



حل تحلیلی پایداری دینامیکی تیر کامپوزیت چندلایه تحت اثر نیروی دنبال کننده

حامد علیدوست¹، جلیل رضایی پژند^{2*}

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

* مشهد، صندوق پستی 91775-1111، jrezaeep@um.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 31 تیر 1394

پذیرش: 04 شهریور 1394

ارائه در سایت: 23 شهریور 1394

کلید واژگان:

تیر کامپوزیت چندلایه

پایداری دینامیکی

نیروی دنبال کننده

فلاتر

چکیده

در این مقاله پایداری دینامیکی یک تیر کامپوزیت چندلایه تحت اثر نیروی دنبال کننده مورد بررسی قرار گرفته است. به این منظور با استفاده از معادله اساسی خمش حاکم بر تیرها و محاسبه ممان خمشی وارد آمده بر یک تیر کامپوزیت چندلایه برحسب عناصر ماتریس‌های سه گانه A ، B و D ، معادله پایداری یک تیر کامپوزیت چندلایه به دست آمد. به دلیل تشابه موجود بین معادله به دست آمده و معادله پایداری تیر همسانگرد، بین این دو نوع تیر یک معادل سازی صورت پذیرفته و شرایط مرزی تیر همسانگرد برای تیر کامپوزیت چندلایه در نظر گرفته شد. سپس ناپایداری فلاتر تیر کامپوزیت چندلایه به روش حاضر مورد تحلیل قرار گرفته و نتایج حاصل با نتایج به دست آمده از روش المان محدود موجود در سایر مقالات مقایسه شد. نتایج به دست آمده نشان داد با در نظر گرفتن سادگی روش حاضر نسبت به سایر روش‌ها در تحلیل مسائل پایداری تیرهای کامپوزیتی نتایج حاضر از دقت قابل قبولی برخوردار است. در انتها نیز اثر نوع چیدمان یک تیر کامپوزیت چندلایه تحت اثر نیروی دنبال کننده، بر روی مقدار نیرو و فرکانس ناپایداری فلاتر آن به وسیله این روش مورد بررسی قرار گرفت.

Dynamic Stability of Laminated Composite Beam Subjected to a Follower Force

Hamed Alidoost, Jalil Rezaee pazhand*

Engineering Faculty, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

* P.O.B. 91775-1111 Mashhad, Iran, jrezaeep@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 22 July 2015
Accepted 26 August 2015
Available Online 14 September 2015

Keywords:
Laminated Composite Beam
Dynamic Stability
Follower Force
Flutter

ABSTRACT

In this paper, dynamic stability of a laminated composite beam subjected to a tip follower force is investigated. Using elementary theory of bending, Euler-Bernoulli beam theory and Classical Lamination Theory (CLT), bending moment of laminated composite beam is calculated with respect to its extensional, bending and bending-extensional coupling stiffness matrices, A , B and D , and dynamic stability equation of laminated beam is established. Due to similarity between this equation and isotropic stability equation, as an assumption, isotropic beam boundary conditions are used for composite beam. Cantilever-free boundary conditions are used and a closed form solution is established. Flutter instability problems for symmetric and un-symmetric laminated beams are solved by this method and results are compared with finite element results in literatures. Considering the simplicity of the present method, results show good agreement with the finite element method. Finally dynamic stability behavior of laminates with different stacking sequences are investigated by present method and effect of different parameters such as fiber orientation, number of layers, and stacking sequence, on the flutter load and corresponding frequency of symmetric and un-symmetric laminates are investigated.

1- مقدمه

امروزه استفاده از کامپوزیت‌های چندلایه به واسطه ویژگی‌های قابل توجهی که دارند گسترش روزافزونی پیدا کرده است. وزن پایین در کنار خصوصیات مکانیکی عالی، این گونه مواد را به یکی از گزینه‌های برتر استفاده در صنایع مختلف به خصوص صنایع هوافضا تبدیل کرده است. علاوه بر این، خصوصیات مکانیکی و فیزیکی این مواد با تغییر پارامترهای مختلفی نظیر زاویه قرارگیری الیاف، چیدمان و تعداد لایه‌های مورد استفاده، قابل تغییر است که این امر تولید مواد با خصوصیات دلخواه برای کاربردهای خاص را برای طراحان امکان پذیر نموده است. یکی از مهم‌ترین کاربردهای مواد کامپوزیت لایه‌ای صنایع هوافضا است و یکی از ویژگی‌های مهم این نوع کاربرد وجود نیروهای

ناپایستار در کنار نیروهای پایستار است.

این شرایط خاص استفاده سبب می‌شود پایداری این نوع سازه‌ها از اهمیت زیادی برخوردار شود. یک سازه زمانی که تحت اثر نیروهای پایستار قرار دارد تنها دچار ناپایداری دیورژانس¹ (یا کمانش) می‌شود که این نوع ناپایداری بسته به ماهیت نیروی وارد آمده می‌تواند استاتیکی یا دینامیکی باشد. اما در حضور نیروهای ناپایستار در کنار وقوع ناپایداری دیورژانس به‌عنوان یک ناپایداری استاتیکی، وقوع ناپایداری فلاتر² به‌عنوان یک ناپایداری دینامیکی نیز امکان پذیر است. در بیشتر موارد پدیده فلاتر در سازه‌های تحت

1- Divergence
2- Flutter

Please cite this article using:

H. Alidoost, J. Rezaee pazhand, Dynamic Stability of Laminated Composite Beam Subjected to a Follower Force, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 10, pp. 233-239, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

شکل مودهای مربوطه را به دست آوردند. وانگ و همکارانش [13] پایداری دینامیکی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانو تیوب‌های کربنی را به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار دادند.

هدف از این پژوهش بررسی پایداری دینامیکی یک تیر کامپوزیت چندلایه تحت اثر نیروهای دنبال کننده به یک روش ساده‌ی تحلیلی می‌باشد. در این روش نخست با استفاده از تئوری تیر اویلر برنولی، معادله حاکم بر خمش یک تیر کامپوزیت چندلایه به دست آمد. سپس با در نظر گرفتن یک سری فرضیات با استفاده از تئوری کلاسیک لایه‌ها⁴ ممان خمشی وارد بر تیر برحسب عناصر ماتریس‌های سه‌گانه ماده کامپوزیت محاسبه گردید. با جای‌گذاری نتایج به‌دست آمده برای ممان خمشی تیر کامپوزیت چندلایه در معادله اولیه خمش تیر، معادله پایداری یک تیر کامپوزیت چندلایه به دست آمد. با مقایسه معادله به‌دست آمده با معادله حاکم بر پایداری یک تیر همسانگرد مشخص شد که تحت شرایط در نظر گرفته شده می‌توان تیر کامپوزیت چندلایه را با یک تیر همسانگرد معادل‌سازی کرد بدین ترتیب، با اعمال شرایط مرزی یک سر گیردار-یک سر آزاد و اعمال نیروی دنبال کننده متمرکز در سر آزاد تیر، معادله پایداری تیر به‌صورت دقیق حل گردید. برای بررسی دقت روش حاضر نتایج به‌دست آمده به این روش با نتایج حاصل از روش المان محدود در سایر مقالات مقایسه شد و در نهایت نیز اثر نوع چیدمان لایه‌ها بر روی پایداری تیر تحت اثر نیروی دنبال کننده و مقدار نیروی فلاتر، به روش ارائه شده در این مقاله مورد بررسی قرار گرفت.

2- معادلات حاکم

در استخراج معادلات حاکم بر این مقاله فرضیات زیر در نظر گرفته می‌شود.

الف- تغییر شکل‌ها و کرنش‌ها کوچک در نظر گرفته می‌شوند.

ب- تئوری کلاسیک مواد کامپوزیت برقرار است.

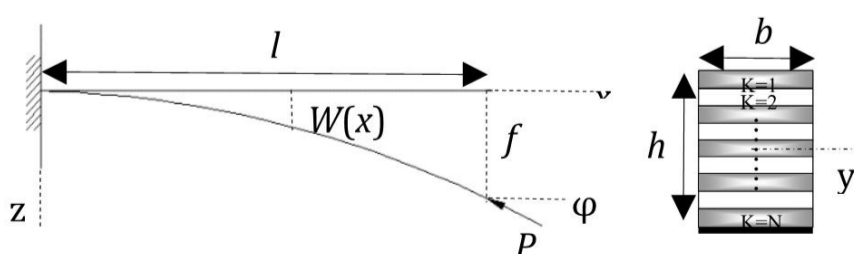
پ- طول تیر نسبت به عرض و ضخامت آن به‌اندازه‌ای بزرگ‌تر بوده که بتوان آن را به‌صورت یک‌بعدی مدل نمود.

ت- از تغییر شکل و تغییرات در جهت y صرف‌نظر می‌شود.

فرض کنید تیر نشان داده شده در شکل 1 یک تیر یک سر گیردار چندلایه با سطح مقطع ثابت است که تحت اثر نیروی دنبال کننده P قرار دارد. $W(x)$ خیز تیر در نقطه x ، φ زاویه اعمال نیروی P نسبت به خط افق، f خیز انتهای تیر، طول تیر l و عرض و ضخامت آن به ترتیب b و h است. مرکز محورهای مختصات نیز در صفحه میانی تیر قرار دارد. برای یک تیر اویلر برنولی مطابق تئوری اولیه خمش، معادله مربوط به جابجایی تیر به‌صورت معادله (1) خواهد بود.

$$-M_{xx} = P(f - W) - P\varphi(l - x) + L_j \quad (1)$$

که در آن M_{xx} ممان خمشی تیر در جهت x و L_j ممان خمشی تولید شده ناشی از نیروهای اینرسی⁵ است. با دومرتبه مشتق‌گیری نسبت به متغیر x و با توجه به معادله (2)، حاصل از اصل دی‌آلمبرت⁶



شکل 1 تیر یک سر گیردار کامپوزیت چندلایه تحت اثر نیروی دنبال کننده P

اثر نیروهای ناپایستار هنگامی رخ می‌دهد که دو فرکانس طبیعی سازه با یکدیگر برابر شوند. یکی از انواع نیروهای ناپایستار نیروهای دنبال کننده¹ است که به دلیل وجود این نوع نیروها در کاربردهای هوافضا، در تحلیل مواد کامپوزیت چندلایه از اهمیت خاصی برخوردار می‌باشند.

در چند دهه گذشته پایداری دینامیکی سازه‌ها تحت اثر نیروهای دنبال کننده مورد علاقه پژوهشگران مختلفی بوده است. یکی از مهم‌ترین مسائل در این حوزه، پایداری دینامیکی یک تیر تحت اثر یک نیروی مماسی متمرکز دنبال کننده است که برای نخستین بار توسط بک [1] مطرح شد. وی یک حل تحلیلی برای این مسئله ارائه داد و پس از تحلیل وی تیر یک سر گیردار تحت اثر نیروی دنبال کننده متمرکز به مسئله بک² شهرت پیدا کرد. در شکل 1 یک تیر کامپوزیت چندلایه نوع بک که موضوع بررسی این مقاله نیز می‌باشد، نشان داده شده است. پس از وی پژوهشگران مختلفی پایداری دینامیکی سازه‌های همسانگرد با شرایط مرزی متفاوت و یا انواع متفاوت نیروهای دنبال کننده را مورد بررسی قرار دادند [2-5]. در کنار ارائه حل‌های تحلیلی و دقیق برای برخی مسائل ساده، پژوهشگران مختلفی مسائل پیچیده را به روش‌های عددی مورد بررسی و تحلیل قرار داده‌اند. معین فرد و همکارانش [6] ناپایداری دینامیکی تیرهای با سطح مقع متغییر تحت اثر نیروی باد را با ترکیب روش‌های تفاضل محدود و گلرکین مورد بررسی قرار دادند. رضایی و جهانگیری [7] ناپایداری استاتیکی و دینامیکی صفحات مدرج تابعی³ را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نخست با استفاده از اصل همیلتون معادلات حاکم را استخراج کرده و سپس با استفاده از روش گلرکین شرایط ناپایداری استاتیکی و دینامیکی این نوع صفحات را مورد بررسی قرار دادند.

در سه دهه گذشته و همزمان با گسترش کاربرد مواد کامپوزیت چندلایه در صنایع مختلف، پایداری دینامیکی این نوع تیرها نیز مورد علاقه پژوهشگران مختلفی قرار گرفته است. به‌واسطه پیچیدگی‌های رفتار مواد کامپوزیت چندلایه ارائه یک حل تحلیلی برای مسائل مربوط به پایداری دینامیکی این نوع تیرها معمولاً امری بسیار دشوار است. یکی از حل‌های تحلیلی موجود در این زمینه برای مسئله ساده بک است که توسط ژیانگ و وانگ [8] ارائه شده است. آن‌ها یک روش تحلیلی برای محاسبات مربوط به پایداری یک ستون کامپوزیت چندلایه تحت اثر نیروهای نوع بک ارائه نمودند. به دلیل همین پیچیدگی‌ها در رفتار مواد کامپوزیت بسیاری از پژوهشگران از روش‌های عددی برای تحلیل مسائل خود استفاده کرده‌اند. گوپال و کاپانیا [9] پایداری دینامیکی تیرهای کامپوزیت چندلایه را تحت اثر نیروهای ناپایستار مورد بررسی قرار دادند. به این منظور آن‌ها نخست معادله حاکم بر مسئله را به کمک اصل همیلتون به دست آورده و سپس به کمک روش المان محدود و با استفاده از یک المان با 21 درجه آزادی این معادله را حل کردند. کیم [10] پایداری دینامیکی یک تیر کامپوزیتی چندلایه‌ی دارای میرایی تحت اثر ترکیب نیروهای گسترده مماسی و عمودی را با استفاده از روش المان محدود مورد بررسی قرار داد. کیم ولی [11] رفتار دیورژانس و فلاتر تیرهای نوع بک ساخته شده از مواد کامپوزیت چندلایه را با استفاده از روش المان محدود مورد مطالعه قرار دادند. ترکی و همکارانش [12] پایداری دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای یک‌سر گیردار ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت نیروهای گسترده محوری دنبال کننده را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نخست با استفاده از اصل همیلتون معادلات حرکت حاکم بر سازه را به دست آورده و سپس با استفاده از اصل تعمیم یافته گلرکین نیروی فلاتر و

4- Classical Lamination Theory (CLT)

5- Inertia Forces

6- D'Alembert's Principle

1- Follower Force

2- Beck's Problem

3- Functionally Graded Plates

$$W(0, t) = \frac{\partial W}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(l, t) = \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}(l, t) = 0 \quad (11)$$

معادله (8) یک معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت است که می‌توان آن را به کمک روش جداسازی متغیرها و با در نظر گرفتن $W(x, t) = w(x)e^{i\phi t}$ که فرکانس طبیعی تیر و t زمان است، حل نمود. با استفاده از تغییر متغیر $\zeta = x/l$ و استفاده از این روش پاسخی طبق معادله (12) به دست می‌آید.

$$w(\zeta) = C_1 \sin(r_1 \zeta) + C_2 \cos(r_1 \zeta) + C_3 \sinh(r_2 \zeta) + C_4 \cosh(r_2 \zeta) \quad (12)$$

در معادله فوق $C_i, i = 1 \dots 4$ ثابت دلخواه بوده و r_1 و r_2 طبق معادلات (13) و (14) محاسبه می‌شوند.

$$r_1^2 = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega^2} \quad (13)$$

$$r_2^2 = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega^2} \quad (14)$$

که در این روابط β و ω با استفاده از معادلات (15) و (16) تعریف می‌شوند.

$$\beta = \frac{E_{22}bh^3}{D} \hat{P} \quad (15)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{E_{22}bh^3}{D}} \hat{\omega} \quad (16)$$

در معادلات فوق E_{22} مدول الاستیسته کامپوزیت در جهت y ، b عرض تیر، h ضخامت تیر و \hat{P} و $\hat{\omega}$ بار و فرکانس بی‌بعد است که طبق روابط (17) و (18) تعریف می‌شوند.

$$\hat{P} = P \frac{l^2}{E_{22}bh^3} \quad (17)$$

$$\hat{\omega} = \phi \sqrt{\frac{\rho l^4}{E_{22}bh^3}} \quad (18)$$

با ساده‌سازی شرایط مرزی و اعمال آن در معادله (12) یک دستگاه دو معادله و دو مجهول به‌دست خواهد آمد که پاسخ غیر بدیهی این دستگاه هنگامی اتفاق می‌افتد که درمیان ماتریس ضرایب صفر باشد. این شرط منجر به معادله مشخصه (19) خواهد شد.

$$\beta^2 + 2\omega^2 + \beta\omega \sin(r_1) \sinh(r_2) + 2\omega^2 \cos(r_1) \cosh(r_2) = 0 \quad (19)$$

معادله مقدار ویژه فوق معادله پایداری تیر یک سر گیردار کامپوزیت چندلایه تحت اثر نیروی دینال کننده است. یک حالت خاص وقوع ناپایداری زمانی است که دو فرکانس طبیعی تیر با یکدیگر برابر شوند. این حالت که تنها زمانی اتفاق می‌افتد که سازه تحت اثر نیروهای ناپایستار قرار گرفته باشد، فلاتر نام دارد. در این مقاله مود اول فلاتر که ناشی از برابر شدن فرکانس‌های طبیعی اول و دوم تیر است، مورد بررسی قرار گرفته است.

3- اعتبار سنجی

به‌منظور بررسی دقت روش حاضر در تحلیل پایداری دینامیکی تیر یک سر گیردار کامپوزیت چندلایه، نتایج حاصل از این روش با نتایج موجود در سایر مقالات مقایسه می‌شود. نتایج مربوط به تغییرات نیروی بدون بعد - فرکانس بدون بعد و نیروی فلاتر به دست آمده به روش حاضر با نتایج ارائه شده در پژوهش [9] مقایسه شده است.

تیر مورد بررسی در این بخش از نوع یک سر گیردار بوده که در انتهای آزاد آن یک نیروی متمرکز دینال کننده وارد می‌شود. مشخصات هندسی و مکانیکی تیر مطابق جدول 1 است. ضخامت تمام لایه‌ها با یکدیگر برابر فرض می‌شود. در این شرایط ضخامت هر لایه برابر با $h_0 = h/N$ است که در آن N تعداد لایه‌ها است.

$$\frac{\partial^2 L_j}{\partial x^2} = -\rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (2)$$

که در آن ρ جرم واحد طول تیر است، معادله (3) به دست می‌آید:

$$-\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + P \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

از طرفی مطابق با تئوری کلاسیک مواد کامپوزیت چندلایه نیروهای صفحه‌ای و ممان‌های وارده بر یک صفحه کامپوزیت از معادله (4) به دست خواهد آمد.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = b \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

در معادله (4) N_i نیروهای صفحه‌ای، M_i ممان‌های وارد آمده، ε_i^0 کرنش‌های صفحه میانی، κ_i^0 انحناهای صفحه میانی، ماتریس A ماتریس سختی کشش، ماتریس B ماتریس سختی جفت‌شدگی کشش و خمش و ماتریس D ماتریس سختی خمش است که با توجه به تعریف‌شان در واحد طول محاسبه می‌شوند. با توجه به فرضیات در نظر گرفته‌شده و با استفاده از تعریف کرنش‌ها به کمک معادله (4) با ضرب کردن در عرض تیر نیرو و ممان غیر صفر به‌صورت معادلات (5) و (6) ساده می‌شوند.

$$N_{xx} = b \left(A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} - B_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \quad (5)$$

$$M_{xx} = b \left(B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} - D_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \quad (6)$$

که در معادلات فوق b عرض تیر، u جابجایی تیر در جهت x و W جابجایی تیر در جهت z است. نخست از معادله (5) عبارت $\partial u / \partial x$ محاسبه و در معادله (6) جای‌گذاری می‌شود، سپس معادله به‌دست آمده در معادله (3) جای‌گذاری و پس از انجام ساده‌سازی معادله (7) به دست می‌آید.

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(b \frac{B_{11}}{D_{11}} N_{xx} \right) + b \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

در لحظه وقوع ناپایداری مقدار $bN_{xx} = P$ نیروی محوری فلاتر است و با توجه به این‌که بار اعمالی نقطه‌ای است تابعی از x نمی‌باشد، در نتیجه با حذف ترم اول از معادله (7) معادله پایداری تیر به‌صورت معادله (8) به دست خواهد آمد.

$$\bar{D} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

که در آن \bar{D} طبق معادله (9) محاسبه می‌گردد و برای چیدمان مشخص لایه‌ها عدد ثابتی است.

$$\bar{D} = b \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \quad (9)$$

معادله حرکت یک تیر همسانگرد به‌صورت معادله (10) به‌دست می‌آید [14].

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

که در معادله فوق EI سختی خمشی تیر همسانگرد است. از مقایسه دو معادله (8) و (10) می‌توان وجود تشابه بین معادله تیر کامپوزیت چندلایه و همسانگرد را مشاهده نمود. به‌واسطه همین تشابه در ادامه تحلیل‌ها به‌عنوان یک فرض ساده شونده، شرایط مرزی تیرهای چندلایه مشابه تیرهای همسانگرد در نظر گرفته می‌شود که با توجه به چیدمان‌های مورد بررسی صحیح می‌باشد. در حالتی که سیستم تحت اثر نیروی ناپایستار قرار گیرد، دچار ناپایداری دینامیکی خواهد شد و معادله (8) بیان‌کننده شرایط ناپایداری برای یک تیر کامپوزیت چندلایه خواهد بود. در حالتی که تیر از نوع یک‌سر گیردار - یک سر آزاد بوده و در سر آزاد خود تحت اثر یک نیروی متمرکز دینال کننده قرار گرفته باشد، شرایط مرزی حاکم به‌صورت معادله (11) خواهد بود.

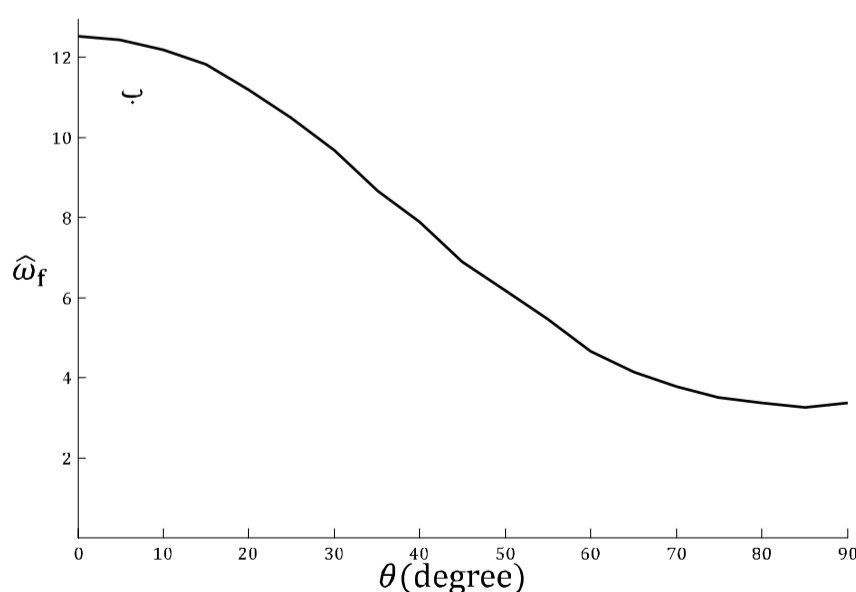
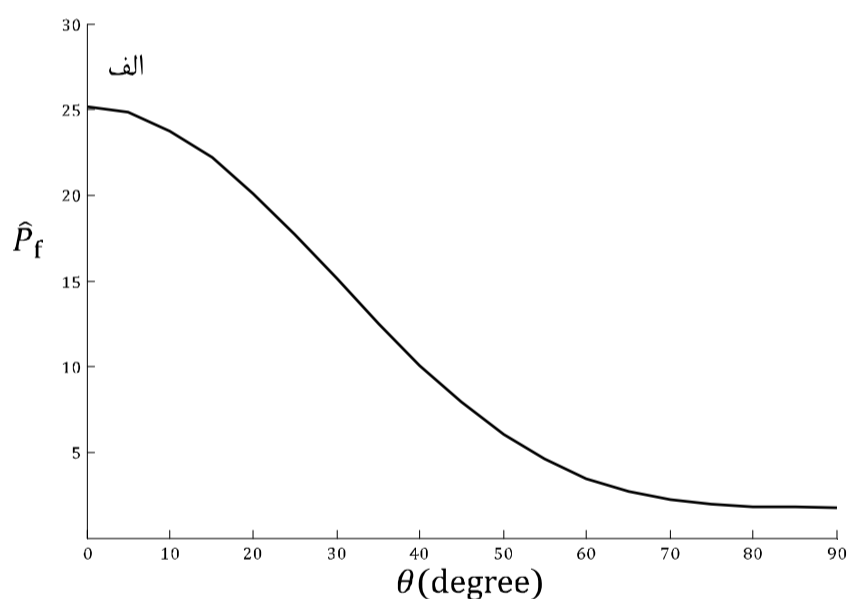
نظر گرفتن سادگی روش حل نتایج به صورت قابل قبولی از دقت کافی برخوردار هستند. در چیدمان‌های نامتقارن نیز دو چیدمان (0/15) و (0/60) به عنوان نمونه مورد بررسی قرار گرفته و تغییرات نیرو بر حسب فرکانس بی‌بعد به دست آمده به روش حاضر و نتایج [9] در شکل 2 با یکدیگر مقایسه شده‌اند. مشاهده می‌شود که در چیدمان‌های نامتقارن نیز با توجه به سادگی روش حاضر نتایج از دقت قابل قبولی برخوردارند.

4- بررسی پارامتری

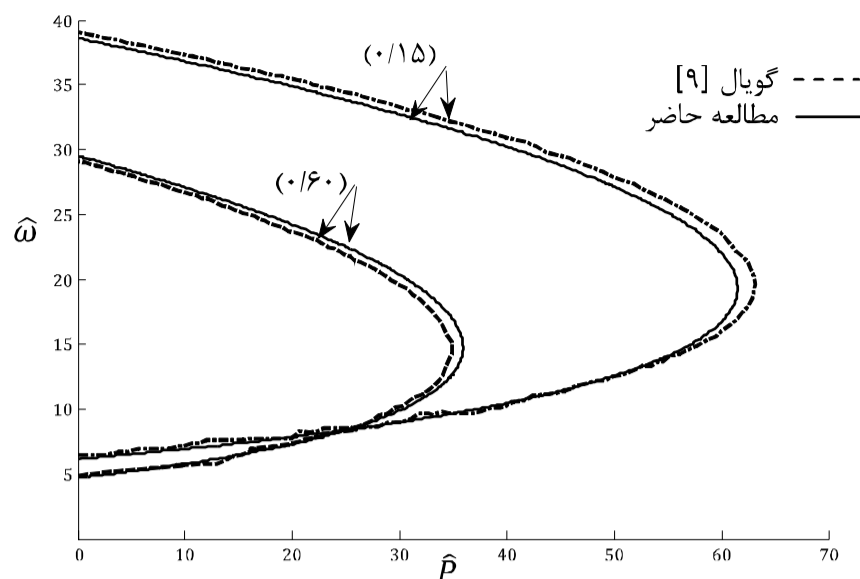
در این بخش رفتار پایداری دینامیکی یک تیر یک سرگیردار کامپوزیتی چندلایه تحت اثر نیروی دنبال کننده با استفاده از روش بدست آمده مورد بررسی قرار می‌گیرد. به این منظور در چهار بخش مختلف برای چهار چیدمان مرسوم چندلایه تحلیل‌ها صورت پذیرفته و نیروی فلاتر در هر بخش بدست خواهد آمد. پارامترهای مکانیکی و هندسی مورد استفاده در این بخش مطابق جدول 3 است.

4-1- تک‌لایه ارتوتروپیک

برای مطالعه اثر زاویه فایبر در پایداری دینامیکی یک تیر ارتوتروپیک نیرو و فرکانس فلاتر برای زوایای مختلف بین صفر تا 90 درجه به روش ارائه شده محاسبه شده که نتیجه آن در شکل 3 ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود تغییرات نیرو و فرکانس فلاتر بدون بعد برای زوایای بیشتر از 60 و کمتر از 10 درجه نامحسوس بوده و با تغییر در زاویه الیاف تغییرات چندانی مشاهده نمی‌شود. همان‌طور که انتظار می‌رفت بیشترین نیرو و فرکانس فلاتر زمانی حاصل می‌شود که فایبرها در راستای طولی تیر قرار گیرند.



شکل 3 نمودار تغییرات نیرو و فرکانس بدون بعد بر حسب زاویه θ برای تیر یک سر گیردار تک‌لایه ارتوتروپیک - الف: بار بدون بعد - ب: فرکانس بدون بعد



شکل 2 مقایسه نمودار نیرو - فرکانس بدون بعد برای تیر یک سر گیردار نامتقارن به روش حاضر و [9]

جدول 1 خواص ماده و هندسه تیر های مورد بررسی جهت اعتبار سنجی روش حاضر [9]

مقدار [9]	پارامتر هندسی / مکانیکی
0/3567	E_{11} (GPa)
0/1038	E_{22} (GPa)
0/0463	G_{12} (GPa)
0/33	ν_{12}
0/005	h (m)
0/02	b (m)
0/186	ρ (kg/m)

جدول 2 مقایسه نیرو و فرکانس بی بعد شده فلاتر به روش حاضر و [9] برای تیر کامپوزیت چندلایه ارتوتروپیک (θ)

زاویه θ	$\hat{\omega}_f$			\hat{P}_f		
	درصد اختلاف روش حاضر [9]	درصد اختلاف روش حاضر [9]	درصد اختلاف روش حاضر [9]	درصد اختلاف روش حاضر [9]	درصد اختلاف روش حاضر [9]	درصد اختلاف روش حاضر [9]
0	2/28	13/307	16/912	6/29	68/689	64/363
15	2/24	16/410	16/042	3/68	60/789	58/549
30	-0/48	16/322	16/401	-8/20	41/836	42/269
60	0/00	11/603	11/603	-6/61	21/057	22/449
90	1/51	10/903	10/738	5/56	19/850	18/746

جدول 3 خواص ماده و هندسه تیر های مورد بررسی در بخش بررسی پارامتری

مقدار	پارامتر هندسی / مکانیکی
129/20	E_{11} (GPa)
9/425	E_{22} (GPa)
5/156	G_{12} (GPa)
0/3	ν_{12}
0/004	h (m)
0/01	b (m)
0/2	l (m)
1550/1	$\hat{\rho}$ (kg/m ³)

بررسی دقت روش حاضر در تحلیل ناپایداری دینامیکی یک تیر کامپوزیتی چندلایه در دو بخش چندلایه‌های متقارن و نامتقارن صورت می‌پذیرد. نتایج به دست آمده در هر بخش به روش حاضر با نتایج به دست آمده از روش المان محدود مقایسه شده است. در اعتبار سنجی تیرهای متقارن، تیر مورد بررسی به صورت تک‌لایه ارتوتروپیک با زوایای صفر، 15، 30، 60 و 90 درجه در نظر گرفته شده است. در جدول 2 مقادیر نیرو و فرکانس فلاتر بی بعد به دست آمده به روش حاضر و نتایج [9] مقایسه شده‌اند. مشاهده می‌شود که با در

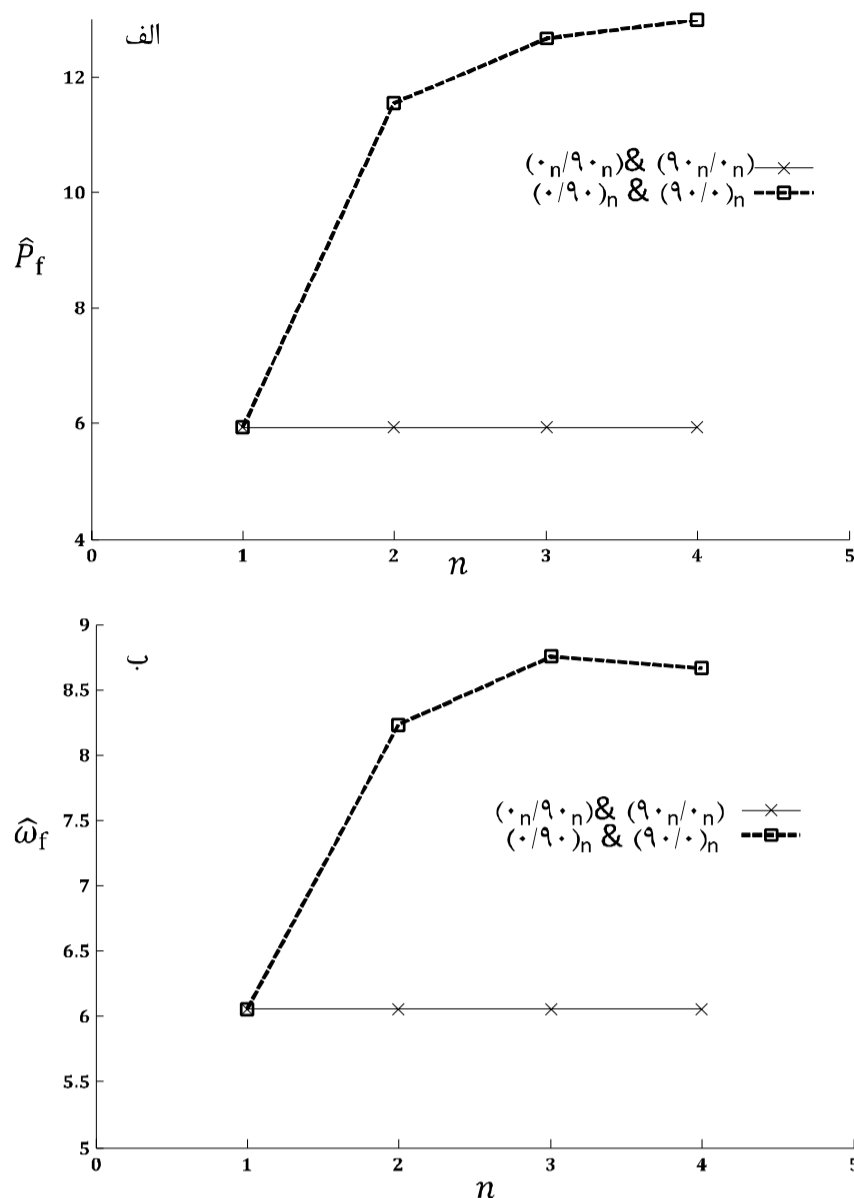
2-4- چیدمان صلیبی¹

در این بخش مقدار نیرو و فرکانس فلاتر برای چیدمان صلیبی یک تیر یک سر گیردار مورد بررسی قرار می‌گیرد. تحلیل مورد نظر در دو حالت چیدمان متقارن و نامتقارن انجام شده است. به این منظور از هشت نوع چیدمان $1: (0_n/90_n)_s - 2: (0_n/90_n)_s - 3: (0_n/90_n)_s - 4: (0_n/90_n)_s - 5: (90_n/0_n)_s - 6: (90_n/0_n)_s - 7: (90_n/0_n)_s - 8: (90_n/0_n)_s$ استفاده شده است. در تمام حالت‌ها ضخامت کلی تیر یکسان در نظر گرفته می‌شود.

در شکل 4 نمودار تغییرات نیرو و فرکانس لحظه وقوع فلاتر به ازای مقادیر مختلف n برای چیدمان‌های متقارن آورده شده است. همچنین در شکل 5 نتایج مربوط به چیدمان نامتقارن ارائه شده است. مشاهده می‌شود که افزایش تعداد لایه‌ها در مقدار نیرو و فرکانس فلاتر چیدمان‌های $(0_n/90_n)$ و $(90_n/0_n)$ در هر دو حالت متقارن و نامتقارن تاثیری ندارد که با توجه به ضخامت یکسان تمام حالت‌های مورد بررسی مسئله‌ای قابل توجیه است. اما با افزایش تعداد لایه‌ها نیرو و فرکانس فلاتر چیدمان $(0/90)_{ns}$ کاهش و چیدمان $(90/0)_{ns}$ افزایش می‌یابد و در اثر افزایش لایه‌ها رفتار چیدمان‌ها به یکدیگر نزدیک خواهد شد.

3-4- چیدمان زاویه ای² $(+\theta/-\theta)_s$

یکی از چیدمان‌های مرسوم برای تولید مواد کامپوزیت چیدمان زاویه‌ای است که در این بخش پایداری فلاتر این نوع چیدمان به روش ارائه شده در این مقاله بررسی می‌شود. چیدمان مورد بررسی از نوع متقارن بوده و تغییرات نیروی بدون بعد فلاتر برحسب زاویه θ در شکل 6 برای این نوع چیدمان آورده شده است.



شکل 5 نمودار تغییرات نیرو و فرکانس فلاتر بدون بعد برحسب n برای تیر یک سر گیردار چندلایه نامتقارن با چیدمان صلیبی - الف: نیروی فلاتر - ب: فرکانس فلاتر

جدول 4 نیرو و فرکانس بدون بعد فلاتر برای تیر کامپوزیت چندلایه متقارن با

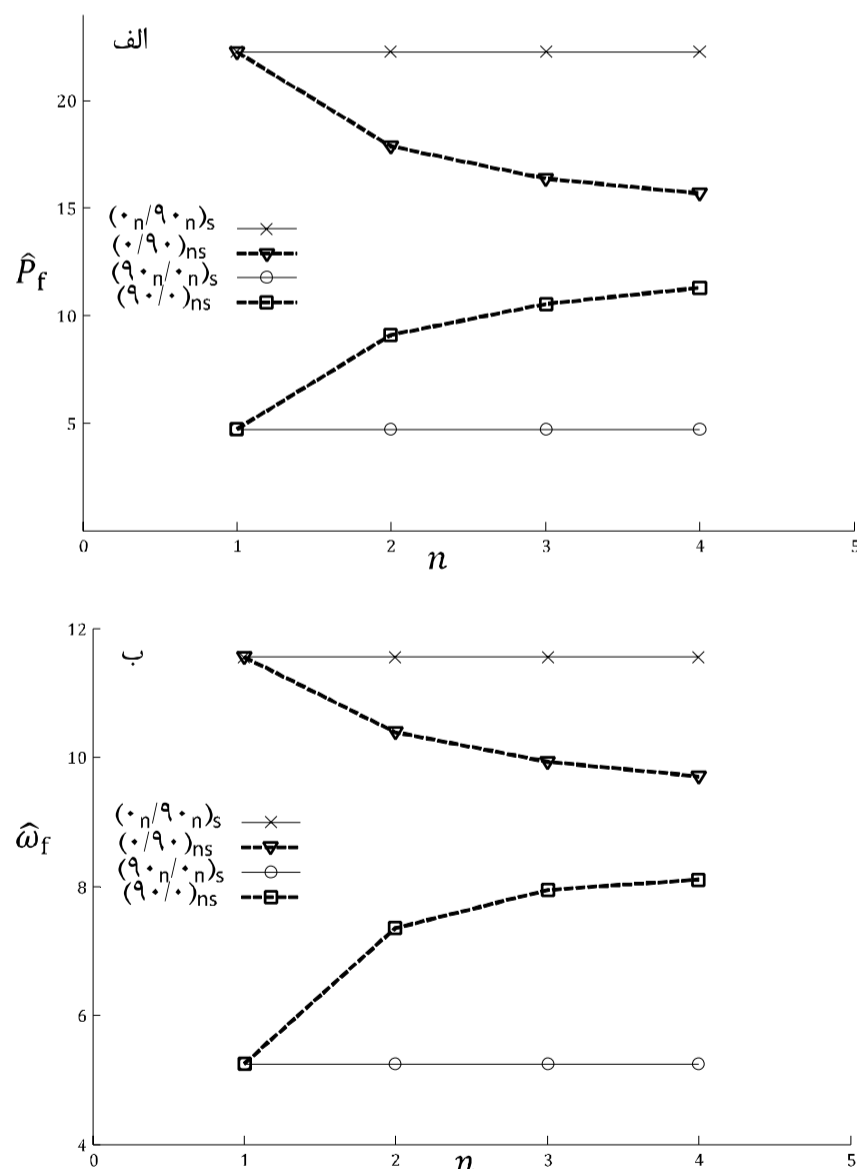
چیدمان زاویه ای $(+\theta/-\theta)_s$ برای برخی زوایای خاص

$\hat{\omega}_f$	\hat{P}_f	θ
12/292	25/210	0
11/617	22/264	15
9/442	15/176	30
6/891	7/882	45
4/686	3/459	60
3/414	1/784	90

همچنین در جدول 4 نیرو و فرکانس بدون بعد فلاتر برای چند زاویه خاص ارائه شده است. مشاهده می‌شود که تغییرات نیروی فلاتر بی‌بعد در این چند لایه مشابه تک لایه ارتوتروپیک شکل 3 می‌باشد. با توجه به رابطه 9 مشاهده می‌شود که مقدار \bar{D} تنها تابعی از b ، h و \bar{Q}_{11} است و با توجه به ماهیت ماتریس‌های سفتی چندلایه‌ی چیدمان‌های زاویه‌ای متقارن و نامتقارن با ضخامت یکسان ($B_{11} = 0$ و D_{11} عدد ثابتی است) رفتاری مشابه با تک لایه ارتوتروپیک از این چیدمان‌ها مشاهده می‌شود که دور از انتظار نیست.

4-4- چیدمان (α/θ)

چیدمان مورد بررسی در این بخش از نوع نامتقارن است. با استفاده از روش ارائه شده نیرو و فرکانس بدون بعد فلاتر برای زاویه‌های مختلف θ محاسبه شده است. در جدول 5 برای برخی زوایای خاص مقادیر نیرو و فرکانس بدون بعد فلاتر برای دو حالت مرسوم $\alpha=0$ و $\alpha=90$ با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همچنین در شکل 7 تغییرات نیروی بدون بعد فلاتر برحسب زاویه θ برای چند مقدار مختلف α ارائه شده است.



شکل 6 نمودار تغییرات نیرو و فرکانس فلاتر بدون بعد برحسب n برای تیر یک سر گیردار چندلایه متقارن با چیدمان صلیبی - الف: نیروی فلاتر - ب: فرکانس فلاتر

1- Cross Ply
2- Angle Ply

در مقاله حاضر روشی ساده با فرضیات ساده شونده برای تحلیل پایداری تیر چند لایه کامپوزیتی تحت تاثیر بار پیرو ارائه شد که نتایج به دست آمده از این روش با توجه به سادگی آن از دقت قابل قبولی برای هر دو چیدمان متقارن و نامتقارن برخوردار است. نتایج ارائه شده حاکی از تاثیر نوع چیدمان لایه‌ها در مقدار نیرو و فرکانس ناپایداری فلاتر تیرهای کامپوزیتی دارد. در ادامه برای کارهای آینده استفاده از فرضیات ساده شونده کمی کمتر می‌تواند جهت بهبود دقت روش در نظر گرفته شود.

6- فهرست علائم

A	ماتریس سفتی کشش
B	ماتریس سفتی جفت‌شدگی کشش و خمش
B	عرض تیر (m)
D	ماتریس سفتی خمش
E ₁₁	مدول الاستیسته کامپوزیت در جهت x (Pa)
E ₂₂	مدول الاستیسته کامپوزیت در جهت y (Pa)
EI	سفتی خمشی تیر همسانگرد
F	خیز انتهای تیر (m)
G ₁₂	مدول الاستیسته برشی کامپوزیت (Pa)
H	ضخامت تیر (m)
h ₀	ضخامت تک لایه (m)
L	طول تیر (m)
L _j	ممان خمشی تولید شده توسط کار نیروهای اینرسی (N.m)
M _i	ممان خمشی تیر در جهات مختلف (N.m)
N _i	نیروهای صفحه‌ای وارد آمده بر تیر (N)
N	تعداد لایه‌های تیر کامپوزیتی
P	نیروی متمرکز دینال کننده (N)
\hat{P}	بار بی‌بعد شده
T	زمان (s)
U	جابجایی تیر در راستای x (m)
W(x)	جابجایی تیر در راستای z (m)

علائم یونانی

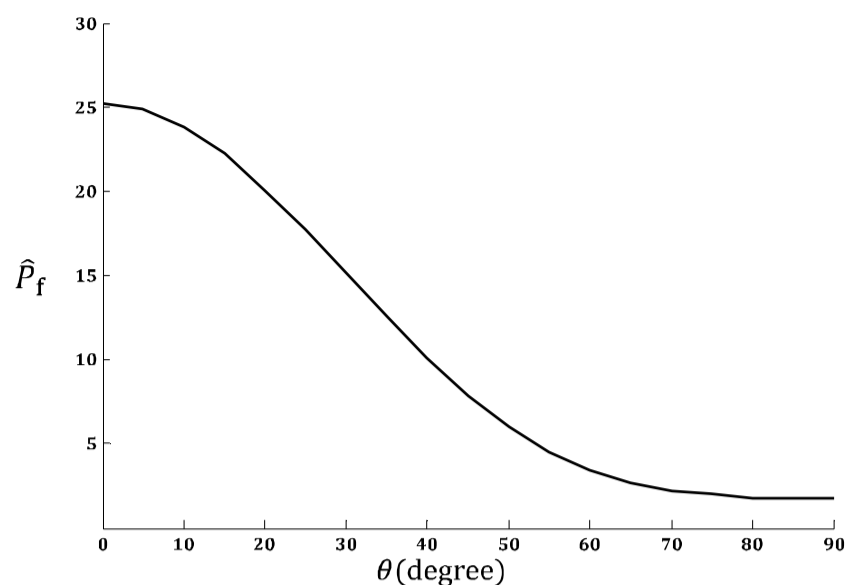
ϵ_i^0	کرنش‌های صفحه میانی
κ_i^0	انحنای صفحه میانی
ν_{12}	نسبت پواسون کامپوزیت
ζ	متغیر بی‌بعد شده طول
ρ	جرم واحد طول تیر (kg/m)
$\hat{\rho}$	چگالی تیر (kg/m ³)
Φ	زاویه اعمال نیروی P نسبت به خط افق
ϕ	فرکانس طبیعی (rad/s)
$\hat{\omega}$	فرکانس بی‌بعد شده

زیر نویس‌ها

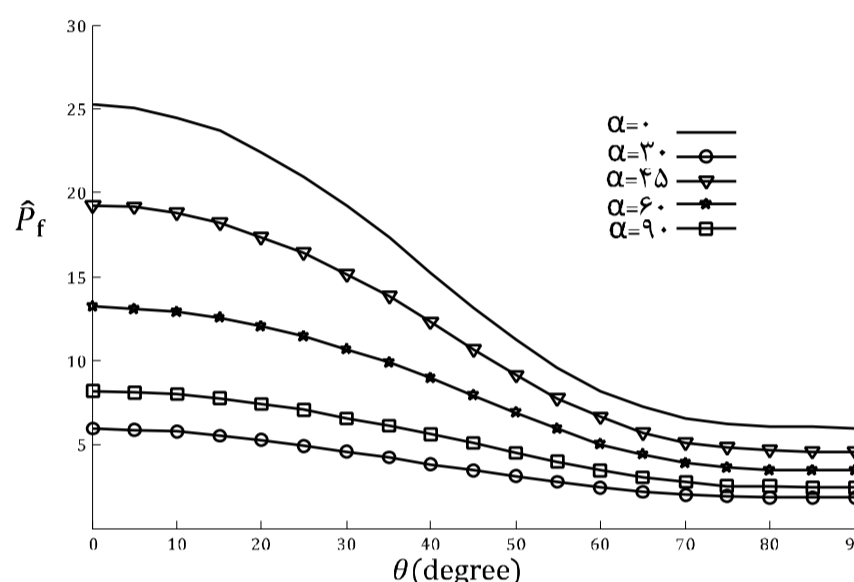
f	فلاتر
s	مقارن

7- مراجع

[1] M. Beck, The buckling load of the cantilever column subjected to tangential force, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, Vol. 3, pp. 225-228, 1952.



شکل 6 نمودار تغییرات نیروی بدون بعد بر حسب زاویه θ برای تیر یک سر گیردار چندلایه متقارن با چیدمان $(+\theta/-\theta)_s$



شکل 7 نمودار تغییرات نیروی فلاتر بدون بعد بر حسب زاویه θ برای مقادیر مختلف α در چیدمان (α/θ)

جدول 5 مقادیر نیرو و فرکانس بدون بعد فلاتر برای دو چیدمان $(0/\theta)$ و $(90/\theta)$ به ازای برخی مقادیر θ

θ	$(90/\theta)$		$(0/\theta)$	
	$\hat{\omega}_f$	\hat{P}_f	$\hat{\omega}_f$	\hat{P}_f
0	6/059	5/927	12/292	25/210
15	5/787	5/549	11/959	23/660
30	5/220	4/575	10/679	19/263
45	4/606	3/461	8/907	13/191
60	3/921	2/471	6/988	8/208
90	3/354	1/837	6/059	5/927

5- جمع بندی و نتیجه گیری

در این مقاله پایداری دینامیکی یک تیر کامپوزیت چندلایه تحت اثر نیروهای دینال کننده مورد بررسی قرار گرفت. نخست با کمک تئوری تیر اویلر برنولی معادله خمش و معادله پایداری تیر به دست آمد و سپس یک حل تحلیلی برای پایداری تیر کامپوزیت چندلایه با شرایط مرزی یک سر گیردار-یک سر آزاد تحت تاثیر نیروی دینال کننده در انتهای خود به دست آورده شد.

اعتبار معادلات به دست آمده با استفاده از نتایج سایر مقالات مورد بررسی قرار گرفت. مقایسه صورت گرفته نشان از دقت قابل قبول روش ساده حاضر برای دو حالت چیدمان‌های متقارن و نامتقارن دارد. پس از اعتبار سنجی روش به دست آمده، تاثیر چیدمان در رفتار پایداری و مقدار نیروی فلاتر یک تیر کامپوزیت یک سر گیردار مورد بررسی قرار گرفت. به این منظور برخی چیدمان‌های مرسوم در مواد کامپوزیت چندلایه انتخاب و مورد بررسی قرار گرفت.

- [9] V. K. Goyal, R. K. Kapania, Dynamic stability of laminated beams subjected to nonconservative loading, *Thin-Walled Structures*, Vol.46, pp.1359-1369, 2008.
- [10] N. Kim, Dynamic stability behavior of damped laminated beam subjected to uniformly distributed subtangential forces, *Composite Structures*, Vol. 92, pp. 2768-2780, 2010.
- [11] N. I. Kim, J. Lee, Divergence and flutter behavior of Beck's type of laminated box beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 84, pp. 91-101, 2014.
- [12] M. E. Torki, M. T. Kazemi, H. Haddadpour, S. Mahmoudkhani, Dynamic stability of functionally graded cantilever cylindrical shells under distributed axial follower forces, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 333, pp.801-817, 2014.
- [13] X. Wang, W.D. Yang, S. Yang, Dynamic stability of carbon nanotubes reinforced composites, *Applied Mathematical Modeling*, Vol.38, pp.2934-2945, 2014.
- [14] V. V. Bolotin, *Nonconservative problems of theory of elastic stability*, pp. 90-93, London, Pergamon Press, 1963.
- [2] B.S.Shavartsman, Large deflection of a cantilever beam subjected to a follower force, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 304, pp. 969-973, 2007.
- [3] A. K. Nallatham, C. L. Rao, S. M. Srinivasan, Large deflection of constant curvature cantilever beam under follower load, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 52, pp.440-445, 2010.
- [4] B.S.Shavartsman, Analysis of large deflections of a curved cantilever subjected to a tip-concentrated follower force, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 50, pp. 75-80, 2013.
- [5] H. S. Alkhalidi, I. A. Alshaikh, R. A. Mallouh, O. Ghazal, Closed-form solution of large deflection of a spring-hinged beam subjected to non-conservative force and tip end moment, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol.47, pp.271-279, 2014.
- [6] H. Moeenfard, B. Moetakef Imani, M. Davoudi, A.Rahimzadeh, Dynamic instability in tapered beams under wind excitation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15,pp. 153-161, 2015.(InPersian)
- [7] M. Rezaee, R. Jahangiri, Static/dynamic instability and nonlinear vibrations of FG plates resting on elastic foundation under parametric forcing excitation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14,pp. 172-182, 2015.(InPersian)
- [8] Y. Xiong, T. K. Wang, Stability of A Beck-Type Laminated Column, *In Proceedings of the Sixth International Conference on Composite Materials (ICCM VI)*, Vol.5, pp. 38-46, 1987.