



## کنترل بهینه غیرخطی مساله ملاقات مداری برای مدار هدف دایروی و بیضوی

محمد نوابی<sup>1\*</sup>، مهدی رضا اخلومدی<sup>2</sup>

1- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

\* تهران، صندوق پستی 1983963113، m\_navabi@sbu.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 23 اردیبهشت 1394  
پذیرش: 05 مهر 1394  
ارائه در سایت: 30 آبان 1394  
کلید واژگان:  
ملاقات و اتصال مداری  
معادلات کلوهمسی-ویلتشایر  
شونر-همپل  
کنترل بهینه غیرخطی  
معادله ریکاتی وابسته به حالت

### چکیده

در این مقاله برای مدار دایروی دینامیک ملاقات به فرم مرتبه دوم معادلات حرکت نسبی غیرخطی کلوهمسی-ویلتشایر و برای مدار بیضوی معادلات شونر-همپل متغیر با زمان لحاظ شده است. تابع هزینه کنترل بهینه طوری در نظر گرفته شده است که علاوه بر بهینگی مصرف سوخت، حالت‌های همواری استخراج شود. کنترل بهینه غیر خطی برای این مساله با استفاده از معادله ریکاتی وابسته به حالت بر اساس روش تحلیلی مقادیر ویژه ماتریس همیلتونین استخراج شده و نتایج با تنظیم کننده مربعی خطی مقایسه شده است. مقاومت، پایداری و همواری جواب-ها در حضور عدم قطعیت‌های وارد به سیستم نشان داده شده و کارآمدتر بودن کنترل کننده غیرخطی نسبت به روش‌های موجود مشاهده شده است. به علاوه کنترل بهینه برای ملاقات با هدف در مدار بیضوی به صورت مستقل حل و تحلیل شده است. نتایج و مسیرهای بهینه با استفاده از انتقالی مناسب در دستگاه اینرسی بیان شده اند تا بتواند مورد استفاده در اهداف هدایتی و ناوبری قرار گیرد.

## Nonlinear Optimal Control of Orbital Rendezvous Problem for Circular and Elliptical Target Orbit

Mohammad Navabi\*, Mahdi Reza Akhloumadi

New Technologies Engineering Faculty, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran.

\*P.O.B 1983963113, Tehran, Iran, m\_navabi@sbu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 13 May 2015  
Accepted 27 September 2015  
Available Online 21 November 2015

**Keywords:**  
Rendezvous and docking  
Clohessy-Wiltshire  
Schauner-Hempel  
Nonlinear Optimal Control  
State Dependent Riccati Equation

### ABSTRACT

In this paper the attitude and position of a chaser spacecraft, desired to rendezvous with a target spacecraft, is determined with respect to the target, as a result, relative equations are considered. The chaser is controlled by actuators to rendezvous safely and stably under the conditions and requirements. In this paper rendezvous dynamics for target in a circular orbit is assumed as nonlinear second-order Clohessy-Wiltshire relative motion equations. Shauner and Hempel relative equations are considered for target in elliptical orbit. Cost function has been chosen in a manner so as to minimize the control effort and to give smooth states. Nonlinear optimal control for rendezvous with a target in circular orbit using state dependent Riccati equation by means of eigenvectors of the Hamiltonian matrix is compared with linear quadratic regulator method for both linear and nonlinear systems and then stability and robustness of the results are analysed. Optimal control of an elliptical rendezvous is discussed independently. For navigational purposes it is important to express relative motion in inertial frame, this is accomplished by introducing an appropriate transformation.

### 1- مقدمه

هدف معرف فرآیند اتصال فضایی می‌باشد. امروزه این مساله در ماموریت‌های هوافضایی کاربرد فراوانی دارد که از جمله آن‌ها می‌توان به حمل محموله یا خدمه به ایستگاه‌های فضایی، سرویس‌رسانی فضایی و یا ماموریت‌های سیاره-ای اشاره کرد. برای مثال فضاپیمای سایوز هر شش ماه یکبار به ایستگاه فضایی بین‌المللی متصل می‌شود و فضانوردان را به آن منتقل می‌کند.

مساله‌ی ملاقات مداری از اوایل دهه‌ی شصت میلادی به دلیل نیازهای عملیاتی فضایی ذهن دانشمندان را به خود مشغول کرده بود. برای اولین بار باز آلدین<sup>1</sup> در سال 1963 رساله دکتری خود [1] را با عنوان تکنیک‌های

ملاقات فضایی مانوری است که در آن دو فضاپیما در یک مدار با فاصله‌ی بسیار کم در حد چند متر تا پنجاه سانتی متر به یکدیگر می‌رسند. ملاقات به تطبیق و برابر شدن سرعت دو فضاپیما نیازمند است تا آن‌ها بتوانند در یک فاصله‌ی ثابت در فاز حفظ ایستگاه باقی بمانند. ملاقات ممکن است با پهلوگیری یا اتصال دنبال شود، فرایندی که معرف ارتباط فیزیکی بینابین فضاپیماها است و لینکی سخت افزاری بین آن‌ها برقرار می‌شود. در واقع صفر شدن سرعت نسبی دو فضاپیما در فاصله‌ی بسیار نزدیک معرف ملاقات و تنظیم وضعیت فضاپیمای ملاقات کننده نسبت به درگاه اتصال فضاپیمای

1. Buzz Aldrin

Please cite this article using:

M. Navabi, M.R. Akhloumadi, Nonlinear Optimal Control of Orbital Rendezvous Problem for Circular and Elliptical Target Orbit, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 12, pp. 132-142, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

عدم قطعیت‌ها بر روش‌های کنترلی پرداخته شده است. عملکرد مناسب روش کنترل بهینه غیرخطی نشان داده شده است.

رویکردهای مختلفی برای کنترل چنین سیستمی وجود دارد، کنترل بهینه درصد حداقل کردن یک تابع هزینه می‌باشد. سوخت و زمان می‌توانند از جمله این توابع هزینه باشد. سوخت در این مساله بسیار حائز اهمیت است، چرا که با وجود محدودیتهای وزنی و سیستمی و عملیاتی طراحی فضاپیما حمل مقدار زیاد سوخت امکان پذیر نمی‌باشد. لیکن به دلیل ماهیت غیرخطی مساله، حل حلقه بسته‌ی سوخت بهینه منجر به تولید مسیرهای ناهموار خواهد شد که از لحاظ مهندسی قابل قبول نیست به همین دلیل در کنار حداقل کردن سوخت می‌باید هموار کردن مسیر نیز لحاظ شود. در این مقاله فرض بر این است که ملاقات در مدارات دایروی و یا بیضوی در نزدیکی زمین صورت می‌پذیرد. در ادامه ابتدا معادلات خطی و غیر خطی دینامیک سیستم مطرح می‌شود، سپس تابع هزینه معرفی شده و به تنظیم کننده‌ی مربعی غیرخطی<sup>4</sup> (NQR) و روش معادله ریکاتی وابسته به حالت پرداخته می‌شود. بعد از آن روش حل معادله ریکاتی وابسته به حالت به وسیله ماتریس همیلتونین بیان می‌شود، سپس انتقال به دستگاه اینرسی استخراج می‌شود و شبیه‌سازی برای مدار دایروی و بیضوی در حضور عدم قطعیت‌ها انجام می‌شود. در نهایت به بیان نتایج اصلی از کار انجام شده پرداخته می‌شود.

## 2- معادلات خطی و غیرخطی نسبی ملاقات مداری

برای بیان حرکت فضاپیمای رهگیر نسبت به فضاپیمای هدف از معادلات حرکت نسبی کلوهرسی-وایلتشایر استفاده می‌شود. با فرضیات و نیازهای مختلف میتوان فرم‌های مختلفی از این معادلات را استخراج کرد. وقتی سرعت‌ها و فواصل نسبی صفر شوند ملاقات صورت می‌پذیرد [18]. دستگاه مختصات مرجع شکل 1 که مرکز آن در روی مرکز جرم فضاپیمای هدف قرار دارد و سایر مختصات نسبت به این نقطه بیان می‌شود در نظر گرفته می‌شود. که محور  $x$  در شکل 1 در جهت بردار سرعت فضاپیمای هدف قرار گرفته است، محور  $y$  عمود بر مدار حرکت فضاپیمای هدف در جهت مخالف بردار مومنوم زاویه‌ای مدار فضاپیما است و نهایتاً محور  $z$  در جهت شعاعی فضاپیمای هدف دستگاه را کامل می‌کند. تقرب به فضاپیمای هدف در این سه جهت صورت می‌گیرد، اگر تقریبی به هدف در جهت شعاعی صورت پذیرد  $R$ - جهت نامیده می‌شود، در صورتی که تقرب در جهت مماسی صورت پذیرد  $V$ - جهت نامیده می‌شود و اگر نهایتاً تقرب در جهت خارج از صفحه مدار هدف صورت پذیرد  $H$ -Bar نامیده می‌شود.

## 2-1- معادلات خطی ملاقات با هدف در مدار دایروی

با توجه به این دستگاه مختصات معادلات حرکت نسبی با فرض مدار دایروی هدف و همچنین خیلی کمتر بودن فاصله‌ی نسبی رهگیر تا هدف نسبت به فاصله‌ی فضاپیمای هدف تا زمین، همچنین با صرف نظر از اغتشاشات [19] به فرم خطی معادله (1) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega_0 \dot{z} &= a_x \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y &= a_y \\ \ddot{z} + 2\omega_0 \dot{x} - 3\omega_0^2 z &= a_z \end{aligned} \quad (1)$$

که در معادلات فوق  $x, y, z$  فواصل نسبی رهگیر نسبت به هدف،  $a_x, a_y, a_z$  شتاب در راستاهای مربوطه و  $\omega_0$  معرف سرعت زاویه‌ای فضاپیمای هدف در مدار خود می‌باشد.

هدایت افق دید برای ملاقات مداری با هدف سرنشین دار ارائه داد. او با این کار بابتی را در موضوع ملاقات و اتصال مداری گشود. روش‌های کنترلی مختلف راجع به کنترل این مساله به کار گرفته شده است. همچنین در بعضی کارها قیودی برای جلوگیری از تصادم دو فضاپیما [2,3] و یا ممانعت از برخورد با زباله‌های فضایی در مسیر ملاقات [4] پرداخته شده است، چنین حالتی به صورت قیود در مساله لحاظ می‌شوند. از نکات مورد توجه در زمینه‌ی ملاقات مداری بررسی ملاقات و اتصال خودکار فضایی بوده است [1,5].

کنترل تطبیقی برای تخمین و تنظیم پارامترها برای فرایند ملاقات و اتصال مورد استفاده قرار گرفته شده است [6,7]. برای کنترل فرآیند ملاقات و اتصال مداری روش‌های تکاملی [8,9] و فازی [8] نیز مورد توجه محققان بوده است. به دلیل وجود عدم قطعیت‌های سیستم در پارامترهای سیستم و یا اغتشاشات از روش‌های مقاوم جدید و مناسبی مانند اج-بی‌نهایت<sup>1</sup> نیز برای حل این مساله استفاده شده است [5-7] و [10-13].

همچنین حل سوخت بهینه [2,14] و زمان بهینه برای مساله‌ی ملاقات و یا بهینه سازی مسیر ملاقات [14] مورد توجه قرار گرفته است. از روش‌های کنترلی دیگر که در این زمینه به کار گرفته شده است می‌توان به کنترل مدل پیشین<sup>2</sup> اشاره کرد [15]. کنترل بهینه‌ی مساله‌ی ملاقات و اتصال به صورت خطی و غیرخطی با روش‌های مختلف و گاه نوآورانه و ابتکاری مورد بررسی محققان قرار گرفته شده است [3,10-14]. مقالات معمولاً مساله‌ی ملاقات و اتصال را به صورت جداگانه مد نظر قرار می‌دهند در صورت عدم نامیزانی در تراسترها با مرکز جرم چنین رویکردی کاملاً صحیح می‌باشد و ملاقات و اتصال و در واقع وضعیت و موقعیت فضاپیما غیرکوپل می‌شوند. در مرجع [16] به مساله آرایش پروازی و استخراج معادلات موقعیت نسبی در مدارات هدف بیضوی و دایروی بدون اعمال کنترل و در [17] به کنترل بهینه مساله ملاقات فضایی در مدار دایروی با استفاده از روش‌های عددی پرداخته شده است.

با بررسی تمامی روش‌های کنترل بهینه صورت گرفته در مقالات و رساله‌های ذکر شده مشخص می‌شود که هیچ کدام از مراجع از روش حل معادله‌ی ریکاتی وابسته به حالت<sup>3</sup> (SDRE) و حل آن به وسیله ماتریس همیلتونین برای مساله‌ی ملاقات فضایی استفاده نکرده‌اند. در صورتی که با توجه به نتایج حاصل از این مقاله می‌توان ادعا کرد که روش مذکور از نظر محاسباتی، سادگی ریاضیاتی و مقاومت نسبت به تغییر حالت‌ها و زمانی به صرفه می‌باشد و جواب‌های استخراج شده از این روش در مقایسه با روش کنترل تنظیم کننده‌ی مربعی خطی و کنترل مشتق گیر تناسبی بسیار مقبول تر می‌باشد. همچنین تا حدی نسبت به عدم قطعیت‌های جرمی و یا پارامتری مدار نیز مقاوم است.

در اکثر کارهای گذشته برای مانور ملاقات و اتصال هدفی در مدار دایروی مد نظر قرار گرفته است، در صورتی که در این مقاله کنترل بهینه ملاقات در مدار بیضوی نیز حل شده است. همچنین کارهای گذشته سیستم معادلات برای مدار دایروی را نیز خطی در نظر گرفته‌اند، در صورتی که در این کار این سیستم به صورت غیرخطی در نظر گرفته شده است. در کارهای گذشته از بیان حرکت نسبی در دستگاه اینرسی خودداری شده است ولی در کار حاضر به این موضوع نیز پرداخته شده است. در مقاله حاضر به بررسی اثر

1. H-infinity  
2. Model Predictive  
3. State Dependent Riccati Equation

بهینه حداقل سوخت ناهموار خواهند بود، که از لحاظ عملی مشکلات فراوانی خواهد داشت. که در تابع هزینه (4)،  $x(t)$  معرف بردار حالت سیستم است و  $u(t)$  کنترل است. همچنین شرایط نهایی مطلوب صفر شدن سرعت‌ها و موقعیت‌های نسبی می‌باشد تا ملاقات صورت پذیرد، به همین دلیل شکل تنظیم کننده مربعی خطی بدون ترم تعقیب با شرایط نهایی صفر مد نظر قرار داده شده است که در رابطه (5) متغیرهای حالت و کنترل معرفی شده‌اند:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad (5)$$

در رابطه (4) ماتریسهای  $R, Q$  ماتریسهای وزنی هستند و ناظر بر اهمیت حالت و یا کنترل خاصی برای تنظیم شدن می‌باشند. در این مقاله این ماتریسها قطری و ثابت در نظر گرفته شده‌اند و به ترتیب می‌بایست مثبت نیمه معین و مثبت معین باشند. وجود ترم  $x(t)$  در تابع هزینه باعث هموار شدن جواب‌ها خواهد شد، همچنین این ترم باعث مقاومت نسبت به تغییر حالت‌ها خواهد شد [23].

#### 4- مساله تنظیم کننده مربعی غیرخطی

روش تنظیم کننده مربعی خطی<sup>4</sup> (LQR) با حداقل کردن معیار عملکرد تعریف شده توسط طراح برای سیستم‌های خطی شده مناسب است. ولی برای یک سیستم غیرخطی رویکرد تنظیم کننده مربعی غیرخطی لازم است [24]. در سیستم غیر خطی حالت‌ها و کنترل به صورت ترم‌های غیر خطی ظاهر می‌شوند. سیستم معادله‌ی (6) را در نظر گرفته:

$$\dot{x} = f(x(t)) + g(x(t), u(t)) \quad (6)$$

$$x(0) = x_0$$

و تابع هزینه‌ی (7) که می‌بایست توسط کنترل بهینه حداقل شود:

$$J(x_0, u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)] dt \quad (7)$$

برای حل (7) بدون لحاظ کردن قیود می‌توان از تابع همیلتونین استفاده کرد. با تشکیل تابع همیلتونین (8) و لحاظ کردن شرایط لازم بهینگی (9) کنترل بهینه به صورت (10) بر اساس سومین معادله (8) استخراج می‌شود، که در آن  $\lambda$  کمک حالت سیستم می‌باشد:

$$H = \frac{1}{2} x(t)^T Q x(t) + \frac{1}{2} u(t)^T R u(t) + \lambda^T (t) A(t) x(t) + \lambda^T (t) B(t) u(t) \quad (8)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 = Ru + \frac{\partial g^T}{\partial u}(x, u) \lambda$$

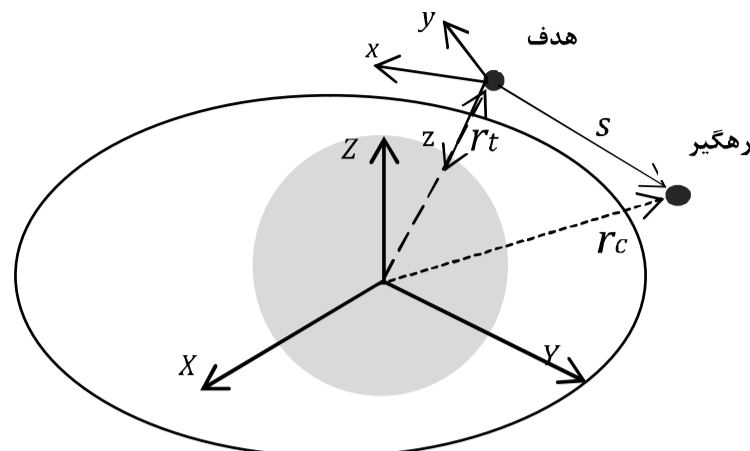
$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{x} = f(x) + g(x, u)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda} = Qx - \frac{\partial f^T}{\partial x}(x) \lambda + \frac{\partial g^T}{\partial x}(x, u) \lambda \quad (9)$$

$$u(t) = -R^{-1} \frac{\partial g^T}{\partial u}(x(t), u(t)) \lambda(t) \quad (10)$$

#### 4-1- استخراج معادله ریکاتی وابسته به حالت

روش معادله ریکاتی وابسته به حالت راهی برای حل کردن معادلات (9) برای



شکل 1 دستگاه مختصات چرخان متصل به هدف

#### 2-2- معادلات غیرخطی ملاقات با هدف در مدار دایروی

اگر نتوان فواصل نسبی را بسیار کوچکتر از فاصله ماهواره هدف تا زمین در نظر گرفت و همچنان با فرض عدم حضور اغتشاشات مداری و مدار تقریباً دایروی هدف، شکل دیگری از معادلات کلوهرسی-وایلتشایر به فرم غیر خطی مرتبه دوم معادله (2) توسط لندن<sup>1</sup> [20] استخراج شده است.

$$\ddot{x} - 2\omega_0 \dot{z} + 3\omega_0^2 \frac{xy}{r_t} = a_x$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + \frac{3\omega_0^2 yz}{r_t} = a_y$$

$$\ddot{z} + 2\omega_0 \dot{x} - 3\omega_0^2 z + \frac{3}{2}\omega_0^2 \frac{x^2}{r_t} + \frac{3}{2}\omega_0^2 \frac{y^2}{r_t} - 3\omega_0^2 \frac{z^2}{r_t} = a_z \quad (2)$$

#### 3-2- معادلات خطی متغیر زمان ملاقات با هدف در مدار بیضوی

اگر ماهواره هدف در مداری بیضوی باشد، شکل معادلات سیستم عوض خواهد شد، سرعت زاویه‌ای مدار بیضوی ماهواره هدف همواره بر حسب شعاع مداری تغییر می‌کند. شکل اصلی این معادلات به صورت خطی توسط شاونر و همپل<sup>2</sup> [21] استخراج شده است که به معادلات T-H معروف است. این معادلات با یک ماتریس انتقال حالت که توسط یاماناکا و انکرسن<sup>3</sup> استخراج شده است [22] با فرض مستقل بودن آنومالی مدار ماهواره هدف به صورت معادلات (3) قابل بیان هستند:

$$\ddot{x} + k\omega^{3/2} x - 2\omega \dot{z} - \dot{\omega} z - \omega^2 x = a_x$$

$$\ddot{y} + k\omega^{3/2} y = a_y$$

$$\ddot{z} - 2k\omega^{3/2} z + 2\omega \dot{x} + \dot{\omega} x - \omega^2 z = a_z \quad (3)$$

در معادلات (3) مشاهده می‌شود که سرعت و مشتق سرعت زاویه‌ای مدار هدف که با زمان متغیر هستند، ظاهر شده‌اند. همچنین در معادلات (3)

$$k\omega^{3/2} = \frac{\mu}{r^3} \text{ می‌باشد.}$$

#### 3- تابع هزینه به فرم تنظیم کننده مربعی

به منظور حداقل کردن تلاش کنترلی یا به عبارت دیگر حداقل کردن مصرف سوخت در عین هموار کردن مسیر برای جلوگیری از صدمات سازه‌ای و اغتشاشات تابع هزینه به فرم تنظیم کننده (4) بیان می‌شود.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)] dt \quad (4)$$

در صورت لحاظ نکردن ترم مربوط به حالت در تابع معیار عملکرد جواب‌های

1. London  
2. Shauner and Hempel  
3. Yamanaka and Ankersen

ریکاتی با ماتریس‌های  $A, B$  وابسته به حالت است، که با انتگرال گیری از آخر قابل حل است. پارامترسازی و یا فاکتورگیری SDC برای مساله ملاقات مداری بر اساس معادلات (5) و (2) در این مقاله به صورت (17) انتخاب شده است:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3\omega_0^2 Z}{r_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\omega_0 \\ 0 & -\omega_0^2 & -\frac{3\omega_0^2 y}{r_t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3\omega_0^2 x}{2r_t} & -\frac{3\omega_0^2 y}{2r_t} & 3\omega_0^2 + \frac{3\omega_0^2 Z}{r_t} & -2\omega_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

همچنین برای فرم خطی معادلات کلوهرسی-ویلتشایر ماتریس سیستم  $A$  به صورت (18) قابل استخراج است:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\omega_0 \\ 0 & -\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\omega_0^2 & -2\omega_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

برای ملاقات در مدار بیضوی ماتریس سیستم متغیر با زمان به صورت (19) استخراج شده است:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\mu}{r^3} + \omega^2 & 0 & \dot{\omega} & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & \frac{-\mu}{r^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\omega} & 0 & \omega^2 + \frac{2\mu}{r^3} & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

#### 4-2- حل به وسیله تشکیل ماتریس همیلتونین

برای حل معادله (16) و استخراج کنترل بهینه  $u$  و حالت‌های  $x$  روش‌های مختلفی وجود دارد. پس از تشکیل و استخراج معادلات ریکاتی وابسته به حالت یکی از روش‌های حل و استخراج جواب تشکیل ماتریس همیلتونین است. بدین صورت ابتدا ماتریس همیلتونین تشکیل داده می‌شود و سپس از روی بردارهای ویژه‌ی متناظر با مقادیر ویژه‌ی با قسمت حقیقی منفی اظهار نظر می‌شود. ماتریس همیلتونین به فرم معادله (20) تشکیل داده می‌شود:

$$HM = \begin{bmatrix} A(x) & -B(x)R^{-1}B^T(x) \\ -Q(x) & -A^T(x) \end{bmatrix} \quad (20)$$

سایز ماتریس همیلتونین  $HM$  برابر با  $2n \times 2n$  است. با این خاصیت مهم که تمام مقادیر ویژه‌ی آن حول محورهای موهومی و حقیقی متقارن هستند. جواب پایدار کننده تنها وقتی موجود است که  $HM$ ،  $n$  مقدار ویژه در نیم صفحه‌ی چپی داشته باشد. از روی این  $n$  مقدار ویژه،  $n$  بردار ویژه‌ی متناظر استخراج می‌شود که از آنها برای استخراج  $P$  در معادله‌ی ریکاتی وابسته به حالت (16) استفاده می‌شود، که مطلوب  $P$  به صورت معادله

استخراج کنترل بهینه فراهم می‌کند. این روش یک کنترل بهینه محلی را بدست می‌دهد که لزوماً بهینه گلوبال نیست. اولین گام در این روش شبه خطی سازی دینامیک سیستم به صورت معادله (11) است:

$$\begin{aligned} f(x) &= A(x)x \\ g(x, u) &= B(x, u)u \end{aligned} \quad (11)$$

این فرآیند شبه خطی سازی با عنوان پارامترسازی ضرایب وابسته به حالت<sup>1</sup> (SDC) شناخته می‌شود، این نوع فاکتورگیری وقتی تعداد حالت بیشتر از یک باشد یکتا نیست. در این پارامتر سازی می‌بایست معادله (12) برقرار باشد:

$$f(0) = 0 \quad (12)$$

این به این معنی است که مرکز نقطه تعادلی برای سیستم است. در صورتی که در مدل دینامیکی سیستم ترم‌های بایاس غیر وابسته به حالت، و یا ترم‌های وابسته به حالت غیر صفر شونده وجود داشته باشد نیز روش‌هایی برای تطبیق ساختاری سیستم با روش ریکاتی وابسته به حالت وجود دارد. همچنین غیرخطی بودن سیستم نسبت به کنترل را نیز می‌توان با تکنیک‌هایی پاسخ داد. با توجه به معادله (11) روش ریکاتی وابسته به حالت با جستجوی کمک حالتی به فرم (13) به نوعی از روش تنظیم کننده مربعی خطی تقلید می‌کند.

$$\lambda(t) = p(x(t), u(t))x(t) \quad (13)$$

همانند تنظیم کننده مربعی خطی لازم است جفت  $A, B$  کنترل پذیر و جفت  $C, A$  مشاهده پذیر باشد. روشی قطعی برای انتخاب این جفت ماتریس‌ها و پارامترسازی‌هایی که کنترل پذیر و مشاهده پذیر باشد وجود ندارد به همین دلیل در دینامیک‌های پیچیده ممکن است پارامترسازی مطلوب به راحتی حاصل نشود. اولین معادله‌ی حداقل سازی به فرم معادله (14) قابل نوشتن است:

$$\begin{aligned} u(t) &= -R^{-1}(B^T(x, u)P(x, u)x - \\ &\sum_{i=1}^k u_i \left( \frac{\partial B_{1 \rightarrow m, i}}{\partial u}(x, u) \right) P(x, u)x) \end{aligned} \quad (14)$$

بر اساس معادلات (13) و (14) معادلات شرط لازم بهینگی، معادله‌های شبیه ریکاتی به فرم معادله (15) بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} P(x, u)A(x) + A^T(x)P(x, u) - \\ P(x, u)B(x, u)R^{-1}B^T(x, u)P(x, u) + Q = \\ \left[ \begin{aligned} &\dot{P}(x, u) + \sum_{i=1}^k x_i \left( \frac{\partial A_{1 \rightarrow m, i}}{\partial x}(x, u) \right)^T P(x, u) \\ &- \sum_{i=1}^k u_i \left( \frac{\partial B_{1 \rightarrow m, i}}{\partial x}(x, u) \right) P(x, u) - \\ &P(x, u)B(x, u)R^{-1} \sum_{i=1}^k u_i \left( \frac{\partial B_{1 \rightarrow m, i}}{\partial u}(x, u) \right) P(x, u) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

با فرض قابل صرف نظر بودن مشتقات SDC معادله (15) به صورت زیادی ساده می‌شود و معادله (16) حاصل می‌شود [24].

$$\begin{aligned} P(x, u)A(x) + A^T(x)P(x, u) - \\ P(x, u)B(x, u)R^{-1}B^T(x, u)P(x, u) + Q = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

بدلیل این فرض جواب استخراج شده شبه بهینه خواهد بود و میزان بهینگی آن به اندازه عددی ترم‌های حذف شده وابسته خواهد شد البته اثبات شده است که این نوع جواب پایدار خواهد بود [24]. معادله‌ی فوق یک معادله‌ی

1. State Dependent Coefficients

(21) استخراج خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$P = XY^{-1}$$

در معادله (21)  $\lambda_x$  ها مقادیر ویژه‌ی ماتریس  $HM$  هستند. بدین صورت با حل سیستم معادلات دینامیکی به صورت معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط اولیه در هر مرحله از حل ماتریس  $HM$  تشکیل داده می‌شود و ماتریس  $P$  و نهایتاً کنترل  $u$  محاسبه می‌شود [25].

### 5- تبیین موقعیت و سرعت در دستگاه اینرسی زمین مرکز

با توجه به شکل (1) می‌توان جهت‌های یکه دستگاه حرکت نسبی را به صورت (22) بیان نمود:

$$\hat{O}_r = \frac{\vec{r}_t}{r_t}, \quad \hat{O} = \hat{O}_h \times \hat{O}_r, \quad \hat{O}_h = \frac{\vec{h}_t}{h} \quad (22)$$

با مفروض داشتن مدار حرکت ماهواره هدف در هر لحظه، موقعیت و سرعت این ماهواره در دستگاه اینرسی قابل استخراج است. سپس با استفاده از رابطه (23) مومنتوم زاویه‌ای این ماهواره نیز استخراج می‌شود:

$$\vec{h}_t = \vec{r}_t \times \vec{v}_t \quad (23)$$

با استفاده از مومنتوم زاویه‌ای و بردار موقعیت و سرعت در دستگاه اینرسی برای ماهواره هدف، با کمک شکل (1) می‌توان بردار موقعیت ماهواره تعقیب کننده در دستگاه اینرسی را به صورت (24) استخراج کرد:

$$\vec{r}_c = \vec{r}_t + \vec{s} = (r_t + z)\hat{O}_r + x\hat{O} + y\hat{O}_h \quad (24)$$

لازم به ذکر است که معادلات حرکت نسبی (1) و (2) و (3) در بخش (2) با مشتق‌گیری از رابطه‌ی (24) و اعمال فرض‌های ساده‌ساز قابل استخراج هستند. همچنین در صورت تمایل می‌توان با استفاده از مشتق‌گیری برای فریم گردان به فرم (25)، سرعت‌های ماهواره تعقیب‌کننده را در دستگاه اینرسی به فرم (26) استخراج کرد:

$$\vec{v}_c = V_{rel} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \vec{r}_c \quad (25)$$

$\vec{v}_c = \vec{v}_t + \vec{s} = (\dot{r}_t + \dot{z} - \omega(r_t + z))\hat{O}_r + (\dot{x} + \omega(r_t + z))\hat{O} + \dot{y}\hat{O}_h$  (26) که در رابطه (25)  $V_{rel}$  مبین مشتق زمانی بردار  $\vec{r}_c$  بدون در نظر گرفتن چرخش ماهواره هدف می‌باشد و ترم دوم مبین چرخش محورها است.

### 6- شبیه‌سازی و نتایج

دو سری شبیه‌سازی صورت گرفته است، ابتدا شبیه‌سازی‌هایی برای ملاقات در مدار دایروی صورت گرفته است که در این حالت از روش تنظیم کننده مربعی خطی برای دینامیک خطی و معادله ریکاتی وابسته به حالت برای دینامیک غیرخطی استفاده شده است. سپس شبیه‌سازی ملاقات با هدف در مدار بیضوی صورت گرفته است، در این حالت پس از نوشتن شروط لازم برای بهینگی، معادله ریکاتی غیروابسته به حالت با ماتریس‌های  $A, B$  متغیر با زمان حاصل می‌شود که این حالت با انتگرال‌گیری عددی از معادله ریکاتی از آخر حل می‌شود.

برای شبیه‌سازی‌های مساله‌ی ملاقات بین دو فضاپیما که کنترل فعال روی فضاپیما رهگیر قرار دارد، جرم فضاپیما رهگیر 100 کیلوگرم در نظر گرفته شده است، فرض شده است که فضاپیما هدف در حالت مدار دایروی 300 کیلومتری نزدیک زمین قرار دارد و در حالت بیضوی در مداری

با ارتفاع اوج و حضیض 1000 کیلومتر و 500 کیلومتر قرار دارد و فضاپیما رهگیر برای ملاقات از مدارات دورتر به سمت هدف مانور می‌دهد. شرایط اولیه، سرعتها و فواصل نسبی برای هر دو حالت به صورت جدول 1 انتخاب شده است، زمان شبیه‌سازی‌های صورت گرفته 20000 ثانیه است. همچنین دقت حل عددی  $10^{-5}$  می‌باشد، برای تابع هزینه ماتریس‌های وزنی به صورت رابطه (22) بیان شده است. ماتریس‌های وزنی بر اساس مصالحه‌ای میان حداکثر سطح تراست مجاز، زمان معمول برای چنین مانورهای ملاقاتی، مسیرهای هموارتر و رسیدن به عملکرد کنترلی مناسب انتخاب شده است:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix} \quad (i-27)$$

$$R = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 \end{bmatrix} \quad (b-27)$$

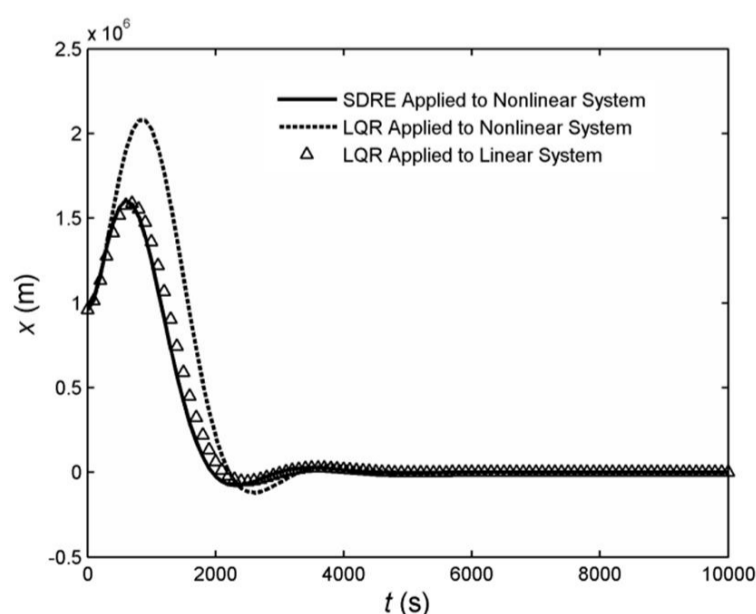
ماتریس‌های وزنی به گونه‌ای انتخاب شدند تا سطح نیروهای کنترلی در محدوده مجاز تراست تولیدی فضاپیماهای عملیاتی مانند سایوز و شاتل باشد. برای مثال سطح حداکثر نیروی کنترلی میانگین 3500 نیوتن توسط سیستم موتور اصلی مانور مداری فضاپیما سایوز و یا سیستم عملیات مداری فضاپیما شاتل قابل تولید است.

#### 6-1- ملاقات در مدار دایروی

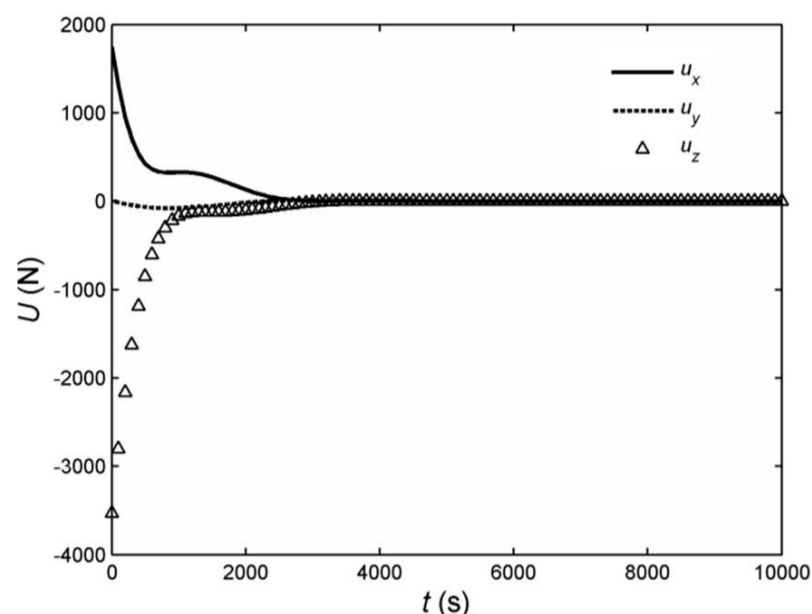
با توجه به اطلاعات مذکور مساله‌ی کنترل بهینه‌ی غیرخطی مد نظر برای مدار دایروی حل شده است و نتایج استخراج شده است. شکل 2 و شکل 3 و شکل 4 تغییرات فواصل نسبی فضاپیما رهگیر نسبت به هدف را به ترتیب در جهت  $x, y, z$  نمایش می‌دهند. در شکل 2 فاصله نسبی  $x$  براساس سه روش در زمان تقریبی 11200 ثانیه به فاصله‌ی 1 متری می‌رسد و پاسخ استقرار می‌یابد و با نوساناتی با دامنه کم شونده به سمت صفر پیش می‌رود. در شکل 3 فاصله نسبی  $y$  برای هر سه روش تقریباً در زمان 13000 ثانیه در فاصله 1 متری استقرار می‌یابد. نهایتاً در شکل 4 این اتفاق در 11100 ثانیه برای هر سه روش صورت می‌پذیرد.

جدول 1 شرایط اولیه

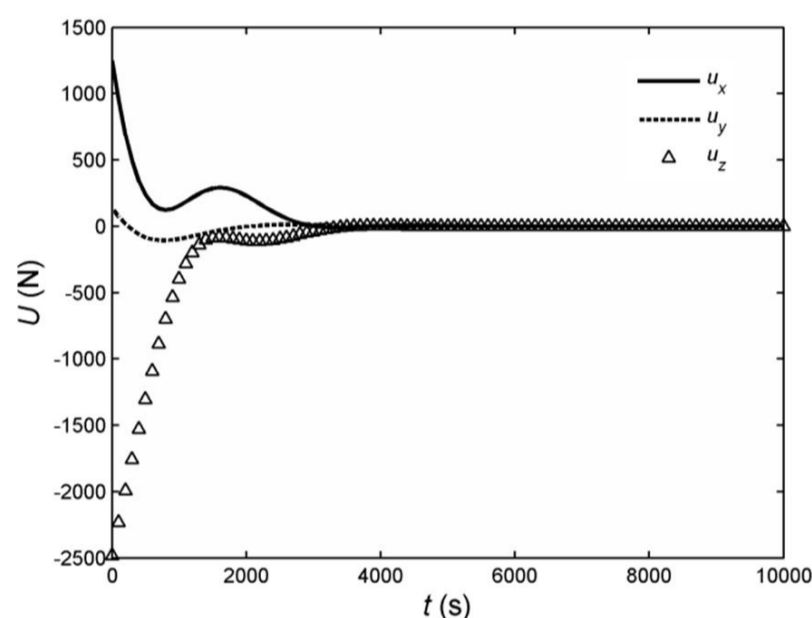
$x_0$ (km)	$y_0$ (km)	$z_0$ (km)	$\dot{x}_0$ (km/s)	$\dot{y}_0$ (km/s)	$\dot{z}_0$ (km/s)
960	-590	3290	0	2/85	0



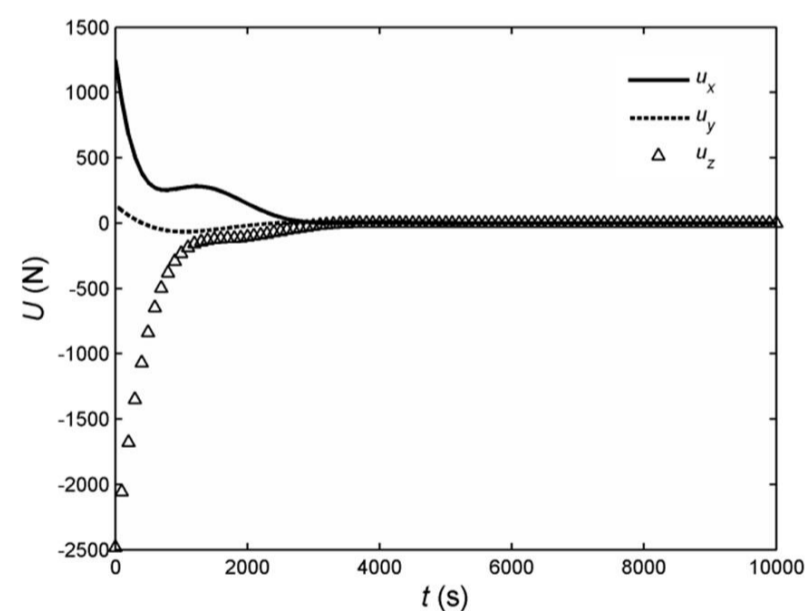
شکل 2 تغییر فاصله نسبی  $x$  با اعمال سه روش



شکل 6 کنترل بهینه اعمال شده با روش معادله ریکاتی وابسته به حالت



شکل 7 کنترل بهینه اعمال شده با روش تنظیم کننده مربعی خطی به سیستم خطی

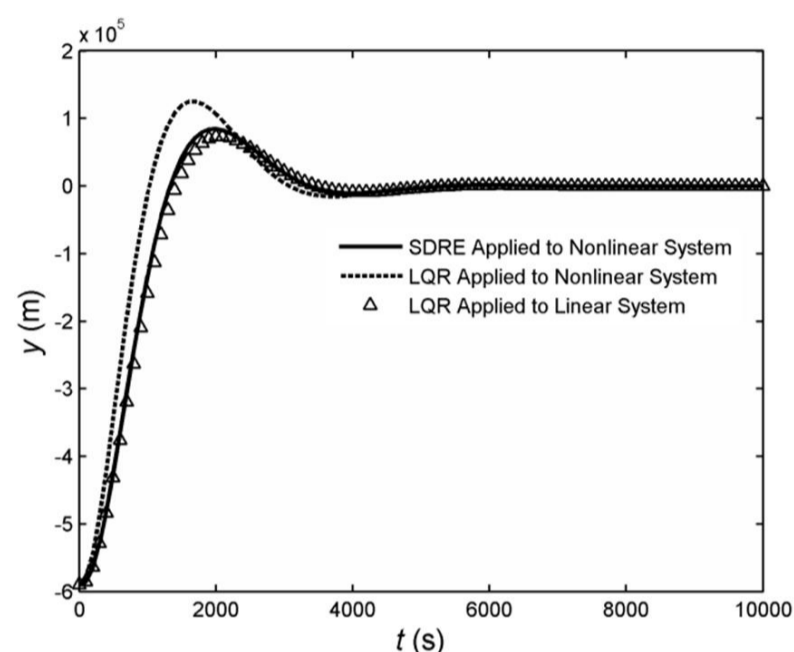


شکل 8 کنترل بهینه اعمال شده با روش تنظیم کننده مربعی خطی به سیستم غیرخطی

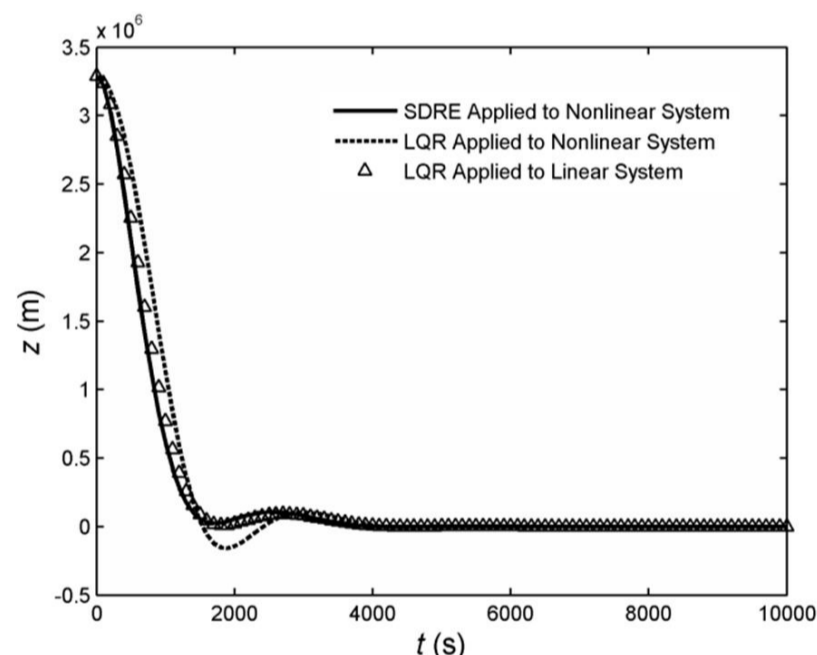
با افزایش فواصل و سرعت‌های نسبی اولیه تنها روش غیرخطی معتبر خواهد بود، چرا که در این حالت اثر ترم‌های غیرخطی زیاد خواهند بود. شکل 6 و شکل 7 و شکل 8 به بیان کنترل بهینه‌ی استخراج شده از طریق سه روش می‌پردازد. بیشترین کنترل مورد نیاز در شکل 6 در روش کنترل غیرخطی دیده می‌شود که مقداری برابر با 3500 نیوتن دارد. بیشترین کنترل مورد نیاز با روش تنظیم کننده مربعی خطی پیاده سازی شده بر روی سیستم غیرخطی در شکل 7 مقداری برابر با 2500 نیوتن دارد. در شکل‌ها شبیه سازی تا 10000 ثانیه برای مدار دایروی و 15000 ثانیه برای مدار بیضوی نمایش داده شده است و نهایتاً بیشترین کنترل مورد نیاز برای روش تنظیم کننده خطی بر روی سیستم خطی سازی شده در شکل 8 برابر با 2500

این مبین این موضوع است که روش غیرخطی و روش خطی اعمال شده بر سیستم خطی و غیرخطی در صورت وجود اثرات غیرخطی ضعیف و عدم قطعیت‌های پایین مشابه هم خواهند بود و به جای یکدیگر قابل استفاده هستند. مخصوصاً در فواصل نزدیک به هدف اثرات غیرخطی خود را کمتر نشان می‌دهند و مدل خطی مناسب است.

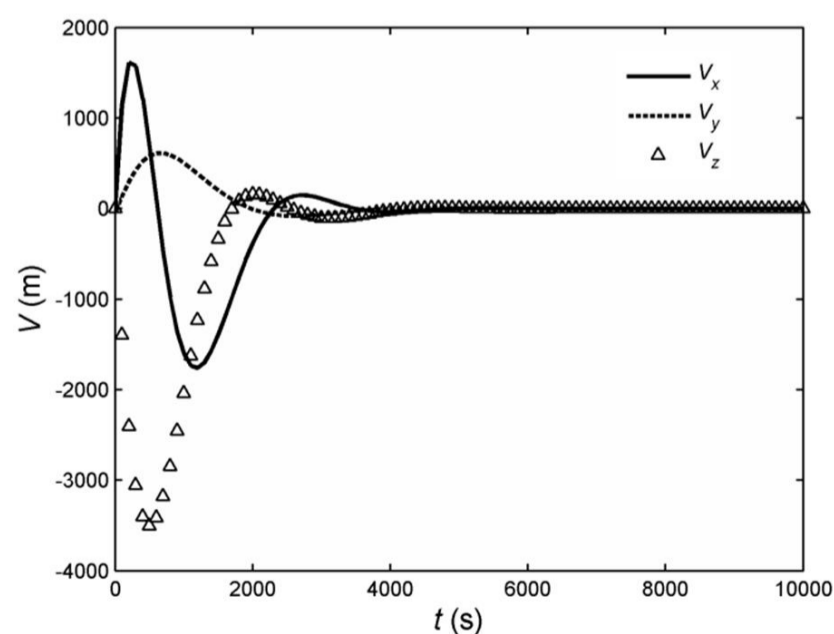
شکل 5 به بیان سرعت‌های نسبی با روش کنترل غیرخطی پرداخته است. در زمان 13000 با روش کنترل غیرخطی ریکاتی وابسته به حالت سرعت‌ها به مقدار نهایی صفر خواهند رسید و امکان اتصال امن فراهم می‌شود.



شکل 3 تغییر فاصله نسبی y با اعمال سه روش



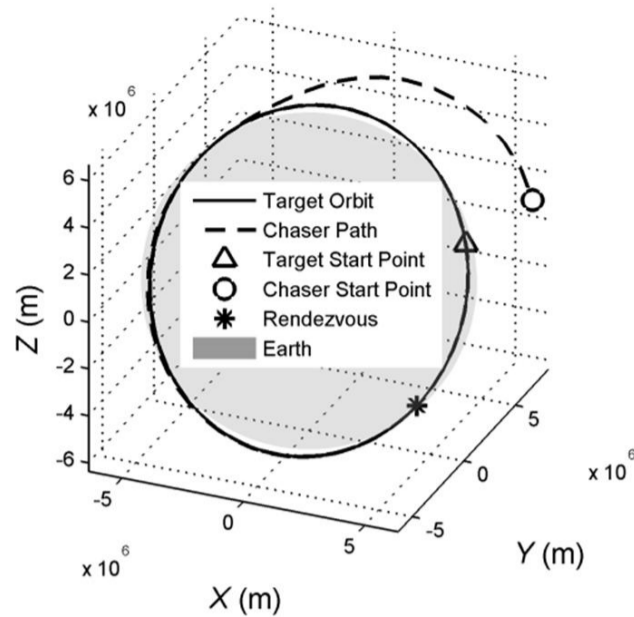
شکل 4 تغییر فاصله نسبی z با اعمال سه روش



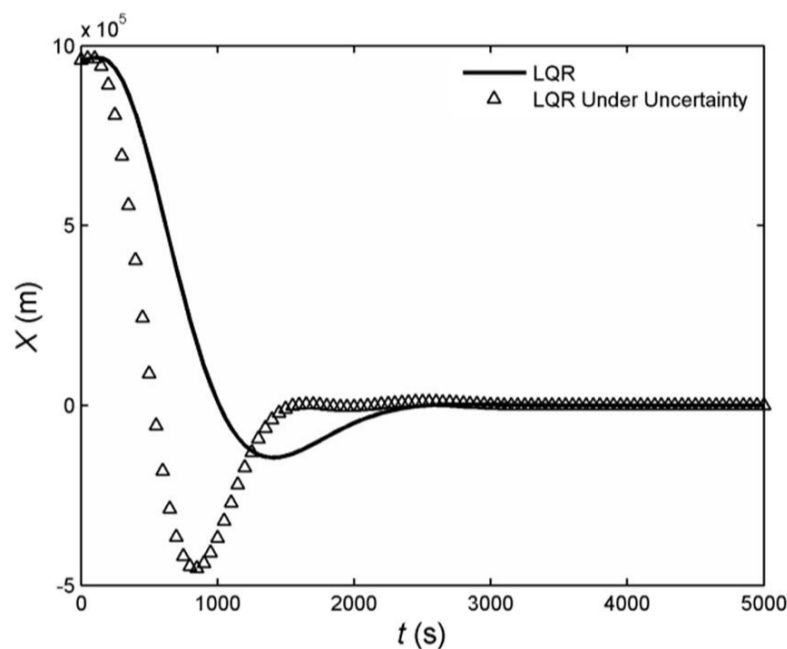
شکل 5 سرعت‌های نسبی با اعمال روش معادله ریکاتی وابسته به حالت

نیوتن است. دیده می‌شود که روش ریکاتی وابسته به حالت به نیروی کنترلی اولیه بیشتری نیاز دارد.

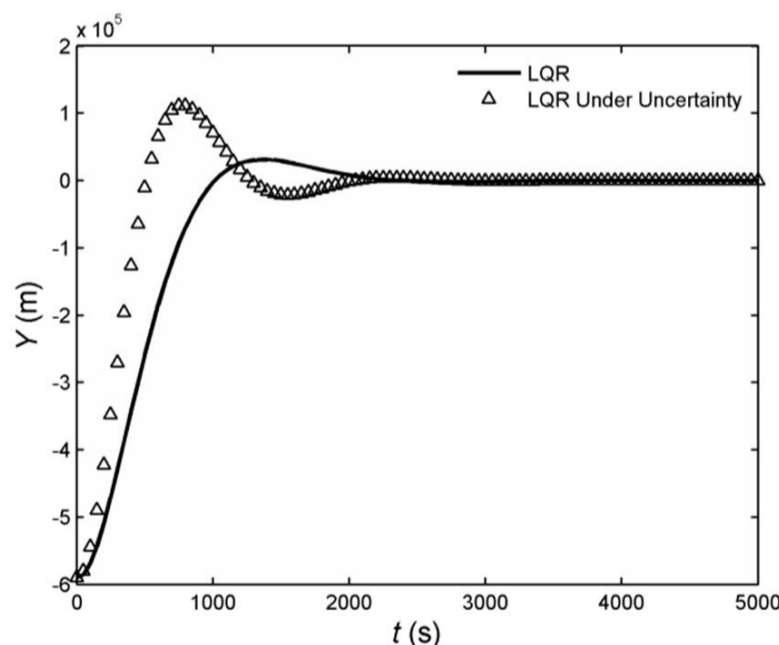
تلاش کنترلی محاسبه شده برای روش غیرخطی 1679 کیلوژول ثانیه، برای روش تنظیم کننده خطی وارد شده به سیستم غیرخطی 1767 کیلوژول ثانیه و برای روش تنظیم کننده مربعی خطی با معالات خطی سازی شده برابر 1401 کیلوژول ثانیه می‌باشد. این اعداد براساس ماتریس‌های وزنی متغییر هستند. با تغییر ماتریس  $R, Q$  می‌توان مقادیر کنترلی در دسترس در فرآیند طراحی را استخراج کرد. در نهایت شکل 9 مسیرهای بهینه‌ی مانور ملاقات را با سه روش نمایش می‌دهد. این شکل در صفحه  $X-Y$  ترسیم شده است. مسیرها اختلافی چند صد کیلومتری تا چند متری باهم دارند. مشاهده می‌شود که مسیر حاصل از کنترل غیرخطی با اختلاف کمی با مسیر کنترل خطی بر سیستم خطی تطبیق پیدا می‌کند. کنترل خطی اعمال شده به سیستم غیرخطی مسیری دور را نمایش می‌دهد. در نقاطی که سرعت‌ها صفر می‌شود این اختلاف بین مسیرها بیشتر خواهد بود. شکل 10 مسیر حرکت دو فضاپیما را بدون اعمال کنترل بر فضاپیما رهگیر نشان می‌دهد، واضح است که بدون اعمال کنترل با شرایط اولیه مذکور فضاپیما رهگیر از زمین دور می‌شود. شکل 11 حرکت دو فضاپیما را نسبت به دستگاه اینرسی با اعمال کنترل نمایش می‌دهد. در صورت اعمال عدم قطعیت به حالت‌های سیستم، عدم قطعیت رندم و تا حداکثر  $\Delta A \leq 0.5A$  می‌توان مقاومت و پایداری کنترل کننده غیرخطی را با کنترل کننده خطی مقایسه کرد. شکل 12، شکل 13 و شکل 14 فواصل نسبی را در بروز عدم قطعیت در حالت سیستم با کنترل خطی نشان می‌دهند.



شکل 11 مسیر حرکت فضاپیما رهگیر و هدف در دستگاه اینرسی

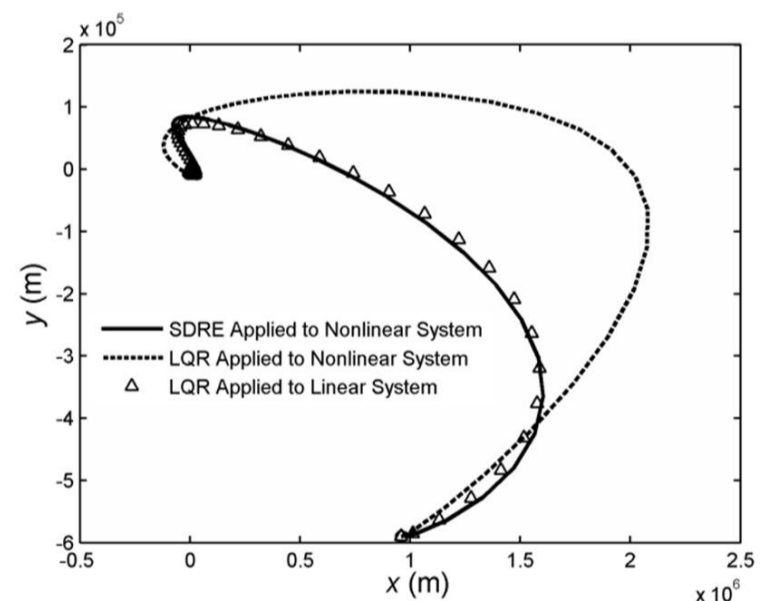


شکل 12 تغییر فاصله نسبی  $X$  در حضور عدم قطعیت در حالت با روش کنترل خطی

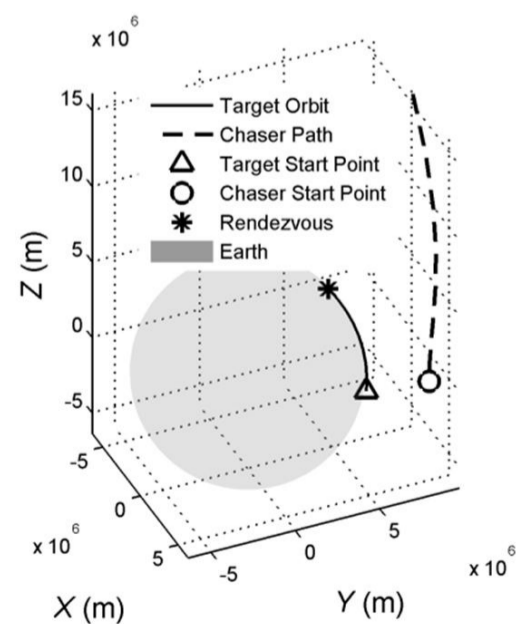


شکل 13 تغییر فاصله نسبی  $Y$  در حضور عدم قطعیت در حالت با روش کنترل خطی

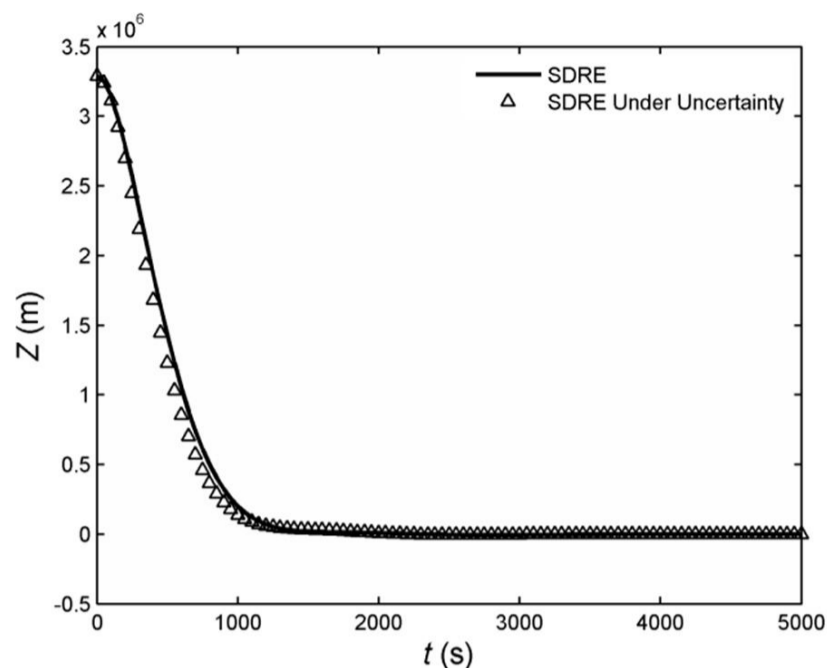
با توجه به سه شکل 12، 13 و 14 مشخص است که در صورت بروز عدم قطعیت در حالت سیستم پاسخ‌ها به کنترل خطی تغییرات زیادی از خود نشان داده‌اند. همچنین مشاهده می‌شود که زمان استقرار روش خطی در حضور عدم قطعیت‌ها نسبت به حالت بدون عدم قطعیت عقب افتاده است شکل 15، 16 و 17 بروز عدم قطعیت در حالت سیستم را با کنترل غیرخطی نمایش می‌دهند. با توجه به بررسی کنترل مشاهده می‌شود که تلاش کنترلی نیز در صورت بروز عدم قطعیت در سیستم خطی به نحو قابل توجهی افزایش پیدا می‌کند. با افزایش عدم قطعیت پاسخ نوسانی تر با فرکانس و دامنه بیشتر خواهد شد. در



شکل 9 مسیر حرکت نسبی ملاقات با استفاده از سه روش در صفحه  $X-Y$



شکل 10 حرکت فضاپیما رهگیر و هدف در دستگاه اینرسی بدون اعمال کنترل



شکل 17 تغییر فاصله نسبی Z در حضور عدم قطعیت با روش کنترل غیرخطی

بدین ترتیب با کمک مکانیک مداری و حل معادله کپلر می‌توان از زمان به آنومالی حقیقی و شعاع مداری در هر لحظه رسید. برای مدار کپلری دلخواه رابطه (28) برقرار است:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \quad (28)$$

که در آن  $p$  ثابت هندسی مدار،  $e$  خروج از مرکزیت،  $\theta$  آنومالی حقیقی و  $r$  شعاع مداری است. سرعت زاویه‌ای مدار به صورت (29) تعریف می‌شود:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{r^3}} \quad (29)$$

با مشتق‌گیری از (28) و (29) بدست می‌آید:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{2} r^{-5/2} \sqrt{\mu} \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{pe \sin(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2} \quad (30)$$

با داشتن زمان از حوض در مدار  $t$  می‌توان آنومالی متوسط  $M$  را به صورت (31) بدست آورد:

$$M = nt \quad (31)$$

که در آن  $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$  است. با استفاده از معادله کپلر (32) می‌توان آنومالی استریک  $E$  را استخراج نمود:

$$M = E - e \sin(E) \quad (32)$$

که معادله (32) می‌بایست با روشی عددی در هر لحظه از زمان حل شود، با استخراج  $E$  می‌توان با کمک رابطه (33) آنومالی حقیقی را استخراج نمود:

$$\tan\left(\frac{E}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (33)$$

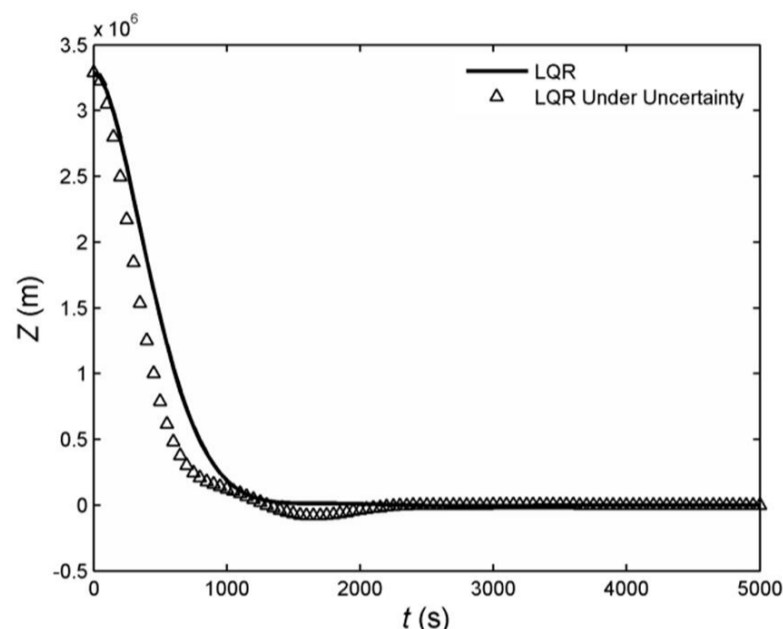
با استخراج  $\theta$  می‌توان در هر لحظه  $r, \omega, \dot{\omega}$  لازم در ماتریس (19) را استخراج نمود که برای حل مساله تنظیم کننده مربعی خطی متغیر با زمان نیاز هستند. در ادامه به نتایج حاصل از شبیه سازی پرداخته می‌شود. برای انجام شبیه‌سازی‌ها شرایط اولیه جدول 1 و ماتریس‌های وزنی (22) در نظر گرفته شده است.

شکل 18 موقعیت‌های نسبی را تحت اعمال کنترل بهینه خطی نمایش می‌دهد که در حدود 12000 ثانیه کنترل موقعیت‌های نسبی را به مقدار مطلوب می‌رساند. با توجه به شکل و پیش‌بینی راجع به جواب، جواب‌ها هموار و پایدار هستند. شکل 19 کنترل‌های بهینه اعمال شده توسط سه تراستر را

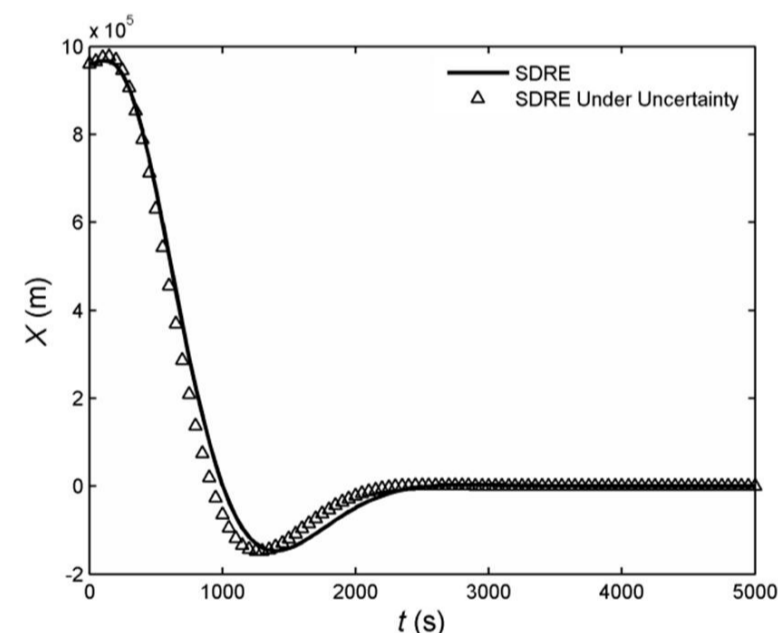
صورتی که پاسخ با اعمال کنترل کننده غیرخطی به دلیل تشخیص مرحله به مرحله حالت و اعمال آن در کنترل کننده به صورت آنالین چنین تغییراتی نخواهد داشت. به دلیل دینامیک مساله این عدم قطعیت‌ها باعث واگرایی نمی‌شوند ولی جواب خطی را از حالت بهینه خارج می‌کنند؛ چرا که کنترل به صورت آنالین بر سیستم اعمال می‌شود و قدرت تنظیم عدم قطعیت‌ها را ندارد.

## 2-6- ملاقات در مدار بیضوی

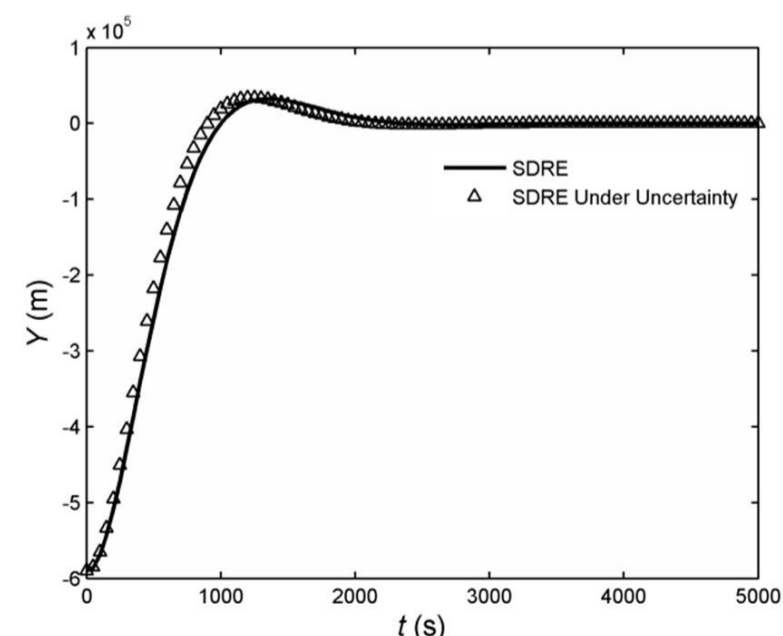
برای شبیه‌سازی ملاقات در مدار بیضوی همان گونه که در معادلات (3) دیده می‌شود، می‌بایست سرعت‌های زاویه‌ای و مشتق آن در هر لحظه از زمان محاسبه شود.



شکل 14 تغییر فاصله نسبی Z در حضور عدم قطعیت در حالت با روش کنترل خطی

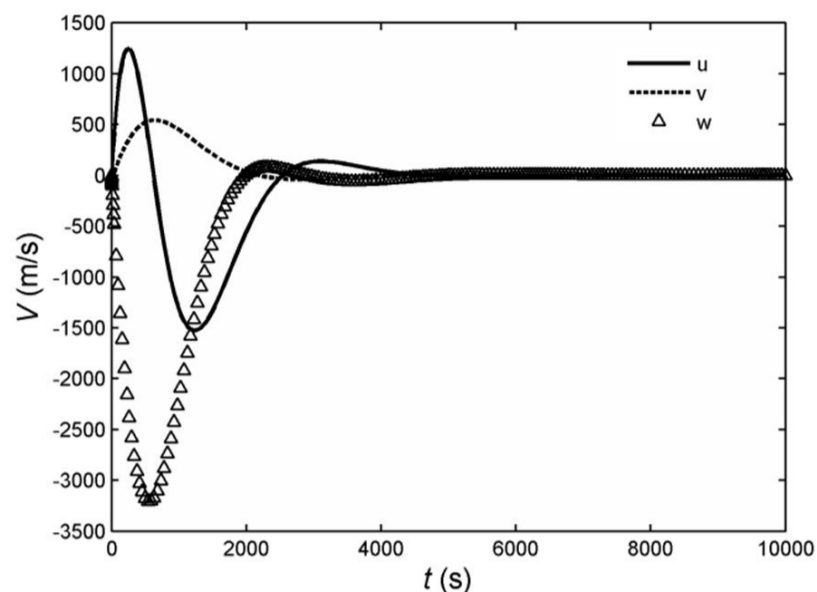


شکل 15 تغییر فاصله نسبی X در حضور عدم قطعیت با روش کنترل غیرخطی

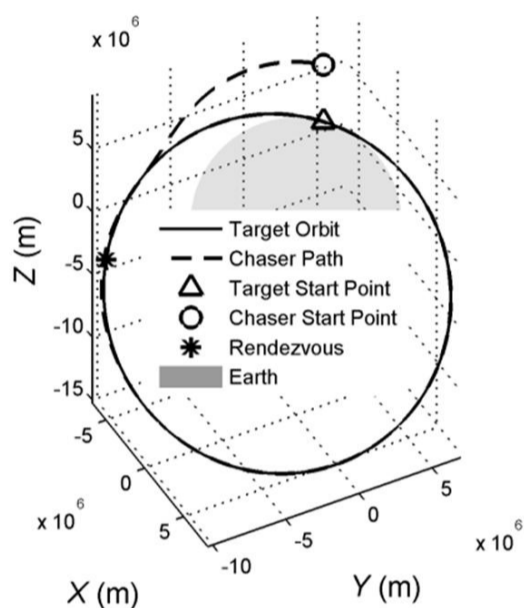


شکل 16 تغییر فاصله نسبی Y در حضور عدم قطعیت با روش کنترل غیرخطی





شکل 21 تغییر سرعت‌های نسبی فضایی رهگیر نسبت به هدف



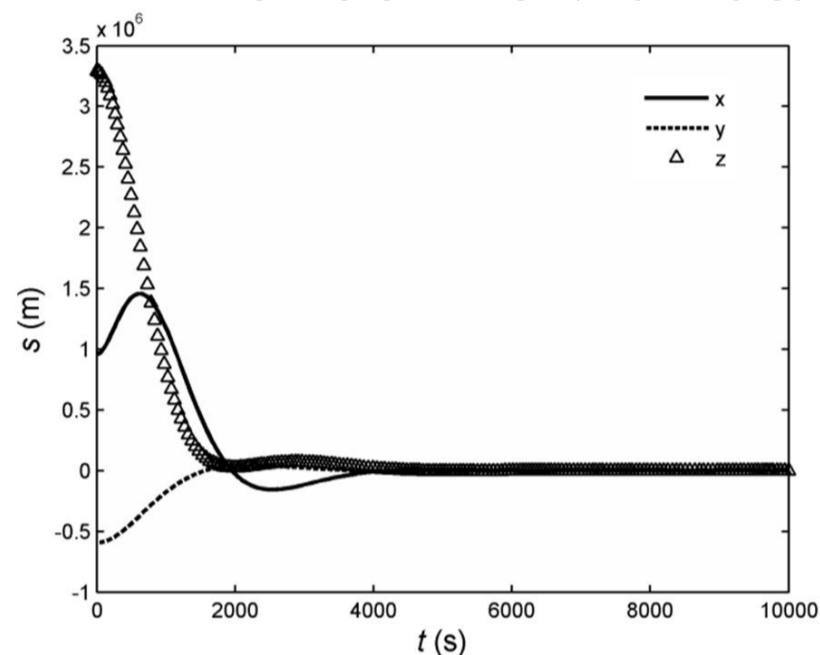
شکل 22 مسیر حرکت فضایی رهگیر و هدف در دستگاه اینرسی

شکل 22 موقعیت دو فضاپیما را در طول مانور ملاقات مداری در دستگاه اینرسی زمین مرکز-زمین ثابت نمایش می‌دهد. فضاپیما مدار خود را به هدف می‌رساند و با رهگیری مدار هدف به نوعی سعی در صفر کردن فواصل و سرعت‌های نسبی خواهد داشت. مدار مربوط به رهگیر یک مدار کپلری نیست چرا که با اعمال کنترل و با سرعتی متفاوت از هدف در آن حرکت می‌کند.

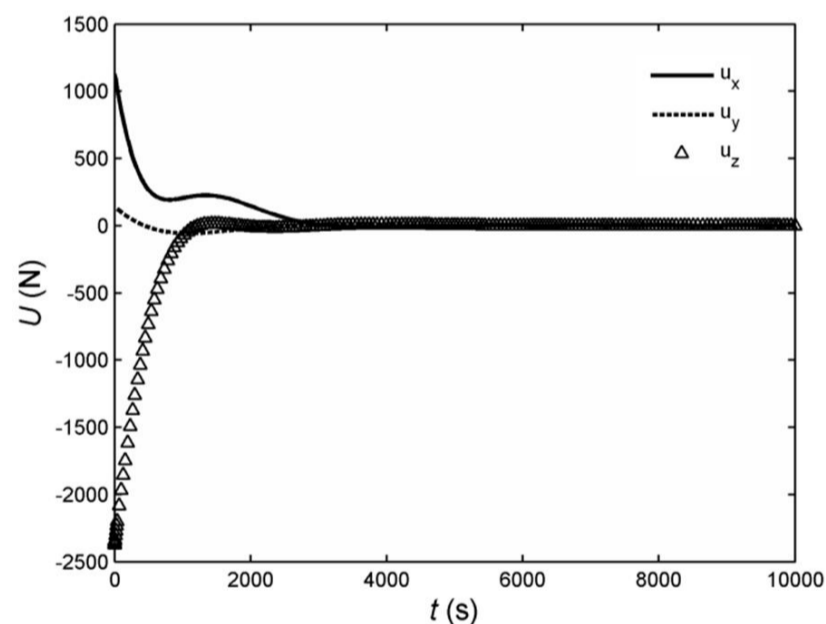
### 7- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در حل مساله ملاقات برای هدفی در مدار دایروی مشاهده شد که روش کنترل غیرخطی مانند ریکاتی وابسته به حالت برای سیستم خطی و غیرخطی جواب‌ها را به مقادیر مطلوب که در واقع همان سرعت نسبی و فاصله نسبی صفر است رسانده است. جوابها پایدار و بدون خطای ماندگار و از حد خارج شدن هستند. با توجه به نزدیکی سه روش به یکدیگر می‌توان ادعا کرد که هر سه روش معتبر هستند، لیکن اثر ترم‌های غیرخطی با شرایط اولیه کمی کمتر است. با توجه به نتایج در صورت کاهش حالت‌های اولیه، یعنی کاهش فاصله و سرعت‌های نسبی اولیه جواب سه روش کنترل تنظیم کننده مربعی خطی و ریکاتی وابسته به حالت اعمال شده بر معادلات سیستم غیر خطی و روش تنظیم کننده مربعی خطی اعمال شده بر سیستم معادلات خطی یکی می‌گردد. مانور ملاقات مانور دقیقی است و بنابراین نیازمند استخراج حالت‌ها و کنترلی دقیق مبتنی بر دینامیک غیرخطی سیستم می‌باشد. در فواصل زیاد می‌بایست دینامیک غیرخطی برای سیستم در نظر گرفته شود؛ بنابراین لازم است کنترل غیرخطی بر سیستم اعمال شود. پاسخ‌های بهینه تحت کنترل خطی نسبت به واقعیت خطایی تا 5 درصد دارند که این باعث به وجود آمدن خطراتی در ملاقات می‌شود، در واقع امکان

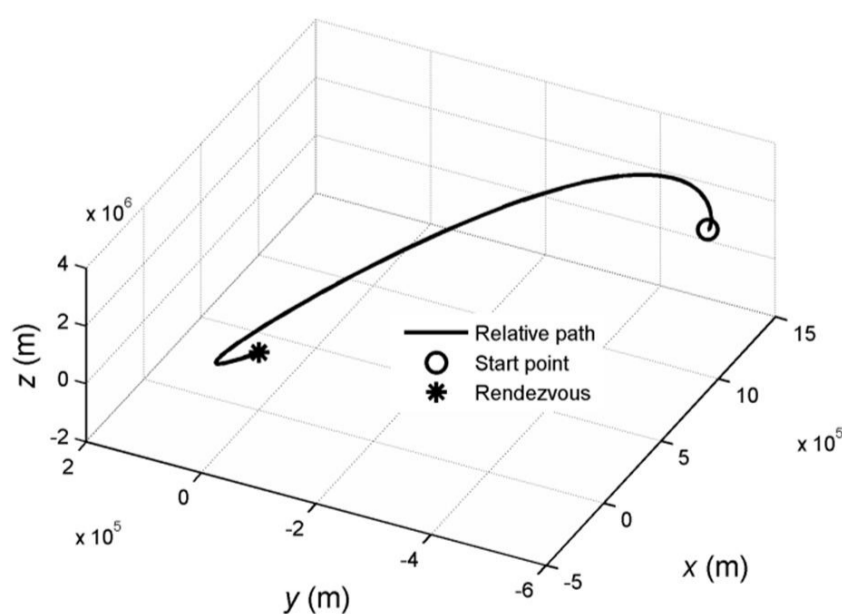
نمایش می‌دهد، برای این شکل تلاش کنترلی استخراج شده 11665 کیلوژول ثانیه می‌باشد؛ همچنین حداکثر نیروی کنترل 2380 نیوتن است. شکل 20 مسیر مانور بهینه ملاقات نسبت به هدف را نمایش می‌دهد، در این شکل مانند شکل 9 در انتهای مسیر تغییر جهتی در هر سه محور مشاهده می‌شود. این تغییر جهت در انتهای مسیر چند بار تکرار می‌شود تا تقرب تا فاصله یک متری صورت پذیرد. در شکل 21 سرعت‌های نسبی تقرب نمایش داده شده است، لازم به ذکر است که در انتهای مسیر سرعت‌ها تا صفر شدن نوسان خواهند داشت. با استخراج موقعیت‌ها در دستگاه اینرسی می‌توان موقعیت دو فضاپیما را نسبت به زمین نمایش داد.



شکل 18 تغییر فاصله نسبی با اعمال روش تنظیم کننده مربعی خطی زمان متغیر



شکل 19 کنترل بهینه اعمال شده با روش تنظیم کننده مربعی خطی متغیر با زمان



شکل 20 تغییر سرعت‌های نسبی فضایی رهگیر نسبت به هدف

معیار عملکرد یا تابع هزینه	$J$
آنومالی متوسط	$M$
جرم فضایی هدف	$m$
حرکت متوسط	$n$
بردار یکه دستگاه حرکت نسبی	$\hat{O}$
ثابت هندسی مدار	$\rho$
ضریب تعریف شده برای کمک حالت	$p(x(t), u(t))$
ماتریس وزنی حالت سیستم	$Q$
ماتریس وزنی کنترل سیستم	$R$
بردار شعاعی	$r$
شعاع زمین	$R_0$
بردار حرکت نسبی	$s$
دوره تناوب مدار	$T$
بردار کنترل سیستم	$u(t)$
سرعت‌های نسبی	$u, v, w$
سرعت نسبی	$v$
بردار حالت سیستم	$x(t)$
فواصل نسبی	$x, y, z$
زیر ماتریس‌های متناظر با مقادیر ویژه ماتریس همیلتونین	$X, Y$

## علائم یونانی

آنومالی حقیقی	$\theta$
مقادیر ویژه ماتریس همیلتونین	$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
پارامتر استاندارد جاذبه	$\mu$
سرعت زاویه‌ای مدار دایروی	$\omega_0$
سرعت زاویه‌ای مدار	$\omega$

## زیر نویس‌ها

ماهواره تعقیب کننده	$c$
در جهت مومنتوم زاویه ای مدار	$h$
ماهواره هدف	$t$
نسبی	$rel$
در جهت فواصل نسبی	$x, y, z$

## 9- مراجع

- [1] B. Aldrin, *Line-of-sight guidance techniques for manned orbital rendezvous*, PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Boston, pp. 1-20, 1963.
- [2] S.B. Louis, P. H. Jonathan, Safe Trajectories for Autonomous Rendezvous of Spacecraft, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 31, No. 5, pp. 1478-1489, 2008.
- [3] J. Michael, K. Chudej, J. Pannek, Modelling and Optimal Control of a Docking Maneuver with an Uncontrolled Satellite, *Proceedings of The 7th Vienna International Conference on Mathematical Modelling*, Vienna University of Technology, Vienna, Austria, February 14-17, 2012.
- [4] J. M. Phillips, L. E. Kavraki, N. Bedrossian, Spacecraft rendezvous and docking with real-time, randomized optimization, *In AIAA Guidance, Navigation, and Control conference*, Austin, USA, August 11-14 2003.
- [5] W. Lu, Y. H. Geng, X. Q. Chen, F. Zhang, Relative position and attitude coupled control for autonomous docking with a tumbling target, *International Journal of Control and Automation*, Vol. 4, No. 4, pp. 1-22, 2011.
- [6] C. Andrade, R. Ramirez-Mendoza, M. Giacomani-Zarzar, R. Morales, A. Fejzic, A. Saenz-Otero, D. W. Miller, Robust Control Applied Towards Rendezvous and Docking, *ECC*, Budapest, Hungary, August 23-26, 2009.

اصابت با هدف و یا رد کردن آن وجود دارد. به همین دلیل استفاده از کنترل بهینه غیرخطی توصیه می‌شود. همچنین در صورت بروز عدم قطعیت‌ها در حالت سیستم کنترل غیرخطی از خود مقاومت نشان می‌دهد. در صورتی که کنترل خطی از کارآمدی لازم برخوردار نخواهد بود. با توجه به اشکال مشاهده میشود تلاش کنترلی روش ریکاتی وابسته به حالت از روش تنظیم کننده مربعی خطی برای معادلات غیرخطی بیشتر است و این به دلیل این واقعیت است که ترم‌های غیرخطی در دینامیک سیستم باعث افزایش تلاش می‌شوند. همچنین از آن جا که روش دیگر تنظیم کننده مربعی خطی با معادلات خطی‌سازی شده بوده است، که در آن از ترم‌های غیرخطی صرف نظر شده است، تلاش کنترلی آن از بقیه کمتر است. این روش برای فواصل و سرعت‌های نسبی زیاد مناسب نیست و جوابهای غلط ارائه می‌دهد. در صورتی که روش ریکاتی وابسته به حالت خلاف این موضوع را نشان میدهد. در صورت افزایش شرایط اولیه مشاهده خواهد شد که جواب‌های سه روش اختلاف بیشتری پیدا می‌کنند. در صورت اعمال عدم قطعیت به پارامترها، جواب‌ها در روش ریکاتی وابسته به حالت تا حدی مقاوم خواهد بود، در صورتی که تنظیم کننده مربعی خطی با وجود رسیدن به حالت‌های مطلوب فراجاهش و زمان استقرار زیادتری داشت. با توجه به نتایج مشاهده می‌شود که هر سه روش جواب‌های همواری را ارائه داده‌اند و این به دلیل شکل تابع هزینه می‌باشد. بدین صورت می‌توان جمع بندی کرد که حسن روش ریکاتی وابسته به حالت هموار بودن جواب‌ها، مقاومت به تغییر حالت‌ها، جوابگویی برای شرایط اولیه‌ی حالت‌های بزرگ و مقاومت نسبی به عدم قطعیت‌های دینامیک سیستم می‌باشد. برای حل ملاقات با هدف در مدار بیضوی در هر لحظه معادله کپلر حل شده است تا دینامیک معتبری از سیستم ارائه دهد، در این دینامیک متغیر با زمان و خطی روش تنظیم کننده مربعی به کار گرفته شد و مشاهده شد که نتایج مطلوبی استخراج می‌شود. این مساله به طور مستقل تا کنون مورد حل و تحلیل قرار نگرفته بود. در هر دو حالت تقرب به حالتی اسپیرال صورت می‌پذیرد که این به خاطر شرایط اولیه و دینامیک سیستم است. بسته به شرایط اولیه بدون اعمال کنترل دو وسیله می‌توانند نسبت به هم آرایش مختلفی داشته باشند، مسیر نسبی بسته داشته باشند و یا از هم دور شوند. با تغییر ماتریس‌های وزنی جواب‌های متفاوتی قابل استخراج است. موضوع ملاقات و اتصال فضایی از به روز ترین مسائل هوافضایی است، در این راستا لازم است به بعضی زمینه‌های تحقیقات آینده در این حیطه اشاره کرد. بررسی اثرات کوپل کننده معادلات موقعیت و وضعیت نسبی، لحاظ کردن اثرات اغتشاش مداری در مانورهای ملاقات و اتصال و یا استفاده از میدان مغناطیسی زمین، پسای آیرودینامیک و یا فشار خورشیدی به عنوان نیروی کنترلی در این فرآیند از موضوعات مورد توجه تحقیقاتی در این زمینه می‌باشند.

## 8- فهرست علائم

ماتریس ضریب حالت سیستم	$A$
ماتریس ضریب کنترل سیستم	$B$
شتاب‌های نسبی	$a_x, a_y, a_z$
آنومالی اسنتریک مدار	$E$
خروج از مرکزیت مدار	$e$
همیلتونین	$H$
ماتریس همیلتونین	$HM$
مومنتوم زاویه‌ای مدار	$h$

- [16] M. Navabi, M. Barati, Dynamic Modelling of Spacecraft Formation Flying and Anylisis of Models Accuracy under rilative Distance, eccentricity and Earth obliquity perturbation, *Journal of Space Science and Technology*, Vol. 5, No. 1, pp. 51-59, 1391 (in Persian)
- [17] H. Pourtakdoust, R. Kamyar, Optimal Solution to Spacecraft Coupled Rendezvous and Docking with Gaussian Pseduspectral and Step by Step Linearization, *Journal of Space Science and Technology*, Vol. 2, No. 4, pp. 1-16, 1388 (in Persian)
- [18] W. R. Silva, L. Zanardi, Rendezvous Manuevers with Final Approach by R-bar to Target Satellite in LEO Orbit, *IV Workshop em Engenharia e tecnologia Espaciais*, Jose dos Campus, Brazi, Nomvember 5-8, 2012.
- [19] Y. Luo, J. Zhang, G. Tang, Survey of orbital dynamics and control of space rendezvous, *Chinese Journal of Aeronautics*, Vol. 27, No. 1, pp. 1-11, 2014.
- [20] H. S. London, Second approximation to the solution of the rendezvous equations, *AIAA Journal*, Vol.1, No.7, 1963, pp. 1691-1693, 1963.
- [21] J. Tschaune, P. Hempel, Rendezvous zu einem in elliptischer Bahn umlaufenden Ziel, *Astronautica Acta*, Vol. 11, No. 2, pp.,104, 1965.
- [22] Y. Koji, F. Ankersen, F, New state transition matrix for relative motion on an arbitrary elliptical orbit, *Journal of guidance, control, and dynamics*, Vol. 25, No. 1, pp, 60-66, 2002.
- [23] D. E. Kirk, *Optimal control theory: an introduction*, 3rd Ed, Courier Dover Publications, pp.209-226,2012.
- [24] S. C. Beeler, D. E. Cox, *State-dependent Riccati equation regulation of systems with state and control nonlinearities*, Nasa Technical Report, 2004.
- [25] D. K. Parrish, *Applications of Nonlinear Control Using the State-Dependent Riccati Equation*, PhD Thesis, air force inst of tech wright-patterson afb oh school of engineering, Ohio, 1995.
- [7] C. Andrade, *Robust Control Applied to Consistent Rendezvous and Docking*, Bs Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Boston, pp. 23-25, 2008.
- [8] G. Ortega, J. M. Giron-Sierra, Genetic algorithms for fuzzy control of automatic docking with a space station, *In Evolutionary Computation, IEEE International Conference*, Perth, Australia, Vol. 1, pp. 157, Nov 29, 1995.
- [9] C. Tournes, Y. Shtessel, D. Foreman, Automatic Space Rendezvous and Docking using Second Order Sliding Mode Control, *Intech Open Access Publisher*, pp. 307-330, 2011.
- [10] M. Xin, H. Pan, Indirect robust control of spacecraft via theta-D optimal control solution, *AIAA Journal*, Vol. 4, No. 35, pp. 20-22, 2010.
- [11] Y. Crispin, D. Seo, Rendezvous between Two Active Spacecraft with Continuous Low Thrust, *Advances in Spacecraft Technologies*, Dr Jason Hall (Ed.), InTech, pp. 585, 2011.
- [12] G. Xiangyu, L. T. Kok, D. Guangren, an optimal control approach to robust control of nonlinear spacecraft rendezvous system with theta-d technique, *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 9, No. 5, pp. 200-210, 2013.
- [13] G. Xiangyu, Y. Wei, L. Hao, An optimal control approach to robust control of spacecraft rendezvous system on elliptical orbit, *Control Conference (CCC)*, Chinese, IEEE, Vol. 31, pp. 2321- 2325, 2012.
- [14] R. Bevilacqua, *Optimization Techniques for Satellites Proximity Maneuvers*, PhD Thesis, Sapienza, Rome, 2006.
- [15] C. Vallet, M. Saponara, V. Barrena, A. Bemporad, E. N. Hartley, E.N., J. M. Maciejowski, A. Richards, A. Tramutola, P. Trodden, D. Choukroun, C. Philippe, G. Balas, A. Nebylov, O. Yanova, Model predictive control application to spacecraft rendezvous in mars sample return scenario, *Progress in Flight Dynamics, Guidance, Navigation, Control, Fault Detection, and Avionics*, EDP Sciences, Vol. 6, No. 11 pp. 137-158, 2013.