مدل ارائه شده، از دو مطالعه‌ی موردی با کارکرد موقعیت‌دهی استفاده گردید. پنگ، ترینکل و لو [۴]، از برنامه‌ریزی خطی برای حل مدل تماس چند قطعه صلب با همدیگر با وجود اصطکاک استفاده کردند. مدل‌سازی این تماس با

طراحی قید و بندهای ماشین ابزار دارای چهار مرحله‌ی طرح‌ریزی قید و بند، طراحی سیستم جاسازی و بست (و سیستم تکیه‌گاهی در صورت نیاز)، طراحی المان‌ها و طراحی سیستم مونتاژ قید و بند است [۱]. طراحی سیستم جاسازی و بست مهمترین مرحله طراحی قید و بند به‌شمار می‌رود چرا که نیازمند اجرای تحلیل و مدل‌سازی ریاضی می‌باشد. در این مرحله درجات آزادی قطعه‌کار با استفاده از سیستم جاسازی (معمولاً ۱-۲-۳) گرفته می‌شود.

گیر قطعه‌کار در سیستم جاسازی به‌صورت گرفته شدن درجات آزادی آن توسط نقاط تماس اصطکاکی با جاسازها و توقف لحظه‌ای حرکت قطعه‌کار در حین بارگزاری تعریف می‌شود [۲] که مشخصاً یک عامل مزاحم در

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

H. Parvaz, M.J. Nategh, Analysis of jamming in locating systems of fixtures using minimum norm principle, *Modares Mechanical Engineering, Proceedings of the Advanced Machining and Machine Tools Conference*, Vol. 15, No. 13, pp. 124-128, 2015 (in Persian فارسی)

بعدی برای ارزیابی مدل ارائه شده استفاده گردید و نتایج با نتایج پژوهش‌های پیشین [۱۲] مقایسه گردید.

همان‌گونه که اشاره گردید، پژوهش‌های پیشین روش مشابهی را که بر مبنای توسعه‌ی معادلات دینامیکی و محاسبات مربوط به سرعت و شتاب نسبی در نقاط تماس است، برای پیش‌بینی گیر استفاده کرده‌اند. این روش‌ها دارای محدودیت‌های مشترکی اعم از پیش‌فرض حالت لغزش برای تمام نقاط تماس در حالت اولیه، نیاز به اجرای محاسبات دینامیکی سرعت و شتاب و نیاز به پردازش بالا جهت نیل به جواب قابل اعتماد را دارند. در این مقاله، روشی جدید برای پیش‌بینی وقوع گیر قطعه‌کار حین بارگذاری در سیستم جاسازی با استفاده از اصل کمترین نیروها<sup>۵</sup> ارائه می‌گردد. اصل کمترین نیروها، مدلی از اصل کمترین انرژی در سیستم‌های تماس الاستیک است. روش ارائه شده محدودیت‌های روش‌های قبلی را از بین برده و جواب‌های به مراتب دقیق‌تری را نیز ارائه می‌کند. در روش ارائه شده، نوع نقاط تماس با استفاده از محاسبه‌ی نیروهای عکس‌العمل در آن‌ها تعیین شده و وقوع یا عدم وقوع گیر از روی آن پیش‌بینی می‌شود. ارزیابی توانایی روش ارائه شده در پیش‌بینی گیر با استفاده از دو مطالعه‌ی موردی جاساز-سوراخ و بلوک-دست مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به‌دست آمده در تطابق خوبی با نتایج پژوهش‌های پیشین بوده که نشان دهنده‌ی دقت بالای روش در پیش‌بینی وقوع گیر است.

## ۲- مدل‌سازی گیر

برای مدل‌سازی گیر قطعه‌کار در قید و بند می‌توان از مدل دوبعدی جاساز و سوراخ آغاز و مدل را (بدون از بین رفتن عمومیت) به موارد سه‌بعدی تعمیم داد. ناطق [۱۴]، گیر جاساز در سوراخ را مدل‌سازی و پس از نوشتن معادلات هندسی و نیرویی، به این نتیجه رسید که گیر در بازه‌ی رابطه‌ی (۱) برای شکل‌بندی ارائه شده به وقوع می‌پیوندد.

$$\sqrt{2CD} < l_{jam} < \mu D \quad (1)$$

در این رابطه،  $\mu$  ضریب اصطکاک،  $D$  قطر سوراخ و  $C$  لقی بین جاساز و سوراخ است. مطابق مساله دوبعدی مذکور، گیر قطعه‌کار در حین جاسازی در سیستم ۱-۲-۳ نیز نمونه‌ای سه‌بعدی از مسایل نامعین از لحاظ استاتیکی است. برای رفع نامعینی استاتیکی دو روش وجود دارد: روش الاستیک یا اصل کمترین اندازه نیروها. استفاده از روش اول نیاز به اجرای پردازش بالا داشته و علاوه بر آن، اطلاعات بالایی در زمینه‌ی نحوه‌ی تماس قطعه‌کار و سیستم جاسازی می‌طلبد. در حالی که، پیش‌بینی گیر در مراحل اولیه‌ی طراحی سیستم جاسازی انجام می‌شود که طراح اطلاعات کافی برای اجرای چنین آنالیزی را ندارد.

اصل کمترین اندازه‌ی نیروها بیان می‌کند که "از بین تمام نیروهایی که معادلات تعادل را ارضا می‌کنند، آن مجموعه نیرویی که کمترین اندازه را داشته باشد، جواب منحصر بفرد مساله خواهد بود". مدل‌سازی ریاضی اصل مزبور برای قطعه‌کاری که در تماس با شش جاساز قرار دارد، منجر به بهینه‌سازی غیرخطی از مرتبه چهارم می‌شود. نمونه‌ای از یک مدل که در سیستم جاسازی ۱-۲-۳ بارگذاری شده است، در شکل ۱ نشان داده شده است. این مدل دارای دستگاه مختصات جهانی XYZ و دستگاه مختصات محلی  $t_1t_2t_3$  برای هریک از جاسازها است. اصل کمترین اندازه‌ی نیروها برای این قطعه‌کار به صورت مساله‌ی بهینه‌سازی رابطه‌ی (۲) قابل طرح است:

استفاده از مدل تحلیلی مکمل جفت نشده<sup>۱</sup> جهت نیل به سیستمی چالاک که قابلیت ارائه‌ی جواب منحصر به فرد را با پردازش کمتر دارد، پایه‌ی اساسی این تحلیل را تشکیل می‌داد.

با اعمال فرض‌هایی همچون غیرخطی بودن اصطکاک کولمب در نقاط تماس و غلظشی بودن نقاط تماس در حالت اولیه، مدلی برای حل مساله‌ی مکملی در [۵] ارائه گردید. این مدل برای تعیین نوع نهایی تماس‌ها از محاسبه‌ی شتاب در نقاط تماس استفاده می‌کرد. نتیجه‌ی به‌دست آمده از مطالعه بدین صورت ارائه گردید که همواره جوابی برای مساله‌ی تماس اصطکاک‌ی چند جسم صلب وجود دارد. در مدلی عمومی‌تر، لوستد [۶]، توانست تماس بین چند قطعه صلب را با مدل‌سازی اصطکاک به‌صورت هرمی انجام داده و به این نتیجه برسد که الگوریتم لِمکه<sup>۲</sup> همواره منتج به جواب برای این مدل می‌شود.

تلاش برای نیل به روشی که بتواند حل دقیق و منحصر به فردی برای مدل تماس اصطکاک‌ی قطعات صلب فراهم کند، نقطه‌ی تمرکز بسیاری از پژوهش‌ها همچون ترینکل و پنگ [۷] و چترجی و روئینا [۸] بوده است. استوارت [۹]، روش گام زمانی را برای حل این مساله براساس مدل تماس اصطکاک‌ی یک‌طرفه استفاده نمود. استفاده از مدل گام‌برداری موری<sup>۳</sup> برای محاسبه‌ی سرعت و نیروها در نقاط تماس، پایه‌ی مطالعه‌ی انجام‌شده در [۱۰] را تشکیل می‌دهد. با فرض غیرخطی بودن اصطکاک کولمب، روش گاو-سایدل برای حل مدل ارائه شده استفاده گردید. نتایج به‌دست آمده از مدل گام زمانی برای مطالعات موردی در تطابق با نتایج به‌دست آمده از روش‌های مکملی [۶،۵] بودند.

استفاده از مدل تماس اصطکاک‌ی چند قطعه صلب منجر به حل معادلات دینامیک سرعت و شتاب گشته و مقادیر سرعت و شتاب نسبی در نقاط تماس بدست می‌آید. براساس علامت و مقدار این پارامترها، نوع تماس تعیین شده و وقوع یا عدم وقوع گیر پیش‌بینی می‌شود. دوپونت و یاماجاکو [۱۱]، مدلی دینامیکی با در نظر گرفتن اثر سرعت‌های بالاتر از حالت شبه استاتیک را بر مبنای تقسیم مساله به دو شکل گیر و گوه‌ای شدن توسعه دادند. وی نشان داد که برای وقوع گیر، نیروهای دالامبر و عکس‌العمل می‌بایست در یک راستا قرار گیرند. شرایط وقوع هر دو پدیده در این مقاله استخراج شده و توانایی مدل در پیش‌بینی آن‌ها با استفاده از مدل استوانه‌ی در حال غلظش ارزیابی شده است.

ترینکل، یپ و هان [۱۲]، شرایط عدم وقوع گیر در سیستم‌های دینامیکی موقعیت‌دهی را با فرض حرکت شبه‌استاتیک مدل‌سازی نمودند. با فرض این-که تمام نقاط تماس به‌صورت اولیه در حالت لغزش قرار دارند، معادلات دینامیکی سرعت استخراج و وقوع یا عدم وقوع گیر بر مبنای آن پیش‌بینی گردید. محاسبه‌ی نیروممان‌هایی در فرآیند بارگذاری قطعه‌کار در سیستم جاسازی که در تطابق با نوع تماس‌های از پیش تعیین شده باشند، شاکله‌ی اصلی پژوهش اجرا شده در [۱۳] را نشان می‌دهد. لیو، وانگ و لو [۲]، مدلی جامع برای تعیین وقوع گیر در دو جسم صلب در تماس با هم ارائه کردند. استفاده از معادلات دینامیک و محاسبه‌ی نیروهای عکس‌العمل، سرعت و شتاب در نقاط تماس، پایه‌ی مدل ارائه شده را تشکیل می‌داد. نتایج مؤید این اصل بود که چنانچه نیروممان‌های خارجی اعمالی منجر به حالت لغزش در قطعه‌کار شوند، گیر اتفاق نخواهد افتاد. مطالعات موردی دوبعدی و سه

1. Uncoupled complementarity model
2. Lemke's algorithm
3. Moori's stepping method
4. Wrench

5. Minimum norm principle

نیروممان بارگذاری  $W_L$  تشکیل شده است.

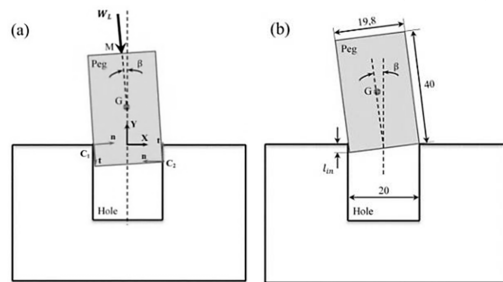
$$W_a = W_L + W_g \quad (4)$$

### ۳- ارزیابی توانایی مدل در پیش‌بینی گیر

برای ارزیابی توانایی مدل در پیش‌بینی گیر، از دو مطالعه‌ی موردی جاساز-سوراخ و بلوک- دست استفاده شده است.

#### ۳-۱- مطالعه‌ی موردی اول- جاساز و سوراخ

مدل جاساز-سوراخ نمونه‌ای از مطالعات موردی مورد استفاده برای پیش‌بینی گیر است. شکل ۲ الف نشان‌دهنده‌ی مدل گیر برای این مطالعه‌ی موردی است. با ورود جاساز در سوراخ (که نمونه‌ای از آن در جاسازی شعاعی قطعه-کار در سیستم جاسازی اتفاق می‌افتد)، گیر تا عمق معینی اتفاق نمی‌افتد (شکل ۲ ب). با نفوذ بیشتر جاساز در سوراخ و هم‌محور شدن آن‌ها، گیر در عمق مشخصی از بین می‌رود.



شکل ۲ الف) مطالعه‌ی موردی اول (جاساز و سوراخ) ب) اولین گیر جاساز در سوراخ

در این مطالعه‌ی موردی فرض بر این است که تماس جاساز با سوراخ در دو نقطه  $C_1$  و  $C_2$  اتفاق می‌افتد. در مدل ارائه شده،  $\beta$  زاویه‌ی بین محور جاساز با سوراخ،  $M$  نقطه‌ی اعمال نیروی جاسازی،  $G$  نقطه‌ی گرانیگاه جاساز،  $(n, t)$  سیستم مختصات محلی در هر یک از نقاط تماس،  $(X, Y)$  دستگاه مختصات جهانی که در نقطه‌ی وسط لبه‌ی بالایی سوراخ در نظر گرفته شده است و  $l_{in}$  طولی از جاساز که وارد سوراخ می‌شود تا اولین گیر مشاهده شود، می‌باشد. فرض بر این است که نیروممان جاسازی در نقطه‌ی وسط مقطع انتهایی جاساز و عمود بر آن عمل می‌کند. مساله‌ی بهینه‌سازی ارائه شده در رابطه‌ی (۲) برای این مطالعه‌ی موردی بصورت ساده‌تر (دوبعدی) در می‌آید که حل آن را نیز تسهیل می‌نماید. اطلاعات مورد نیاز برای این که مساله‌ی بهینه‌سازی برای این مطالعه‌ی موردی اعمال شود، در جدول ۱ ارائه شده است.

مطابق شکل ۲ ب، اولین گیر در عمق  $l_{in}$  اتفاق می‌افتد که مقدار آن با استفاده از رابطه‌ی (۵) قابل محاسبه است.

$$l_{in} = \sqrt{D^2 - (D - C)^2} = \sqrt{20^2 - 19.8^2} = 2.82 \text{ mm} \quad (5)$$

برای محاسبه‌ی عمق خروج از گیر، مساله‌ی بهینه‌سازی اشاره‌شده در رابطه‌ی (۲) می‌بایست حل گردد. این مساله که از نوع بهینه‌سازی غیرخطی مرتبه چهار است با استفاده از جعبه‌ابزار بهینه‌سازی نرم‌افزار متلب حل شد. برای اینکار، از حل گر fmincon همراه با الگوریتم Active-set استفاده گردید.

جدول ۱ اطلاعات ورودی برای مطالعه‌ی موردی جاساز و سوراخ

پارامتر	نماد	مقدار
قطر سوراخ	$D$	۲۰ mm
لقی بین جاساز و سوراخ	$C$	۰/۲ mm
طول جاساز	$L$	۴۰ mm
ضریب اصطکاک	$\mu$	۰/۲

Objective function:

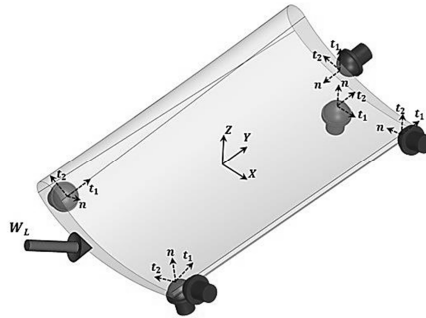
$$O.F. = |\varphi|, \quad \varphi = (F_1, F_2, \dots, F_6), \quad F_i = (f_n, f_{t_1}, f_{t_2})_i$$

Subject to:

$$T\varphi + W_a = 0 \quad (a)$$

$$(f_n)_i \geq 0 \quad (b)$$

$$(f_{t_1}^2 + f_{t_2}^2)_i \leq (\mu f_n)_i^2 \quad (c)$$



شکل ۱ مدل سه‌بعدی همراه با سیستم جاسازی ۳-۲-۱

در این رابطه،  $|\varphi|$  اندازه‌ی نیروهای عکس‌العمل در نقاط تماس،  $F_i$  بردار نیرو در نقطه‌ی تماس  $i$ ام شامل سه مؤلفه‌ی  $(f_n, f_{t_1}, f_{t_2})_i$  مؤلفه‌ی عمودی بردار نیرو،  $f_{t_1}$  مؤلفه‌ی مماسی اول بردار نیرو،  $f_{t_2}$  مؤلفه‌ی مماسی دوم بردار نیرو،  $T$  ماتریس تبدیل از دستگاه مختصات محلی به دستگاه مختصات جهانی و  $W_a$  نیروممان برآیند خارجی اعمالی به قطعه‌کار است.

قید اول بهینه‌سازی، قانون تعادل استاتیک بین نیروممان‌های داخلی و خارجی می‌باشد. قید دوم در این مساله، شرط لازم برای حفظ تماس بین قطعه‌کار و جاسازها در تمام نقاط جاسازی است. قید سوم نیز قانون اصطکاک کولمب در محاسبه‌ی نیروهای عکس‌العمل در نقاط جاسازی است. این قید بیان می‌دارد که حل مساله‌ی بهینه‌سازی صرفاً با رعایت قیود  $a$  و  $b$  ممکن است جواب‌هایی ارائه کند که از لحاظ فیزیکی بی‌معنی باشد. به‌عنوان نمونه ممکن است که پس از اجرای بهینه‌سازی، نیروی مماسی در یک یا چند نقطه جاسازی از مرز بالایی‌اش (یعنی  $\mu f_n$ ) بزرگ‌تر شود که طبیعتاً قابل قبول نیست. لذا، جواب بهینه در بین تعداد بی‌نهایت جوابی که مجموعه قیود  $a$  و  $b$  را ارضا می‌کنند، جوابی است که قید  $c$  را نیز رعایت کرده باشد. پس از محاسبه‌ی نیروها، چنانچه شرط  $|f_{t_i}| < \mu |f_n|_i$  برقرار باشد، گیر اتفاق افتاده است. ولی اگر  $|f_{t_i}| = \mu |f_n|_i$  باشد، آن نقطه‌ی تماس به حالت لغزش رسیده و گیری در آن نقطه وجود ندارد.

ماتریس تبدیل از مختصات محلی به مختصات جهانی به‌صورت رابطه‌ی (۳) قابل تعریف است:

$$T = (T_1, T_2, \dots, T_6)$$

$$T_i = (T_n, T_{t_1}, T_{t_2})$$

$$(T_n)_i = (n_i, r_i \times n_i), (T_{t_1})_i = (t_{1i}, r_i \times t_{1i}), (T_{t_2})_i = (t_{2i}, r_i \times t_{2i}) \quad (3)$$

در این رابطه،  $T_i$  ماتریس تبدیل برای جاساز  $i$ ام شامل سه مؤلفه‌ی  $T_n, T_{t_1}, T_{t_2}$  است که  $T_n$  ماتریس تبدیل در راستای  $n$ ، در راستای  $t_1$  و  $t_2$  در راستای  $t_2$  می‌باشد. همچنین،  $n_i$  بردار نرمال،  $r_i$  بردار موقعیت،  $t_1$  بردار مماسی اول و  $t_2$  بردار مماسی دوم (تماماً برای نقطه جاسازی  $i$ ام) می‌باشد. نیروممان برآیند خارجی  $W_a$  از دو بخش نیروممان ناشی از وزن  $W_g$  و

جدول ۳ نتایج بهینه‌سازی برای مطالعه‌ی موردی جاساز و سوراخ

عمق نفوذ (mm)	نیروها در $C_1$ (N)	نیروها در $C_2$ (N)	گیر؟
۰	$F_1 = (f_{in}, f_t)_1$ (۲۵/۶۸, -۱/۹۶)	$F_2 = (f_{in}, f_t)_2$ (۲۶/۵۵, ۵۳/۳۱)	بله
۱	(۳۵/۰۴, -۰/۲۶)	(۳۵/۸۴, ۷/۱۷)	بله
۲	(۵۳/۲۸, ۳/۷۸)	(۵۴/۱۴, ۱۰/۸۳)	بله
۳	(۱۰۷/۴۰, ۱۶/۸۴)	(۱۰۸/۷۴, ۲۱/۷۵)	بله
۴	بدون جواب!	بدون جواب!	خیر

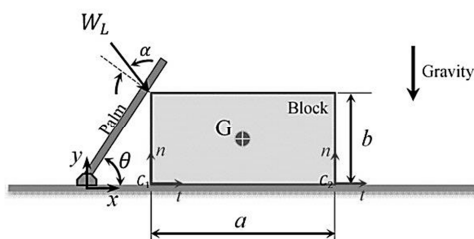
$$(C = 0.2 \text{ mm}, \mu = 0.2, |W_L| = 10N, D = 20\text{mm})$$

۳-۱- مطالعه‌ی موردی دوم - بلوک و دست

مدل مورد استفاده برای مطالعه‌ی موردی بلوک- دست در شکل ۳ ارائه شده است. با چرخش اهرم، بلوک شروع به حرکت در راستای  $x$  می‌کند. با ادامه‌ی حرکت، گیر در فاصله‌ی مشخصی اتفاق می‌افتد که مدل ارائه شده در این مقاله می‌بایست این فاصله را محاسبه نماید.

در این شکل،  $a$  طول بلوک،  $b$  عرض بلوک،  $G$  گرانیگاه بلوک،  $\theta$  زاویه‌ی اهرم چرخان و  $\alpha$  زاویه‌ی مخروط اصطکاک است. فرض بر این است که تماس بلوک با سطح زیرین در دو نقطه‌ی  $C_1$  و  $C_2$  برقرار می‌شود. از آنجایی‌که همواره لغزش می‌بایست در نقطه‌ی تماس بین اهرم چرخان و بلوک برقرار باشد، لذا نیرو ممان بارگذاری  $W_L$  در لبه‌ی مخروط اصطکاکی عمل می‌کند. فرض بر این است که  $\alpha = 2, b = 1$ ، ضریب اصطکاک در هر دو نقطه‌ی تماس برابر با  $0.5$ ، جرم بلوک برابر واحد و نیروممان جاسازی با شدت  $11/2$  نیوتن (که معادل  $10$  نیوتن در راستای عمود و  $5$  نیوتن در راستای مماسی است) می‌باشد. لازم بذکر است که با هدف مقایسه‌ی نتایج بدست‌آمده از مدل با نتایج ارائه شده در [۲]، فرضیات اعمال شده برای این مطالعه‌ی موردی دقیقاً مشابه پژوهش‌های مزبور هستند.

با استفاده از داده‌های مذکور، بهینه‌سازی توسط نرم‌افزار متلب حل گردید که نتایج بدست آمده در جدول ۴ ارائه شده است. آن‌گونه که از نتایج این جدول برمی‌آید، با حرکت بلوک به اندازه  $0.1$  و  $0.2$ ، جوابی از بهینه‌سازی بدست نمی‌آید. بنابر آنچه در مطالعه‌ی موردی اول اشاره گردید، در این حالت نقاط تماس در حالت لغزش قرار دارند. با افزایش مقدار حرکت تا  $0.3$ ، بهینه‌سازی منجر به جواب (نیروی عکس‌العمل در نقاط تماس) می‌شود. این بدین معنی است که نوع نقاط تماس در این لحظه غلتش بوده و گیر رخ داده است. بازه‌ی حرکتی  $[0.2-0.3]$  با دقت بالاتری مورد بررسی قرار گرفت تا مقدار دقیق طول وقوع گیر برای این شکل‌بندی محاسبه شود. پس از اجرای محاسبات، مشخص گردید که بلوک در فاصله‌ای برابر با  $0.24\text{cm} < x_{in} < 0.25\text{cm}$  دچار گیر می‌شود. مقدار بدست‌آمده برای طول ورود به گیر دقیقاً منطبق بر نتیجه‌ی بدست‌آمده در [۲] است. در [۲]، اجرای محاسبات دینامیکی پیچیده به این نتیجه منجر شده است که تا زمانی‌که  $\tan(\theta) \geq 4 \rightarrow x_{in} \leq 1/4 \text{ cm}$  باشد، گیر اتفاق نمی‌افتد.



شکل ۳ شکل‌بندی مطالعه‌ی موردی دوم - بلوک و دست

برای اجرای مساله‌ی بهینه‌سازی برای این مطالعه موردی، مقدار عمق نفوذ از صفر شروع شده و برای هر عمق نفوذ مشخص، مقادیر پارامترهای موردنیاز برای بهینه‌سازی بدست می‌آید. این پارامترها در جدول ۲ ارائه شده است.

بهینه‌سازی با استفاده از داده‌های جدول ۲ اجرا گردید که نتایج بدست آمده در جدول ۳ ارائه شده است. همان‌گونه که مشخص است، بهینه‌سازی در عمق نفوذ ۴ میلی‌متر جوابی را ارائه نمی‌کند. این بدین معنی است که با رعایت قید سوم (قید اصطکاک کولمب) امکان رسیدن به جواب برای بهینه‌سازی وجود ندارد. بعبارت دیگر، نیروهای مماسی در نقاط تماس تمایل دارند که از مقدار مرز بالای خودشان  $(\mu f_n)$  بگذرند که این مهم بنا به قید سوم امکان‌پذیر نیست. لذا، نقاط تماس در عمق نفوذی بین سه و چهار میلی‌متر دارای حالت لغزش می‌باشند که باعث رفع گیر می‌شود. برای تعیین دقیق مقدار خروج از گیر، بازه مزبور به بازه‌های کوچک‌تری تقسیم گردید و پس از اجرای بهینه‌سازی برای هر یک از آن‌ها، نتیجه بدین صورت حاصل شد که گیر در عمق نفوذ  $3/48$  میلی‌متر آزاد می‌شود. لذا گیر در عمق نفوذ ارائه شده در رابطه‌ی (۶) برای شکل‌بندی نشان داده شده در شکل ۲ الف اتفاق می‌افتد.

$$2.82 \text{ mm} < l_{jam} < 3.48 \text{ mm} \quad (6)$$

نتیجه‌ی بدست‌آمده از مدل ارائه شده توسط ناطق [۱۴] برای طول گیر با شکل‌بندی مشابه، بصورت رابطه (۷) ارائه شده است.

$$2.82 \text{ mm} < l_{jam} < 4 \text{ mm} \quad (7)$$

با اجرای مقایسه بین مقادیر بدست‌آمده می‌توان نتیجه‌گیری کرد که روش ارائه شده در این مدل دارای دقت محاسباتی بالا در مدل‌سازی گیر در مقیاس پژوهشی و مدل ارائه شده توسط ناطق [۱۴] دارای دقت مناسب در مقیاس صنعتی است.

تاثیر پارامترهای ضریب اصطکاک، نیروی بارگذاری و لقی نیز بر روی طول گیر مورد بررسی قرار گرفت. به‌صورت خلاصه، افزایش ضریب اصطکاک بازه‌ی گیر جاساز در سوراخ را افزایش داده و افزایش لقی تاثیر معکوس بر روی آن دارد. نیروی بارگذاری نیز (بدون تغییر جهت اعمال نیرو) به‌عنوان یک پارامتر، هیچ تاثیری در کاهش یا افزایش طول گیر ندارد. از ارائه‌ی نتایج کمی این بررسی‌ها جهت رعایت اختصار خودداری می‌شود.

جدول ۲ اطلاعات مورد نیاز برای اعمال بهینه‌سازی روی مطالعه‌ی موردی اول

عمق نفوذ (mm)	$\beta$ (درجه)	پارامترها در $C_1$ (به ترتیب $m \Rightarrow t \Rightarrow r$ )	پارامترها در $C_2$ (به ترتیب $m \Rightarrow t \Rightarrow r$ )	$r_G$	$r_M$
۰	۸/۱۱	(۰/۹۹, ۰/۱۴)	(-۱, ۰)	۲/۶۲	-۵/۴۴
		(۰, ۱)	(۰, ۱)	۱۸/۴۰	۳۸/۲۰
		(-۱۰, ۰)	(۱۰, ۰)		
۱	۵/۷۳	(۰/۹۹, ۰/۰۵)	(-۱, ۰)	-۰/۸۶	-۱/۸۱
		(۰/۰۵, -۰/۹۹)	(۰, ۱)	۱۷/۹۸	۳۷/۹۶
		(-۱۰, ۰)	(۱۰, -۱)		
		(۰/۹۹, ۰/۰۷)	(-۱, ۰)	-۱/۲۶	-۲/۷۳
۲	۴/۱۹	(۰/۰۷, -۰/۹۹)	(۰, ۱)	۱۷/۲۳	۳۷/۱۷
		(-۱۰, ۰)	(۱۰, -۲)		
		(۰/۹۹, ۰/۰۵)	(-۱, ۰)	-۰/۹۲	-۲/۰۵
۳	۳/۲۲	(۰/۰۵, -۰/۹۹)	(۰, ۱)	۱۶/۴۲	۳۶/۳۸
		(-۱۰, ۰)	(۱۰, -۲)		
		(۰/۹۹, ۰/۰۴)	(-۱, ۰)	-۰/۷۰	-۱/۶۰
۴	۲/۵۸	(۰/۰۴, -۰/۹۹)	(۰, ۱)	۱۵/۵۴	۳۵/۵۲
		(-۱۰, ۰)	(۱۰, -۴)		

**جدول ۴ نتایج بهینه‌سازی برای مطالعه‌ی موردی بلوک و دست**

مقدار حرکت	نیروهای عکس‌العمل در $(N) C_1$	نیروهای عکس‌العمل در $(N) C_2$	گیر؟
$x_{C_1}$	$F_1 = (f_{1i}, f_{1j})_1$	$F_1 = (f_{1i}, f_{1j})_1$	
۰/۱	بدون جواب!	بدون جواب!	خیر
۰/۲	بدون جواب!	بدون جواب!	خیر
۰/۳	(۸/۹۷, -۴/۰۷)	(۸/۴۹, -۴/۰۷)	بله

تاثیر پارامترهای ضریب اصطکاک و شدت نیروممان خارجی اعمالی بر وقوع گیر بررسی گردید. با افزایش ضریب اصطکاک، مقدار حرکت بلوک برای ورود به حالت گیر کاهش می‌یابد. افزایش شدت نیروممان خارجی اعمالی نیز منجر به افزایش طول حرکت بلوک برای ورود به حالت گیر می‌شود.

#### ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی سبک و چالاک برای پیش‌بینی گیر قطعه‌کار در قید و بندها ارائه گردید. روش ارائه شده بر مبنای اصل کمترین اندازه نیروها توسعه داده شد. این روش با تعیین نوع هر کدام از نقاط تماس از لحاظ لغزشی یا غلتشی، به پیش‌بینی وقوع گیر می‌پردازد. دو نمونه مطالعه‌ی موردی جاساز-سوراخ و بلوک-دست برای ارزیابی توانایی مدل در پیش‌بینی وقوع گیر مورد استفاده قرار گرفت. در مدل جاساز-سوراخ نتیجه گرفته شد که گیر در بازه [۲/۸۲-۳/۴۸] میلی‌متر از عمق نفوذ اتفاق می‌افتد که در تطابق با نتایج پژوهش‌های پیشین بود. ارزیابی مطالعه‌ی موردی بلوک-دست نیز به این نتیجه رسید که گیر در فاصله [۰/۲۴-۰/۲۵] روی می‌دهد که با نتایج به-دست‌آمده در گزارش‌های قبلی در هماهنگی بود. مزایای اصلی روش پیشنهادی در این مقاله شامل نیاز به پردازش پایین‌تر، عدم نیاز به دانستن شرایط اولیه‌ی نقاط تماس و تعیین وقوع گیر با استفاده از اطلاعات اولیه‌ای که در مراحل آغازین طراحی قید و بند در اختیار طراح است، می‌باشد. این روش می‌تواند بعنوان ابزاری مناسب برای طراح قید و بند در مراحل اولیه‌ی طراحی مطرح گردد تا طرح جاسازی ارائه شده توسط وی عاری از گیر باشد.

#### ۵- فهرست علائم

$a$	طول بلوک (cm)
$b$	عرض بلوک (cm)
$C$	لقی بین جاساز و سوراخ (mm)
$D$	قطر سوراخ (mm)
$F$	بردار نیروی عکس‌العمل (N)
$f$	مولفه‌های بردار نیروی عکس‌العمل (N)
$G$	نقطه‌ی مرکز جرم
$L$	طول جاساز (mm)
$l$	طول گیر (در مطالعه موردی جاساز و سوراخ) (mm)
$n_i$	بردار نرمال برای نقطه‌ی تماس $i$ ام
$O.F.$	تابع هدف
$r$	بردار موقعیت (mm)
$T$	ماتریس تبدیل
$t_{1_i}$	بردار مماسی اول برای نقطه‌ی تماس $i$ ام
$t_{2_i}$	بردار مماسی دوم برای نقطه‌ی تماس $i$ ام
$W$	نیروممان اعمالی (N)
$x$	طول حرکت (در مطالعه‌ی موردی بلوک-دست) (cm)

#### علائم یونانی

$\alpha$	زاویه‌ی مخروط اصطکاک
$\theta$	زاویه‌ی اهرم چرخان در مطالعه‌ی موردی بلوک-دست
<b>زیر نویس‌ها</b>	
$a$	پارامتر اعمالی خارجی بر قطعه‌کار
$c_1$	اندیس نقطه تماسی اول (در مطالعه موردی بلوک و دست)
$c_2$	اندیس نقطه تماسی دوم (در مطالعه موردی بلوک و دست)
$G$	اندیس مرکز جرم
$g$	اندیس گرانش
$i$	شماره جاساز
$in$	اندیس ورود
$jam$	اندیس وقوع گیر
$L$	اندیس پارامتر بارگذاری
$n$	اندیس جهت نرمال (عمود)
$out$	اندیس خروج
$t_1$	اندیس جهت مماسی اول
$t_2$	اندیس جهت مماسی دوم

#### ۶- مراجع

- [1] H. Parvaz, M. J. Nategh, A pilot framework developed as a common platform integrating diverse elements of computer aided fixture design, *International Journal of Production Research*, Vol. 51, No. 22, pp. 6720-6732, 2013.
- [2] T. Liu, M. Y. Wang, K. H. Low, Non-jamming conditions in multi-contact rigid-body dynamics, *Multibody System Dynamics*, Vol. 22, pp. 269-295, 2009.
- [3] J. C. Trinkle, D. C. Zeng, Prediction of the quasistatic planar motion of a contacted rigid body, *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, Vol. 11, No. 2, pp. 229-246, 1995.
- [4] J. S. Pang, J. C. Trinkle, G. Lo, A complementarity approach to a quasistatic multi-rigid-body contact problem. *Computational Optimization and Applications*, Vol. 5, No. 2, pp. 139-154, 1996.
- [5] J. S. Pang, J. C. Trinkle, Complementarity formulations and existence of solutions of dynamic multi-rigid-body contact problems with coulomb friction, *Mathematical Programming*, Vol. 73, No. 2, pp. 199-226, 1996.
- [6] P. Lotstedt, Coulomb friction in two dimensional rigid body systems, *ZAMM- Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 61, No. 12, pp. 605-615, 1981.
- [7] J. C. Trinkle, J. S. Pang, Dynamic multi-rigid-body systems with concurrent distributed contacts, in *Proceeding of The IEEE Transaction on Robotic and Automation*, Albuquerque, NM: IEEE, pp. 2276-2281, 1997.
- [8] A. Chatterjee, A. Ruina, A new algebraic rigid body collision law based on impulse space considerations, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 65, No. 4, pp. 939-951, 1998.
- [9] D. Stewart, *Time-stepping methods and the mathematics of rigid body dynamics*. In: A. Guran, J. A. C. Martins, A. Klarbring (Eds.), *Impact and Friction*, Ch. 1, Germany: Birkh'auser, 2000.
- [10] T. Liu, M. Y. Wang, Computation of three-dimensional rigid-body dynamics with multiple unilateral contacts using time-stepping and Gauss-Seidel methods, *IEEE Transaction on Automation Science and Engineering*, Vol. 2, No. 1, pp. 19-31, 2005.
- [11] P. E. Dupont, S. P. Yamajako, Jamming and wedging in constrained rigid body dynamics, in *Proceeding of The IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Diego, CA: IEEE, pp. 2349-2354, 1994.
- [12] J. C. Trinkle, S.L. Yeap, L. Han, When quasistatic jamming is impossible, in *Proceeding of The IEEE Transaction on Robotics and Automation*, Minneapolis, MN: IEEE, pp. 3401-3406, 1996.
- [13] D. J. Balkcom, J. C. Trinkle, Computing wrench cones for planar rigid body contact tasks, *International Journal of Robotic Research*, Vol. 21, No. 12, pp. 1053-1066, 2002.
- [14] M. J. Nategh, *The design of machine tools jigs and fixtures*, pp. 70-80, Tehran, Iran: Tarbiat Modares University pub, 2007. (in persian)